SEMINAR 3
Schimbări de baze
Subspaţii vectoriale

Schimbări de baze:

Exemplu. Fie sistemele de vectori:

$$B_1 = \{\overline{v_1} = (1,1,0), \overline{v_2} = (1,0,0), \overline{v_3} = (1,1,2)\}$$

şi

$$B_2 = \{\overline{u_1} = (1,1,3), \overline{u_2} = (1,1,2), \overline{u_3} = (3,2,4)\}.$$

a) Să se arate că B_1 şi B_2 sunt baze;

b) Să se determine matricea de trecere de la baza B_1 la baza B_2, $T_{\overleftarrow{B_1 B_2}}$;

c) Să se găsească coordonatele vectorului $\bar{w} = (2,0,-2)$ relativ la bazele B_1, B_2 şi baza canonică B_c.

Soluţie.

a)

1) Din ce spaţiu vectorial fac parte sistemele de vectori B_1, respectiv B_2?

2) Care sunt coordonatele vectorilor din B_1 în baza canonică?
În cazul nostru ($\mathbb{R}^3$) ce observaţie din curs folosim?

3) Scrieţi A_{B_1} matricea sistemului de vectori B_1.

4) De ce avem nevoie pentru a aplica **Criteriul practic**?

5) Calculaţi rangul lui A_{B_1}

6) Ce se poate spune despre sistemul de vectori B_1? De ce?

7) Urmând paşii 2)-6), ce se poate spune despre sistemul de vectori B_2?

b)

1) Pentru a scrie matricea de trecere cerută (în cazul nostru $T_{\overleftarrow{B_1 B_2}}$) de unde trebuie să luăm vectorii şi în ce bază trebuie sa îi trecem? Cine ne indică aceasta?

2) În ce bază scriem iniţial vectorii?

3) Ce formulă din curs se foloseşte?

4) În ce bază trebuie să trecem vectorii?

5) Aplicaţi formula de schimbare a coordonatelor unui vector din baza canonică într-o altă bază pentru primul vector

$$\bar{u}_1 =^{not} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_{B_1}$$

   a) Scrieţi şi rezolvaţi sistemul care se obţine

b) Care este soluţia sistemului?

c) Unde înlocuim această soluţie?

d) Care sunt coordonatele vectorului în noua bază?

$$\bar{u_1} = \left(-\frac{1}{2}, 0,\ \frac{3}{2}\right)_{B_1}$$

e) Contează ordinea în care le-am pus?

6) Aplicaţi formula de schimbare a coordonatelor unui vector din baza canonică într-o altă bază pentru al doilea vector reluând paşii de la 5)

$$\bar{u}_2 =^{not} (\beta_1, \beta_2, \beta_3)_{B_1}$$

obţinem

$$\bar{u_2} = (0, 0,\ 1)_{B_1}$$

7) Aplicaţi formula de schimbare a coordonatelor unui vector din baza canonică într-o altă bază pentru al treilea vector reluând paşii de la 5)

$$\bar{u}_3 =^{not} (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)_{B_1}$$

.

obţinem

$$\bar{u_3} = (0, 1, 2)_{B_1}$$

8) Cum se pun în matricea de trecere coordonatele vectorilor $\bar{u_1}$, $\bar{u_2}$ şi $\bar{u_3}$ scrişi în baza B_1 aflate mai sus? Contează ordinea?

9) Scrieţi matricea de trecere $T_{\overleftarrow{B_1 B_2}}$.

c)

1) Scrieţi vectorul $\bar{w}$ în baza canonică. În cazul nostru ce observaţie din curs folosim?

2) Ce formulă folosim pentru a trece vectorul $\bar{w}$ în baza B_1?

3) Calculaţi coordonatele lui $\bar{w}$ în baza B_1.

.

4) Ce formulă folosim pentru a trece vectorul $\bar{w}$ în baza B_2?

5) Calculaţi coordonatele lui $\bar{w}$ în baza B_2.

Exerciţiu. Fie sistemele de vectori:

$$B_1 = \{\overline{p_1} = X + 2,\ \overline{p_2} = 2X + 3,\ \overline{p_3} = X^2 + X + 2\} \text{ şi}$$

$$B_2 = \{\overline{q_1} = X^2 - X - 1,\ \overline{q_2} = X + 2,\ \overline{q_3} = X + 1\}.$$

a) Să se arate că B_1 şi B_2 sunt baze;

Indicaţie: Se aplică **Criteriul practic**.

b) Să se determine matricea de trecere de la baza B_2 la baza B_1, $T_{\overleftarrow{B_2 B_1}}$;

Răspuns.

$$T_{\overleftarrow{B_2 B_1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Să se găsească coordonatele vectorului $\bar{p} = 2X + 4$ relativ la bazele B_1, B_2 şi baza canonică.

Răspuns.

$$\bar{p} = (2, 0, 0)_{B_1} = (0, 2, 0)_{B_2} = (0, 2, 4)_{B_c}.$$

d) **Temă.**
Să se determine matricea de trecere de la baza B_1 la baza B_2, $T_{\overleftarrow{B_1 B_2}}$;

Răspuns.

$$T_{\overleftarrow{B_2 B_1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Subspaţii vectoriale:

Exemplu. Stabiliţi dacă sistemul de vectori este subspaţiu vectorial, iar în caz afirmativ determinaţi o bază şi dimensiunea sa:

$$S = \left\{ aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; a - 2b = 0,\ a - b - 3c = 0 \right\}. \tag{1}$$

Soluţie.

1) Care este baza canonică din spaţiul vectorial $\mathbb{R}_2[X]$?

2) Cum se scrie vectorul $aX^2 + bX + c$ în baza canonică?

3) Ce ecuaţii trebuie să verifice coordonatele vectorilor din S relativ la baza canonică?

4) Sunt ecuaţii liniare omogene? De ce?

5) Este S subspaţiu vectorial? De ce?

Căutăm acum o bază pentru S:

6) Rezolvaţi sistemul de la 2).

7) Unde înlocuim soluţia obţinută?

8) Cum se poate scrie S ca şi acoperire liniară a unei mulţimi U?

9) Ce reprezintă sistemul de vectori S pentru spaţiul vectorial din care face parte? De ce?

10) Ce este U pentru S? De ce?

11) Cum mai trebuie să fie U ca să fie bază pentru S?

12) Cum studiem aceasta?

13) Este U bază pentru S? Justificaţi.

14) Care este dimensiunea lui S? De ce?

Exerciţiu. Justificaţi care dintre sistemele de vectori sunt subspaţii vectoriale. În caz afirmativ determinaţi-i o bază şi dimensiunea:

1. $S_1 = \left\{ aX + b \in \mathbb{R}_1[X] \;\middle|\; a - 2b + b^2 = 0 \right\}$

2. $S_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y - z = 0,\ 2x - y + 3 = 0 \right\}$

3. $S_3 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y = 0 \right\}$

4. $S_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; a - bc + d = 0 \right\}$

Temă.

5. $S_5 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(3,2)}(\mathbb{R}) \;\middle|\; a + 2f = 0,\; a - 3f = 0,\; b + c - 2d = 0 \right\}$

Indicaţie: Se aplică algoritmul de mai sus şi se deduce:

1. S_1 nu este subspaţiu vectorial

2. S_2 nu este subspaţiu vectorial

3. S_3 este subspaţiu vectorial, dim $S_2 = 2$

4. S_4 nu este subspaţiu vectorial

5. S_5 este subspaţiu vectorial, dim $S_5 = 3$