ЛК 6. СПЛАЙНЫ В КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАФИКЕ

1. Общие сведения.

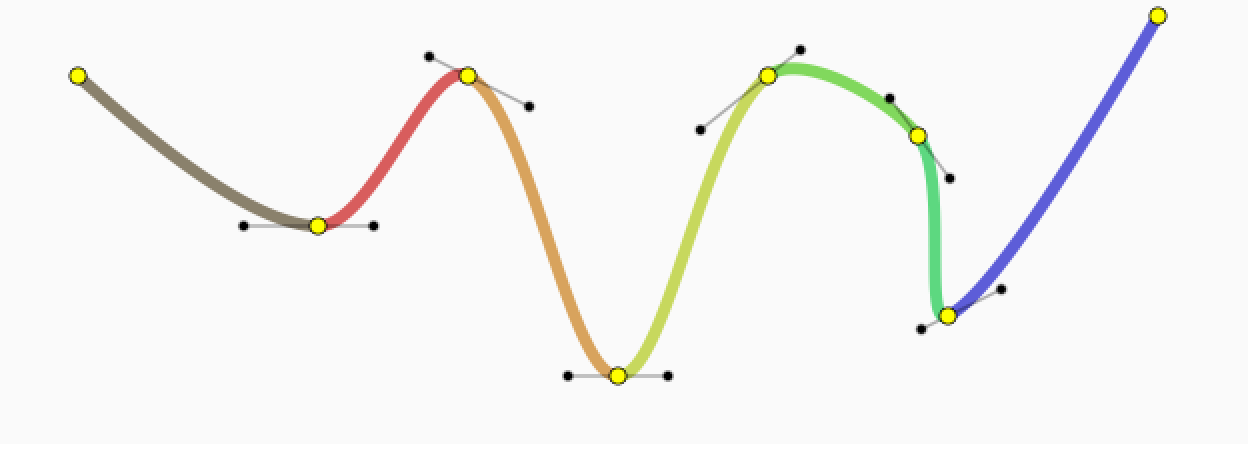
2. Интерполяция формой Эрмита.

3. Интерполяция формой Безье.

4. Интерполяция В-сплайнами.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

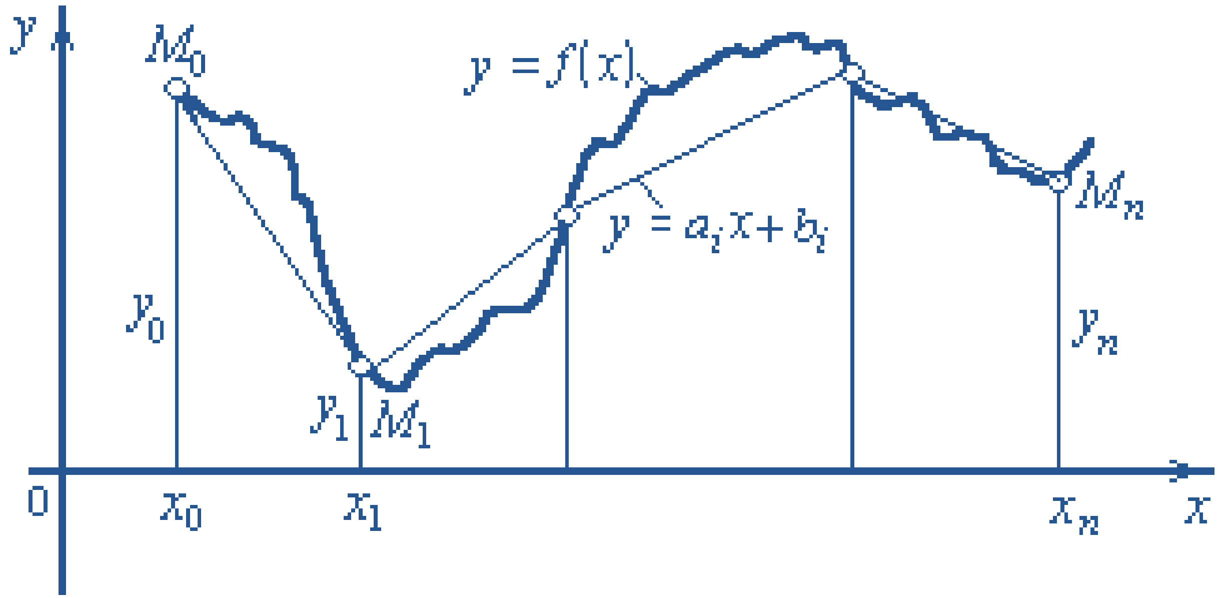
Сплайны - это гладкие (имеющие несколько непрерывных производных) кусочно-полиномиальные функции, которые могут быть использованы для представления функций, заданных большим количеством значений и для которых неприменима аппроксимация одним полиномом.



// В книге Херна и Бейкера «Компьютерная графика и стандарт OpenGL» описаны следующие разновидности сплайнов:

- естественные кубические сплайны (стр. 603),
- Эрмитова интерполяция (стр. 604),
- фундаментальные сплайны (стр. 607),
- сплайны Коханека-Бартелса (стр. 609),
- сплайновые кривые Безье (стр. 611),
- кубические кривые Безье (стр. 620),
- би-сплайны (стр. 624),
- равномерные периодические би-сплайны (стр. 626),
- кубические периодические би-сплайны (стр. 630),
- открытые равномерные би-сплайны (стр. 632),
- неравномерные би-сплайны (стр. 634),
- бета-сплайны (стр. 636),
- рациональные сплайны (стр. 638),
- NURBS (стр. 639).

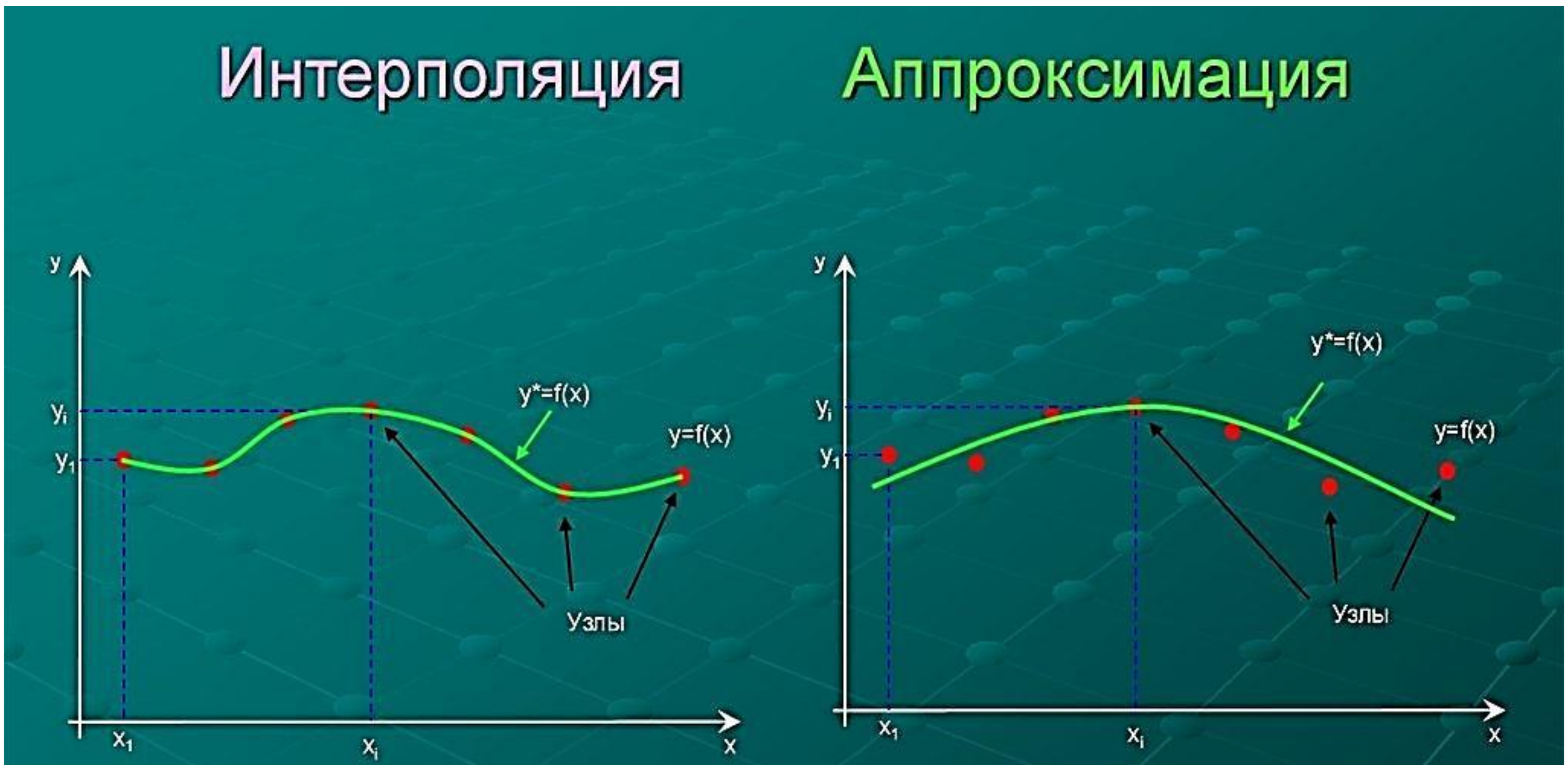
Интерполяция – в вычислительной математике способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений



// Табличные данные не имеют наглядности и не могут быть использованы в математических моделях

Указанных недостатков лишены эмпирические формулы, отражающие приближенно с определенным уровнем достоверности зависимость между изучаемыми величинами, параметрами и т. д. Этот процесс называется ***аппроксимацией***.

Интерполяцией называют такую разновидность аппроксимации, при которой кривая построенной функции проходит точно через имеющиеся точки данных.



Так как сплайны гладки, экономичны и легки в работе, они используются при построении произвольных функций для:

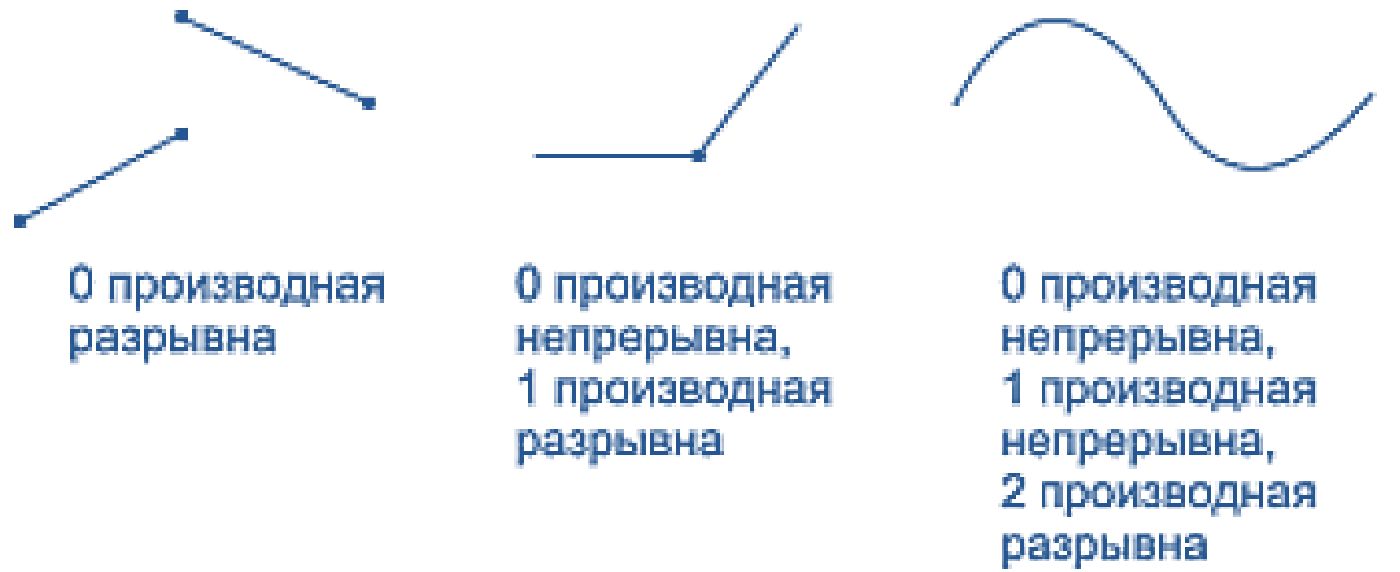
- моделирования кривых;
- аппроксимации данных с помощью кривых;
- выполнения функциональных аппроксимаций;
- решения функциональных уравнений.

// Важным их свойством является простота вычислений. На практике часто используют сплайны вида полиномов третьей степени. С их помощью довольно удобно проводить кривые, которые интуитивно соответствуют человеческому субъективному понятию гладкости.

Определим искомую функцию $y=S(x)$, причем поставим два условия:

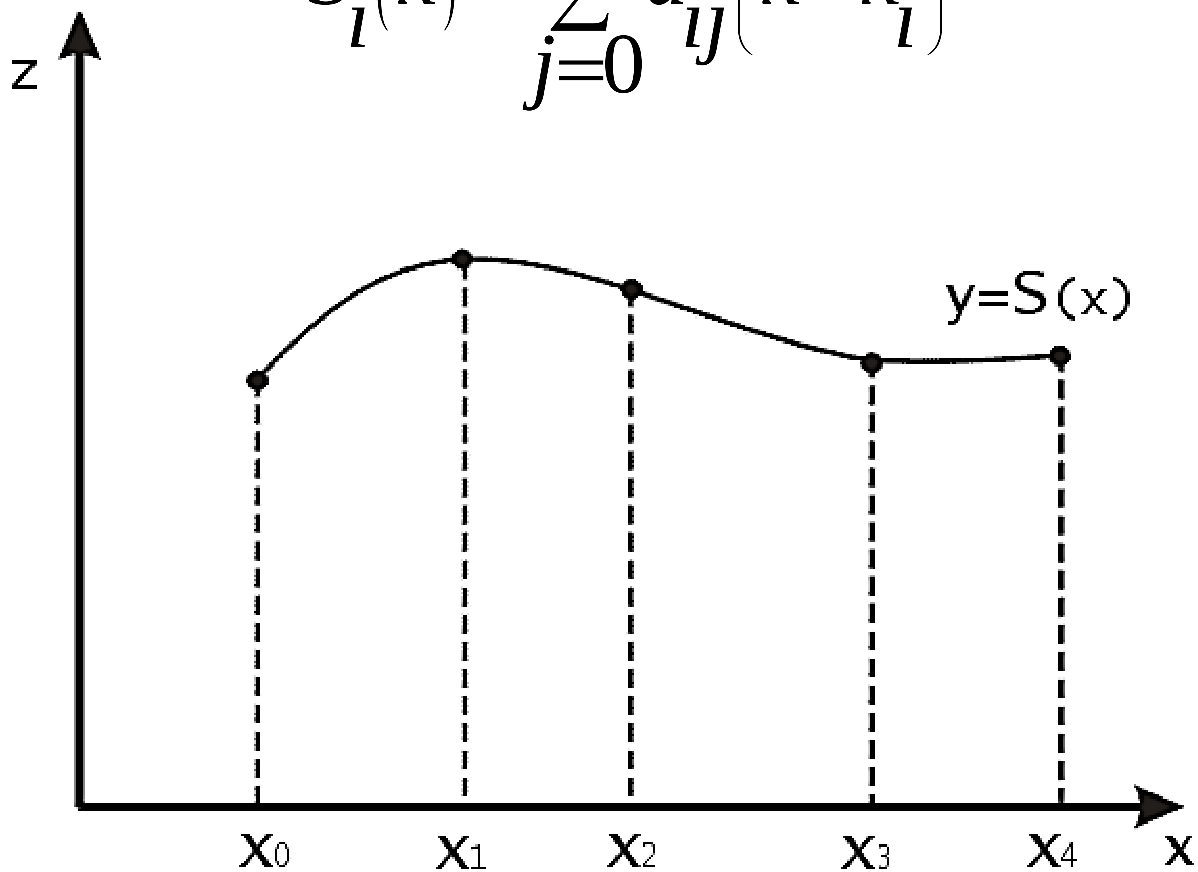
- Функция должна проходить через все точки: $S\left(x_i\right)=y_i\,,\;\; i=\overline{0,m}$;

- Функция должна быть дважды непрерывно дифференцируема, то есть иметь непрерывную вторую производную на всем отрезке $\left[x_0,x_m\right]$.



На каждом из отрезков $\left[x_i, x_{i+1}\right]$, $i=\overline{0,m-1}$, ищется функция в виде полинома третьей степени:

$$S_i(x)=\sum_{j=0}^{3} a_{ij}\left(x-x_i\right)^j$$



Поскольку для каждого из отрезков $\left[x_i, x_{i+1}\right]$ необходимо найти S задача построения полинома сводится к нахождению коэффициентов a_{ij}, при этом общее количество искомых коэффициентов будет $4m$.

Задание кривых в трехмерном пространстве

Для функционального задания кривой

$$\begin{cases} y = f(x) \\ z = f(x) \end{cases}$$

возможны многозначности в случае самопересечений и неудобства при значениях производных равных ∞ .

Ввиду этого ищется функция в параметрическом виде.

Пусть t - независимый параметр, такой что $0 \le t \le 1$.

Кубическим параметрическим сплайном назовем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x; \\ y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y; \\ z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z. \end{cases}$$

Координаты точек на кривой описываются вектором $\left(x(t),y(t),z(t)\right)$, а три производные задают координаты соответствующего касательного вектора в точке.

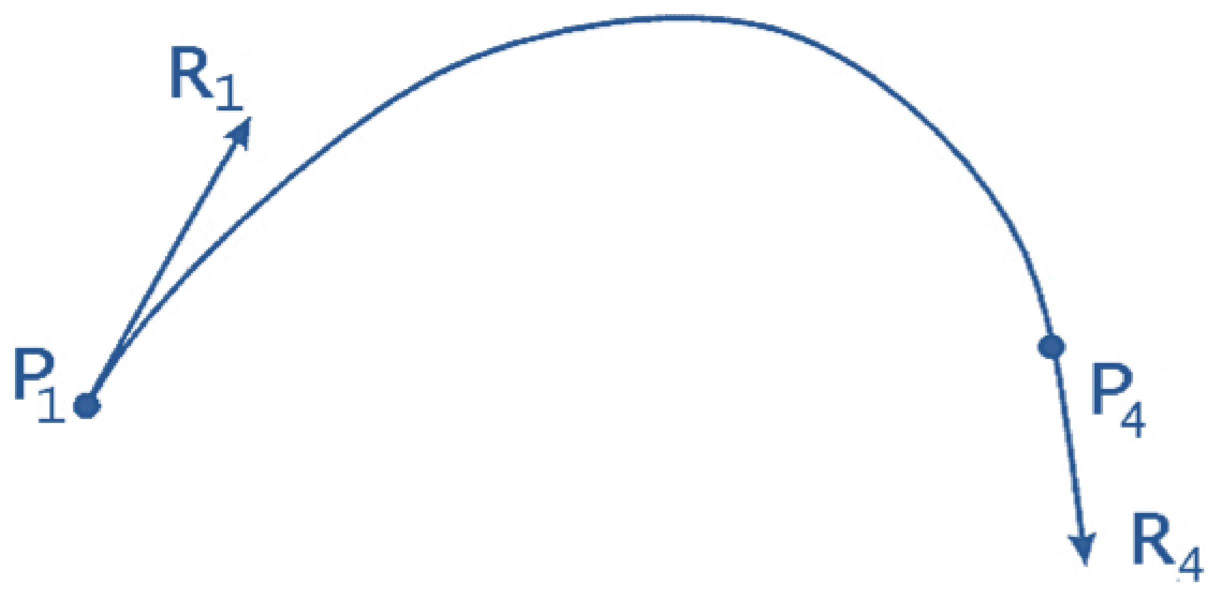
2. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФОРМОЙ ЭРМИТА

Одним из способов задания параметрического кубического сплайна является указание координат начальной и конечной точек, а также векторов касательных в них. Такой способ задания называется формой Эрмита:

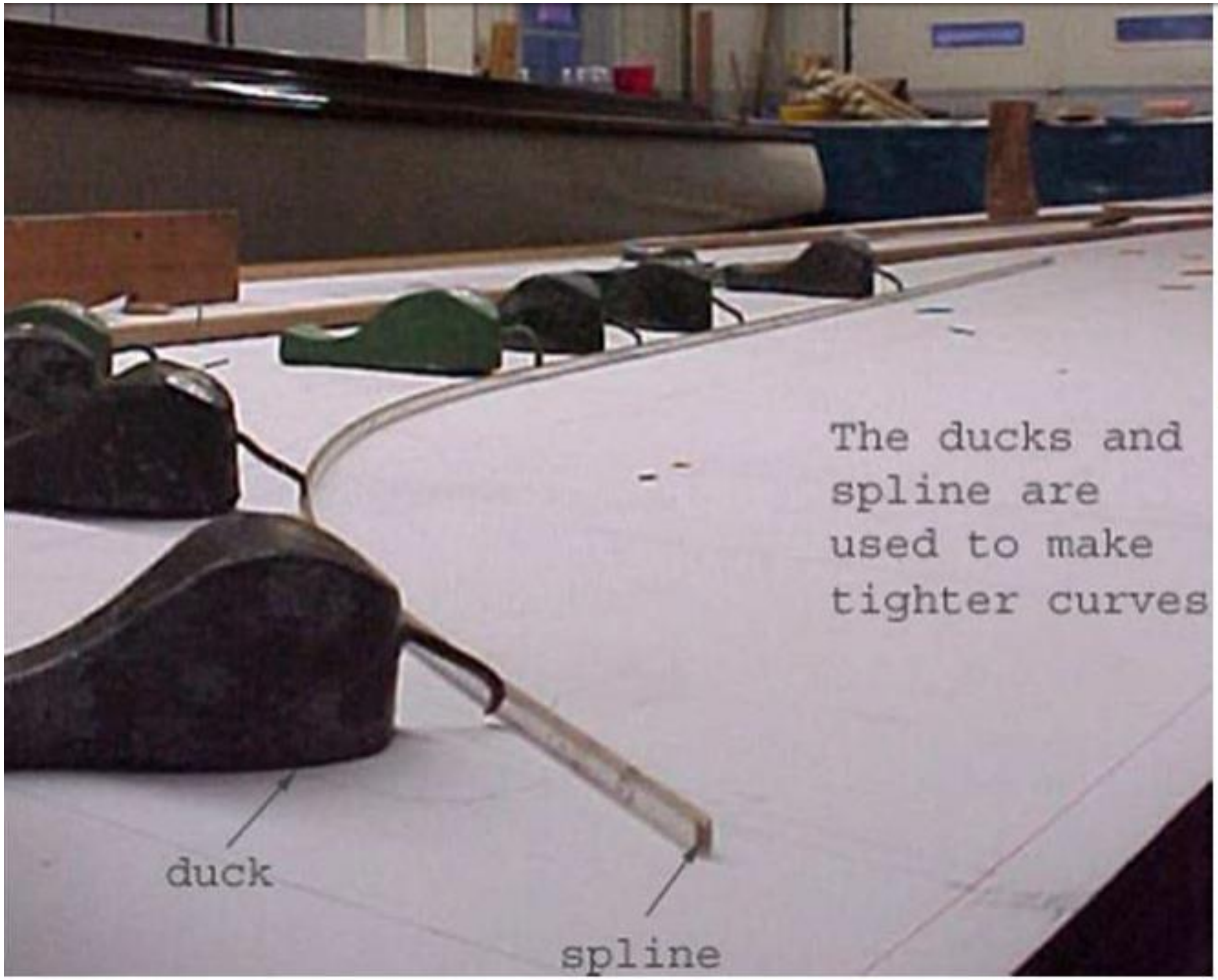
$$x(t) = TM_h G_{hx} = P_{1x}\left(2t^3 - 3t^2 + 1\right) + P_{4x}\left(-2t^3 + 3t^2\right) +$$
$$+ R_{1x}\left(t^3 - 2t^2 + t\right) + R_{4x}\left(t^3 - t^2\right)$$

где G_b - геометрический вектор Безье. Четыре функции в скобках называются ***функциями сопряжения***.

Форму кривой, заданной в форме Эрмита, легко изменять, если учитывать, что направление вектора касательной задает начальное направление, а модуль вектора касательной задает степень вытянутости кривой в направлении этого вектора



2. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФОРМОЙ БЕЗЬЕ

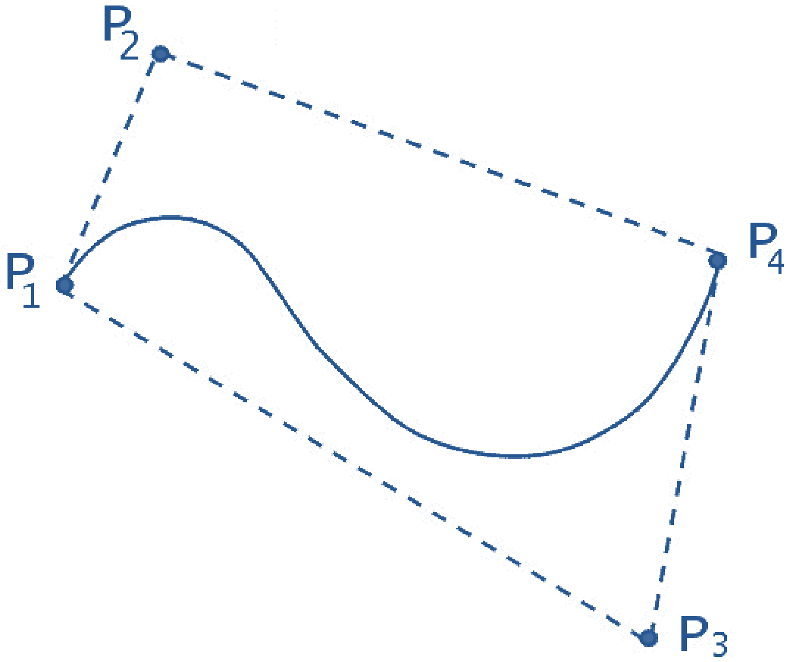


Pierre Bézier

Рассмотрим форму Безье, которая отличается от формы Эрмита способом задания граничных условий, а именно вместо векторов R_1 и R_4 вводятся точки (и соответствующие им радиус- векторы) P_2 и P_3 ,такие, что

$$P'(0) = R_1 = 3(P_2 - P_1)$$

$$P'(1) = R_4 = 3(P_4 - P_3)$$



Переход от формы Эрмита к форме Безье осуществляется преобразованием:

$$G_h = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_4 \\ R_1 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{bmatrix} = M_{hb} G_b$$

где G_b - геометрический вектор Безье. Подставляя это в выражение для $x(t)$, получаем

$$x(t) = TM_h G_{hx} = TM_h M_{hb} G_{bx} =$$
$$= \left(1 - t^3\right) P_1 + 3t\left(t-1\right)^2 P_2 + 3t^2\left(1-t\right) P_3 + t^3 P_4$$

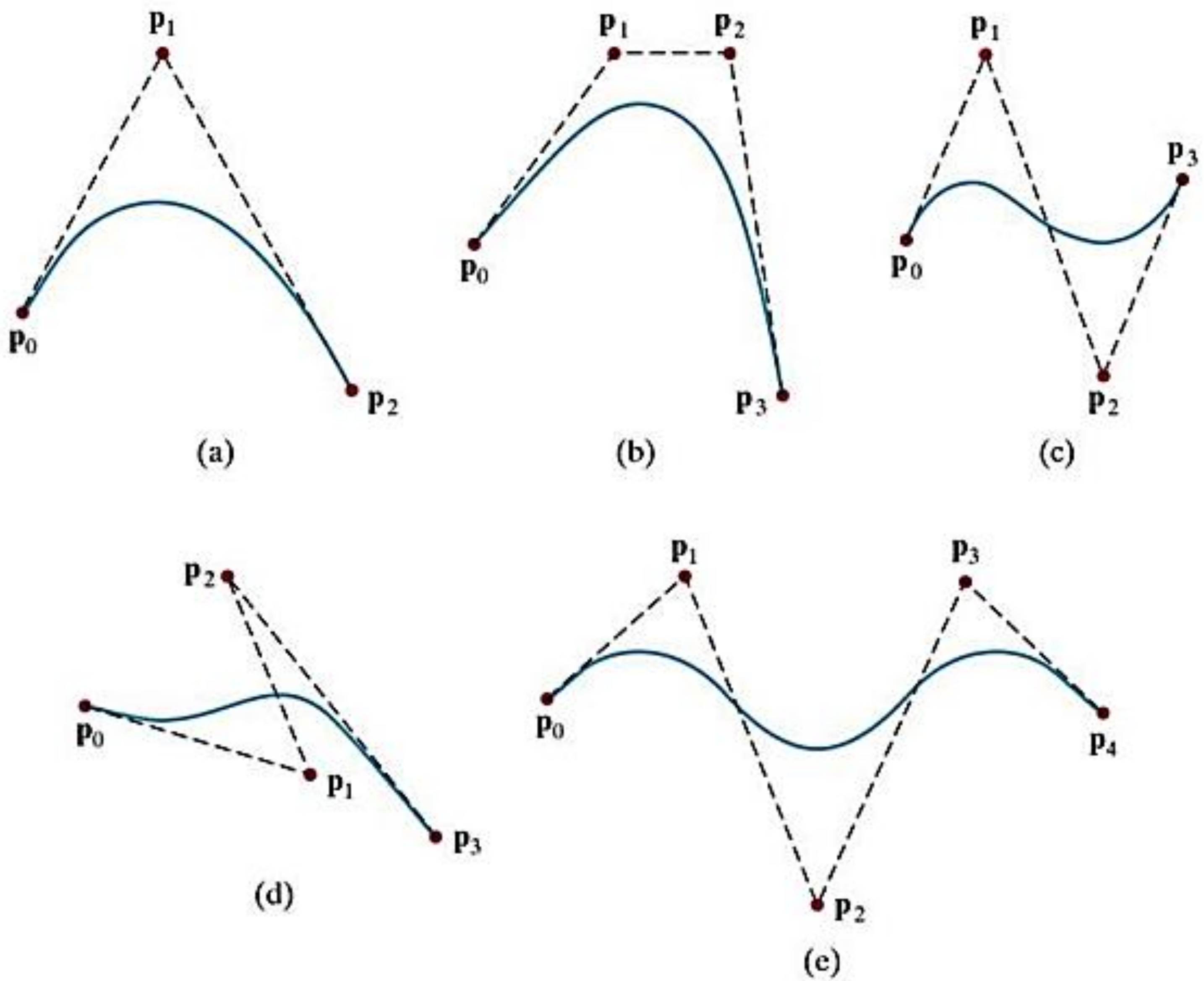
Кривая Безье является частным случаем многочленов Бернштейна, представляет собой параметрическую кривую.

Полезным свойством сплайнов в форме Безье является то, что кривая всегда лежит внутри выпуклой оболочки, образованной четырехугольником $\left(P_1 P_2 P_3 P_4\right)$.

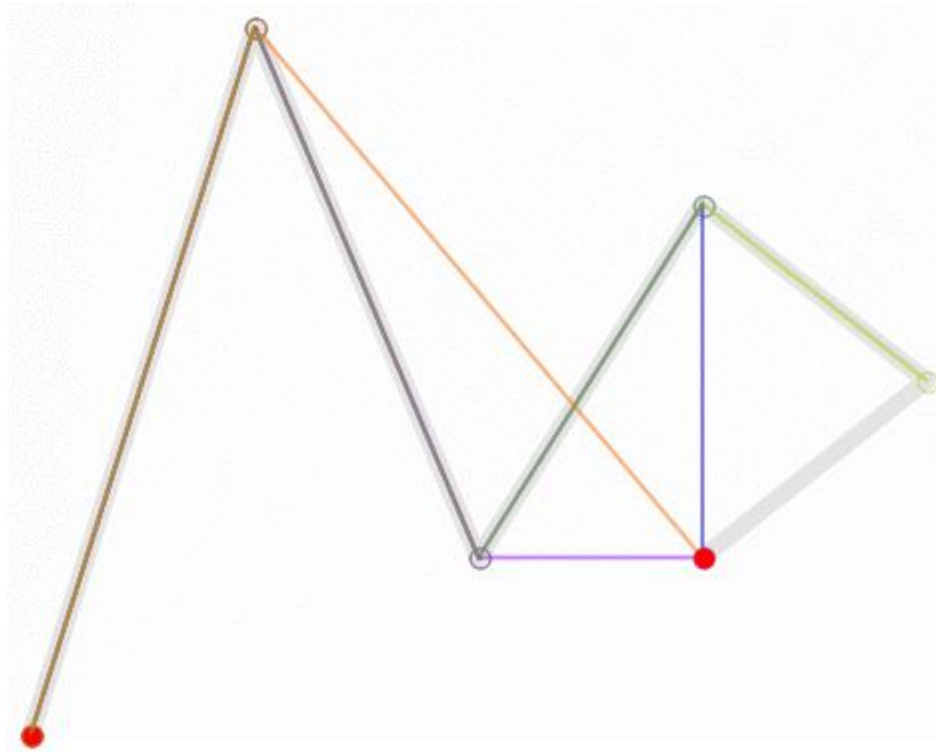
Базисная матрица Безье

$$M_h M_{hb} = M_b = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Кривые Безье



Кривые Безье

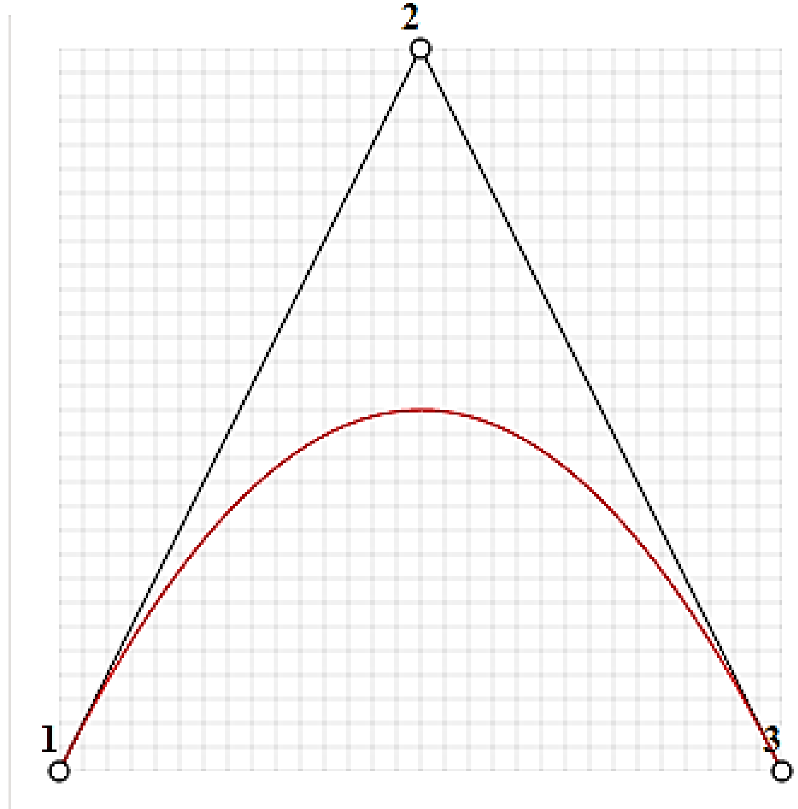


Метод де Кастельжо

Метод заключается в том, что любую кривую Безье любого порядка можно очень простым способом разбить на две кривые того же порядка, и они будут в точности совпадать с исходной кривой.

1.Рисуем опорные точки. В примере выше это 1, 2, 3.

2.Строятся отрезки между опорными точками 1 → 2 → 3. На рисунке они черные.

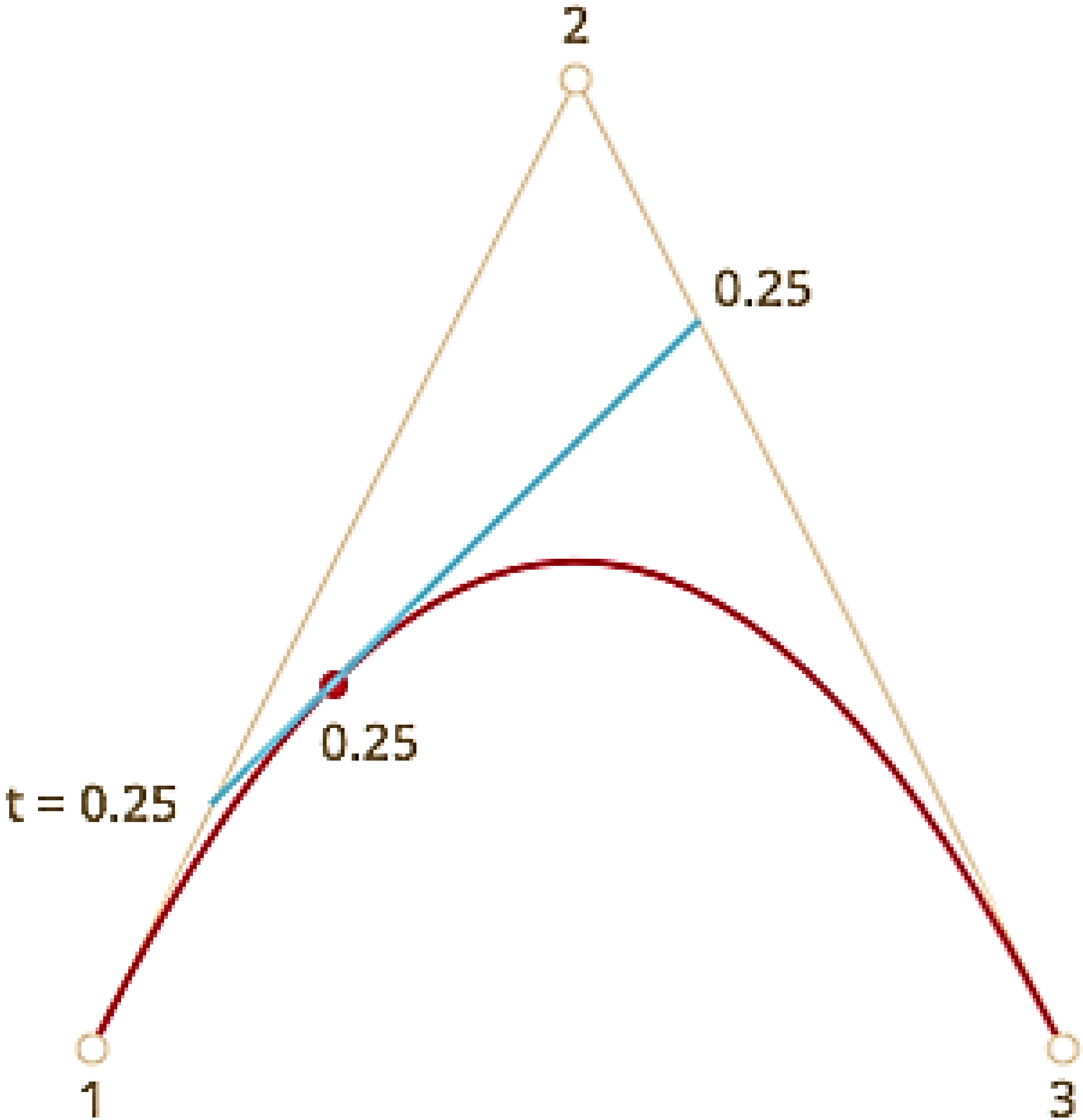


3.Параметр t пробегает значения от 0 до 1 с некоторым шагом

4.На каждом из этих отрезков берется точка, находящаяся от начала на расстоянии от 0 до t пропорционально длине. Так как черных отрезков — два, то и точек выходит две штуки. Т.е., при t=0 — точки будут в начале, при t=0.25 — на расстоянии в 25% от начала отрезка, при t=0.5 — 50%(на середине), при t=1 — в конце отрезка.

5.Эти точки соединяются. На рисунке ниже соединяющий их отрезок изображен синим.

6.На получившемся отрезке берется точка на расстоянии, соответствующем t.

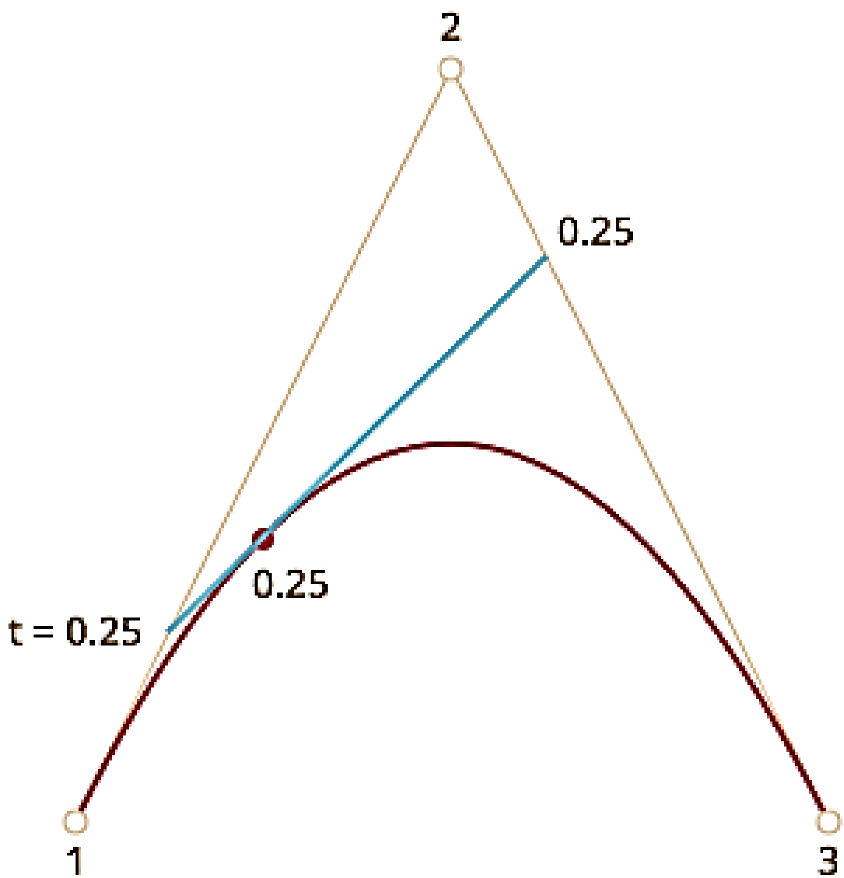


2
0.25
0.25
t = 0.25
1
3

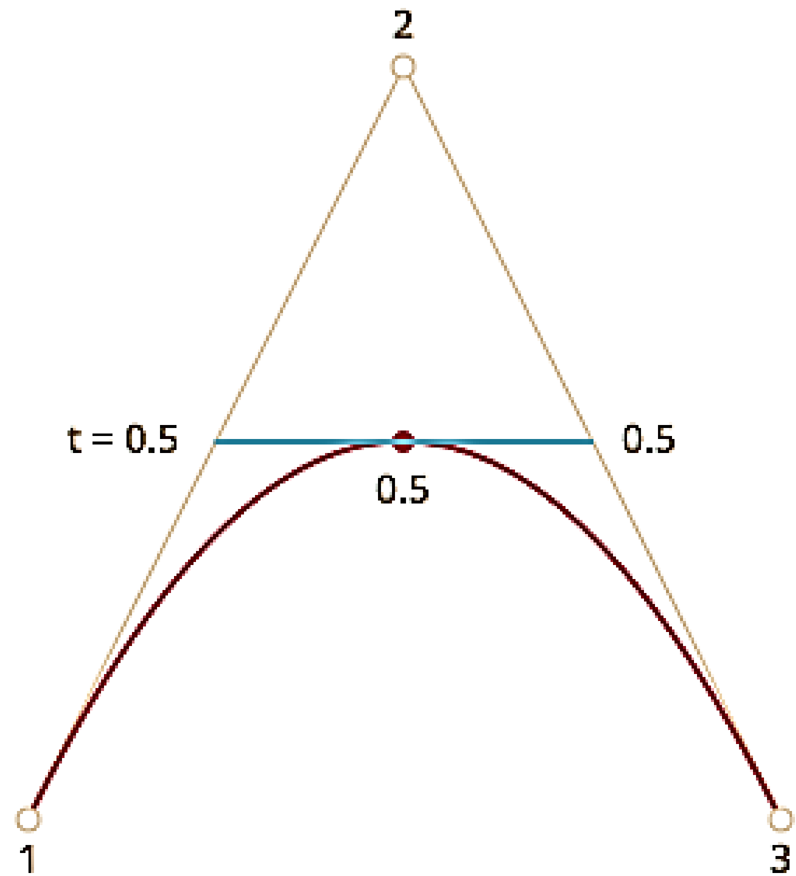
То есть, для t=0.25 (первый рисунок) получаем точку в конце первой четверти отрезка, для t=0.5 (второй рисунок) — в середине отрезка. На рисунках выше эта точка отмечена красным.

По мере того как t пробегает последовательность от 0 до 1, каждое значение t добавляет к кривой точку. <u>Совокупность таких точек для всех значений t образуют кривую Безье.</u>

При `t=0.25`



При `t=0.5`



Геометрический алгоритм для кривой Безье

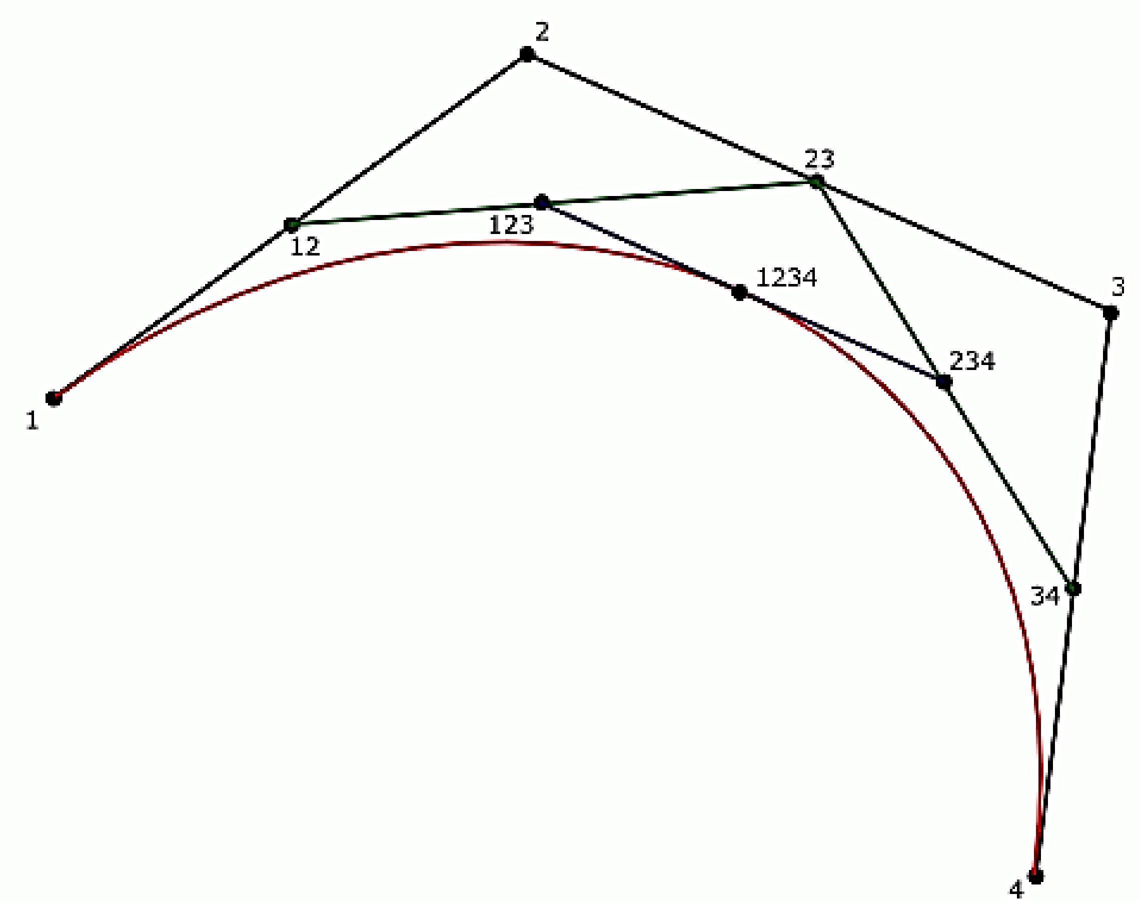
Этот алгоритм позволяет вычислить координаты (x,y) точки кривой Безье по значению параметра *t*.

1. Каждая сторона контура многоугольника, проходящего по точкам-ориентирам, делится пропорционально значению t.

2. Точки деления соединяются отрезками прямых и образуют новый многоугольник. Количество узлов нового контура на единицу меньше, чем количество узлов предыдущего контура.

3. Стороны нового контура снова делятся пропорционально значению t и так далее. Это продолжается до тех пор, пока не будет получена единственная точка деления. Эта точка и будет точкой кривой Безье.

// Аналогичным образом могут быть построены кривые Безье и более высокого порядка: по четырем, пяти точкам, шести и так далее

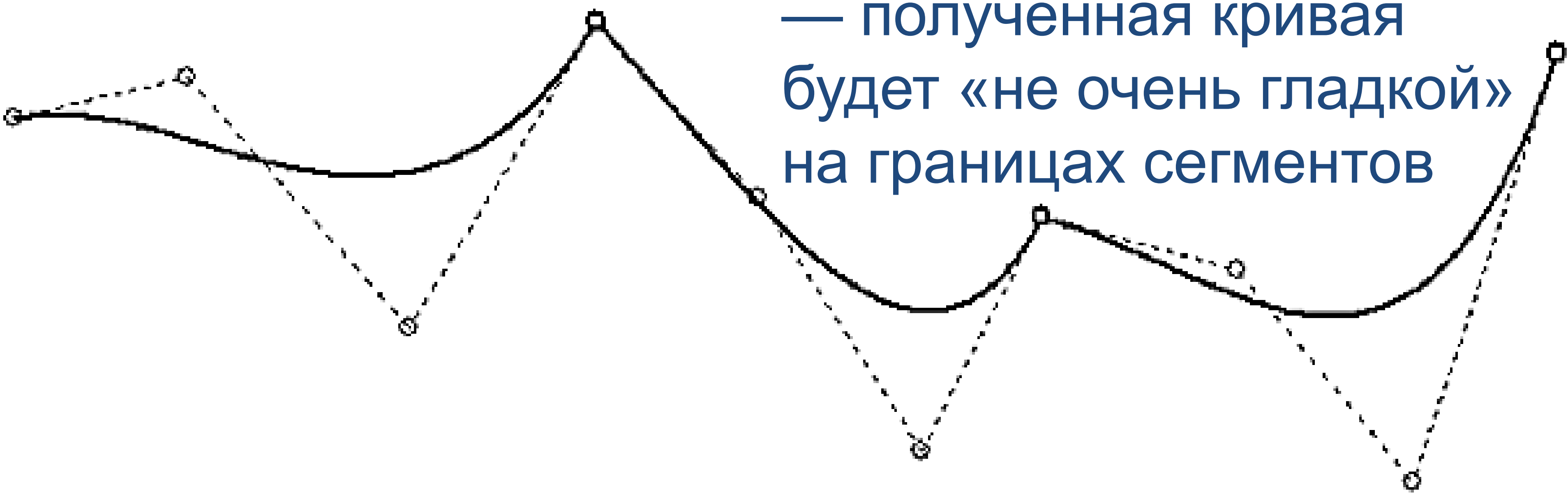


// С четырьмя точками понятно. А что делать, если точек 10 или 10 000?

Для большого числа точек поступают очень просто — разбивают точки на группы по 4 штуки, строят для каждой из них кривую Безье и соединяют полученные сегменты в одну кривую

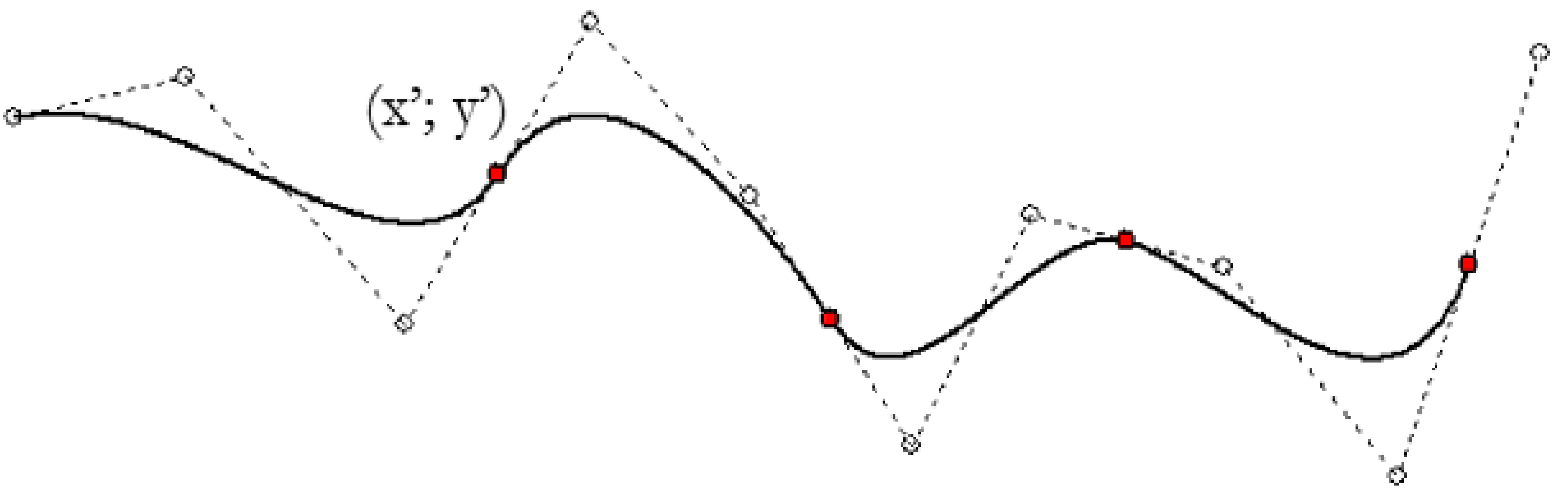
// Это гораздо проще с точки зрения поддержки и расчетов

// Единственная проблема — полученная кривая будет «не очень гладкой» на границах сегментов

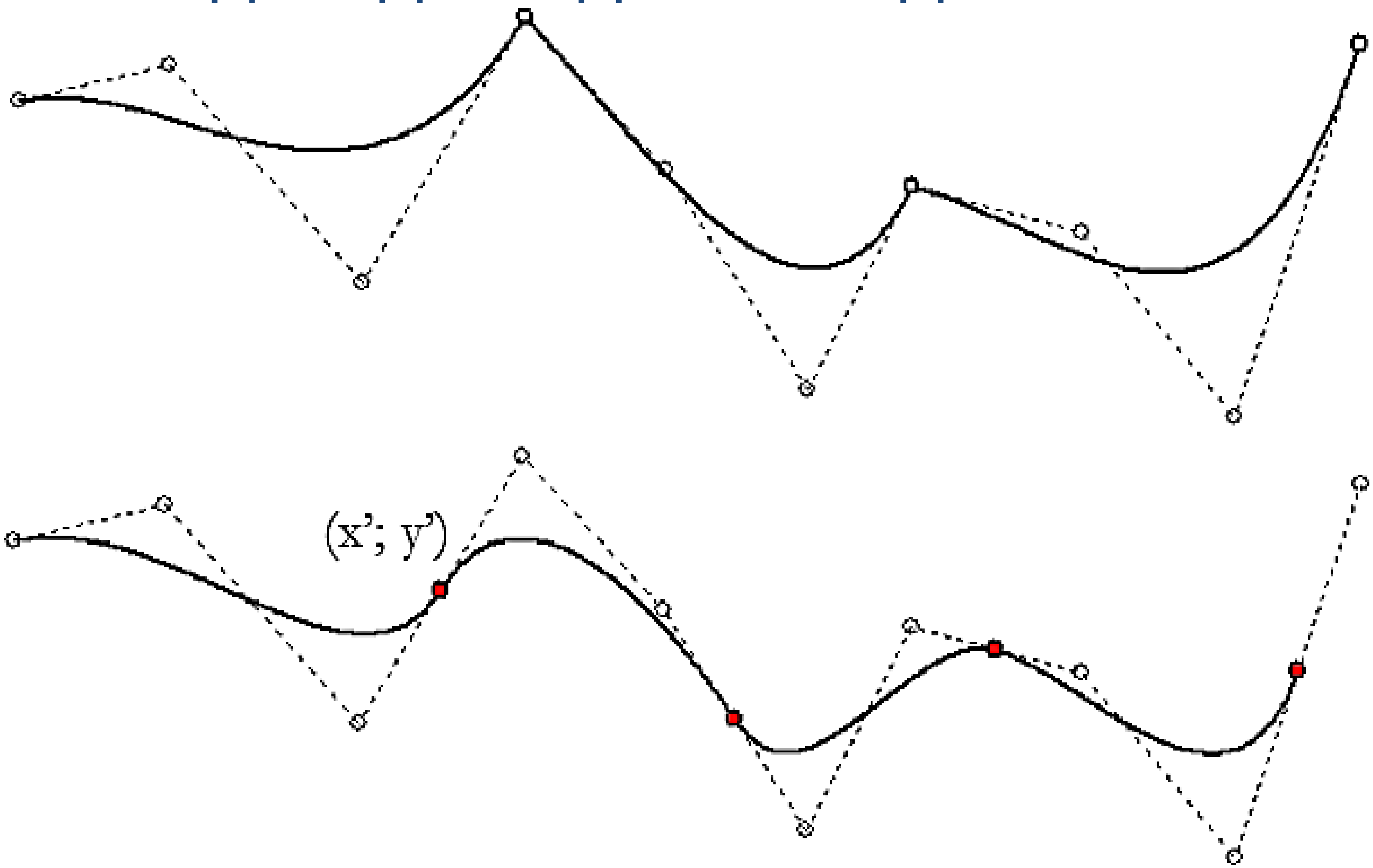


// Как сделать кривую плавной?

Чтобы составная кривая Безье была геометрически непрерывной, необходимо, чтобы каждые три точки в месте стыковки лежали на одной прямой.



// Последнюю точку можно повторить несколько раз, если множество точек не делится на целое число групп, чтобы кривая доходила до последней точки



4. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В-СПЛАЙНАМИ.

В отличие от обычной сплайн-интерполяции, сшивка элементарных ***В***-сплайнов производится не в точках ($\boldsymbol{t}_i$, $\boldsymbol{x}_i$), а в других точках, координаты которых обычно предлагается определить пользователю. Таким образом, отсутствует требование равномерного следования узлов при интерполяции ***В***-сплайнами.

ПРЕИМУЩЕСТВА

1. Аппроксимация *B-сплайнами* обеспечивает более точное приближение ломаной, чем аппроксимация многочленами Бернштейна.

ПРЕИМУЩЕСТВА

2. При аппроксимации методом Безье на значения координат каждой точки кривой оказывают влияние все вершины ломаной Безье. Это затрудняет корректирование отдельных участков кривой. В то же время аппроксимация *B-сплайнами* обладает желательной локальностью. Этим способом можно производить локальные изменения кривой без полного пересчета.

ПРЕИМУЩЕСТВА

3. Единственным путем увеличения (уменьшения) порядка кривой Безье является увеличение (уменьшение) числа вершин и соответствующей ломаной Безье. В методе *В-сплайнов* эти два параметра независимы и, следовательно, могут быть выбраны произвольно.

Недостаток – б**о**льшая сложность B - сплайнов по сравнению с кривыми Безье.

$$P(t)=\sum_{k=0}^{n} p_k B_{k,d}(t), \quad t_{\min}\le t\le t_{\max}, \quad 2\le d\le n+1$$

где: $\boldsymbol{p}_k$ – входной набор из ***n***+1 контрольных точек.
Стыковочные функции B-сплайна $\boldsymbol{B}_{k,d}$ – это полиномы степени ***d***-1, где ***d***- параметр степени. Стыковочные функции для B-сплайнов определяются рекурсивными формулами Кокса-де-Бура (*Cox-deBoor*):

$$B_{k,1}(t)=\begin{cases}1, \textit{если} \quad t_k \le t \le t_{k+1},\\ 0, \textit{в противном случае.}\end{cases}$$

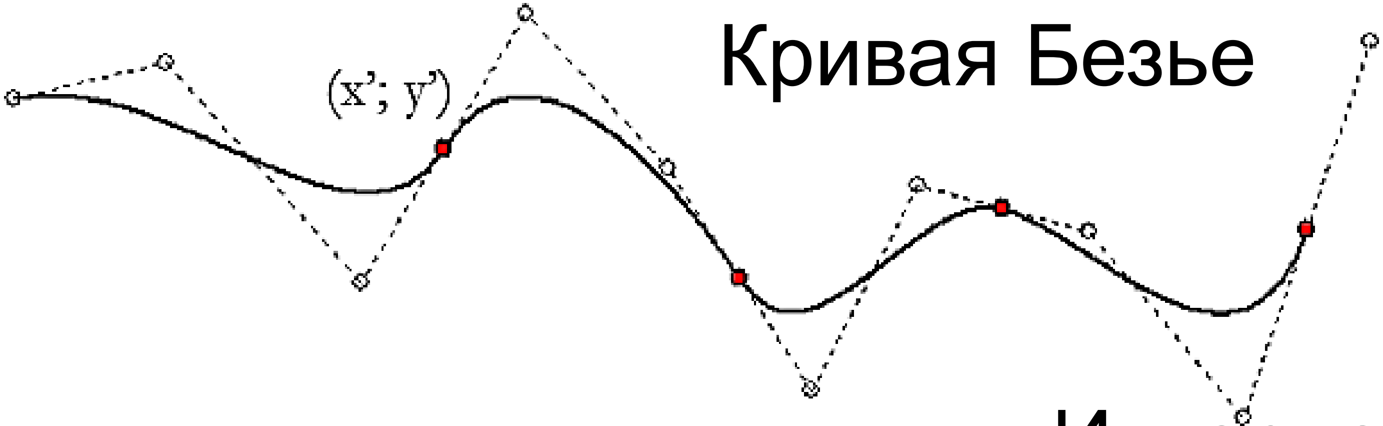
$$B_{k,d}(t)=\frac{(t-t_k)}{t_{k+d-1}-t_k}B_{k,d-1}(t)+\frac{(t_{k+d}-t)}{t_{k+d}-t_{k+1}}B_{k+1,d-1}(t)$$

Каждая стыковочная функция определена на своем подинтервале (общее число - ***d***) общего диапазона ***t***.

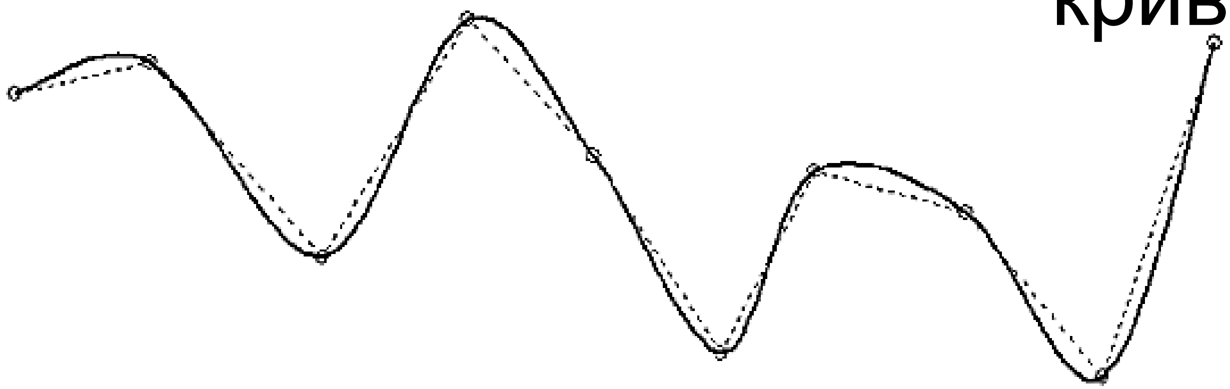
Конечная точка каждого подинтервала $\boldsymbol{t_j}$ называется ***узлом***, а весь набор конечных точек выбранных подинтервалов - ***вектором***.

Значения конечных точек подинтервалов можно выбирать любыми при условии, что $\boldsymbol{t_j \le t_{j+1}}$. После чего, значения $\boldsymbol{t}_{\min}$ и $\boldsymbol{t}_{\max}$ зависят от числа выбранных контрольных точек, значения параметра ***d*** и вектора узлов.

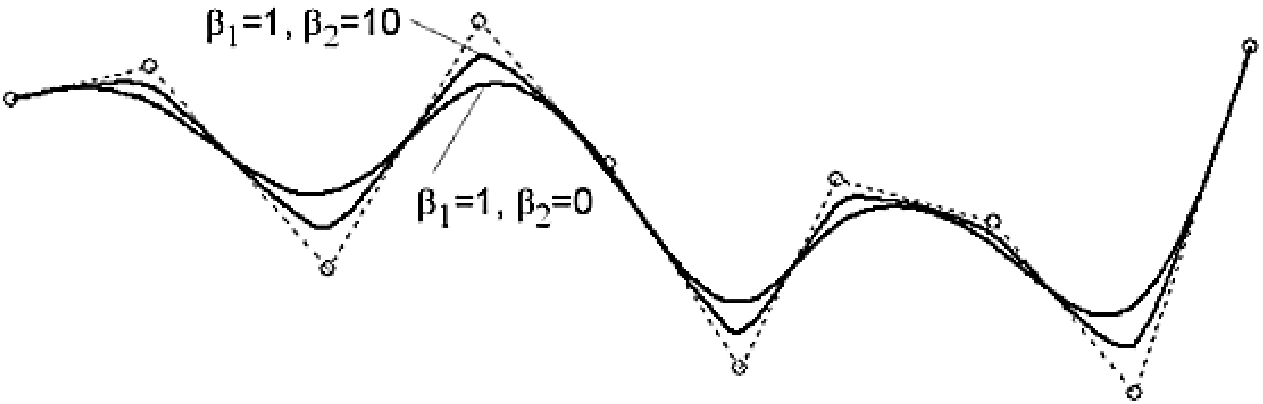
Кривая Безье



Интерполяционная кривая *Catmull-Rom*



Бета-сплайновая кривая



Благодарю за внимание!)