SEMINAR 1

Sisteme de ecuaţii liniare

Rangul unei matrice

Exerciţiul 1. Calculaţi rangul matricei:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Soluţie.

1. Alegeţi un minor de ordinul 2 nenul.

2. Se bordează minorul ales cu câte o linie şi o coloană din cele rămase şi se obţin minorii de ordinul 3. Scrieţi aceşti minori şi calculaţi-le valoarea.

3. Cât este rangul matricei A? De ce?

Metoda de rezolvare Kronecker-Capelli

În general, un sistem liniar are forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

unde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

este matricea (coeficientilor) sistemului,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

este matricea necunoscutelor,

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

este matricea termenilor liberi,

$$\overline{A} = [A|B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

este matricea extinsă.
Observaţie: Matricea extinsă se obţine adăugând la matricea sistemului A, coloana termenilor liberi B.

Exerciţiul 2: Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x+y-4z+u=1 \\ x+y-3z+7u=2 \\ 3x+3y-14z-9u=1. \end{cases}$$

Soluţie.
Matricea sistemului este:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 7 \\ 3 & 3 & -14 & -9 \end{bmatrix},$$

matricea necunoscutelor este:

$$X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix},$$

matricea (coloana) termenilor liberi este:

$$B=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

iar matricea extinsă este:

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 7 & 2 \\ 3 & 3 & -14 & -9 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observaţie: Sistemul (1) se mai poate scrie $AX=B$.
Aplicăm acum algoritmul descris în curs pentru rezolvarea sistemului:
Am găsit mai sus cele trei matrici
Observăm un minor de ordinul $2\neq 0$: $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3+4=1\neq 0.$

1. Se poate alege şi altul?

   Îl bordăm pe rând cu cele două coloane şi linia rămasă.

2. Scrieţi toţi minorii de ordinul 3 astfel obţinuţi. Care este valoarea fiecărui minor?

3. Scrieţi un minor principal. De ce este minor principal?

4. Este unic? De ce?

5. Care este rangul matricei A?

   Scriem matricea extinsă

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 7 & 2 \\ 3 & 3 & -14 & -9 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Pentru a obţine minorii caracteristici, bordăm minorul principal cu coloana termenilor liberi şi linia rămasă

6. Scrieţi toţi minorii caracteristici. Care este valoarea fiecărui minor?

7. Ce rezultă despre compatibilitatea sistemului?

8. Care sunt necunoscutele principale? Cum le alegem?

9. Care sunt ecuaţiile principale? Cum le alegem?

10. Care sunt necunoscutele secundare? Cum le alegem? Ce facem cu ele?

11. Care sunt ecuaţiile secundare? Cum le alegem? Ce facem cu ele?

    Păstrăm ecuaţiile principale şi necunoscutele principale y, z şi rezolvăm sistemul: $\begin{cases} y - 4z = 1 - x - u \\ y - 3z = 2 - x - 7u \end{cases} \quad <=> \begin{cases} y = 5 - x - 25u \\ z = 1 - 6u \end{cases}$.
    Mulţimea soluţiilor sistemului este: $\{x, 5-x-25u, 1-6u, u\}$, $(\forall)x, u \in \mathbb{R}$.

12. Contează ordinea în care sunt scrise soluţiile?

Exerciţii

1. Să se rezolve folosind metoda Kronecker- Capelli următorul sistem:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y-2z=-2 \\ x+4y+5z=8 \\ 2x+5y+6z=10 \end{cases}$$

Indicaţie: Pentru rezolvare se vor parcurge toţi paşii descrişi anterior la Metoda K-C şi se va obţine $rangA = rang\overline{A}$, ajungând la concluzia că avem de a face cu un sistem compatibil nedeterminat cu soluţia: $\left\{\frac{z}{3}, \frac{6-4z}{3}, z\right\}$, $z \in \mathbb{R}$.

2. Să se rezolve folosind metoda Kronecker- Capelli următorul sistem:

$$\begin{cases} x-2y-z=0 \\ 2x-4y-2z=0 \\ -x+2y+z=0 \\ -2x+4y+2z=0 \end{cases}$$

Indicaţie: Parcurgând paşii din metoda K-C se va găsi $rangA = 1 = rang\overline{A}$, şi soluţia sitemului omogen: $\{2y+z, y, z\}, y, z \in \mathbb{R}$.