МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики

Кафедра многопроцессорных систем и сетей

Матричные игры

Лабораторная работа №1

Пажитных Ивана Павловича
студента 3 курса 1 группы
специальность "информатика"

Преподаватель:
Синяк Василий Сергеевич

Минск, 2016

Разрешимость в чистых стратегиях

1.1 Задача 1f

1.1.1 Условие

Показать, что матричная игра с матрицей $H = (h_{ij})_{nxm}$ имеет решение в чистых стратегиях, и найти такое решение, если:
$n = m$ и для любых $\forall i, j, k$ $1 \leqslant i, j, k \leqslant m$, имеет место тождество:

$$h_{ij} + h_{jk} + h_{ki} = 0$$

1.1.2 Решение

Найдём верхнее и нижние значения задачи:

$$\alpha = \max_i \min_j H(i, j) \tag{1.1}$$

$$\beta = \min_j \max_i H(i, j) \tag{1.2}$$

Учитывая, что $h_{ij} = -h_{jk} - h_{ki}$:

$$\begin{aligned} \alpha = \max_i \min_j (h_{ij}) = \max_i \min_j (-h_{jk} - h_{ki}) \\ = \max_i (-\min_j (h_{jk}) - h_{ki}) = -\min_j (h_{jk}) - \max_i (h_{ki}) \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} \beta = \min_j \max_i (h_{ij}) = \min_j \max_i (-h_{jk} - h_{ki}) \\ = \min_j (-h_{jk} - \max_i (h_{ki})) = -\min_j (h_{jk}) - \max_i (h_{ki}) \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\alpha(1.3) = \beta(1.4) \tag{1.5}$$

из этого следует, что существует решение в чистых стратегиях.

1.1.3 Пример

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Верхние и нижние значения совпадают:

$$\alpha = \beta = 0 \tag{1.6}$$

1.2 Задача 2d

1.2.1 Условие

Найти решение матричной игры с с матрицей $H = (h_{ij})_{nxm}$, если:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

1.2.2 Решение

Найдём минимумы по строкам и максимумы по столбцам:

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = -3, \tag{1.7}$$

$$\beta_1 = 5, \beta_2 = 4, \beta_3 = 4, \beta_4 = 5, \beta_5 = 1 \tag{1.8}$$

Найдём $max(\alpha_i), i = \overline{1,3}$ и $min(\beta_j), j = \overline{1,4}$:

$$\alpha = 1, i_0 = 1\beta = 1, j_0 = 5 \tag{1.9}$$

Верхнее и нижние значения игры совпадают,
следовательно задача разрешима в чистых стратегиях.
Оптимальные стратегия для первого - 1, для второго - 5

Смешанные стратегии

2.1 Задача 9

2.1.1 Условие

Проверить, являются ли данные смешанные стратегии и значение игры:

$$p = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, I = 4.$$

решением матричной игры с выигрышами:

$$H = \begin{pmatrix} 14 & -4 & 2 \\ -4 & 8 & 8 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

2.1.2 Решение

Найдём верхние и нижние значения игры по формуле:

$$\beta(\overline{p}, \overline{q}) = \alpha(\overline{p}, \overline{q}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} H(i,j) p_i q_j \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} \alpha(p,q) = \beta(p,q) = (14 * 0.25 * 0.33) + (-4 * 0.25 * 0.33) + (2 * 0.25 * 0.33) + \\ +(-4 * 0 * 0.33) + (8 * 0 * 0.33) + (8 * 0 * 0.33) + \\ +(4 * 0.25 * 0.33) + (4 * 0.25 * 0.33) + (4 * 0.25 * 0.33) + \\ +(2 * 0.5 * 0.33) + (8 * 0.5 * 0.33) + (2 * 0.5 * 0.33) = 4 \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\alpha(p,q) = \beta(p,q) = I \tag{2.3}$$

Поэтому стратегии p и q являются решением матричной игры для H