SEMINAR 4
Aplicaţii liniare
Teorema lui Hamilton Cayley
Aducerea unei matrice la forma diagonală

Aplicaţii liniare. Nucleu. Imagine
Matricea unei aplicaţii liniare într-o bază B

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}^2$,

$$f(aX + b) = (2a + b, 4a + 2b)$$

şi bazele

$$B_1 = \{\overline{p_1} = X - 1, \overline{p_2} = -1\} \subset \mathbb{R}_1[X] \text{ şi } B_2 = \{\overline{v_1} = (1, 0), \overline{v_2} = (1, 1)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Să se afle:

a) Matricea lui f în perechea de baze B_1B_2, $[f]_{B_1B_2}$

b) Ker f şi dim Ker f. Este f injectivă? Justificaţi.

c) Im f şi dim Im f. Este f surjectivă? Dar bijectivă? Justificaţi.

Soluţie.

a) Pentru a scrie matricea lui f în perechea de baze B_1B_2, urmăm algoritmul din curs şi anume:

1) Calculăm f de vectorii cărei baze?

2) Ce vectori obţinem?
$f(\overline{p_1}) = f(X-1) \overset{a=1,b=-1}{=} (1,2) = (1,2)_{B_c} = (\alpha_1, \alpha_2)_{B_2}$

3) În ce bază sunt scrişi vectorii de mai sus?

4) În ce bază trebuie să îi trecem? Cu ce formulă?

5) Calculaţi coordonatele vectorilor în noua bază.

$f(\overline{p_1}) = \boxed{(-1,2)_{B_2}}, \quad f(\overline{p_2}) = \boxed{(1,-2)_{B_2}}$

6) Scrieţi matricea lui f în perechea de baze B_1B_2, $[f]_{B_1B_2}$

b) 1) Scrieţi cine este Ker f în cazul nostru.

2) De ce avem nevoie pentru a determina dimensiunea lui Ker f?

3) Sub ce formă trebuie sa-l scriem pe Ker f?

4) Scrieţi Ker f ca o acoperire liniară $L(B_3)$.

$B_3 = \{X + 2\}$.

5) Ce este B_3 pentru Ker f? De ce?

6) Studiaţi dacă B_3 este bază pentru Ker f.

7) Care este dim Ker f? De ce?

8) Este f injectivă? De ce?

c) 1) Scrieţi **domeniul** lui f.

2) Scrieţi baza canonică din spaţiul **domeniului** lui f.

3) Sub ce formă scriem Im f? Ce propoziţie din curs folosim?

$$Im\ f = L(B_4)$$

4) Calculaţi vectorii din B_4.
$f(\bar{e}_1) = f(X) =^{a=1,b=0} (2,4)$.

$B_4 = \{\overline{w_1} = (2,4),\ \overline{w_1} = (1,2)\}$.

5) Ce este B_4 pentru Im f? De ce?

6) Ce ar mai trebui să fie B_4 pentru a fi o bază a lui Im f?

7) Studiaţi dacă B_4 este o bază a lui Im f

8) Cum alegem o bază dintr-un sistem de generatori liniar dependent?
O bază e formată din vectorii corespunzători coloanelor unui minor principal al matricei sistemului.

9) Găsiţi o bază a lui Im f.

10) Care este dimensiunea lui Im f? De ce?

11) Scrieţi **codomeniul** lui f.

12) Scrieţi baza canonică din spaţiul **codomeniului** lui f.

13) Care este dimensiunea acestui spaţiu? De ce?

14) Este f surjectivă? De ce?

15) Dar bijectivă? De ce?

Temă. Fie $f : M_{3\times1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_1[x]$, $f\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = aX + a + b - c$. Să se afle:

a) Matricea lui f în perechea de baze B_cB, $[f]_{B_cB}$, unde B_c este baza canonică din domeniul de definiţie al lui f şi $B = \{\overline{p_1} = X - 1, \overline{p_2} = X\}$.
Răspuns. $[f]_{B_cB} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

b) Ker f şi dim Ker f. Este f injectivă? Justificaţi.
Răspuns. Ker $f = L\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$. dim Ker $f = 1$. f nu este injectivă.

c) Im f şi dim Im f. Este f surjectivă? Dar bijectivă? Justificaţi.
Răspuns. Im $f = L(\{X + 1, 1, -1\})$. dim Im $f = 2$. f este surjectivă.

Exemplu. Fie operatorul liniar $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$,

$f(aX^2 + bX + c) = (-a + 3b - c)X^2 + (-3a + 5b - c)X - 3a + 3b + c.$

a) Să se studieze dacă f este diagonalizabil. În caz afirmativ să se aducă la forma diagonală şi să se precizeze baza în care are această formă.

b) Să se calculeze folosind teorema lui Hamilton Cayley A^{-1}, unde $A = [f]_{B_C}$.

Soluţie.

a) 1) Scrieţi matricea lui f în baza canonică $A = [f]_{B_C}$.

2) Cum calculăm polinomul caracteristic?

3) Scrieţi polinomul caracteristic sub formă de produs de facrori primi.

$$p(\lambda) = -(\lambda - 1)^{\boxed{1}}(\lambda - 2)^{\boxed{2}}$$

4) Scrieţi valorile proprii şi ordinul lor de multiplicitate. De unde se ia ordinul de multiplicitate al fiecărei valori proprii?

$\lambda_1 =$ $\qquad$ $\text{om}(\lambda_1 = \quad) = \boxed{1}$

$\lambda_2 =$ $\qquad$ $\text{om}(\lambda_2 = \quad) = \boxed{2}$

Calculăm subspaţiile proprii corespunzătoare fiecărei valori proprii şi comparăm $\boxed{\textit{dimensiunea}}$ subspaţiului cu $\boxed{\textit{ordinul de multiplicitate}}$ al valorii proprii corespunzătoare:

5) $S_{\lambda_1=\boxed{1}} = \left\{ aX^2+bX+c \in \mathbb{R}_2[X] | (A - \boxed{} I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} =$

$= \left\{ aX^2+bX+c \in \mathbb{R}_2[X] | \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

6) Scrieţi şi rezolvaţi sistemul obţinut.

7) Unde înlocuim soluţiile obţinute?

8) Scrieţi acest subspaţiu ca o acoperire liniară $S_{\lambda_1=1} = L(B_1)$

9) $\boxed{B_1 = \{\bar{p}_1 = X^2 + X + 1\}}$

10) Stabiliţi dacă B_1 este bază pentru $S_{\lambda_1=1}$

11) Care este dimensiunea lui $S_{\lambda_1=1}$ şi cu cine o comparăm?

Reluăm paşii de mai sus pentru cealaltă valoare proprie.

12) $S_{\lambda_2=\boxed{}} = \left\{ aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X] | (A - \boxed{} I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} =$

$= \left\{ aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X] | \begin{bmatrix} & & \boxed{} \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

13) Scrieţi şi rezolvaţi sistemul obţinut.

14) Unde înlocuim soluţiile obţinute?

15) Scrieţi acest subspaţiu ca o acoperire liniară $S_{\lambda_2=2} = L(B_2)$

16) $\boxed{B_2 = \{\bar{p}_2 = X^2 - 3,\ \bar{p}_3 = X + 3\}}$

17) Stabiliţi dacă B_2 este bază pentru $S_{\lambda_2=2}$

18) Care este dimensiunea lui $S_{\lambda_2=2}$ şi cu cine o comparăm?

19) Este matricea A diagonalizabilă? De ce? Ce teoremă folosim?

20) Ce se întâmplă dacă nu sunt îndeplinite condiţiile teoremei?

21) Scrieţi forma diagonală a lui A. Contează ordinea valorilor proprii?

22) Din 9) şi 16) deducem că baza în care matricea A are forma diagonală este

23) Contează ordinea vectorilor în bază?

b) 1) Scrieţi teorema lui Hamilton Cayley pentru matricea A.

2) Scrieţi polinomul caracteristic ca un polinom de gradul 3

$$p(\lambda) = -(\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4)$$

3) Ce ecuaţie rezultă din teorema lui Hamilton Cayley?

4) Pe cine scoatem explicit din această ecuaţie?

5) Dacă nu se poate ce deducem?

6) Cu cât este egal I_3 din ecuaţia de la punctul 3)?

7) Cu cine înmulţim acestă ecuaţie?

8) Cât este A^{-1}?

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ 6 & -4 & 2 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \\ \dfrac{3}{2} & -1 & \dfrac{1}{2} \\ \\ \dfrac{3}{2} & -\dfrac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Temă. Fie operatorul liniar $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x, y, z) = (4x - 3y + 7z, y + 5z, z).$$

a) Să se studieze dacă f este diagonalizabil. În caz afirmativ să se aducă la forma diagonală şi să se precizeze baza în care are această formă.
Răspuns. Nu este diagonalizabil.

b) Să se calculeze folosind teorema lui Hamilton Cayley A^{-1}, unde $A = [f]_{B_C}$.

Răspuns. $A^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -22 \\ 0 & 4 & -20 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{11}{2} \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$