ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS DE UN MODELO ARMA

Nicolás Villegas Vargas, *Estudiante, Universidad EAFIT,* y María Camila Vásquez Correa, *Estudiante, Universidad EAFIT,*

***Resumen*—En el marco de la identificación de sistemas, se proponen inicialmente y de manera exploratoria modelos lineales que pueden explicar un conjunto de sucesos sujetos a ciertos parámetros. Los modelos de series de tiempo son algunos de ellos, que permiten modelar el comportamiento de este tipo de datos teniendo en cuenta su historia e innovaciones que suceden en el proceso. Para una correcta identificación, en este informe expondremos algunos métodos de estimación de parámetros basados en el método de mínimos cuadrados para modelos ARMA.**

***Palabras clave* — Python, Modelación Experimental, ARMA, estimación de parámetros, Series de tiempo.**

I. Introducción

La teoría de modelos de series temporales y los métodos se ilustran con muchos ejemplos y varios casos de estudio con problemas y datos que surgen de una variedad de campos aplicados, incluyendo procesamiento de señales, estudios biomédicos y finanzas [1].

La expresión serie de tiempo de datos, o serie de tiempo, generalmente se refiere a un conjunto de observaciones recogidas secuencialmente en el tiempo. Estas observaciones podrían haber sido recogidas en puntos de tiempo igualmente espaciados. En este caso utilizamos la notación Y_t para $t = 0, 1, \ldots$.

El objetivo de este trabajo es aplicar diferentes métodos de estimación de parámetros para un modelo auto regresivo de media móvil, con y sin exogeneidades, para comparar las propiedades asintóticas asociadas a ellos y, a su vez, dar un análisis de la pertinencia de la aplicación de estos métodos. Para ello debemos:

- Realizar la formulación matemática de los métodos de mínimos cuadrados, que nos permita identificar sus características teóricas.
- Simular un proceso ARMA y ARMAX, y aplicar los diferentes métodos de mínimos cuadrados para estimar sus parámetros.
- Analizar los resultados de las diferentes simulaciones y compararlos con los resultados teóricos obtenidos.

El trabajo está dividido de la siguiente manera: en la primera sección se introduce la formulación matemática del problema, más tarde se muestran las simulaciones realizadas, su análisis, las conclusiones que se sacaron de el trabajo y por último las referencias.

II. Definición del problema

Sea $u_t \sim N(0, \sigma^2)$ un ruido blanco y considere el proceso:

$$Y_t = \mu + \sum_{k=1}^{p} a_k Y_{t-k} + u_t + \sum_{j=1}^{q} d_j u_{t-j} \tag{1}$$

Donde μ, d_i para $i = 1, \ldots, q$ y a_i para $i = 1, \ldots, q$ son constantes. Esta serie de tiempo es el proceso auto regresivo de media móvil de orden p, q, denotado $ARMA(p, q)$.

II-A. Supuestos

Asumamos que el modelo tiene la forma $Y = X\beta + U$. Si se cumple que

I.) Linealidad en los coeficientes estimados (parámetros).
II.) No colinealidad perfecta: la matriz de datos tiene rango completo.
III.) Media condicional cero (exogeneidad): $E[u_t \mid X] = 0 \quad \forall t$
IV.) Homocedasticidad: $Var(u_t \mid X) = Var(u_t) = \sigma^2$
V.) Ausencia de correlación serial: $cov(u_t, u_s \mid X) = 0, t \neq s$
VI.) Normalidad: $u_t \sim N(0, \sigma^2)$

entonces se dice que el estimador de MCO es el MELI (Mejor Estimador Lineal Insesgado). Cuando se cumplen los supuestos 1, 2 y 3, entonces la estimación por MCO es eficiente y consistente. Pero si adicionalmente se cumplen los supuestos 4 y 5, entonces la estimación además de consistente también es insesgada. Un cumplimiento del último supuesto asegura que es posible realizar inferencia estadística con base en la estimación.

II-B. Descripción del método

El método de mínimos cuadrados se define para la estimación de los parámetros de un modelo lineal general del tipo:

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + D\zeta_t \tag{2}$$

Donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son constantes y $x_t \in \mathbb{R}^n$ es la variable endógena mientras $u_t \in \mathbb{R}^m$ es la variable exógena.

En general, queremos que los ruidos ζ_t sean normales no correlacionados, aunque veremos que dicho supuesto no siempre se cumple.

Veamos que en el modelo ARMA (y en ARMAX también) no se cumple el supuesto de ausencia de autocorrelación serial. Para ello asumamos que el proceso es debilmente estacionario. En otras palabras supongamos que $Var(Y_t) = Var(Y_{t-k})$ para todo $k \in \mathbb{Z}^+$ y además $E(Y_t) = E(Y_{t-k})$ para todo $k \in \mathbb{Z}^+$. Partiendo de este supuesto es fácil verificar que $E(Y_t) = 0$

para todo $t \in \mathbb{Z}^+$. Asumamos también que se cumplen los supuestos de I hasta IV. El supuesto que más utilizaremos es el de exogeneidad.
Sea $\tau \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Denotemos $\gamma_\tau = cov\left(Y_t, Y_{t-\tau}\right) = E\left(Y_t Y_{t-\tau}\right)$
Ahora calculemos

$$\begin{aligned}
E\left(u_t u_{t-1}\right) &= Cov(u_t, u_{t-1}) \\
&= E\left[\left(Y_t - \sum_{k=1}^{p} a_k Y_{t-k} - \sum_{j=1}^{q} d_j u_{t-j}\right)\right. \\
&\qquad \left.\left(Y_{t-1} - \sum_{k=1}^{p} a_k Y_{t-k-1} - \sum_{j=1}^{q} d_j u_{t-j-1}\right)\right] \\
&= E\left(Y_t Y_{t-1}\right) - \sum_{k=1}^{p} a_k E\left(Y_t Y_{t-k-1}\right) - \sum_{j=1}^{q} d_j E\left(Y_t u_{t-j-1}\right) - \dots \\
&\dots - \sum_{k=1}^{p} a_k E\left(Y_{t-1} Y_{t-k}\right) + \sum_{k=1}^{p} a_k^2 E\left(Y_{t-k} Y_{t-k-1}\right) + \dots \\
&\dots + \sum_{k=1}^{p} a_k \sum_{j=1}^{q} d_j E\left(Y_{t-k} u_{t-j-1}\right) - \sum_{j=1}^{q} d_j E\left(Y_{t-1} u_{t-j}\right) + \dots \\
&\dots + \sum_{k=1}^{p} a_k \sum_{j=1}^{q} d_j E\left(Y_{t-k-1} u_{t-j}\right) + \sum_{j=1}^{q} d_j^2 E\left(u_{t-k} u_{t-j-1}\right) \\
&= \gamma_1 - \sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_{k+1} - \sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_{k-1} + \sum_{k=1}^{p} a_k^2 \gamma_1 + \dots \\
&\qquad \dots + \sum_{k=1}^{p} a_k \sum_{j=1}^{q} d_j E\left(Y_{t-k} u_{t-j-1}\right) + \dots \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

Luego, como no se cumple siempre que $Cov(u_t, u_{t-k}) = 0$ con $k \in \mathbb{Z}^+$ entonces se viola el supuesto de no autocorrelación serial y por lo tanto no se puede garantizar la insesgadez de los estimadores obtenidos mediante MCO al aplicar el método a datos provenientes de un modelo ARMAX.

II-B1. Mínimos cuadrados ordinarios: Definamos $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $C := [A, B] \in \mathbb{R}^{n\times(n+m)}$ y $\beta_t := \left(x_t^T, u_t^T\right)^T \in \mathbb{R}^{(n+m)}$. Nuestro problema de optimización para encontrar la matriz C será entonces:

$$\min_{C\in\mathbb{R}^{n\times(n+m)}} \sum_{s=0}^{t} \|x_{s+1} - X\beta_s\|^2 \tag{3}$$

Cuya solución óptima está dada por:

$$\hat{C} := V_t^T G_t^{-1} \tag{4}$$

$$V_t := \sum_{s=0}^{t} \beta_s x_{s+1}^T \tag{5}$$

$$G_t := \sum_{s=0}^{t} \beta_s \beta_s^T \tag{6}$$

Este estimador de la matriz C es insesgado y asintóticamente convergente a la matriz real, siempre que se cumplan los supuestos antes mencionados.

II-B2. Mínimos cuadrados recursivos: El método de mínimos cuadrados recursivos tiene mejores características que el método de mínimos cuadrados ordinarios. Por ejemplo se reduce el uso del procesador de memoria y también se reduce la complejidad, además la velocidad de cálculo aumenta. El método consiste en la aplicación recursiva del siguiente algorítmo:

$$\hat{C}_0 := V_0^T G_0^{-1}; \qquad \Gamma_0 := G_0^{-1} \tag{0}$$

$$\Gamma_{t+1} := \Gamma_t - \frac{\Gamma_t \beta_{t+1} \beta_{t+1}^T \Gamma_t}{1 + \beta_{t+1}^T \Gamma_t \beta_{t+1}} \tag{I}$$

$$\hat{C}_{t+1} =: \hat{C}_t + \left(x_{t+2} - \hat{C}_t \beta_{t+1}\right) \beta_{t+1}^T \Gamma_{t+1} \tag{II}$$

El paso (0) consiste en la inicialización, el paso (I) consiste en la recursión auxiliar y el paso (II) se denomina recursión principal. En términos generales el método de mínimos cuadrados recursivos consiste en, partiendo de la inicialización, repetir los pasos (I) y (II) de manera secuencial.

II-C. *Variables Instrumentales*

En el caso en el que se viola el supuesto de autocorrelación serial resulta útil el uso del método de variables instrumentales debido a que MCO presenta problemas. Los modelos ARMA en general violan este supuesto debido a su componente de Medias Móviles. Entonces se define la variable instrumental $v_t := x_{t-q}$ y de esta manera:

$$\hat{A}_t^{\ v} = (V_t^v)^T (G_t^v)^{-1}$$

donde:

$$V_t^v = \sum_{s=0}^{t} v_s x_{s+1}^T$$

$$G_t^v = \sum_{s=0}^{t} x_s v_s^T$$

Veamos que utilizando la variable instrumental v_t se soluciona el problema de autocorrelación serial. Asumamos que se cumplen los 4 primeros supuestos mencionados en la sección II-A. Entonces calculemos

$$\begin{aligned}
E\left(u_t u_{t-q}\right) &= Cov(u_t, u_{t-q}) \\
&= E\left[\left(Y_t - \sum_{k=1}^{p} a_k Y_{t-k} - \sum_{j=1}^{q} d_j u_{t-j}\right)\right. \\
&\qquad \left.\left(Y_{t-q} - \sum_{k=1}^{p} a_k Y_{t-k-q} - \sum_{j=1}^{q} d_j u_{t-j-q}\right)\right] \\
&= E\left(Y_t Y_{t-q}\right) - \sum_{k=1}^{p} a_k E\left(Y_t Y_{t-k-q}\right) - \sum_{j=1}^{q} d_j E\left(Y_t u_{t-j-q}\right) - \dots \\
&\dots - \sum_{k=1}^{p} a_k E\left(Y_{t-q} Y_{t-k}\right) + \sum_{k=1}^{p} a_k^2 E\left(Y_{t-k} Y_{t-k-q}\right) + \dots \\
&\dots + \sum_{k=1}^{p} a_k \sum_{j=1}^{q} d_j E\left(Y_{t-k} u_{t-j-q}\right) - \sum_{j=1}^{q} d_j E\left(Y_{t-q} u_{t-j}\right) + \dots \\
&\dots + \sum_{k=1}^{p} a_k \sum_{j=1}^{q} d_j E\left(Y_{t-k-q} u_{t-j}\right) + \sum_{j=1}^{q} d_j^2 E\left(u_{t-j-} u_{t-j-q}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Notese que debido a los supuestos asumidos (principalmente los de exogeneidad y homocedasticidad) se llega directamente al resultado. También es importante resaltar que lo descrito anteriormente no se límita a un único caso. Es decir, $E\left(u_t u_{t-q-k}\right) = 0$ para $k \in \mathbb{Z}^+$.

En consecuencia, el uso del q-ésimo rezago como variable instrumental produce un nuevo modelo en el cual se cumple el supuesto de ausencia de autocorrelación serial. De este modo se asegura la obtención de estimadores insesgados y eficientes (siempre y cuando los demás supuestos también se cumplan).

II-D. *Descripción del modelo*

Un modelo ARMA se representa de la siguiente manera:

$$z_t = a_1 z_{t-1} + \ldots + a_p z_{t-p} + \xi_t + d_1 \xi_{t-1} + \ldots + d_q \xi_{t-q}$$

Además también puede ser llevado a la forma de un Modelo Lineal General así:

$$X_{t+1} = AX_t + BU_t + D\zeta_t$$

donde $B = 0$ y además

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{p-1} & a_p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & d_1 & \cdots & d_q \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$X_t = \begin{bmatrix} z_t \\ z_{t-1} \\ \vdots \\ z_{t-p} \end{bmatrix}, \quad \zeta_t = \begin{bmatrix} \xi_t \\ \xi_{t-1} \\ \vdots \\ \xi_{t-q} \end{bmatrix}$$

Cuando $U \neq 0$ entonces en el modelo se consideran exogeneidades o entradas.

III. Experimentación Computacional

A continuación se presentan los resultados obtenidos al aplicar cada uno de los métodos mencionados a unos datos simulados. Toda la experimentación computacional se realiza en **Python**.

Primero simulamos un proceso ARMA(2,2) donde

$$A = \begin{bmatrix} 0.75 & -0.25 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.35 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En la figura 1 se presenta el resultado de la simulación.

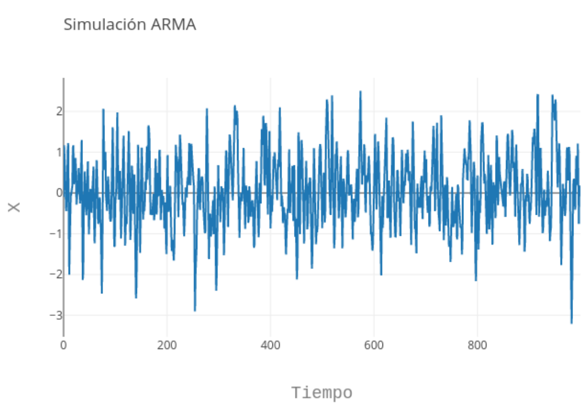

Figura 1. Proceso ARMA(2,2) simulado

Después se simula un proceso ARMAX(2,2) en donde se utiliza las mismas matrices A y D. Además se utiliza como entrada la función $u_t = 2+3*\sin(2\pi t)$. En la figura 2 se puede apreciar el comportamiento del proceso y su comparación con la entrada descrita.

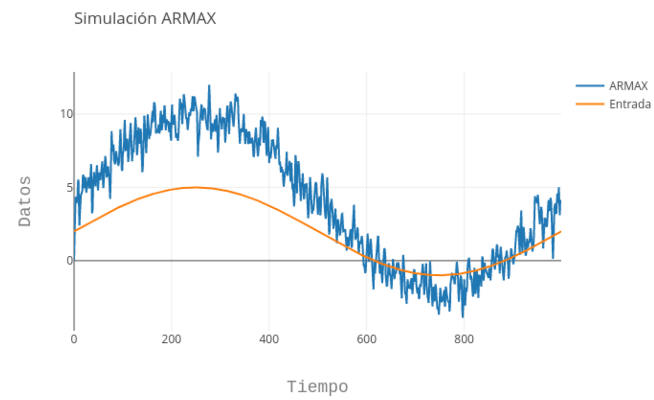

Figura 2. Proceso ARMAX(2,2) simulado

A continuación se exponen los resultados obtenidos mediante la aplicación de cada uno de los métodos antes mencionados.

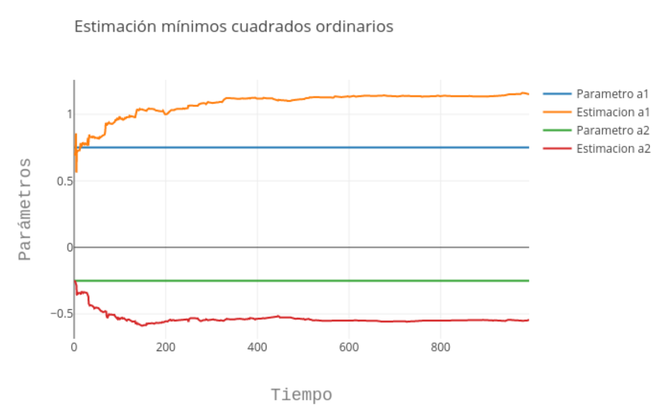

Figura 3. Método de MCO aplicado al proceso ARMA(2,2)

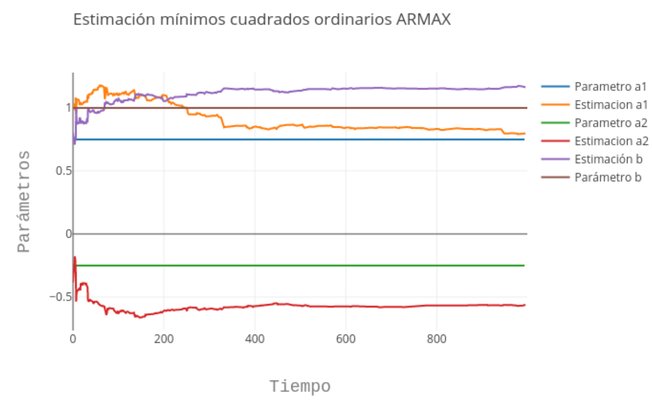

Figura 4. Método de MCO aplicado a el proceso ARMAX(2,2)

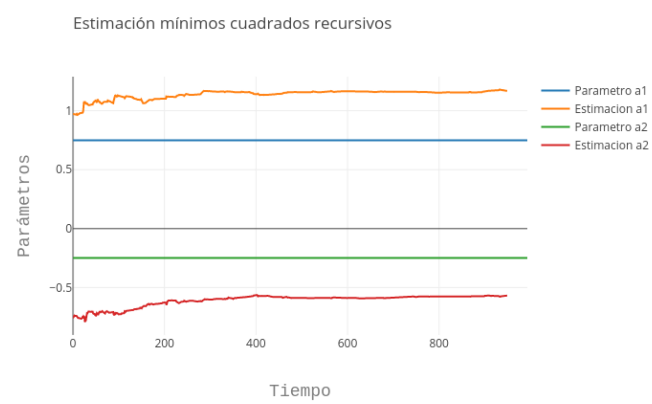

Figura 5. Método de Mínimos Cuadrados Recursivos aplicado al proceso ARMA(2,2)

Lo siguiente es aplicar el método de variables instrumentales utilizando $z_{t-q} = z_{t-2}$ como instrumento.

Figura 6. Método de Variables Instrumentales aplicado al proceso ARMA(2,2)

A continuación se analizan todos los resultados obtenidos con el objetivo de determinar en el contexto de los modelos ARMAX cual de los métodos considerados presenta mejor rendimiento en términos de la precisión en la estimación.

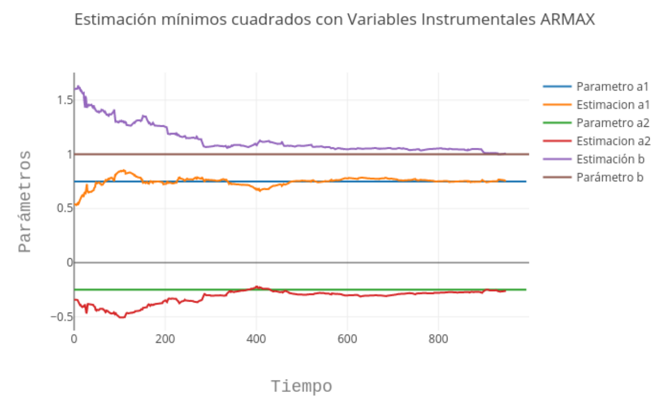

Figura 7. Método de Variables Instrumentales aplicado a el proceso ARMAX(2,2)

IV. Análisis de resultados

Bajo determinados supuestos el estimador $\hat{\beta}_{MCO}$ de Mínimos Cuadrados Ordinarios es el Mejor Estimador Lineal Insesgado (MELI). Uno de estos supuestos es el ausencia de autocorrelación serial, el cual se ve violado en todo modelo ARMA(p,q) debido a la parte MA(q). Es decir, la componente de medias móviles presente en los modelos ARMA (y ARMAX también) es la responsable de generar problemas de autocorrelación en el modelo lo cual induce a la obtención de estimadores sesgados e ineficientes cuando se aplica el método de MCO.

En consecuencia los resultados obtenidos en las figuras 3 y 4 son resultados previamente esperados. En ambas gráficas se puede apreciar que conforme el tiempo avanza, los estimadores tienden a estabilizarse en torno a un valor que difiere del real. A esta diferencia se le conoce como sesgo.

Por otro lado, si bien el método de Mínimos Cuadrados Recursivos presenta un mejor rendimiento en términos computacionales que el método de Mínimos Cuadrados Ordinarios, la violación del supuesto de ausencia de autocorrelación serial también afecta su rendimiento y por lo tanto, al igual que aplicando MCO, se obtienen estimadores ineficientes y sesgados. En general el método de Mínimos Cuadrados Recursivos se aplica cuando se busca mejorar el rendimiento computacional y se tiene certeza sobre el cumplimiento de los supuestos de MCO.

Finalmente, en las figuras 6 y 7 se puede entrever que el método de Variables Instrumentales es el que mejor rendimiento presenta en términos de precisión en los estimadores. El buen rendimiento del método se debe a que el uso de la variable rezagada como instrumento subsana el problema de autocorrelación presente en todo modelo ARMA (y ARMAX) y de esta manera se realiza un tratamiento matemático del problema que induce al cumplimiento de los supuestos necesarios para obtener estimadores insesgados y eficientes.

V. Conclusiones

Los métodos de Mínimos Cuadrados Ordinarios y Mínimos Cuadrados Recursivos no son la mejor alternativa para abordar modelos de la familia ARMAX ya que la violación del supuesto de ausencia de autocorrelación serial induce a errores en la estimación. Para solucionar el problema de autocorrelación basta con utilizar el q-ésimo rezago de la variable dependiente como instrumento y aplicar el método de variables instrumentales.

Referencias

[1] R. Prado and M. West, *Time series: modeling, computation, and inference*. Chapman and Hall/CRC, 2010.