

## Reto 3

Lida K. Guerrero L.  
Juan M. Duarte L.  
Jose Arias  
Santiago A. Diaz D.  
Camilo Cruz  
Pontificia Universidad Javeriana

Junio 2021

### 1. Modelos epidemiológicos SI

En el modelo Susceptibles-Infectados, se trabaja unicamente con los valores estimados de estas dos variables y la sumatoria total de estos datos da la cantidad de la población de estudio. El modelo será aplicado a la información del ébola durante el 2014 al país de Sierra Leona ubicado en África occidental.

#### 1.1. Ecuaciones:

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\frac{dI(t)}{dt}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t)$$

$$n = S(t) + I(t)$$

#### 1.2. Variables:

$S(t)$ : Número de individuos susceptibles con respecto al tiempo.

$I(t)$ : Número de individuos infectados con respecto al tiempo.

$n$ : Población total.

$t$  = Número de días

$\beta$  : Tasa de infección.

### 1.3. Implemetación

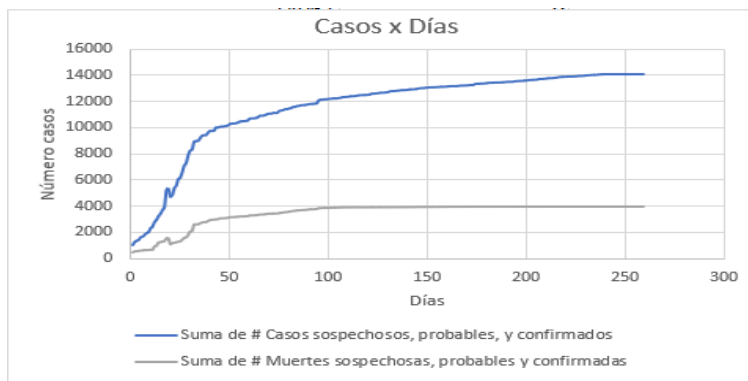
Para poder simular los datos mediante el método SI, se hizo uso del código dado por la profesora, donde se hace uso de funciones propias y de la librería "desolve", la cual su funcionamiento se explica posteriormente. En el primer caso, se eligieron los datos de la tabla 1 para modelar la información del ébola en Sierra Leona, tomando la cantidad de personas infectadas inicial a partir de los casos sospechosos del primer día registrado y a la población susceptible como la población final infectada menos los infectados iniciales. En los siguientes

Variable	Valor
$I(0)$	1026
$\beta$	0.005
$S(0)$	13196
t	250

Cuadro 1: Resultados.

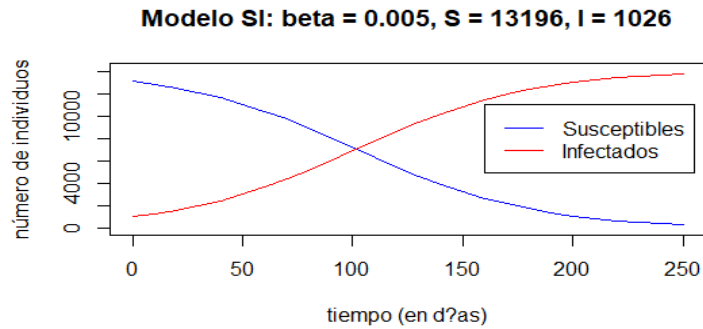
casos, para poder hacer un análisis con datos diferentes se cambió el parámetro de la tasa de infección de 0.005 a 0.008, mientras que las otras tres variables se mantuvieron constantes.

### 1.4. Resultados

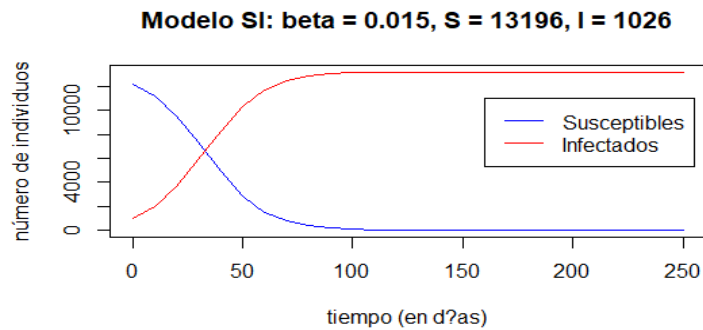
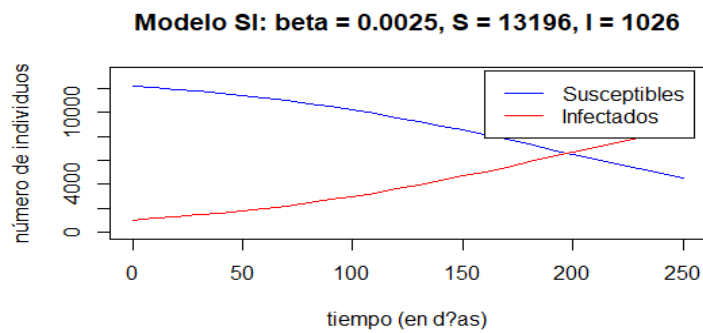


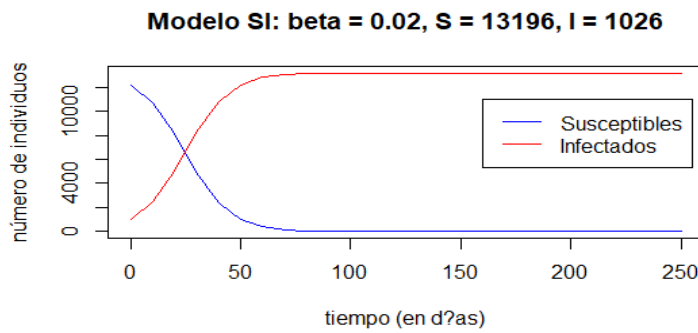
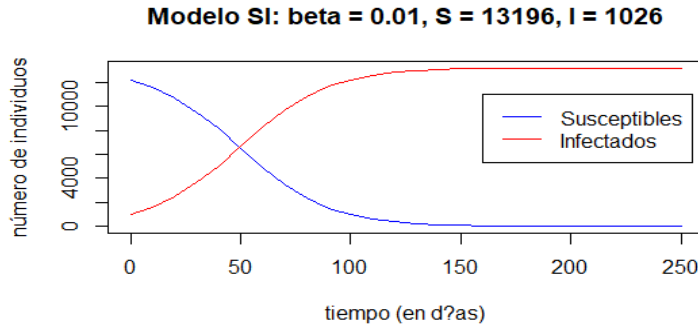
En el gráfico se muestra como aumentaron exactamente la cantidad total de número de casos sospechosos y la cantidad de muertes sospechosas con respecto a un periodo de días, el cual variaba entre uno hasta incluso cinco días, donde se puede ver el aumento progresivo de ambas variables hasta el punto donde las curvas se aplanan.

A raíz de los datos anteriores y del uso del modelo SI para el primer caso, se obtuvo el siguiente diagrama, en el cual se contempla la simulación de las curvas de las personas tanto infectadas como susceptibles, donde la sumatoria en todas las zonas da cumplimiento a la tercera ecuación.



Los siguientes gráficos muestran como cambió el modelo a partir de la modificación de la tasa de infección con los siguientes valores 0.0025, 0.01, 0.015 y 0.02, respectivamente.





A partir de los cinco casos de estudio, se puede ver como entre mayor es la tasa de infección, el tiempo en que toda la población susceptible se infecta se reduce y en el caso de que la tasa sea menor, ocurre lo contrario, es decir, se necesita un mayor periodo para que las personas se enfermen.

### 1.5. Comparación:

Realizando una comparación entre todas las simulaciones y el valor exacto, se tendrían los datos ubicados en la siguiente tabla, la cual esta ordenada por el resultado esperado y el estimado a partir de la variación de la tasa. Debido a la

Valor/Periodo	50	100	150	200
Valor Exacto	10306	12223	13083	13638
Tasa 0.0025	1796	3000	4681	6686
Tasa 0.0050	3000	6686	10318	12219
Tasa 0.0100	6686	12219	13110	13189
Tasa 0.0150	10318	13110	13194	13196
Tasa 0.0200	12219	13189	13195	13196

Cuadro 2: Resultados infectados por tasas.

tabla anterior, una posible conclusión es que el aumento de las infecciones del ébola tiene una tasa ubicada entre la tercera y la cuarta fila, ya que los valores exactos se encuentran entre este intervalo, sobre todo, cerca a la tasa mayor. Sin embargo, el crecimiento de esta última tasa difiere en algunos valores, ya que no todas las columnas tienden a una misma diferencia como en el caso de la primera y cuarta, donde son datos menores, mientras que en las otras dos, los datos son superiores.

Con el fin de poder analizar los datos del cuadro anterior de una mejor forma, en la siguiente tabla se muestra el promedio de error, tanto el relativo como el absoluto, de los datos según la tasa con respecto de los valores exactos.

Tasa	Error Absoluto	Error Relativo
Valor Exacto	0	0
Tasa 0.0025	8272	0.683
Tasa 0.0050	4257	0.369
Tasa 0.0100	1846	0.170
Tasa 0.0150	0142	0.013
Tasa 0.0200	0637	0.060

Cuadro 3: Errores por valor de tasas.

	50	100	150	200
Valor exacto	0,000	0,000	0,000	0,000
Tasa 0,0025	1,000	0,914	0,778	0,617
Tasa 0,0050	1,000	0,639	0,298	0,147
Tasa 0,0080	1,000	0,001	-0,006	0,094
Tasa 0,0100	1,000	62,32	7,287	-27,83
Tasa 0,0200	1,000	0,426	0,046	-0,175

Cuadro: Estabilidad del método numérico.

Finalmente, en la tabla anterior se puede ver la estabilidad del método en cada uno de los datos tomados a partir de los errores absolutos calculados anteriormente, por lo que en los valores exactos, su valor siempre es cero. Además, en casi todas las ocasiones la estabilidad tiende a ser menor entre mayor sea el número de días, sin embargo, en los valores con el menor error, los datos de esta última tabla no siguen este mismo orden.

## 2. Modelos epidemiológicos SIR

En este modelo se clasifica a la población en 3 grupos. Susceptibles (S=susceptible), infectados (I=infected) y recuperados (R=recovered), es por eso que tiene su nombre SIR. Cada miembro de la población pertenece únicamente a uno de los tres grupos en un momento dado. Es posible pasar de un grupo a otro, pero solo siguiendo una regla: S-I-R. Es decir, de S solo puede pasar a I, de I solo se puede pasar a R. Según este modelo, después de recuperarse no es posible volver

al grupo S, debido a que se genera una inmunidad. Si alguien de la población muere, se mantiene en el grupo R, esto genera que la población sea constante.[1]

## 2.1. Ecuaciones:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI$$

$$\frac{dI}{dt} = +\beta SI - \gamma I$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I$$

## 2.2. Variables:

N : Numero de personas en una población  
 S(t) : personas susceptibles a enfermarse  
 I(t) : Personas infectadas  
 R(t) : Personas recuperadas con inmunidad  
 Beta : Tasa de transmisión  
 Gama : Tasa de recuperación

## 2.3. Implementación

Se toma como estudio la epidemia de ébola en el continente africano en el año 2014, para ser más preciso el país de Sierra Leona en el mes de noviembre del año 2014, en este momento el país llegó a un pico de contagios donde se reportaban al menos 2200 casos confirmados (cabe resaltar que Sierra Leona solo reportaba casos confirmados por laboratorio, por ende, se cree que el número es mayor).

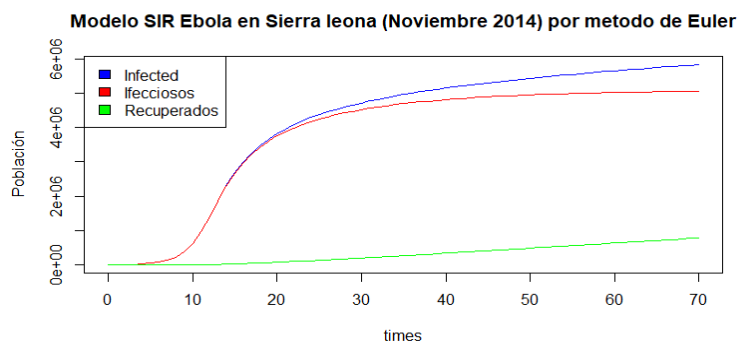
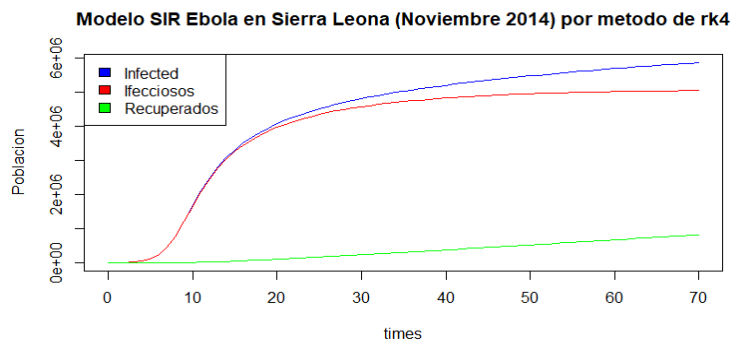
En ese momento la tasa de infección era muy alta y la tasa de recuperación muy baja, pues no había un tratamiento eficaz para la enfermedad. Para el estudio se utiliza el código suministrado en clase, precisamente los métodos de SIR mega cargado con los métodos de rk4 y euler ya que eran los que menos errores presentaban, para esto se tomaron los siguientes datos

Variable	Valor
$N$	7E4
$I(0)$	2200
$R(0)$	0
$\beta$	0.8
$\gamma$	0.003

Cuadro 4: Parametros del modelo.

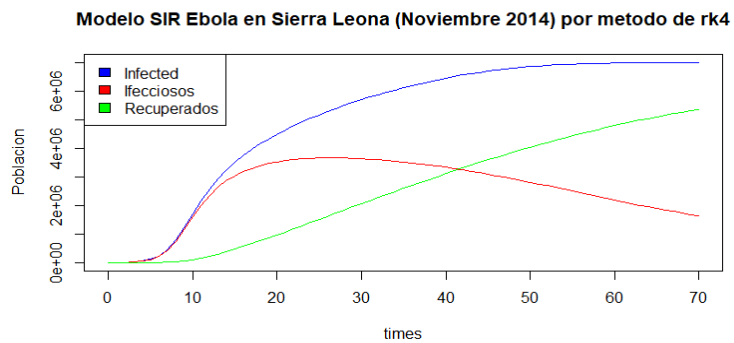
## 2.4. Resultados

Modelo Si  $\beta = 0.8$  y  $\gamma = 0.003$

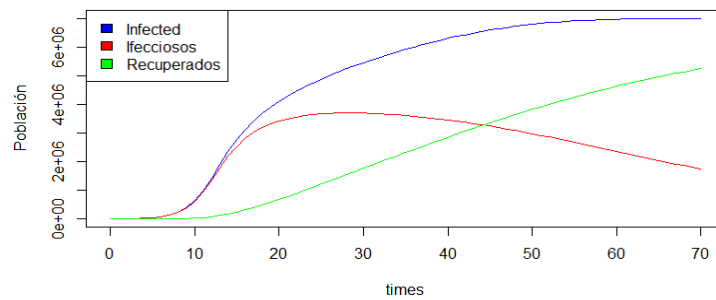


Se modificaron entonces ciertos parámetros del caso base. Aumentando o disminuyendo  $\gamma$  o  $\beta$  y dejando el otro igual, para ver como se comporta el modelo ante una tasa de infección/curación mayor o menor, arrojando los siguientes resultados:

Modelo Si  $\beta = 0.8$  y  $\gamma = 0.03$  (Mayor tasa de recuperación)

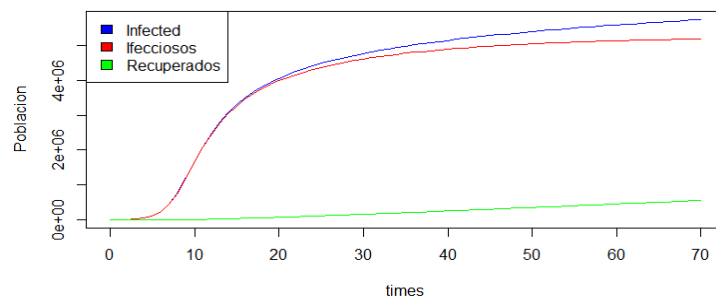


**Modelo SIR Ebola en Sierra leona (Noviembre 2014) por metodo de Euler**

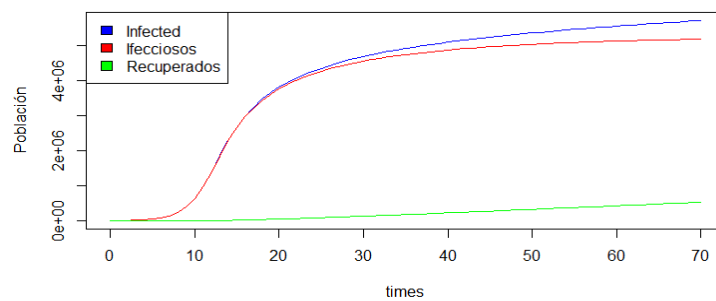


**Modelo Si  $\beta = 0.8$  y  $\gamma = 0.001$  (Menor tasa de recuperación)**

**Modelo SIR Ebola en Sierra Leona (Noviembre 2014) por metodo de rk4**



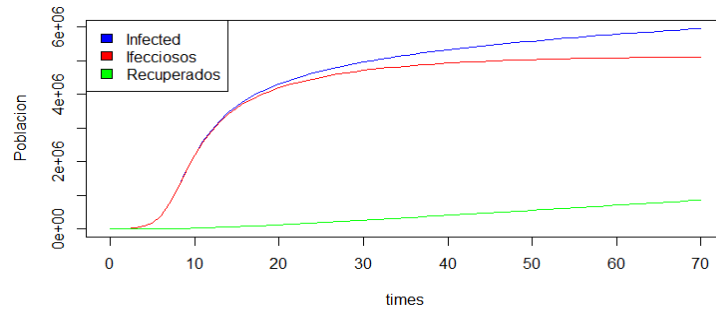
**Modelo SIR Ebola en Sierra leona (Noviembre 2014) por metodo de Euler**



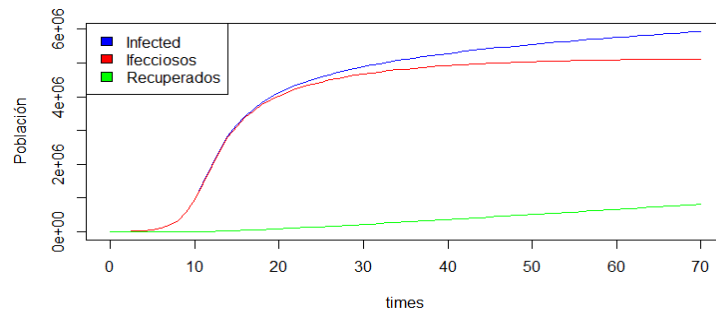
**Modelo Si  $\beta = 0.9$  y  $\gamma = 0.003$  (Mayor tasa de infección)**



**Modelo SIR Ebola en Sierra Leona (Noviembre 2014) por metodo de rk4**

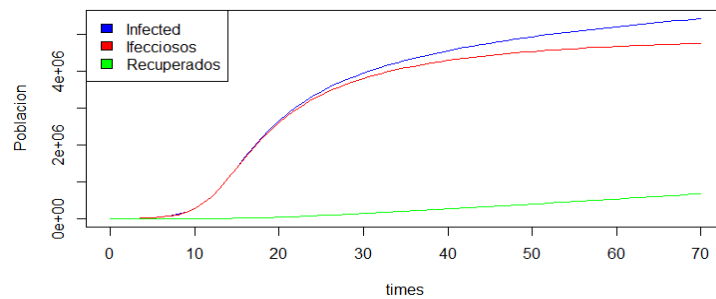


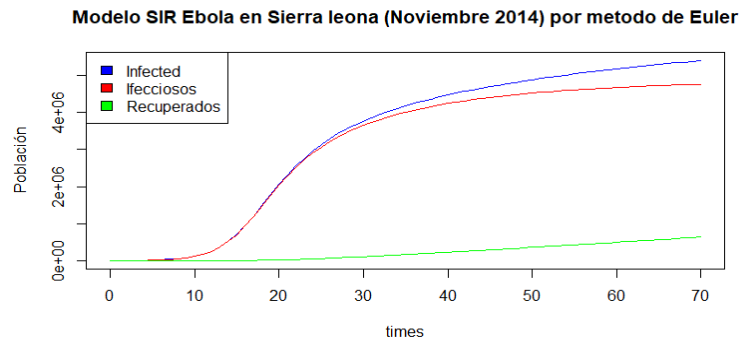
**Modelo SIR Ebola en Sierra leona (Noviembre 2014) por metodo de Euler**



**Modelo Si beta = 0.5 y Gama = 0.003 (Menor tasa de infección)**

**Modelo SIR Ebola en Sierra Leona (Noviembre 2014) por metodo de rk4**





## 2.5. Comparación

A simple vista parece que hay un cambio significativo en las gráfica si se cambian los parámetros, siendo el de la mayor tasa de recuperación el más evidente, sin embargo en cuanto a los métodos parecen muy similares entre los dos, esto es debido al alto número de la población trabajada, si vemos los resultados numéricos podremos apreciar la diferencia entre los métodos, en esta ocasión vamos a comparar el número de recuperados que arroja cada método.

Metodo / Periodo	10	20	40	60
Valor Exacto Metodo rk4	6.669	92.522	360.914	656.997
Valor Exacto Metodo euler	1.547	60.835	322.554	618.074
Mayor Tasa de recuperacion metodo rk4	64.610	865.590	3.013.100	4.725.880
Mayor Tasa de recuperacion metodo euler	14.988	577.937	2.741.141	4.558.866
Menor Tasa de recuperacion metodo rk4	2.228	3.100	12.204	22.432
Menor Tasa de recuperacion metodo euler	517	2.035	10.893	21.078
Mayor Tasa de Infeccion metodo rk4	10.288	107.529	384.864	685.925
Mayor Tasa de Infeccion metodo euler	2.193	74.138	346.331	647.096
Menor Tasa de Infeccion metodo rk4	1.106	36.012	252.519	522.609
Menor Tasa de Infeccion metodo euler	485	17.949	216.540	484.249

Se ve entonces que hay una diferencia muy grande en los primeros resultados entre métodos, aun así, dicha diferencia se va acortando con el paso del tiempo y comienza a tomar valores muy parecidos hacia el final de la simulación entre los métodos.

Podemos ver también que alterar cualquiera de las tasas puede cambiar drásticamente los resultados obtenidos. Es importante observar principalmente que al aumentar o disminuir la tasa de recuperación considerablemente el número de recuperados cambia demasiado siendo esto evidente al aumentar la tasa en las gráficas o al aumentarlo o disminuirlo en los valores numéricos

Así por último podemos ver resultados muy parecidos cuando dejamos la tasa de recuperación igual y alteramos la tasa de transmisión, inicialmente si cambian mucho los valores, pero hacia el final de la simulación se parecen bastante a los resultados originales.

### 3. Modelos Depredador-Presa

El modelo matemático de Lotka-Volterra, es un sistema de ecuaciones que describe el comportamiento de una población dependiente que se encuentra en un ecosistema, centrándose en el comportamiento de la presa respecto al depredador y viceversa, pues si no hay presas, los depredadores se podrían extinguir, y si no hay depredadores, se llega a una sobrepoblación de presas.

#### 3.1. Ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} &= -\gamma y + \delta xy\end{aligned}$$

#### 3.2. Variables:

$\alpha$  : tasa de crecimiento de las presas.

$\beta$  : éxito en la caza del depredador.

$\gamma$  : tasa de decrecimiento de los depredadores.

$\delta$  : éxito en la caza y cuánto alimenta cazar una presa al depredador.

#### 3.3. Implementación:

Se realiza la implementación de los sistemas de ecuaciones por medio del programa Rstudio, se procede a declarar los valores iniciales los cuales son

Variable	Valor
$\alpha$	1
$\beta$	0.2
$\gamma$	0.5
$\delta$	0.2

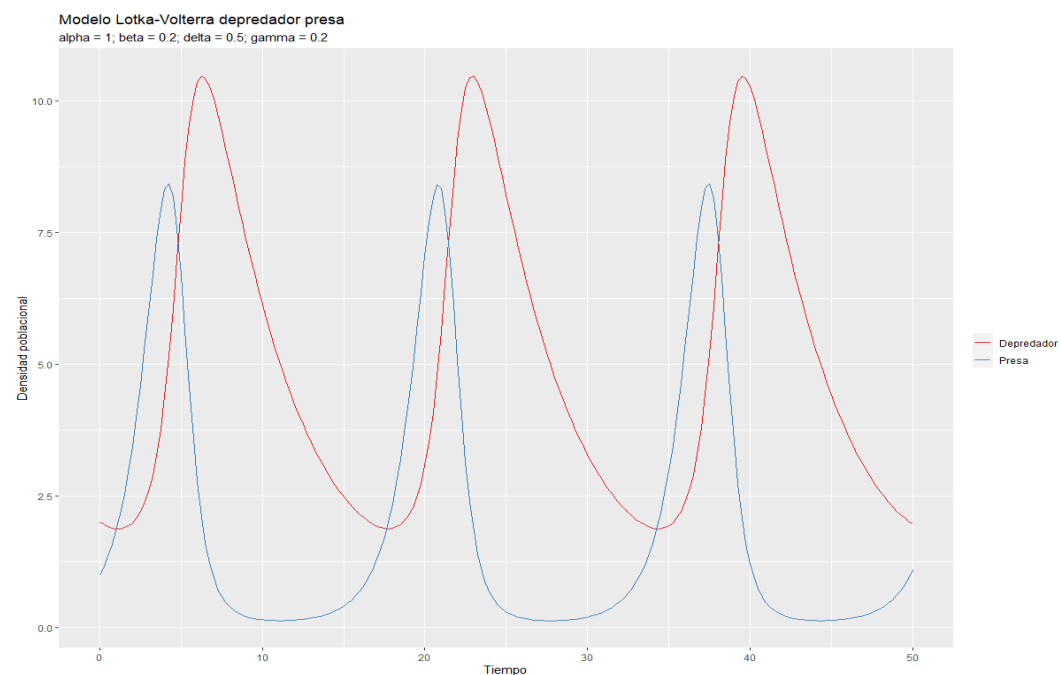
Cuadro 5: Resultados.

los valores iniciales son x= número de presas, y=número de depredadores. Se realiza la respectiva grafica de la solución del sistema con un límite de 50años en el tiempo de la grafica en el eje Y. Para el funcionamiento del algoritmo se utilizan las librerías:

Tidyverse: Colección de paquetes orientados a la manipulación, importación, exploración y visualización de datos y que se utiliza exhaustivamente en ciencia de datos. El uso de Tidyverse permite facilitar el trabajo estadístico y la generación de trabajos reproducibles.[2]

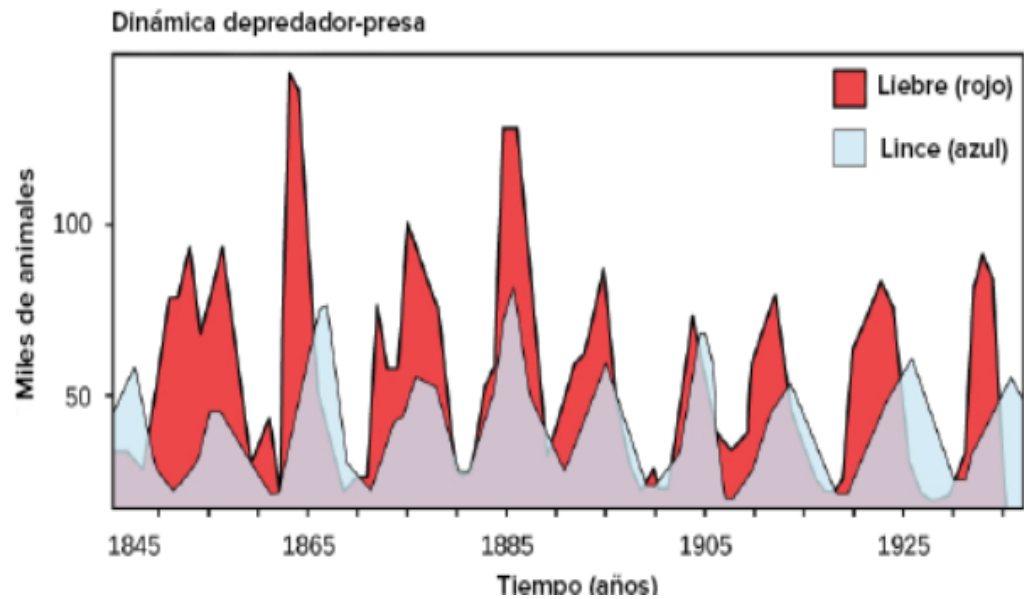
Desolve: El paquete contiene funciones que resuelven problemas de valor inicial de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden (ODE), de ecuaciones diferenciales parciales (PDE), de ecuaciones algebraicas diferenciales (DAE) y de ecuaciones diferenciales de retardo (DDE).[3]

### 3.4. Resultados:



### 3.5. Comparación:

El siguiente es un modelo real sacado de “Ecología de la comunidades” este nos ofrece la visión del comportamiento real del modelo que se intenta crear.



[4]

El crédito de la siguiente tabla es de la compañía Hudson Bay quienes tomaron datos de conejos y linces respectivamente durante unos 20 años.

Año	Conejos	Linces	Año	Conejos	Linces
1900	30	4	1911	40.3	8
1901	47.2	6.1	1912	57	12.3
1902	70.2	9.8	1913	76.6	19.5
1903	77.4	35.2	1914	52.3	45.7
1904	36.3	59.4	1915	19.5	51.1
1905	20.6	41.7	1916	11.2	29.7
1906	18.1	19	1917	7.6	15.8
1907	21.4	13	1918	14.6	9.7
1908	22	8.3	1920	16.2	10.1
1909	25.4	9.1	1921	24.7	8.6
1910	27.1	7.4	1922	-	-

Contando con los datos reales de un modelo, se procede a correr el código con el nuevo valor inicial, donde se tienen las siguientes poblaciones:

conejos = [30, 47.2, 70.2, 77.3, 36.3, 20.6, 18.1, 21.4, 22, 25.4, 27.1, 40.3, 57, 76.5, 52.3, 19.5, 11.2, 7.6, 14.6, 16.2, 24.7];

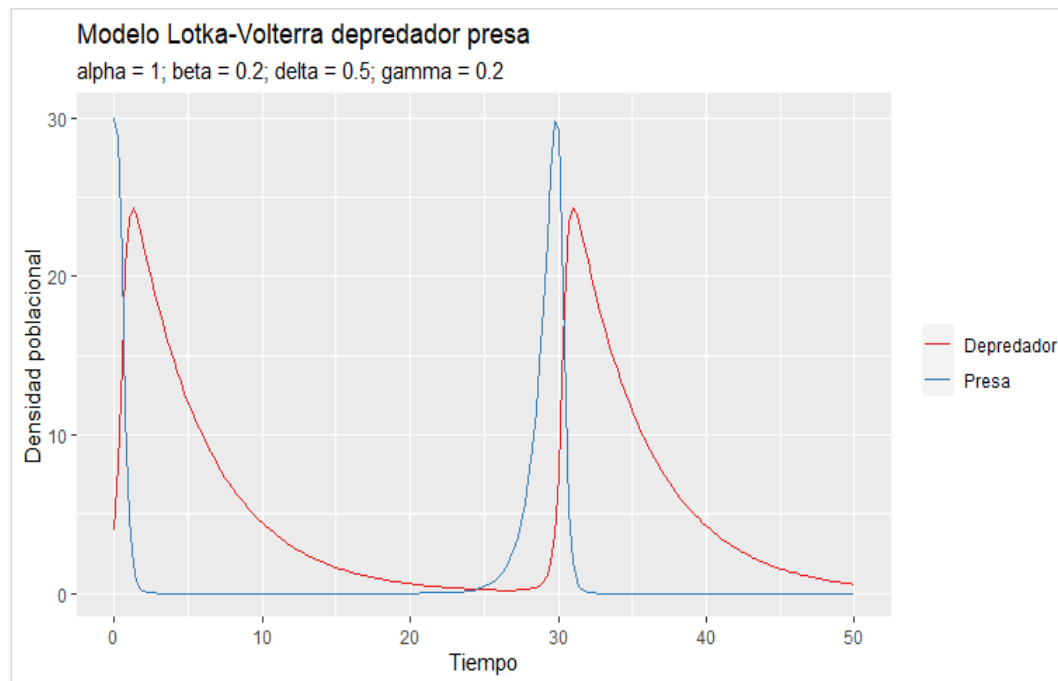
lincs = [4, 6.1, 9.9, 35.2, 59.4, 41.7, 19, 13, 8.4, 9.1, 7.4, 8, 12.3, 19.5, 45.7, 51.1, 29.7, 15.8, 9.6, 10.1, 8.6];

El promedio de lincs y conejos entre los años 1903 y 1913 seria:

$$\frac{77.4 + 36.3 + 20.6 + 18.1 + 21.4 + 22 + 25.4 + 27.1 + 40.3 + 57}{10} = 34.6,$$

$$\frac{59.4 + 41.7 + 19 + 13 + 8.3 + 9.1 + 7.4 + 8 + 12.3 + 19.5 + 45.7}{11} = 22.12.$$

Ejecutando el código con los nuevos valores, logrando imitar el primer año de la tabla anterior, donde  $x=30$ (Conejos) y  $y=4$ (Lincs), se obtiene:

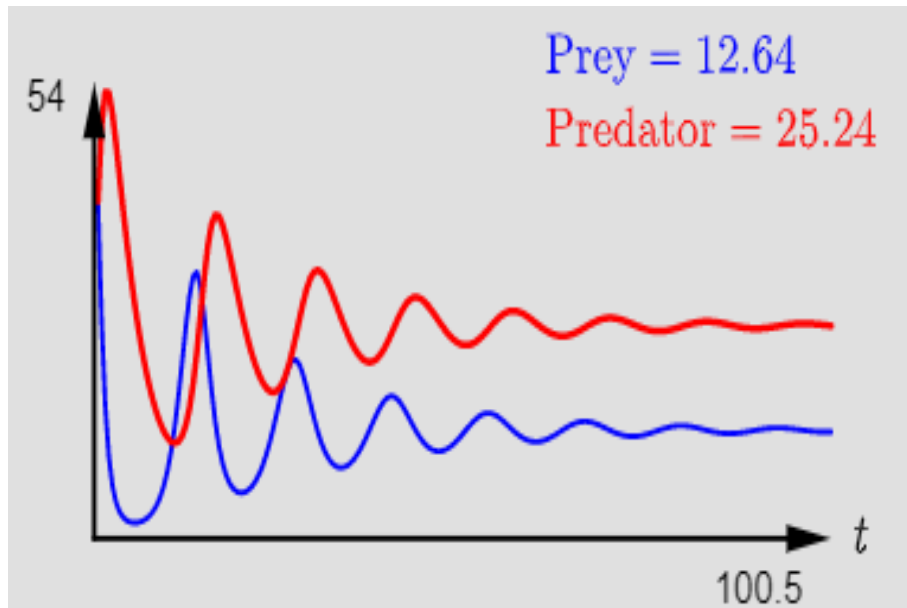


	time	x	y
1	0.00	3.000000e+01	4.0000000
2	0.25	2.882436e+01	8.0361045
3	0.50	2.123147e+01	14.4661406
4	0.75	1.124157e+01	20.5902561
5	1.00	4.708556e+00	23.6870887
6	1.25	1.808209e+00	24.3100056
7	1.50	6.953994e-01	23.8060647
8	1.75	2.775225e-01	22.9030723
9	2.00	1.162769e-01	21.8868413
10	2.25	5.128233e-02	20.8605976

### 3.6. Error:

De lo obtenido se puede observar que los datos no son exactos, que pueden presentar errores absolutos del 1.9 hasta mayores a 4.5 en la predicción de poblaciones, esto debido a que la reproducción de los animales no depende solo de su relación depredador-presa, pues una presa puede tener varios depredadores, y los ciclos reproductivos pueden cambiar por factores como el clima, la presencia humana y la contaminación.

Cabe destacar que este modelo en la ecología en la vida real tiende a auto balancearse como lo muestra la siguiente grafica mostrándonos como la misma naturaleza controla este modelo. Además, el modelo en la vida real es afectado por factores que el nuestro no tiene en cuenta como catástrofes naturales, epidemias, invasión de algún tipo y otros. [4]



## Referencias

- [1] P. Rodriguez, “El modelo sir, un enfoque matemático de la propagación de infecciones,” accessed: 2021-05-28. [Online]. Available: <https://culturacientifica.com/2020/08/24/el-modelo-sir-un-enfoque-matematico-de-la-propagacion-de-infecciones/>
- [2] P. Araneda, “Tidyverse para data análisis,” accessed: 2021-05-28. [Online]. Available: <https://rpubs.com/paraneda/tidyverse>
- [3] K. Soetaert, “Paquete desolve,” accessed: 2021-05-28. [Online]. Available: <http://desolve.r-forge.r-project.org/>
- [4] G. AMGEN, “Control de poblaciones,” accessed: 2021-05-28. [Online]. Available: <https://es.khanacademy.org/science/ap-biology/ecology-ap/population-ecology-ap/a/mechanisms-of-population-regulation>