PRÁCTICA 5.3

1) a) $f(x) = 2^x$ y $G = (\mathbb{R}, +)$; $F = (\mathbb{R}_0, \cdot)$ $\qquad f: G \to F$

$*$ $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ para $\forall\, x, y \in G$

$\to f(x+y) = 2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y = f(x) \cdot f(y)$

Núcleo: el neutro de F es 1, ya que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ con $a \in F$

$f(x) = 1$

$2^x = 1 \longrightarrow x = 0 \qquad Nu(f) = 0$

Imagen: conjunto de todos los valores de f, o sea:

$Im(f) = \{f(x) / x \in G\}$

$f(x) = 2^x$, como $x \in \mathbb{R}$ y $2^x > 0$ para $\forall x \in \mathbb{R}$,

la imagen será: $Im(f) = (0, \infty)$

---

b) $f(x) = -x$ y $G = (\mathbb{Z}, *) \to \mathbb{Z}$ con la operación $a * b = a + b + ab$

$F = (\mathbb{Z}, \circ) \to \mathbb{Z}$ con la operación $a \circ b = a + b - ab$

$*$ $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{Z}$

$\to f(x * y) = f(x + y + xy) = -(x + y + xy) = -x - y - xy$

como $f(x) = -x$

$\to f(x) \circ f(y) = (-x) \circ (-y) = (-x) + (-y) - [(-x) \cdot (-y)] = -x - y - xy$

$\therefore f(x * y) = f(x) \circ f(y)$

Núcleo: El neutro de F es 0, ya que $a \circ 0 = 0 \circ a = a$

$a \circ 0 = a + 0 - a.0 = a$

$f(x) = -x = 0 \rightarrow Nu(f) = 0$

Imágen: como $f(x) = -x$ y $x \in \mathbb{Z} \rightarrow -x \in \mathbb{Z}$

$\therefore Im(f) = \mathbb{Z}$

---

c) $f(X) = X^c$ y $G = (P(A), \cup)$ $F(P(A), \cap)$; siendo A cualquier conjunto.

$* \; f(X \cup Y) = f(X) \cap f(Y)$

$f(X \cup Y) = (X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c = f(X) \cap f(Y)$

por De Morgan

Núcleo: El neutro de F es A, ya que $X \cap A = A \cap X = X$

$f(x) = A \Rightarrow$ ese elemento es $X = \emptyset$, ya que $f(\emptyset) = \emptyset^c = A$

$Nu(f) = \emptyset$

Imágen: para cualquier $X \subseteq A$, X^c también $\subseteq A$ y pertenece a $P(A)$

$\therefore Im(f) = P(A)$

---

2) 1- núcleo de f es subgrupo de G

NEUTRO: $f(e_1) = e_2$ por ser morfismo

CLAUSURA e INVERSO: dados $a, b \in Nu(f)$, $a * b^{-1} \in Nu(f)$

o sea $a * b^{-1} = e_2$

Como $a, b \in Nu(f) \rightarrow f(a) = e_2 = f(b)$

y como f es morfismo $f(a * b^{-1}) =$

$= f(a) \otimes f(b^{-1}) = f(a) \otimes (f(b))^{-1} = e_2 \otimes (e_2)^{-1} = e_2 \otimes e_2 =$

$= e_2$

2- IMAGEN de f es subgrupo de H

NEUTRO: $f(e_1) = e_2$ por ser morfismo

$e_1 \in G \rightarrow f(e_1) = e_2 \rightarrow e_2 \in Im(f)$

CLAUSURA E INVERSO: $a, b \in Im(f) \rightarrow a \otimes b^{-1} \in Im(f)$

$\exists c \in G / f(c) = a$

$\exists d \in G / f(d) = b$

$a \otimes b^{-1} = f(c) \otimes (f(d))^{-1} = f(c) \otimes f(d^{-1}) = f(c * d^{-1})$

por ser morfismo

$\exists x = c * d^{-1} \in G$

$f(x) = a \otimes b^{-1}$

$a \otimes b^{-1} \in Im(f)$

---

3) $f: G \rightarrow G \quad f(a) = a^2$ es un morfismo $\longleftrightarrow$ G es abeliano

1- Supongamos f es un morfismo

Se cumple $f(a*b) = f(a) * f(b)$

Como $f(x) = x^2 \rightarrow f(a*b) = (a*b)^2 = a^2 * b^2$

$(a*b)*(a*b) = a^2 * b^2$

para que esta propiedad sea válida, debemos probar la conmutatividad (G abeliano)

$(a*b)*(a*b) = (a*a)*(b*b)$

como G es un grupo, $\forall a, b \in G$ tiene inverso. Además, es asociativa

$(a^{-1}*a)*b*a*b = a^{-1}*a*a*b*b$

$e*b*a*b = e*a*b*b$

operamos b de igual forma

$b*a*(b*b^{-1}) = a*b*(b*b^{-1})$

$b*a*e = a*b*e$

$\therefore$ G es abeliano

$b*a = a*b$

2- Supongamos G abeliano

Como G cumple que $*$ es asociativa, conmutativa, cerrada, neutro e inverso: $f(a*b) = (a*b)^2 = (a*b)*(a*b) = a*b*a*b =$

$= a*a*b*b = a^2*b^2 = f(a)*f(b)$

$\therefore$ Es un morfismo.

4) $H_1 \times H_2 \to G$ $\quad f(a,b) = ab$ es un morfismo

La operación está definida por:

$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$

$f((a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)) = f(a_1 a_2, b_1 b_2) = (a_1 a_2) \cdot (b_1 b_2) = (a_1 b_1) \cdot (a_2 b_2)$

$= f(a_1, b_1) \cdot f(a_2, b_2)$

$\therefore$ es un morfismo

---

5) $f: G_1 \to G_2$ es un morfismo. Es monomorfismo $\leftrightarrow$ $Nu(f) = \{e_1\}$

1- Supongamos que $f: G_1 \to G_2$ es un monomorfismo

Como es un morfismo $f(e_1) = e_2$

Como es un monomorfismo, f es inyectivo, o sea a cada elemento de G_2 le corresponde como máximo 1 elemento de G_1

Por ende, al neutro de G_2 (e_2) le corresponde un solo elemento (e_1)

$\therefore Nu(f) = \{e_1\}$

2- Supongamos que $Nu(f) = \{e_1\}$

* supongamos que no es un monomorfismo

Entonces para $a, b \in G_1$:

$f(a) = f(b)$

O sea $f(a) \otimes (f(b))^{-1} = e_2$

Como es un morfismo: $f(a * b^{-1}) = e_2$, por lo que: $a * b^{-1} \in Nu(f)$

como por hipótesis solo $e_1 \in Nu(f) \to e_1 = a * b^{-1}$. Como $e_1 =$

$= a * a^{-1}$, $a = b$

$\therefore f$ es inyectiva, por ende un monomorfismo.

6) $(G,*)$ un grupo, $G \to G$ definida por $f(a) = a^{-1}$ es isomorfismo $\longleftrightarrow$ G es abeliano

1- Suponemos que es un isomorfismo

Como es un isomorfismo: $f(a*b) = f(a)*f(b)$

o sea $f(a*b) = (a*b)^{-1}$, $f(a)*f(b) = a^{-1}*b^{-1}$

tenemos $(a*b)^{-1} = a^{-1}*b^{-1}$ y como G es un grupo se cumple la inversa del producto $(a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1}$

Entonces como $(a*b)^{-1} = a^{-1}*b^{-1} = b^{-1}*a^{-1}$, $*$ es conmutativa

$\therefore$ G es abeliano.

2- Suponemos que G es abeliano

Por ende: $f(a*b) = (a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1} = a^{-1}*b^{-1} = f(a)*f(b)$

y como G es un grupo, para todo $a \in G$ existe $a^{-1} \in G$ y es único, además $f(a) = a^{-1}$, por lo que $f: G \to G$ es biyectiva (ya que para a cada elemento del codominio le corresponde un único elemento del dominio, el inverso)

$\therefore$ es un isomorfismo

---

7) R relación de congruencia sobre $(S,*)$ y $(S/R, \circledast)$

semigrupo ... semigrupo cociente

$f_R: S \to S/R$ definida por

$f_R(a) = \overline{a}$ es un morfismo.

sabemos que por definición de $f_R(a*b) = \overline{a*b}$

También sabemos por definición de la operación sobre S/R:

$$f_R(a) \circledast f_R(b) = \overline{a} \circledast \overline{b}$$

Como se sabe que por definición de la operación $\circledast$: $\overline{a} \circledast \overline{b} = \overline{a*b}$

Entonces $f_R(a*b) = \overline{a*b} = \overline{a} \circledast \overline{b} = f_R(a) \circledast f_R(b)$

y como $f_R(a*b) = f_R(a) \circledast f_R(b) \longrightarrow f_R$ es un morfismo.

8) $z \in \mathbb{C}$ $\quad f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(x) = z.x$

La función será un isomorfismo si y sólo si $z \neq 0$, ya que sino para cualquier x la función $f(x)=0$; permitiendo un mismo elemento del codominio para diversos elementos del dominio e impidiendo cubrir todo el codominio, $\mathbb{C}$.

---

9) $f: M_{2\times2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4$

O sea: $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a, b, c, d)$

Morfismo:

Sea $A, B \in \mathbb{R}_{2\times2}$:

$$f(A +_m B) = f\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} +_m \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_3+b_3 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, a_4+b_4) = (a_1, a_2, a_3, a_4) +_v$$

$$+_v (b_1, b_2, b_3, b_4) = f\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}\right) +_v f\left(\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}\right) = f(A) +_v f(B)$$

Inyectiva:

Supongamos $f(A) = f(B) \longrightarrow (a_1, a_2, a_3, a_4) = (b_1, b_2, b_3, b_4)$

Esto implica $a_1 = b_1$; $a_2 = b_2$; $a_3 = b_3$; $a_4 = b_4$

Lo que significa que A y B son iguales, o sea

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$$

Sobreyectiva:

Para todo $v = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$, $\exists M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{2\times2}$

$/ f(M) = v$, o sea $f\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}\right) = (a_1, a_2, a_3, a_4)$

$\therefore$ f cubre todo $\mathbb{R}^4$

$\therefore$ f es un isomorfismo.

10) $f: G \to \mathbb{Z}_m$ o sea $f(g^K) = \overline{K}$ (con g generador y K la clase de equivalencia $K \bmod m$).

<u>MORFISMO</u>: $f(g^K + g^L) = f(g^{K+L}) = \overline{(K+L)} =$
por ley
de los exponentes

$= \overline{K} + \overline{L} = f(g^K) + f(g^L)$

<u>INYECTIVA</u>: Suponemos $f(g^K) = f(g^L) \longrightarrow \overline{K} = \overline{L} \longrightarrow K \equiv_m L$

Implica que $g^K = g^L$ ya que g tiene orden m

$\therefore$ es inyectiva

<u>SOBREYECTIVA</u>: Para cualquier elemento $a \in \mathbb{Z}_m$, $\exists\ g^a \in G$ /

$f(g^a) = a$

$\therefore$ Es sobreyectiva.

$\therefore$ Es un isomorfismo.