ЛК 5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАФИКЕ

1. Аффинные преобразования координат на плоскости.

2. Однородные координаты.

3. Аффинные преобразования координат в трехмерном пространстве.

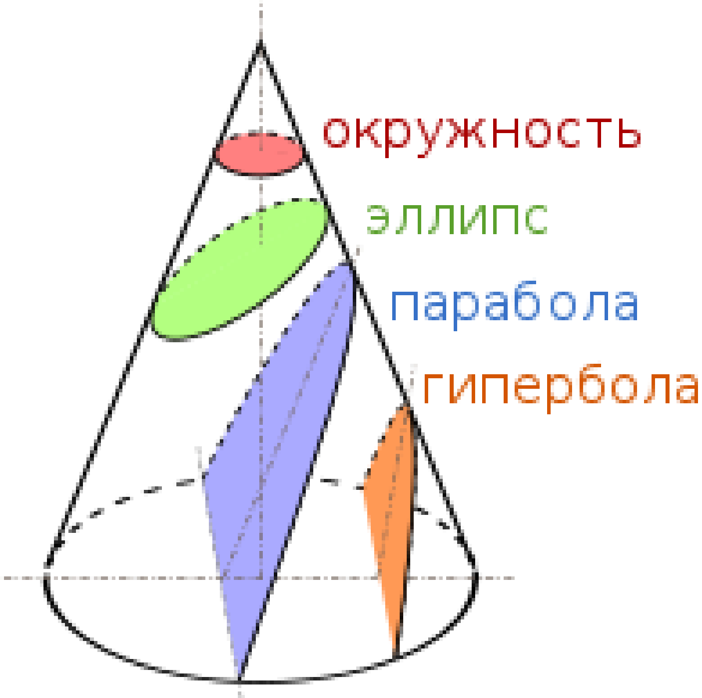
4. Преобразования объектов.

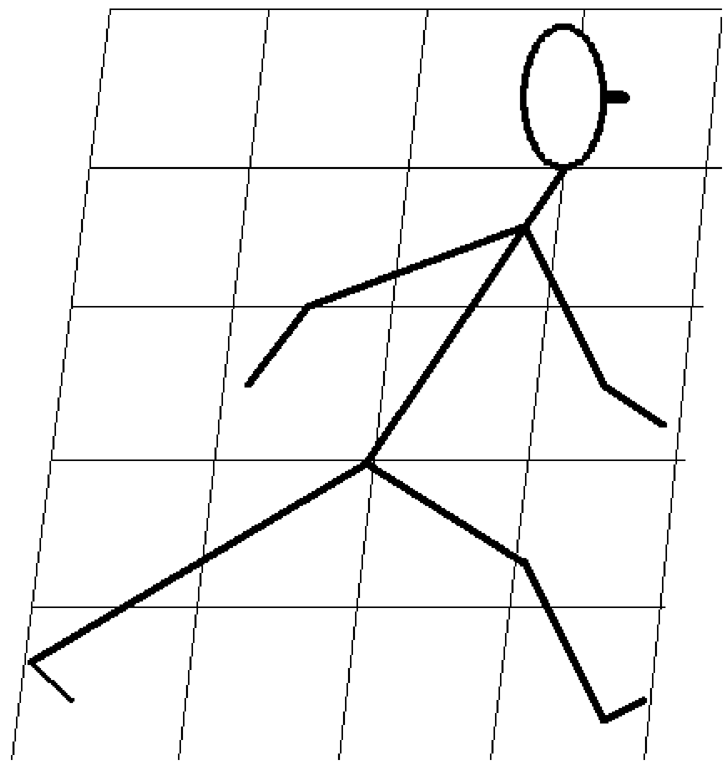
5. Композиция преобразований.

1. АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

// Термин «Аффинное преобразование» относится к временам Л.Эейлера (1707-1783)

// В 1827 г. А.Ф. Мёбиус издает книгу «Барицентрическое исчисление», которая стала основополагающей в аффинной геометрии





Преобразование плоскости называется ***аффинным***, если оно взаимно однозначно и образом любой прямой является прямая.

Преобразование называется ***взаимно однозначным***, (биективным) если оно разные точки переводит в разные, и в каждую точку переходит какая-то точка.

Преобразование - это отображение множества на само себя.

Общая формула описания аффинных преобразований:

$$\begin{cases} X = Ax + By + C, \\ Y = Dx + Ey + F, \end{cases}$$

В матричном виде:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ D & E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C \\ F \end{bmatrix}.$$

Частные случаи аффинного преобразования:

Параллельный перенос

$$\begin{cases} X = x - dx \\ Y = y - dy \end{cases}$$

Масштабирование

$$\begin{cases} X = x / sx \\ Y = y / sy \end{cases}$$

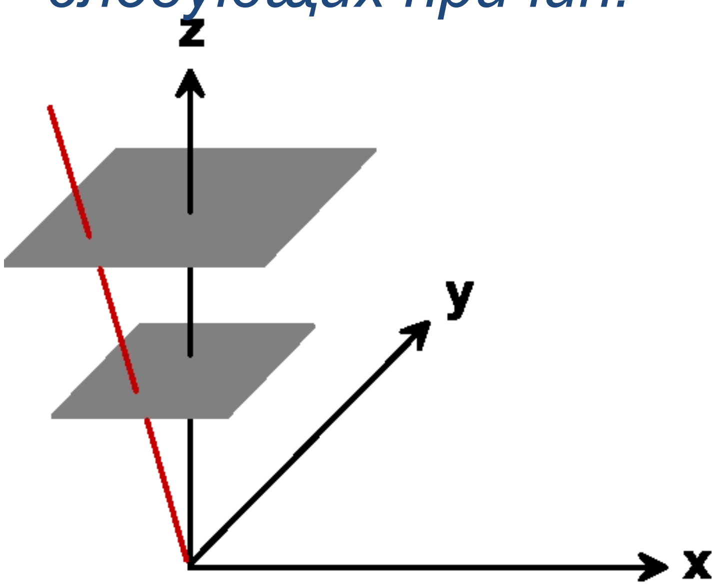
Поворот

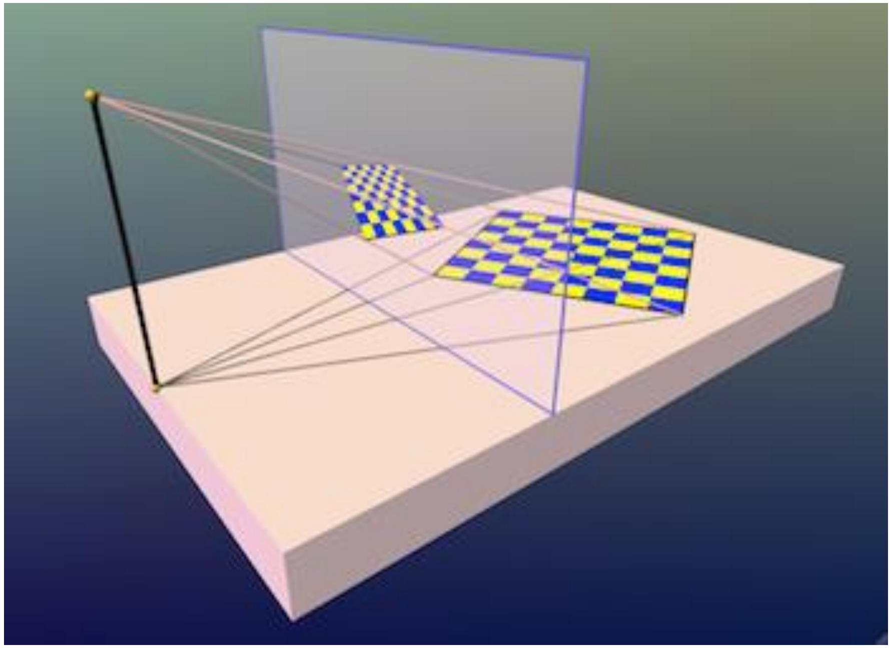
$$\begin{cases} X = \quad x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ Y = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

2.ОДНОРОДНЫЕ КООРДИНАТЫ

Однородные координаты - это математический механизм, связанный с определением положения точек в пространстве.

// Привычный аппарат декартовых координат, не подходит для решения некоторых важных задач в силу следующих причин:





// В декартовых координатах невозможно описать бесконечно удаленную точку. А многие математические и геометрические концепции значительно упрощаются, если в них используется понятие бесконечности. Например, "бесконечно удаленный источник света".

// С точки зрения алгебраических операций, декартовы координаты не позволяют провести различия межу точками и векторами в пространстве. Действительно, (1;-2,5) - это направление или точка?

// Невозможно использовать унифицированный механизм работы с матрицами для выражения преобразований точек.

// Декартовы координаты не позволяют использовать матричную запись для задания перспективного преобразования (проекции) точек.

Двумерные однородные координаты точки, имеют вид:

$$(x, y, w)$$

где ***w*** - произвольный множитель, не равный 0.

*// Число **w** так же называется масштабным множителем.*

Двумерные декартовые координаты точки получаются из однородных делением на множитель ***w***:

$$X = x/w; \; Y = y/w$$

В иной форме записи преобразование из однородных координат в обычные: (x/w; y/w; w/w)->(X;Y;1).
// Фактически точка (X, Y) проектируется на плоскость, параллельную координатной и отстоящей от нее на расстояние, равное единице.

Основные свойства:

- Два набора чисел, представляющих однородные координаты, соответствуют одной точке Декартового пространства если они могут быть получены один из другого умножением на некоторый множитель.

// (2,5,3) и (4,10,6) представляют одну точку.

- В силу произвольности значения ***w*** в однородных координатах не существует единственного представления точки, заданной в декартовых координатах.
- Как минимум одно число из тройки должно быть отлично от нуля – точка (0,0,0) не будет определена.
- Если $w \neq 0$, то деление на нее даст Декартовы координаты $(x/w, y/w, 1)$.
- Если $w=0$, то точка находится в бесконечности.

Общая формула аффинных преобразований в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Параллельный перенос

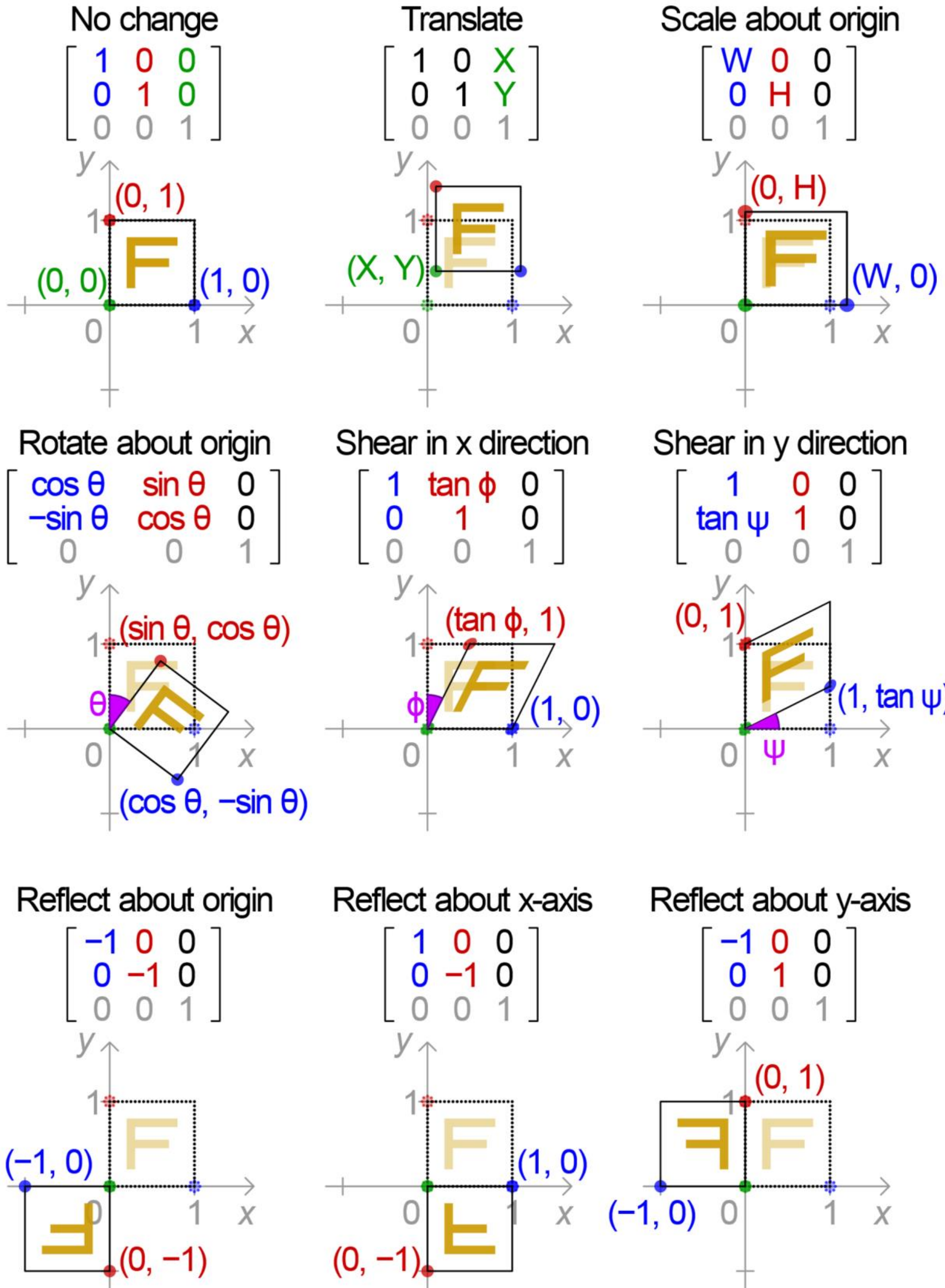
$$T(dx, dy) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -dx \\ 0 & 1 & -dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Масштабирование

$$S(sx, sy) = \begin{bmatrix} 1/sx & 0 & 0 \\ 0 & 1/sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Поворот

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$


No change
1 0 0
0 1 0
0 0 1
(0, 1)
(0, 0)
(1, 0)
Translate
1 0 X
0 1 Y
0 0 1
(X, Y)
Scale about origin
W 0 0
0 H 0
0 0 1
(0, H)
(W, 0)
Rotate about origin
cos θ sin θ 0
−sin θ cos θ 0
0 0 1
(sin θ, cos θ)
θ
(cos θ, −sin θ)
Shear in x direction
1 tan ϕ 0
0 1 0
0 0 1
(tan ϕ, 1)
ϕ
(1, 0)
Shear in y direction
1 0 0
tan ψ 1 0
0 0 1
(0, 1)
(1, tan ψ)
ψ
Reflect about origin
−1 0 0
0 −1 0
0 0 1
(−1, 0)
(0, −1)
Reflect about x-axis
1 0 0
0 −1 0
0 0 1
(1, 0)
(0, −1)
Reflect about y-axis
−1 0 0
0 1 0
0 0 1
(0, 1)
(−1, 0)
x
y
0
1

3. АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В ОБЩЕМ ВИДЕ:

$$\begin{cases} X = Ax + By + Cz + D, \\ Y = Ex + Fy + Gz + H, \\ Z = Kx + Ly + Mz + N, \end{cases}$$

ГДЕ: *A*, *B* … *N* - КОНСТАНТЫ

В МАТРИЧНОМ ВИДЕ:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ K & L & M & N \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix},$$

Параллельный перенос

$$\begin{cases} X = x - dx \\ Y = y - dy \\ Z = z - dz \end{cases} \quad T(dx, dy, dz) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -dx \\ 0 & 1 & 0 & -dy \\ 0 & 0 & 1 & -dz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Масштабирование

$$\begin{cases} X = x / sx \\ Y = y / sy \\ Z = z / sz \end{cases} \quad S(sx, sy, sz) = \begin{bmatrix} 1/sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Поворот вокруг оси x на угол α:

$$\begin{cases} X = x, \\ Y = y\cos\alpha + z\sin\alpha, \\ Z = -y\sin\alpha + z\cos\alpha, \end{cases} \qquad Rx(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поворот вокруг y оси на угол β:

$$\begin{cases} X = x\cos\beta + z\sin\beta, \\ Y = y, \\ Z = -x\sin\beta + z\cos\beta, \end{cases} \qquad Ry(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поворот вокруг z оси на угол γ.

$$\begin{cases} X = x\cos\beta + z\sin\beta, \\ Y = y, \\ Z = -x\sin\beta + z\cos\beta, \end{cases} \qquad Rz(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

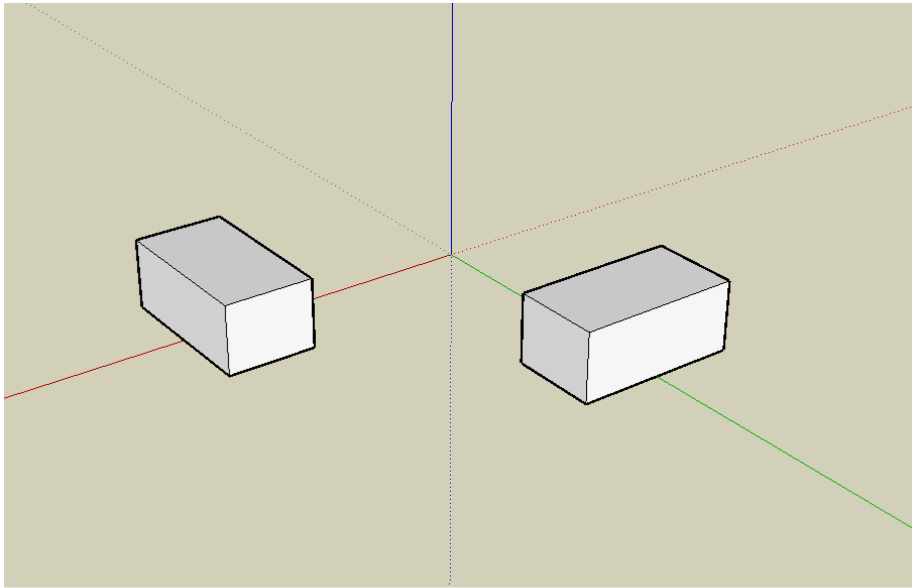
4. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ

Пусть любая точка, которая принадлежит определенному объекту, имеет координаты ($\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$, $\boldsymbol{k}_3$,…, $\boldsymbol{k}_n$) в n-мерной системе координат.

Тогда ***преобразование объекта*** можно определить как ***изменение положения точек объекта***.

Новое положение точки пространства отвечает новым значениям координат ($\boldsymbol{m}_1$, $\boldsymbol{m}_2$, $\boldsymbol{m}_3$, ... ,$\boldsymbol{m}_n$).

$$(\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2, \boldsymbol{m}_3, \dots , \boldsymbol{m}_n) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2, \boldsymbol{k}_3, \dots , \boldsymbol{k}_n)$$



На плоскости:

$$\begin{cases} X = Fx(x, y), \\ Y = Fy(x, y). \end{cases}$$

В трехмерном пространстве:

$$\begin{cases} X = Fx(x, y, z), \\ Y = Fy(x, y, z), \\ Z = Fz(x, y, z). \end{cases}$$

5. КОМПОЗИЦИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Матричная запись дает возможность наглядно описывать несколько преобразований, которые идут одно за другим.

Например, если необходимо сначала выполнить преобразования

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix},$$

а потом - другое преобразование:

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & B & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix},$$

то:

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & B & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & B & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Или:

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & C & \\ & & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix},$$

где матрица (C) равна произведению (B × A).

Благодарю за внимание!)