EXTRAS TP 5

1) $a * b = mcm[a,b]$ está bien definida en $A = \mathbb{N}$

Bien Definida:
- Clausura: como el $mcm[a,b]$ siempre es un número $\mathbb{N} \rightarrow a * b \in \mathbb{N}$
- Unicidad: el $mcm[a,b]$ es único, ∴ no es ambiguo.

Asociatividad: Dado $a, b, c \in \mathbb{N}$, $a*(b*c) = (a*b)*c$

$$a*(b*c) = \underbrace{mcm[a, mcm[b,c]] = mcm[mcm[a,b],c]}_{\text{por asociatividad de } mcm} =$$
$$= (a*b)*c$$

Conmutatividad: Dado $a, b \in \mathbb{N}$, $a*b = b*a$

$$a*b = \underbrace{mcm[a,b] = mcm[b,a]}_{\text{por conmutatividad de } mcm} = b*a$$

Neutro: $\exists e \in \mathbb{N} \,/\, a*e = e*a = a$

$$a*e = mcm[a,e] = a \quad \text{si } e = 1$$
$$mcm[a,1] = mcm[1,a] = a$$

Inverso: $\exists a^{-1} \in \mathbb{N} \,/\, a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

$$a * a^{-1} = mcm[a, a^{-1}] = 1 \quad \text{solo si } a = 1 \text{ o } a^{-1} = 1$$

∴ no todos los $\mathbb{N}$ tienen inverso.

Escaneado con CamScanner

∴ Es un monoide commutativo.

---

2) $GL(n,K) = \{A \in K^{n\times n},\ \det(A) \neq 0,\ \text{con } K \text{ cuerpo}\}$

grupo con · usual.

CIAUSURA: $A, B \in GL$, $AB \in GL$

$A \neq 0$ y $B \neq 0$ $\quad A.B \neq 0$

y como el producto de dos matrices $n\times n$, da como resultado otra matriz $n\times n \rightarrow AB \in GL$

ASOCIATIVIDAD: $A, B, C \in GL$, $A.(B.C) = (A.B).C$

Como la asociatividad es una propiedad inherente del · de matrices, se cumple.

NEUTRO: $\exists E \in GL \,/\, A.E = E.A = A$

Ese elemento es la matriz identidad I de orden n.

$AI = IA = A$

INVERSO: $\exists A^{-1} \in GL \,/\, A.A^{-1} = A^{-1}.A = E$

$A.A^{-1} = I$ La matriz inversa $\exists$ si y solo si $\det(A) \neq 0$

y satisface: $\det(A) = \dfrac{1}{\det(A)} \neq 0$

$\therefore A^{-1} \in GL$

∴ Es un grupo

---

3) si $(G, *)$ es un grupo abeliano $\rightarrow (a*b)^n = a^n * b^n;\ \forall n \in \mathbb{Z}$

CASO BASE $(N=1)$:

$(a*b)^1 = a*b = a^1 * b^1$

CASO $(N>1)$:

Si $n=K \rightarrow (a*b)^K = a^K * b^K$ (Suponemos)

Debemos verificar que se cumpla para $K+1$ →

Escaneado con CamScanner

$(a*b)^{k+1} = a^{k+1} * b^{k+1}$

por definición de potencias en un grupo

$(a*b)^{k+1} = (a*b)^{k} * (a*b)$

y por hipótesis:

$(a*b)^{k+1} = (a^{k} * b^{k}) * (a*b)$

por asociatividad y conmutatividad

$(a*b)^{k+1} = (a^{k} * a) * (b^{k} * b)$

$(a*b)^{k+1} = a^{k+1} * b^{k+1}$

$\therefore$ se cumple para $n = k+1$

CASO $(N=0)$

como es un grupo: $a^{0} = e$ $\rightarrow$ para $a, b \in G$: $(a*b)^{0} = e$

$(a*b)^{0} = e = e*e = a^{0} * b^{0}$

CASO $(N<0)$

$n = -m$

$(a*b)^{-m} = [(a*b)^{m}]^{-1}$ (por definición de potencias negativas)

por hipótesis:

$(a*b)^{-m} = (a^{m} * b^{m})^{-1}$

como es un grupo abeliano, el inverso satisface:

$(a*b)^{-m} = (a^{m})^{-1} * (b^{m})^{-1}$

o sea:

$(a*b)^{-m} = a^{-m} * b^{-m}$ $\therefore (a*b)^{n} = a^{n} * b^{n}, \forall n \in \mathbb{Z}$

---

4) $N(a)$ subgrupo de G? $(G, *)$ y $N(a) = \{x \in G / \forall a \in G / a*x = x*a\}$

Probar: $e \in N(a)$ y $a, b \in N(a) \rightarrow a * b^{-1} \in N(a)$

$*$ Dado $e \in G$, $a*e = e*a = a$ para cualquier $a \in G$

lo cual se cumple también para $N(a)$, $\therefore e \in N(a)$

$*$ Dados $x, y \in N(a)$, sabemos que $a*x = x*a$ y $a*y = y*a$

entonces para $x*y^{-1}$: $a*(x*y^{-1}) = (x*y^{-1})*a$?

Escaneado con CamScanner

Calculamos: $a * (x * y^{-1}) = (a * x) * y^{-1}$

por asocia-
tividad

Como $x \in N(a)$: $(a * x) * y^{-1} = (x * a) * y^{-1}$

Por asociatividad: $(x * a) * y^{-1} = x * (a * y^{-1})$

Como $y \in N(a)$, $y^{-1} \in N(a)$: $x * (a * y^{-1}) = x * (y^{-1} * a)$

Por asociatividad: $x * (y^{-1} * a) = (x * y^{-1}) * a$

$\therefore$ $a * (x * y^{-1}) = (x * y^{-1}) * a \longrightarrow x * y^{-1} \in N(a)$

Por ende, es un subgrupo

Escaneado con CamScanner