Seminar 4. Şiruri şi serii de funcţii.

EXERCIŢII PROPUSE

1. Studiaţi convergenţa punctuală şi convergenţa uniformă pentru următoarele şiruri de funcţii:

   (a) $f_n(x) = \frac{1}{nx^2}, \quad x > 0;$

   (b) $f_n(x) = \frac{1}{n^p x}, \quad x \in (0,1], n \geq 1, p > 1;$

   (c) $f_n(x) = \frac{1}{x^2} e^{-2nx}, \quad x > 0.$

2. Fie

$$f_n : I \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{n\sqrt{x}}, \quad n \geq 1, \quad I = (0, \infty).$$

   Arătaţi că şirul de funcţii f_n este uniform convergent pe intervalul $(1, \infty)$ dar nu este uniform convergent pe intervalul $(0, 1)$.

3. Determinaţi mulţimea A de convergenţă punctuală pentru seria $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ dacă:

   (a) $f_n(x) = \frac{(n+1)^n}{n^{n+x}}, \quad x \in \mathbb{R};$

   (b) $f_n(x) = 2^n \sin \frac{x^2}{3^n}, \quad x \in \mathbb{R};$

   (c) $f_n(x) = \frac{n!}{x^{4n}}, \quad x \neq 0.$

4. Studiaţi convergenţa uniformă pe $\mathbb{R}$ pentru următoarele serii de funcţii:

   (a) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n(n+1)};$

   (b) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{2x^3}{16+n^3x^6}.$