

Métodos numéricos para la valoración de opciones

Proyecto final, procesos estocásticos II

Paola Andrea Fernández López, Juliana Vallejo Díez y María Camila Vásquez Correa

Abstract—Se evalúan, para acciones, materias primas y fenómenos atmosféricos, diferentes procesos estocásticos generadores y, adicionalmente, se encuentran los valores de las opciones para cada uno de ellos, haciendo uso de métodos numéricos como la simulación montecarlo, los árboles binomiales y las diferencias finitas.

I. MOVIMIENTO BROWNIANO GEOMÉTRICO

Micron Technology, Inc., a través de sus subsidiarias, fabrica y comercializa chips de memoria de acceso aleatorio dinámico (DRAM), chips de memoria de acceso aleatorio estático (SRAM), memoria flash, componentes de semiconductores y módulos de memoria. En la Figura 1 se muestra la gráfica para el precio de las acciones de esta compañía.



Fig. 1. Gráfica del precio de las acciones para Micron Technology, Inc.

Para las acciones de Micron Technology, Inc., se realizaron pruebas de normalidad sobre los retornos instantáneos, que se muestran en la Figura 2 para determinar si podían ser modeladas como un Movimiento Browniano geométrico. En la Figura 3 se muestra el histograma para estos datos. Asimismo, se determinó el coeficiente de Hurst y la dimensión fractal para los datos, y se graficó la autocorrelación parcial. En la Tabla I se muestran los resultados para los tests.

En el caso de los tests de normalidad, se puede observar que en ambos casos no hay suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula de normalidad. En el caso del coeficiente de Hurst y la dimensión fractal observamos que los valores suman casi 2, lo que, junto con el gráfico de autocorrelación parcial de la Figura 4, que se concentra en los primeros dos rezagos, sabemos que esta acción puede

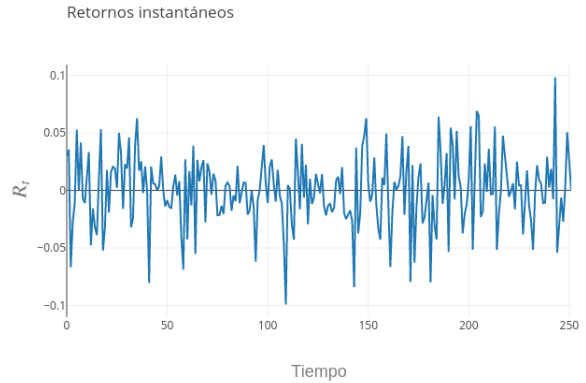


Fig. 2. Retornos instantáneos para Micron Technology, Inc.

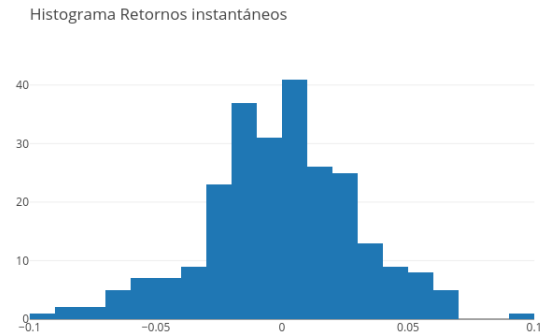


Fig. 3. Histograma de retornos instantáneos para Micron Technology, Inc.

ser modelada como un movimiento browniano geométrico.

TABLE I

RESULTADOS PARA TEST EN LOS RETORNOS INSTANTÁNEOS.
IZQUIERDA: P-VALOR PARA LOS TEST DE NORMALIDAD. DERECHA:
RESULTADOS PARA TESTS DE DIMENSIÓN FRACTAL Y COEFICIENTE DE
HURST.

Jarque Bera	Shapiro Wilks	Coefficiente de Hurst	Dimensión Fractal
0.066684	0.085535	0.429953	1.494463

Con esta información, nos proponemos realizar la estimación de parámetros con el método de máxima verosimilitud de los retornos instantáneos descrito en [1], para el movimiento browniano geométrico que es solución de la

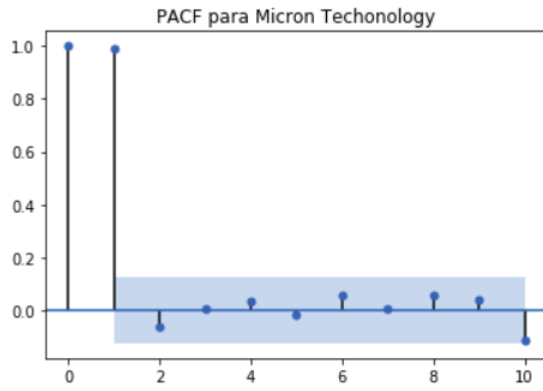


Fig. 4. Gráfica de autocorrelación parcial precio de Micron Technology, Inc.

ecuación:

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \quad (1)$$

Los parámetros estimados son: $\mu : -0.048$ y $\sigma : 0.48$. Con ellos, se realizan 1000 simulaciones utilizando el esquema numérico de Euler ($dt = 1/252$), que se muestran en la Figura 5. El error relativo asociado a estas simulaciones es del 3%, lo que indica un buen ajuste de los parámetros del modelo de los datos.

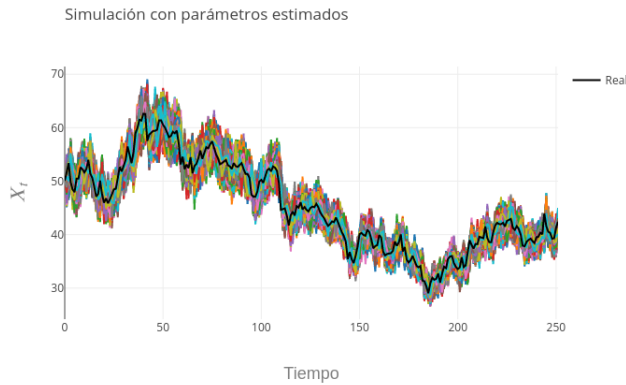


Fig. 5. 1000 trayectorias con los parámetros estimados.

Ahora, con estos parámetros, nos proponemos encontrar el valor de una opción europea call para diferentes tiempos de maduración T , con un precio de ejercicio $K = 46.6$. Para ello, nos basamos inicialmente en el modelo de Black-Scholes, descrito en [2], que proporciona una solución analítica al problema. Después, empleamos Simulación Montecarlo, Árboles Binomiales y el método de diferencias finitas para encontrar el valor de la opción. Los resultados se muestran en la Tabla II.

II. PROCESO DE REVERSIÓN A LA MEDIA CON TENDENCIA CONSTANTE

Algunas materias primas, como por ejemplo las semillas de colza, cuya gráfica se muestra en la Figura 6, pueden ser

TABLE II
OPCIONES PARA DIFERENTES TIEMPOS DE MADURACIÓN CON DIFERENTES MÉTODOS NUMÉRICOS.

T	0.25	0.50	1.00	0.17
Black Scholes	2.67	4.54	7.34	1.89
Simulación Montecarlo	2.68	4.62	7.06	1.91
Árboles binomiales	2.69	4.51	7.36	1.89
Diferencias Finitas	2.66	4.53	7.21	1.88

modeladas como un proceso de este tipo, que es la solución de la ecuación:

$$dX_t = \alpha(\mu - X_t)dt + \sigma X_t^\gamma dB_t \quad (2)$$

donde:

- $\alpha > 0$ es la tasa de reversión.
- μ es el nivel medio de reversión.
- $\sigma > 0$ está asociado con la volatilidad.
- $\gamma \in [0, 3/2]$ determina la sensibilidad de la varianza.



Fig. 6. Precio para las semillas de colza.

En el proceso de identificación para reconocer que el precio de esta materia prima efectivamente puede ser modelado de esta manera, realizamos test de normalidad para las diferencias de la serie, y de nuevo encontramos el coeficiente de Hurst y la dimensión fractal de esta, que se muestra en la Figura 7, junto con el histograma en la Figura 8. En la Tabla III se muestran los resultados para los tests aplicados y, adicionalmente en la Figura 10 se muestra la gráfica de autocorrelación parcial para la serie de precios.

TABLE III
RESULTADOS PARA TEST EN LAS DIFERENCIAS. IZQUIERDA: P-VALOR PARA LOS TEST DE NORMALIDAD. DERECHA: RESULTADOS PARA TESTS DE DIMENSIÓN FRACTAL Y COEFICIENTE DE HURST.

Jarque Bera	Shapiro Wilks	Coefficiente de Hurst	Dimensión Fractal
0.963824	0.427923	0.476449	1.503126

Dados los resultados de la Tabla III, podemos ver que los tests de normalidad no pueden rechazar que la serie en

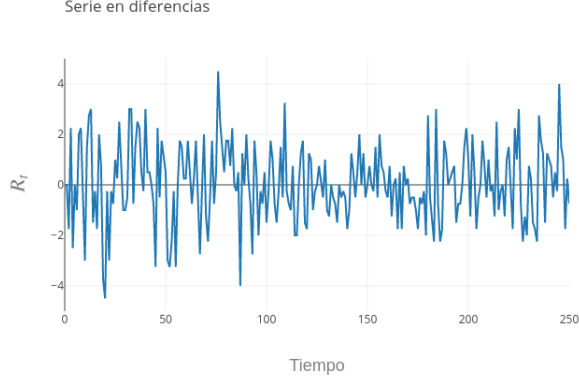


Fig. 7. Serie en diferencias para el precio de las semillas de colza

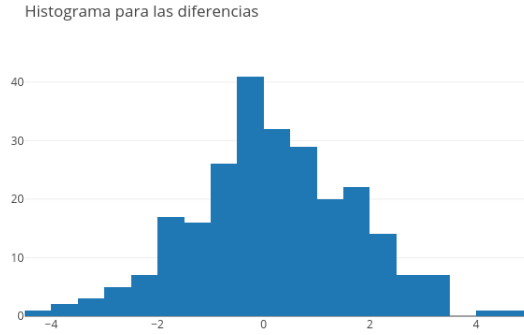


Fig. 8. Histograma para la serie en diferencias del precio de las semillas de colza.

diferencias provenga de una distribución normal y la suma del coeficiente de Hurst y la dimensión fractal da casi cero. Esto sumado a que la gráfica de autocorrelación parcial se concentra en los dos primeros rezagos, nos deja modelar el proceso como un proceso de reversión a la media con parámetros constantes. Suponiendo que $\gamma = 0$, y siguiendo la metodología propuesta en [3], estimamos los parámetros para este modelo. El resultado es $\alpha : 9.39$, $\sigma : 23.77$ y $\mu : 364.86$. Con estos parámetros y el esquema numérico de Euler simulamos 1000 trayectorias, cuya gráfica se muestra en la Figura 9 y cuyo error relativo medio es del 0.4%.

Finalmente, con σ estimado podemos encontrar el valor de la opción para el precio de la semilla de colza. En este caso, probamos de nuevo con los mismos tiempos de maduración, aunque en este caso tendremos un precio de ejercicio $K = 332.77$. Los resultados de aplicar diferentes métodos numéricos a la valoración de estas opciones se muestran en la Tabla IV.

III. PROCESO DE REVERSIÓN A LA MEDIA CON TENDENCIA FUNCIONAL

El comportamiento del clima tiene un efecto directo en la economía mundial, incluyendo industrias como la energética, la agrícola y el turismo. En este sentido, el

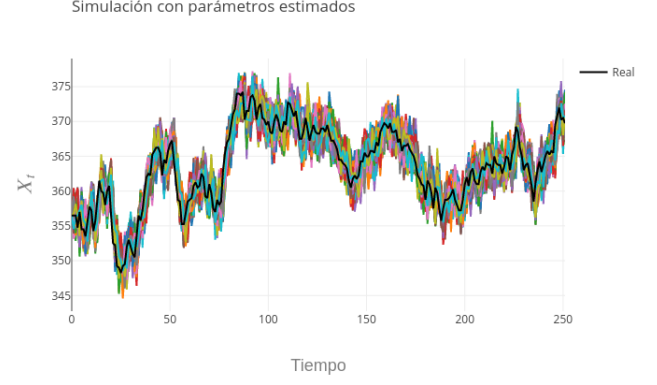


Fig. 9. Simulación de 1000 trayectorias con los parámetros estimados para el modelo de las semillas de colza.

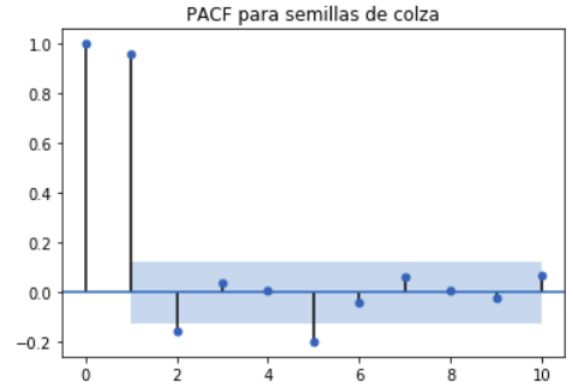


Fig. 10. Gráfico de autocorrelación parcial para el precio de las semillas de colza

TABLE IV
VALOR DE LA OPCIÓN PARA LA SEMILLA DE COLZA.

T	0.25	0.50	1.00	0.17
Simulación Montecarlo	41.07	45.05	53.02	39.89
Árboles binomiales	41.09	45.15	53.15	39.72
Diferencias Finitas	41.06	45.16	53.24	39.69

mercado demanda el desarrollo de modelos que permitan explicar las dinámicas de derivados climáticos, es decir, contratos financieros con pagos que dependen del clima en alguna forma [4]. Así, la temperatura resulta explicar en gran medida el comportamiento del clima, por lo que es ampliamente usada para este tipo de estudios. La Figura 11 muestra la temperatura, en grados centígrados*10 de la provincia de Albacete, en España, entre 1993 y 1995.

Según la información que provee la gráfica, tendríamos la hipótesis de que la temperatura en esta provincia española puede ser modelada como un proceso de reversión a la media con tendencia funcional, es decir, una solución a la ecuación:

$$dX_t = \alpha(\mu(t) - X_t)dt + \sigma X_t^\gamma dB_t \quad (3)$$

donde:

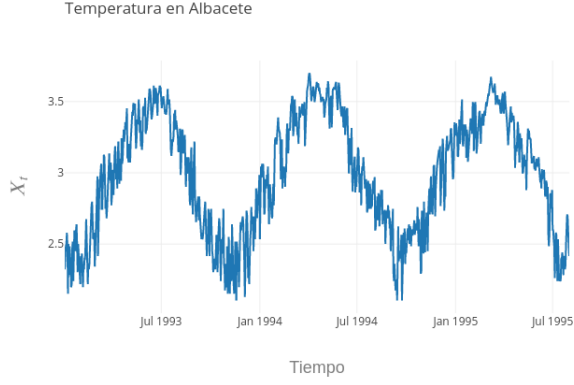


Fig. 11. Gráfica de la temperatura de Albacete.

- $\alpha > 0$ es la tasa de reversión.
- $\mu(t)$ es una función determinista, el nivel medio de reversión.
- $\sigma > 0$ está asociado con la volatilidad.
- $\gamma \in [0, 3/2]$ determina la sensibilidad de la varianza.

Para ello, siguiendo el procedimiento planteado en [5], queremos que la serie satisfaga los requerimientos de coeficiente de Hurst y Dimensión fractal con suma cercana a 2 y una autocorrelación parcial centrada en los dos primeros rezagos, como se puede ver en la Figura 12. Asimismo, el histograma de los datos en la Figura 13.

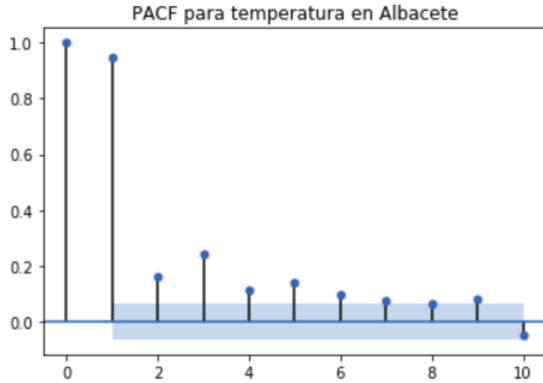


Fig. 12. Gráfica de autocorrelación parcial para la temperatura en Albacete.

Se realiza entonces la estimación de parámetros para el modelo (Ecuación 3) utilizando una forma funcional para la media de la forma:

$$\mu(t) = a \cos(2\pi t + b) + c, t \in [0, T]$$

Los resultados obtenidos para $\gamma = 0$ y $\gamma = 1$ se presentan en la Tabla V, además del error relativo medio de la diferencia entre los datos y 1000 simulaciones realizadas con los parámetros estimados. Por el error obtenido, se escoge $\gamma = 0$, la tendencia estimada para este valor se muestra en la Figura 14, y la simulación de 1000 trayectorias con los parámetros estimados se muestra en la Figura 15.

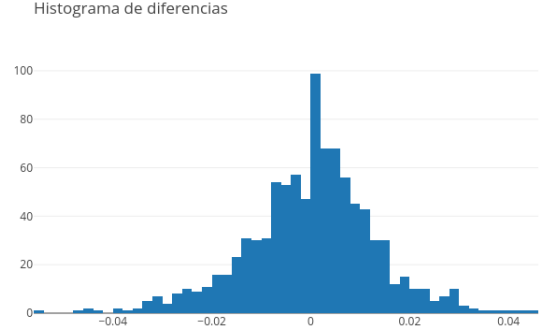


Fig. 13. Histograma para las diferencias del logaritmo de la temperatura.

TABLE V
PARÁMETROS ESTIMADOS

γ	0	1
$\hat{\alpha}$	1.1476	67.0696
\hat{a}	-0.3899	-0.2568
\hat{b}	1.2218	1.4258
\hat{c}	2.9242	2.9596
$\hat{\sigma}$	2.5033	0.9105
ϵ	0.0356	0.0418

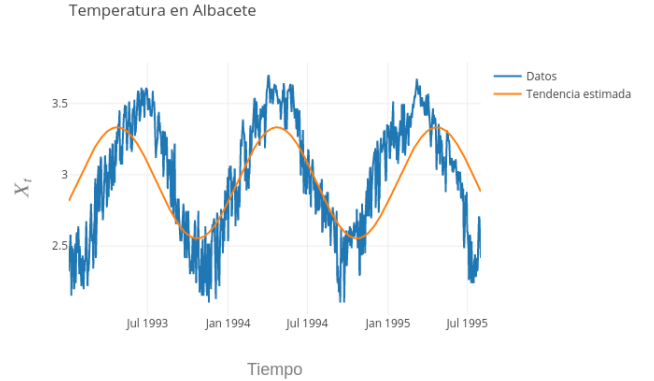


Fig. 14. Función de tendencia estimada.

Ahora, suponiendo que cada grado de temperatura cuesta \$1000, haremos la valoración de opciones para el proceso generador de la temperatura en Albacete. Para valorar la opción se utiliza la ecuación diferencial estocástica con riesgo neutral dada por:

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t^\gamma dB_t^* \quad (4)$$

Donde r corresponde a la tasa de interés libre de riesgo. Para encontrar el valor de la opción se implementaron 3 métodos numéricos: simulación Montecarlo, árboles binomiales, y diferencia finitas. La tabla VI muestra los resultados de los experimentos computacionales considerando distintos tiempos de maduración para la opción.

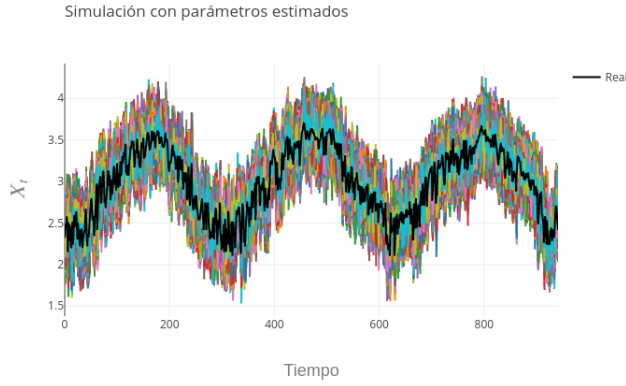


Fig. 15. Simulación de 1000 trayectorias con los parámetros estimados.

TABLE VI

VALORACIÓN DE LA OPCIÓN PARA LA REMPERATURA DE ALBACETE

T	0.25	0.50	1.00	0.17
Simulación Montecarlo	\$559.49	\$830.82	\$1231.43	\$453.01
Árboles binomiales	\$552.83	\$816.01	\$1215.59	\$442.12
Diferencias Finitas	\$447531	\$884.15	\$1180.66	\$299.59

IV. CONCLUSIONES:

A partir de los procesos analizados es posible concluir que para dotar a los datos de un modelo específico, es necesario verificar que, en efecto, los datos tienen este comportamiento. En la Sección I se verifica que la dinámica del precio de la acción analizada es explicada por una ecuación diferencial estocástica, cuya solución es un movimiento browniano geométrico. Esto incluye verificar las condiciones de los retornos instantáneos, el coeficiente de Hurst, la dimensión fractal y la autocorrelación parcial concentrada en los dos primeros rezagos. Una vez demostrado esto, se implementó la estimación de parámetros por máxima verosimilitud de la ecuación diferencial estocástica. La Figura 5 permite apreciar que la estimación de los parámetros es apropiada para el conjunto de datos actuales, ya que el error de error relativo asociado a 1.000 simulaciones es del 3%. Posterior a esto, el proceso de valoración de opciones demuestra que los métodos numéricos coinciden en gran medida con la solución explícita por Black Scholes para cada tiempo de maduración de la opción, lo que permite concluir que los parámetros usados en cada método son adecuados para el conjunto de datos analizados. Asimismo, se llevó a cabo el análisis de un *commodity*, la semilla de colza, verificando que el comportamiento de los precios sigue un proceso de reversión a la media con tendencia constante. Los resultados de las simulaciones evidencian que la ecuación diferencial con parámetros estimados explican con gran precisión los precios de las semillas de colza, pues el error relativo es de 0.4%. Igualmente, se calculó el valor de la opción con los 3 métodos numéricos, encontrando coincidencia para cada tiempo de maduración. Por último, se analizó la temperatura de la ciudad de Albacete en España. Para este conjunto de

datos se consideró un proceso de reversión a la media con tendencia funcional. A pesar de que no se pudo verificar a través de los test de normalidad que el conjunto de datos podía ser explicado por este proceso, los resultados experimentales presentan muy buenas aproximaciones, con un error relativo de estimación promedio bajo para 1000 trayectorias. Asimismo, el cálculo de la opción presenta valores muy cercanos para cada uno de los métodos en cada tiempo de maduración, lo que indica que los parámetros usados para los métodos numéricos son consistentes. En definitiva, un conjunto de datos puede ser explicado por diversos modelos, por lo que es necesario verificar las condiciones particulares en cada caso para definir el modelo. Posterior a esto, es posible calcular el precio de la opción por métodos numéricos, pero es necesario calibrar los parámetros de los mismos con el fin de obtener resultados consistentes.

REFERENCES

- [1] J. F. Moreno Trujillo, "Estimación de parámetros en ecuaciones diferenciales estocásticas aplicadas a finanzas (parameter estimation in stochastic differential equations (sdes): Applications to financial modeling)," *ODEON*, 2011.
- [2] F. Black and M. Scholes, "The pricing of options and corporate liabilities," *Journal of political economy*, vol. 81, no. 3, pp. 637–654, 1973.
- [3] F. H. M. Sánchez and V. M. Gallego, "Parameter estimation in mean reversion processes with deterministic long-term trend," *Journal of Probability and Statistics*, vol. 2016, 2016.
- [4] P. Alaton, B. Djehiche, and D. Stillberger, "On modelling and pricing weather derivatives," *Applied mathematical finance*, vol. 9, no. 1, pp. 1–20, 2002.
- [5] J. P. P. Monsalve and F. H. M. Sanchez, "Parameter estimation in mean reversion processes with periodic functional tendency," *arXiv preprint arXiv:1710.11534*, 2017.