Pontificia Universidad Javeriana

ANALISIS NUMERICO

Metodo de la posicion falsa y algoritmo de Aitken

Autores:
José Mario Arias
Santiago Andres Diaz
Camilo Cruz

23 de febrero del 2021

Índice

1. Metodo de la posicion falsa

1.1. Introducción general al metodo

El método de la posición falsa intenta juntar la seguridad que proporciona el método de la bisección con la rapidez que tiene el método de la secante. En este método se parte de dos puntos los cuales están rodeando la raíz de f(x) = 0 , esto quiere decir que son los dos puntos los cuales f(x1) f(x0) sean menores a 0. Después de esto se toma un punto x2 el cual es calculado tomando la intersección en el eje X entre una recta la cual une los puntos x1 y x0. Después de esto se asigna un nuevo intervalo el cual viene dado por una comparación entre ambos intervalos, [x0,x2] y [x2,x1], se toma aquel que cumpla f(x)f(x2) menor que 0.

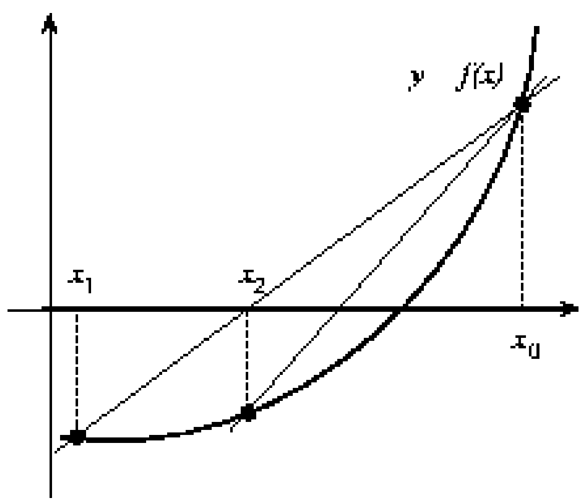
1.2. Preguntas

1.2.1. Cuales son condiciones para aplicar el método

-Si g(x) es una función continua en [a, b] y g(a) mayor que a
-Debe cumplirse el criterio de convergencia de la primera derivada

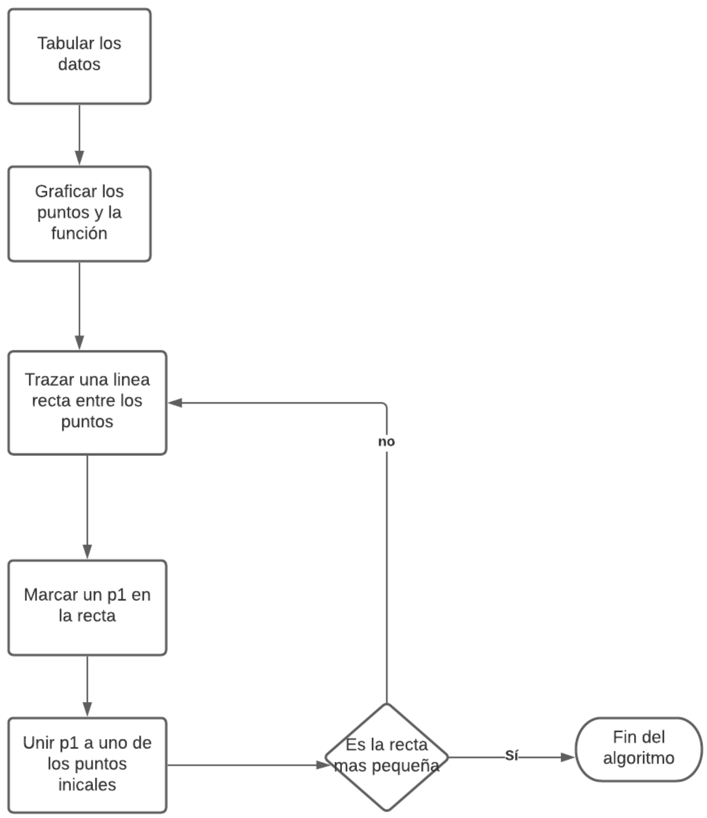
1.2.2. Proporcione una explicación geométrica del algoritmo

Este método se puede asimilar bastante a la tangente, ya que ambas intentan hallar la línea recta entre dos puntos de una función sin importar su forma o curvatura.



1.2.3. Realice un diagrama de flujo que muestre como se debe operar el algoritmo

1. Tabular buscando un f(x) positivo y uno negativo 2. Graficar los dos puntos y buscar la forma de la función 3. Trazar la línea recta que junte los dos puntos 4. Ubicar un p1 y sacar la imagen en la función original 5. Realizar una nueva recta entre p1 y uno de los f(x) principales 6. Iterar hasta que la línea generada sea lo más pequeña posible



1.2.4. Cuál son las raíces. Valide su resultado

Para encontrar la raiz en este metodo se puede lograr utilizando la siguiente formula.

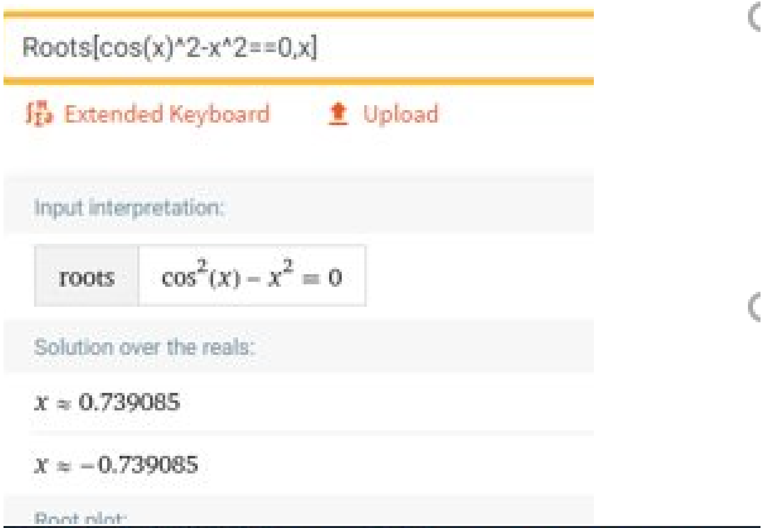
$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

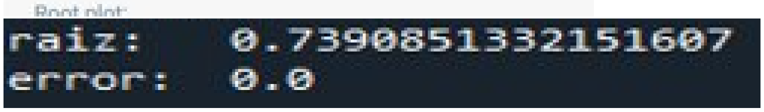
Implementación: El codigo se encuentra disponible en el repositorio de gitHub

```python
import numpy as np
import math
e = math.e

# INGRESO
fx = lambda x: (x**3)-(x*2)-5
    #((668)/x)*(1-e**(-0.146843*x))-40
    #(x**3)-(x*2)-5
    #(math.cos(x)**2)-x**2
              #x*math.sin(x)-1
              #(x**3)-(2*x**2)+(4/3)*x-(8/27)


a = 2
b = 3
tolerancia = 10e-16


# PROCEDIMIENTO
tabla = []
tramo = abs(b-a)
fa = fx(a)
fb = fx(b)

while not(tramo<=tolerancia):

    c = b - fb*(a-b)/(fa-fb)
    fc = fx(c)
    cambio = np.sign(fa)*np.sign(fc)
    tabla.append([a,c,b,fa,fc,fb,tramo])


    if cambio>0:
        tramo = abs(c-a)
        a = c
        fa = fc
        print('La raiz es : ' ,c)
    else:
        tramo = abs(b-c)
        b = c
        fb = fc
        print('La raiz es : ' ,c)


tabla = np.array(tabla)
ntabla = len(tabla)
# SALIDA
for i in range(0,ntabla,1):
    print('iteración:  ',i)


print('raiz:  ',c)
print('error: ',tramo)
```

-Punto 1-

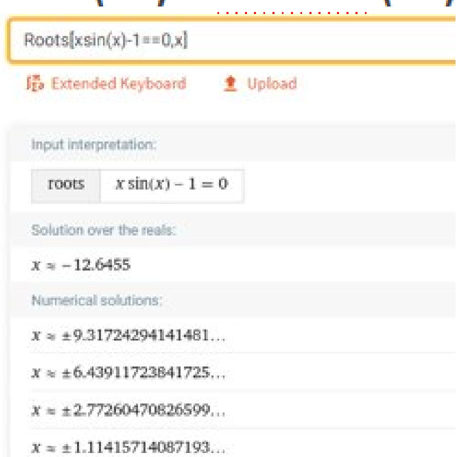
$F(X)=COS^2(X)-X^2$





-Punto 2-

$F(X)=XSIN(X)-1 \quad [-1,2]$

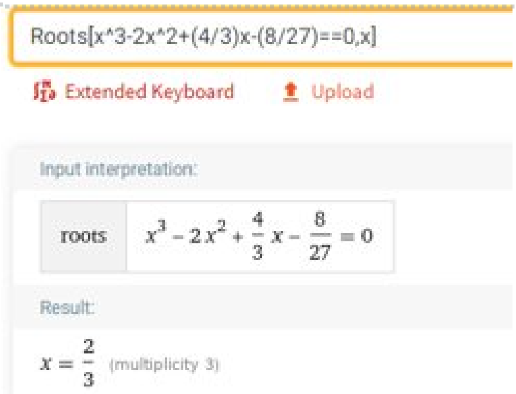


```
raiz:    1.1141571408719302
error:   0.0
```

—Punto 3—

En este punto es importante mencionarque al ser una funcion periodica el metodo posee un problema y se mantiene iterando. Esto se va a responder mas adelante en la pregunta en la seccion 1.2.8

$$F(x)= x^3-2x^2+ \frac{4}{3}x - \frac{8}{27}$$



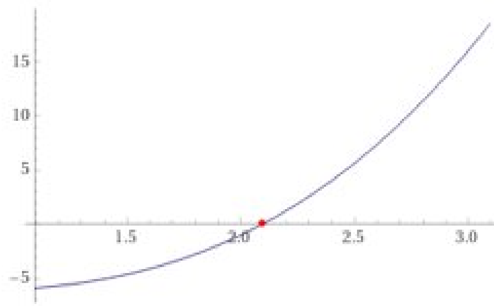
```
La raiz es :  0.6697668778396898
La raiz es :  0.6697668104844743
La raiz es :  0.6697667431336551
La raiz es :  0.6697666757872326
La raiz es :  0.6697666084452059
La raiz es :  0.6697665411075744
La raiz es :  0.6697664737743381
La raiz es :  0.6697664064454958
La raiz es :  0.6697663391210473
La raiz es :  0.6697662718009922
La raiz es :  0.6697662044853302
La raiz es :  0.6697661371740605
La raiz es :  0.6697660698671827
La raiz es :  0.6697660025646965
La raiz es :  0.6697659352666012
La raiz es :  0.6697658679728967
La raiz es :  0.6697658006835823
```

-Punto 4-

```
raiz:   14.799266066381355
error:  0.0
```

-Punto 5-

$$F(X) = X^3 - 2X - 5 = 0$$




```
raiz:    2.0945514815423265
error:   0.0
```

1.2.5. Como se comporta el método en cuanto: perdida de significancia, el número de iteraciones, la convergencia, en cada caso.

La convergencia del método suele ser lineal y su velocidad de convergencia es superlineal, aunque la falsa posición tiene una convergencia muy lenta hacia la solución. Efectivamente, una vez iniciado el proceso iterativo, uno de los extremos del intervalo tiende a no modificarse. Para obviar este problema, se ha propuesto una modificación del método, denominada método de Hamming. También es preciso para hallar las raíces y a menos de entrar a un bucle, la cantidad de iteraciones tiende a no ser muy grande.

1.2.6. Cómo se puede solucionar el problema de significancia, es remediable o estádestinado al fracaso, en los casos que se presente el problema

El problema de la significancia, debido a que suele ser un poco lento para calcularlo, se puede solucionar modificando y agregando el método de Hamming para poder mejorar estos errores.

1.2.7. Que pasa con el método cuando hay más de dos raíces, explique su respuesta, encontrar la multiplicidad (sugerencia utilice Wólfram para factorizar)

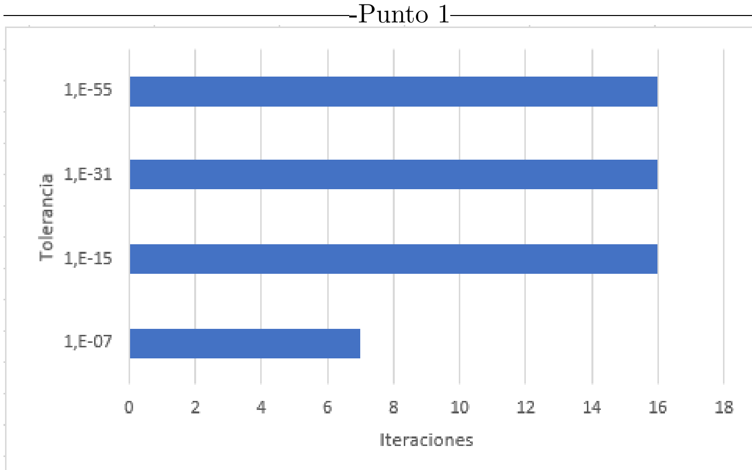
Sin importar la función y la cantidad de raíces, el método sólo puede hallar una raíz por cada vez que se realice, siendo principalmente hallada la raíz positiva de menor valor.

1.2.8. ¿Qué pasa con el método cuando la función es periódica, par o impar, estas características influyen?

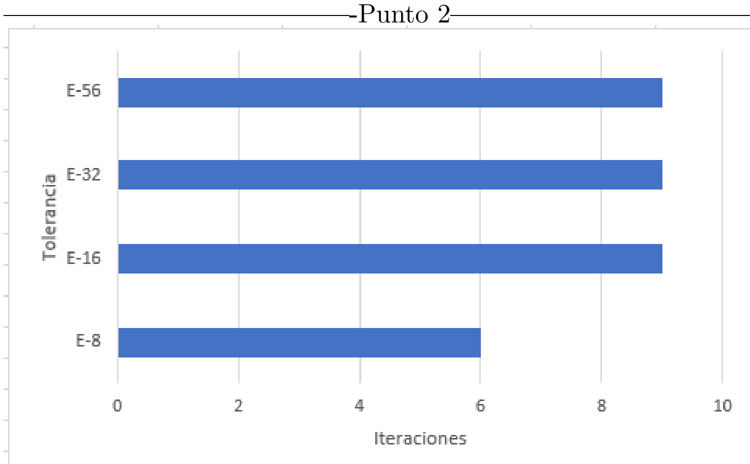
Cuando el resultado de la función es periódica, el algoritmo se queda en un bucle iterando con el resultado de la raíz intentando aproximar a este valor. Mientras, que al ser par o impar, el procedimiento no se ve afectado.

1.2.9. Realice una gráfica que muestre cómose comporta el método en cada caso con respecto a la tolerancia y al número de iteraciones

-Punto 1-



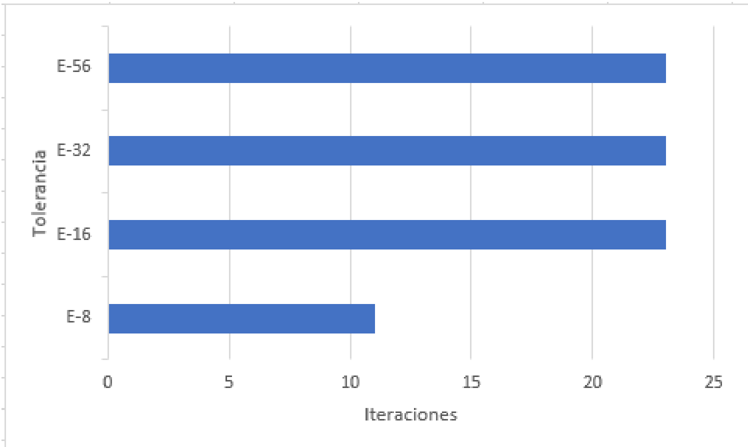
-Punto 2-



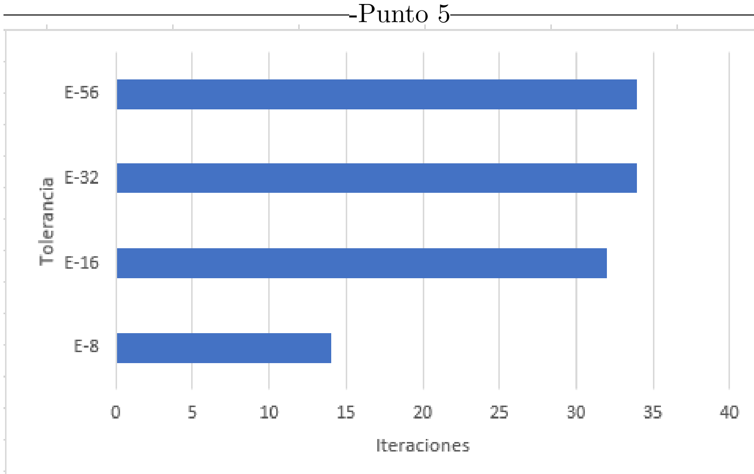
-Punto 3-

En este caso por las que se varie la tolerancia, como la raiz es periodica, el metodo se queda en un bucle infinito en el cual siempre trata de aproximar la raiz pero no termina. Es por esto que no se puede realizar una grafica ya que los datos siempre estan variando infinitamente.

-Punto 4-



-Punto 5-



1.2.10. Como se comporta el método con respecto al de bisección

El método de la posición falsa se compone de los métodos de la bisección y la secante, unificando así la seguridad con la rapidez de estos. Realmente este método se presenta como una forma de optimizar el método de la bisección ya que en este no se tiene en cuenta las magnitudes de f(x1) y f(xu), con esta información podríamos saber cuál de las dos está más próxima a 0 y por ende la raíz. Para esto se traza una línea recta que una f(x1) y f(xu) para representar mejor una aproximación de la raíz El hecho de que se reemplace la curva por una línea recta de una "falsa posición"de la raíz; de aquí el nombre de método de la falsa posición.

1.2.11. Como se comporta el método con respecto a la solución con Taylor

Aunque el método de Taylor generalmente es muy rápido y efectivo se podría implementar una mejora considerable, pues si tomara un promedio de las dos pendientes existentes en x0 – xn se podría tener un valor más aproximado en menos tiempo. básicamente la posición falsa si tiene esta pequeña mejora, ya que al trazar la línea recta entre x0 y xn y al conocer cual está más cercano a la raíz se puede optimizar el tiempo y la exactitud del método

2. Metodo del algoritmo de Aitken

2.1. Introducción general al metodo

El método de Aitken es un método el cual busca acelerar la convergencia de una sucesión la cual converge linealmente. Su nombre se debe a Alexander Aitken quien fue el que introdujo este método. Su fórmula es la siguiente:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f(x_n)]^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}$$

2.2. Preguntas

2.2.1. Cuales son condiciones para aplicar el método

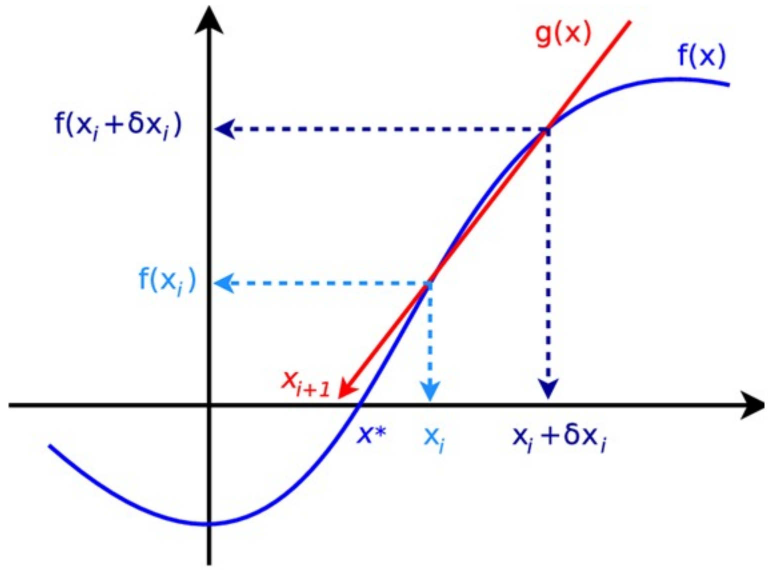
Para realizar el método de Aitken se necesita que x converge linealmente a l si existe un numero μ ∈ (0, 1) tal que:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x_{n+1} - \ell|}{|x_n - \ell|} = \mu.$$

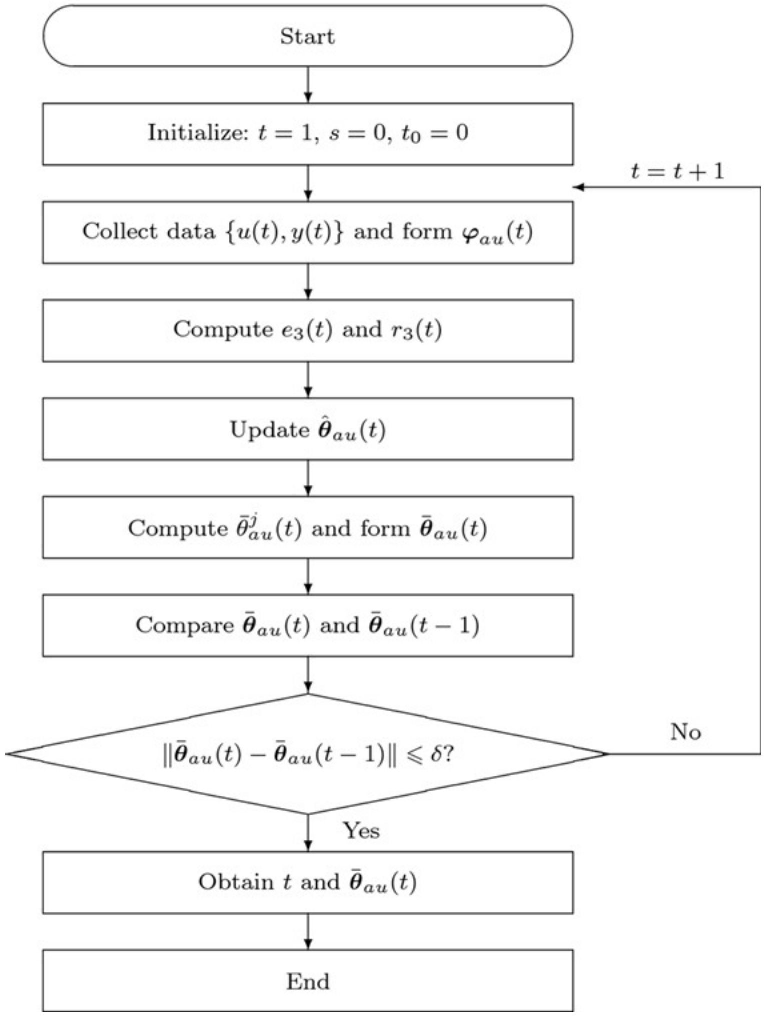
El método de Aitken acelerará la sucesión si y solo si

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\hat{x}_n - \ell}{x_n - \ell} = 0.$$

2.2.2. Proporcione una explicación geométrica del algoritmo



2.2.3. Realice un diagrama de flujo que muestre como se debe operar el algoritmo



2.2.4. Como se comporta el método en cuanto: perdida de significancia, el número de iteraciones, la convergencia, en cada caso.

Presenta una convergencia rápida y no requiere, como en el caso del método de la secante, la evaluación de derivada alguna. Tiene convergencia cuadrática como el método de Newton.

2.2.5. Cómo se puede solucionar el problema de significancia, es remediable o estádestinado al fracaso, en los casos que se presente el problema

2.2.6. Que pasa con el método cuando hay más de dos raíces, explique su respuesta, encontrar la multiplicidad (sugerencia utilice Wólfram para factorizar)

Al ser este método usado para la resolución de ecuaciones polinomicas se puede decir que dada una ecuación f(x) = 0, se dice que el número real L es la cota superior de sus raíces reales si para toda raíz real r de dicha ecuación se verifica que r menor o igual que L Análogamente se dice que el número real l es una cota inferior de sus raíces si verifica que l menor o igual que r. Y se dice que se han acotado sus raíces si se ha determinado un intervalo [l, L] que contiene todas las raíces. Si se admite la posibilidad de raíces complejas, se dirá que se han acotado si existe M mayor o igual que 0 tal que —r— menor o igual que M para toda raíz r de f(x)=0.

2.2.7. ¿Qué pasa con el método cuando la función es periódica, par o impar, estas características influyen?

Cuando el método de Aitken se combina con una iteración de punto fijo, el resultado se conoce como método de aceleración de Steffensen. Esto implica, de cierta forma, que si el valor obtenido forma una sucesión de aproximaciones al valor deseado. Si esta sucesión se acerca a un valor fijo podemos tomar ese valor como el valor de la interpolación deseado. Normalmente dichos valores parecen converger al cabo de unos pocos pasos y llegados a un punto empiezan a diverger con un empeoramiento de la estimación. Esto nos indica que pasado cierto punto no se gana precisión al utilizar más nodos de interpelación. al momento de realizar el análisis con la función periódica, se llega a una incongruencia porque está no puede ser el valor de la interpelación. En cambio si se han de funciones pares o impares estas si pueden cumplir con la característica primordial y al momento de converger se obtiene un valor cercano al de la interpelacion

2.2.8. Como se comporta el método con respecto al de bisección

El método de aitken es mucho más rápido que el de la bisección, este último al no tener en cuenta las magnitudes de la raíz y dependiendo del problema normalmente realiza muchas más iteraciones que en el método de aitken ya que este converge de manera más rápida y puede llegar a brindar un resultado mucho más preciso

2.2.9. Como se comporta el método con respecto a la solución con Taylor

Las series de Taylor en este caso podrían ser más optimas y rápidas que el método de Aitken, pues Taylor tiene una ventaja muy favorable y es que tiene un orden de convergencia que puede trabajar cuadráticamente, mientras Aitken, aunque en la mayoría de casos es muy rápido pero se necesita encontrar una segunda derivada, lo cual puede limitar su uso y su velocidad dependiendo del ejercicio. Aunque los dos están un poco más encaminadas a solución de problemas generales Taylor llevara la ventaja al tener más cifras significativas en cada iteración; esto podría reflejarse en duplicar la aproximación a la raíz respecto al método de Aitken