Seminar 1-2. Şiruri şi serii de numere reale.

EXERCIŢII PROPUSE

1. Studiaţi monotonia următoarelor şiruri:
   (a) $a_n = \frac{n-1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$;
   (b) $a_n = \frac{n+2}{3^n}, \quad n \in \mathbb{N}$.
2. Studiaţi convergenţa şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_n = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$.
3. Folosind definiţia arătaţi că şirul $a_n = \frac{2n-1}{2n+1}, n \geq 1$ converge la $a = 1$.
4. Calculaţi limitele următoarelor şiruri:
   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos n}{4^n}, \quad n \in \mathbb{N}$;
   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{4^n}, \quad n \in \mathbb{N}$;
   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}, \quad a \in \mathbb{N}^*$;
   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$;
   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + ... + \frac{1}{\ln n}\right)$.
5. Folosind criteriul general Cauchy arătaţi că şirul a_n este convergent, unde:
$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{(n+1)^2}, \quad n \geq 1.$$
6. Folosind şirul sumelor parţiale, studiaţi convergenţa seriilor:
   (a) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$;
   (b) $\sum\limits_{n\geq 1} \ln(1 + \frac{1}{n})$;
   (c) $\sum\limits_{n\geq 0} \Big[\arctan(n+1) - \arctan n\Big]$.
7. Studiaţi convergenţa următoarelor serii:
   (a) $\sum\limits_{n\geq 1} \ln \frac{3n+1}{n+1}$;
   (b) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$;
   (c) $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1}{n^2}$;
   (d) $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$;
   (e) $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n \frac{1}{n^2+(-1)^n}$.
8. Folosind criteriul general Cauchy arătaţi convergenţa seriei:
$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n(n+1)}, x \in \mathbb{R}.$$