

ЛК 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАФИКИ

1. Системы координат

2. Координаты в матричном виде

3. Произведение матриц

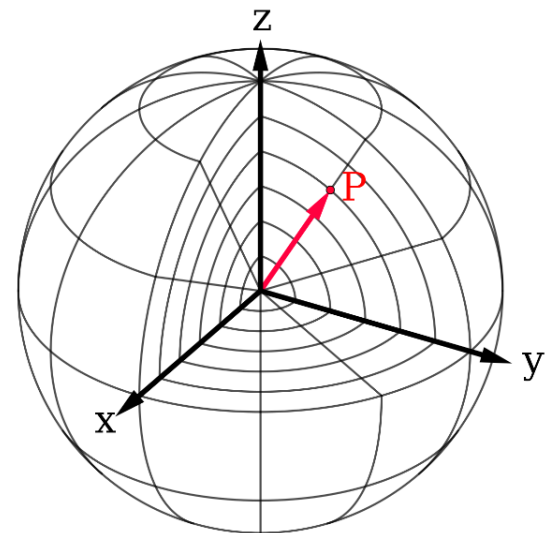
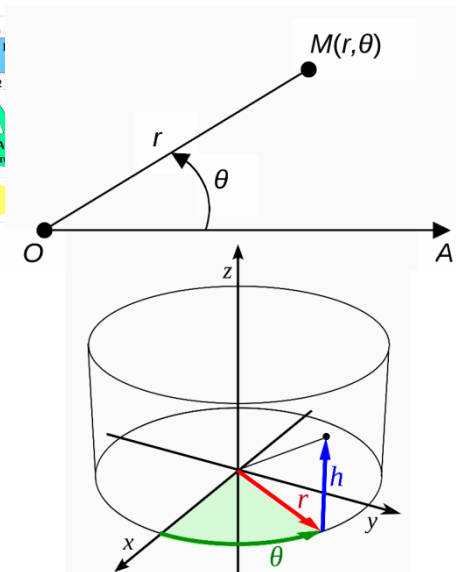
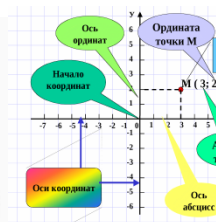
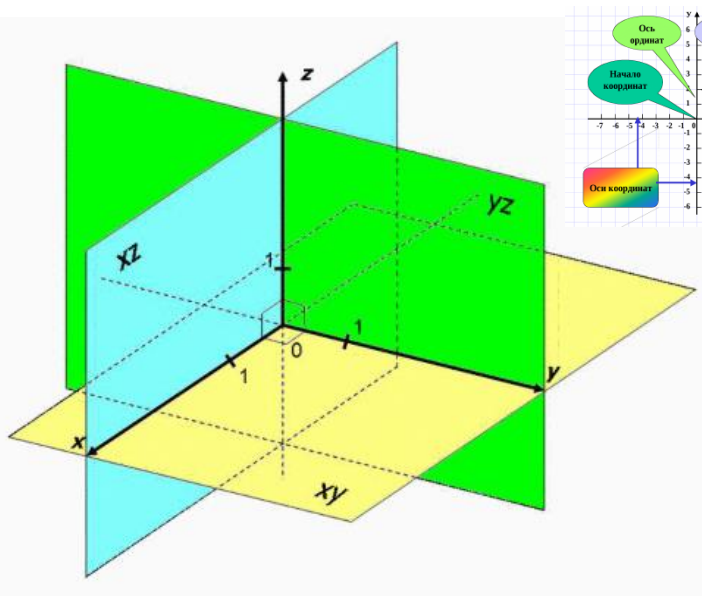
4. Преобразование координат

1.СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Координаты - величины, определяющие положение точки на плоскости и в пространстве.

Основные системы координат:

- **прямоугольная система координат;**
- **полярная система координат;**
- **цилиндрическая система координат;**
- **сферическая система координат.**

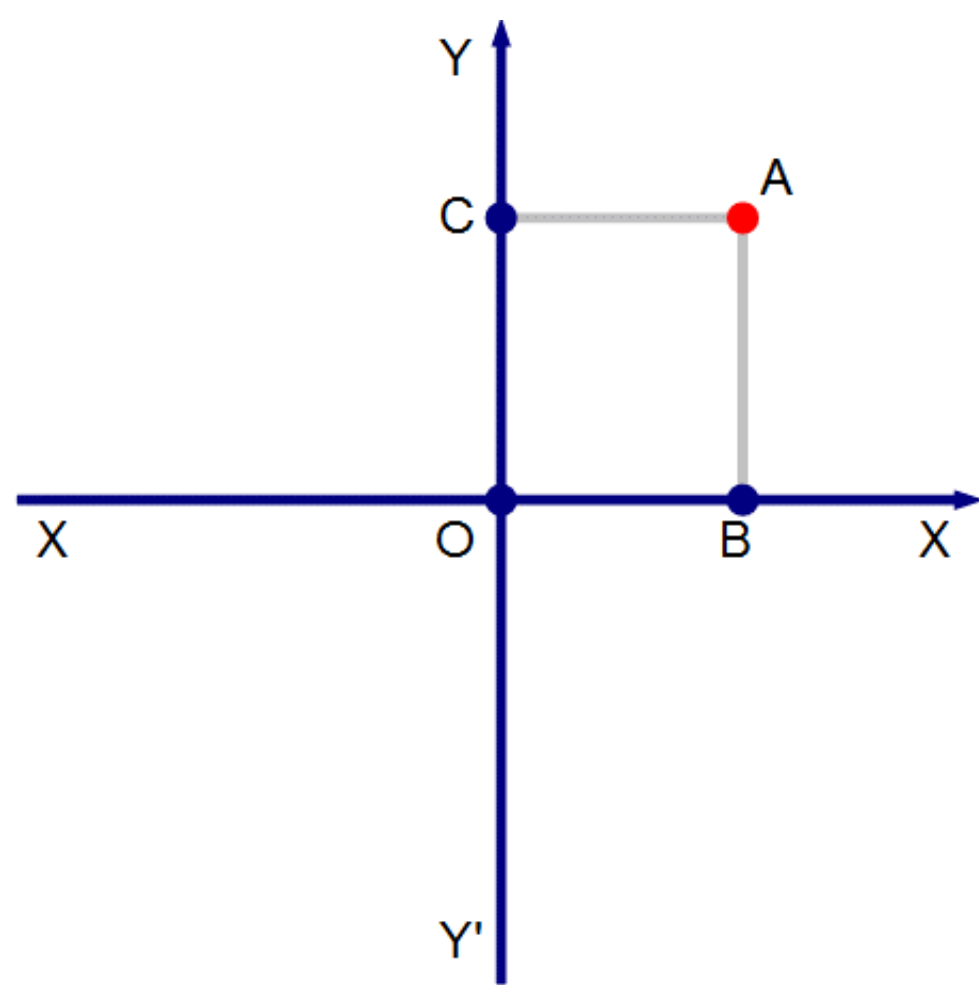


Прямоугольная система координат на плоскости.

Прямоугольная система координат (Декартова) – прямолинейная система координат с взаимно перпендикулярными осями на плоскости или в пространстве.

// Прямоугольная система координат на плоскости образуется двумя взаимно перпендикулярными осями координат $Y'Y$ и $X'X$

// Оси координат пересекаются в точке O , которая называется началом координат, на каждой оси выбрано положительное направление



// Положение точки A на плоскости определяется двумя координатами x и y

// Координата x равна длине отрезка OB, координата y – длине отрезка OC в выбранных единицах измерения

// Отрезки OB и OC определяются линиями, проведенными из точки A параллельно осям $Y'Y$ и $X'X$ соответственно.

// Координата x называется абсциссой точки A, координата y называется ординатой точки A

// Символически это записывают так:

$$A(x, y) \text{ или } A = (x, y)$$

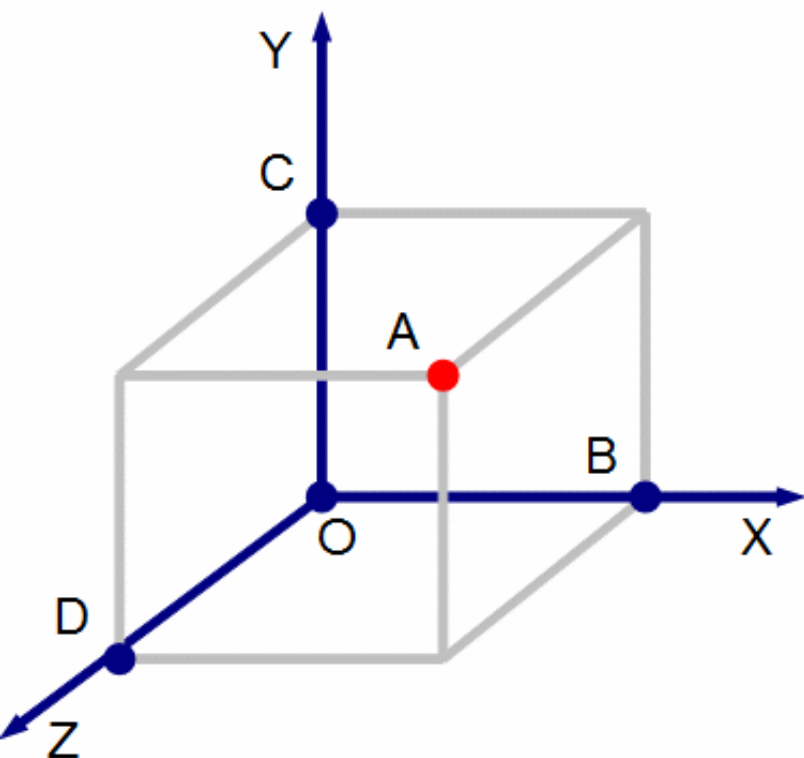
Прямоугольная система координат в 3-х мерном пространстве.

Прямоугольная система координат в пространстве образуется тремя взаимно перпендикулярными осями координат OX , OY и OZ .

// Оси координат пересекаются в точке O , которая называется началом координат, на каждой оси выбрано положительное направление, указанное стрелками, и единица измерения отрезков на осях

// Единицы измерения обычно (не обязательно) одинаковы для всех осей

// OX - ось абсцисс, OY - ось ординат, OZ - ось аппликат.



// Положение точки A в пространстве определяется тремя координатами x , y и z

// Координата x равна длине отрезка OB , координата y – длине отрезка OC , координата z – длине отрезка OD в выбранных единицах измерения

// Отрезки OB , OC и OD определяются плоскостями, проведенными из точки A параллельно плоскостям YOZ , XOZ и XOY соответственно

// Координата x называется абсциссой точки A , координата y – ординатой точки A , координата z – аппlikатой точки A

// Символически это записывают так: $A(x, y, z)$ или $A = (x, y, z)$.

Прямоугольная система координат в n-мерном пространстве.

Прямоугольная система координат может быть использована и в пространстве любой конечной размерности аналогично тому, как это делается для трехмерного пространства. Количество координатных осей при этом равно размерности пространства.

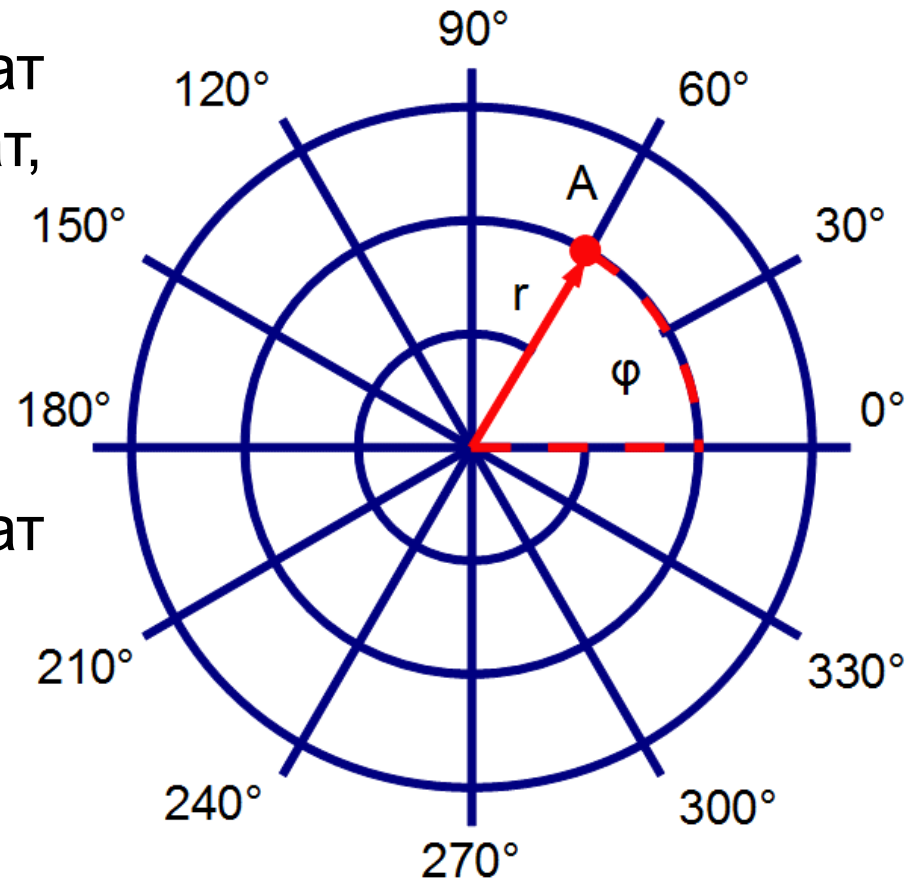
// Для обозначения координат обычно применяют не разные буквы, а одну и ту же букву с числовым индексом. Чаще всего это: $x_1, x_2, x_1, \dots, x_n$

// Для обозначения произвольной i -ой координаты из этого набора используют буквенный индекс: x_i

Полярная система координат.

Полярная система координат – двумерная система координат, в которой каждая точка на плоскости определяется двумя числами - полярным углом и полярным радиусом.

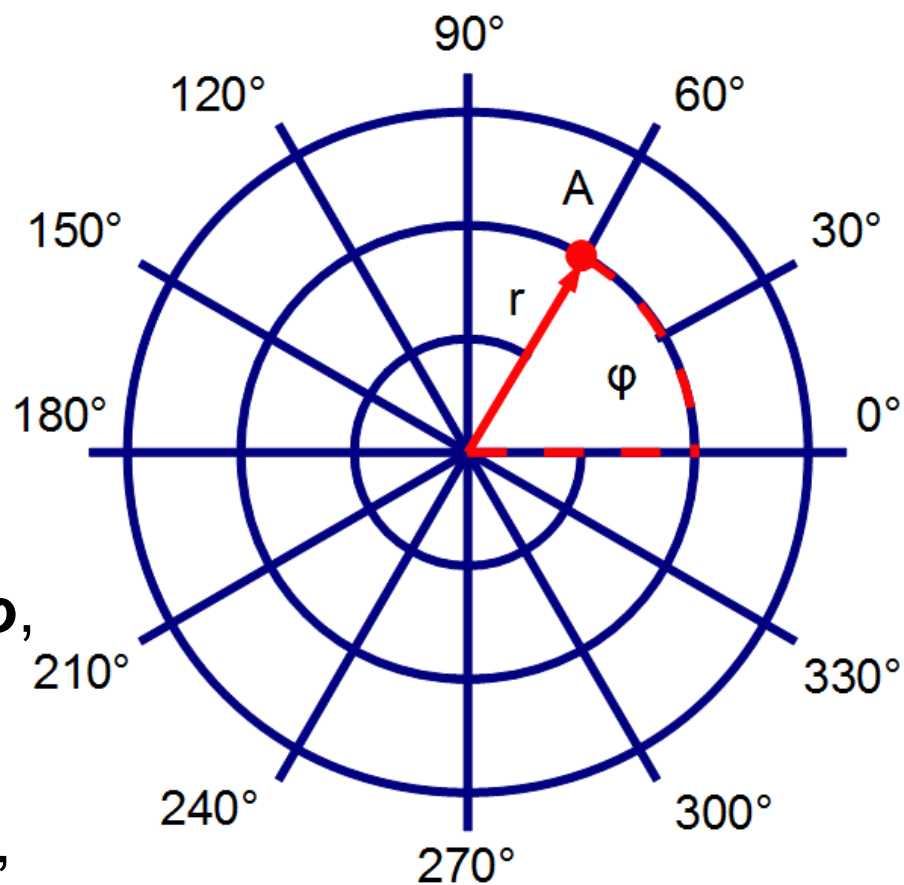
Полярная система координат задается лучом, который называют **нулевым** или **полярной осью**. Точка, из которой выходит этот луч, называется началом координат или **ПОЛЮСОМ**.



Любая точка на плоскости определяется двумя полярными координатами: **радиальной** и **угловой**.

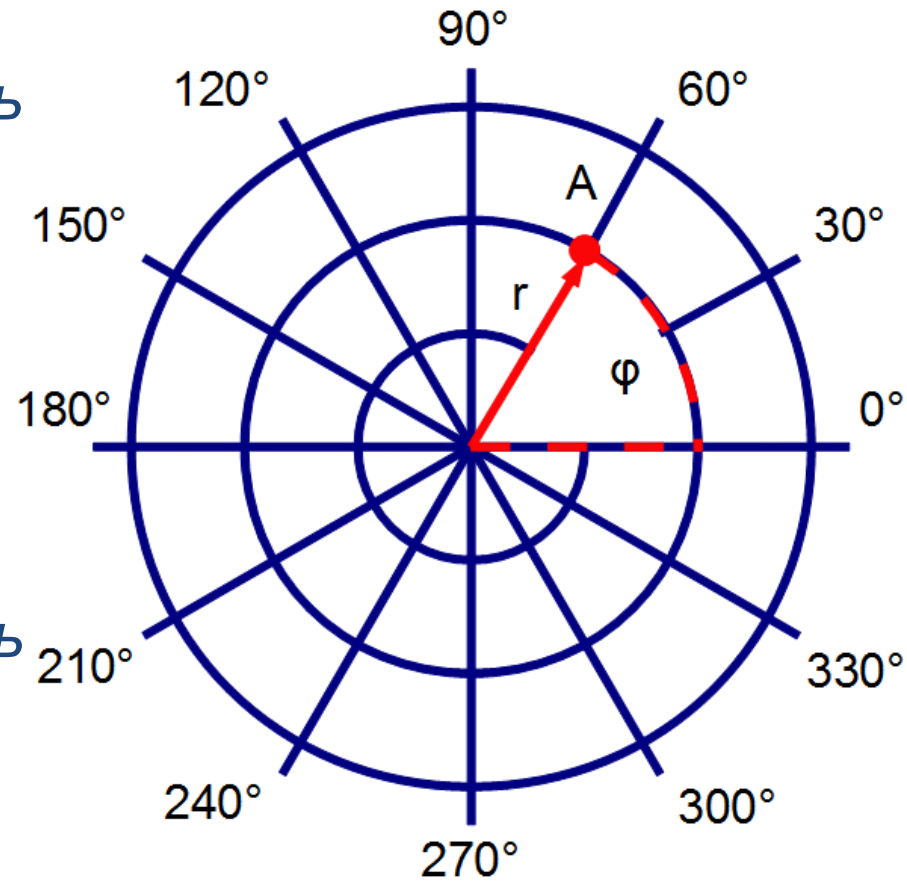
Радиальная координата (обычно обозначается r) соответствует расстоянию от точки до начала координат.

Угловая координата, также называется **полярным углом** или азимутом и обозначается φ , равна углу, на который нужно повернуть против часовой стрелки полярную ось для того, чтобы попасть в эту точку.



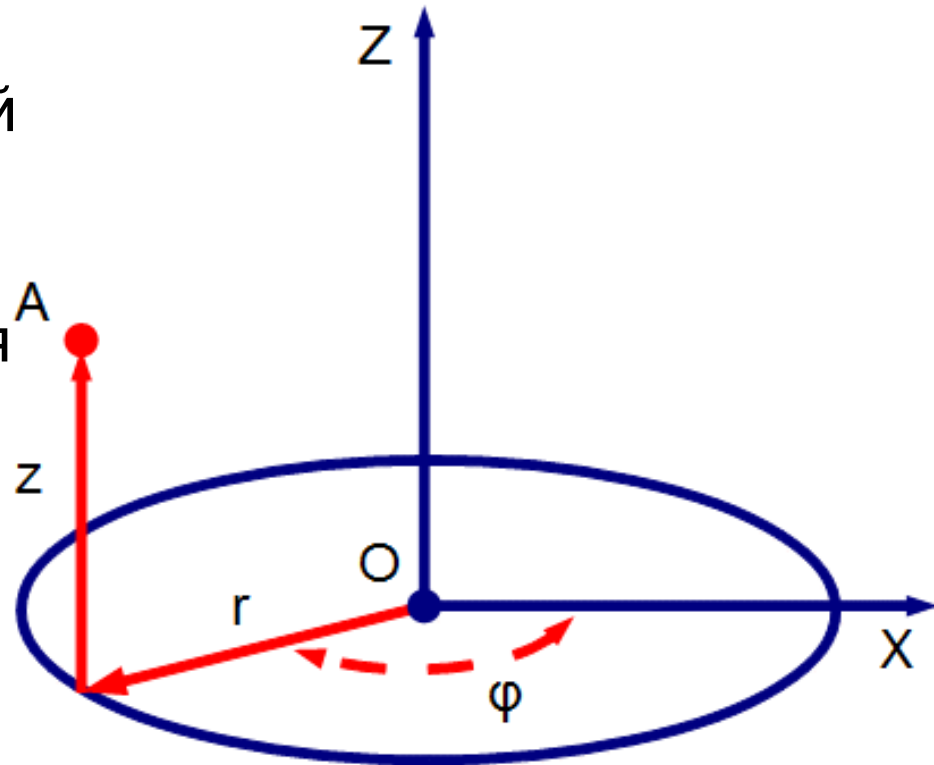
// Определенная таким образом радиальная координата может принимать значения от нуля до бесконечности, а угловая координата изменяется в пределах от 0° до 360°

// Однако, для удобства область значений полярной координаты можно расширить за пределы полного угла, а также «разрешить» ей принимать отрицательные значения, что отвечает повороту полярной оси по часовой стрелке.



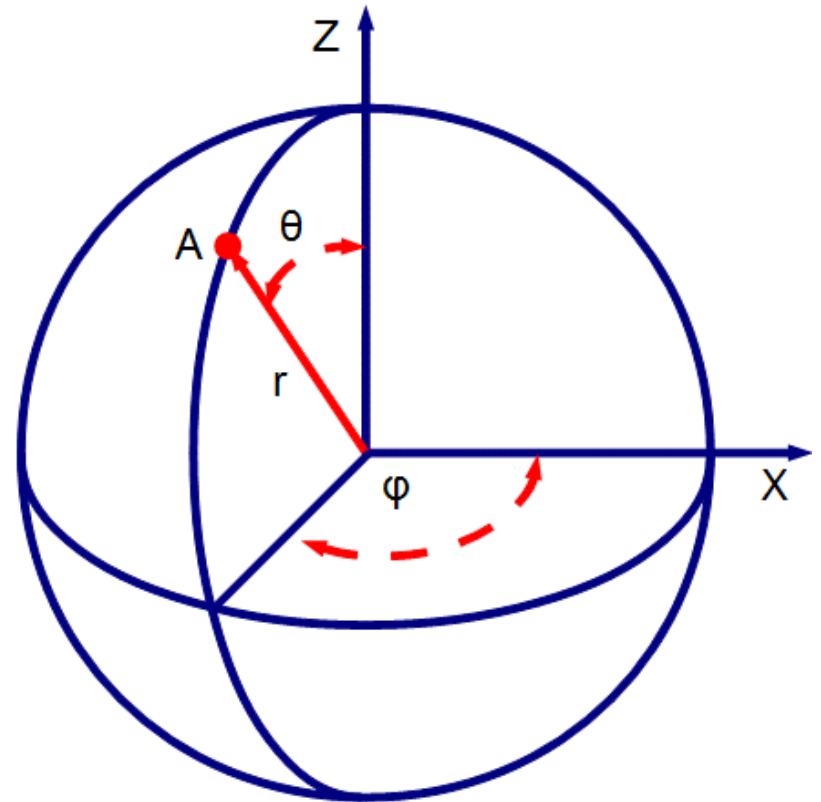
Цилиндрическая система координат

Цилиндрическая система координат расширяет плоскую полярную систему добавлением третьей линейной координаты, называемой «высотой» и равной высоте точки над нулевой плоскостью подобно тому, как Декартова система расширяется на случай трех измерений. Третья координата обычно обозначается как z , образуя тройку координат (r, φ, z) .



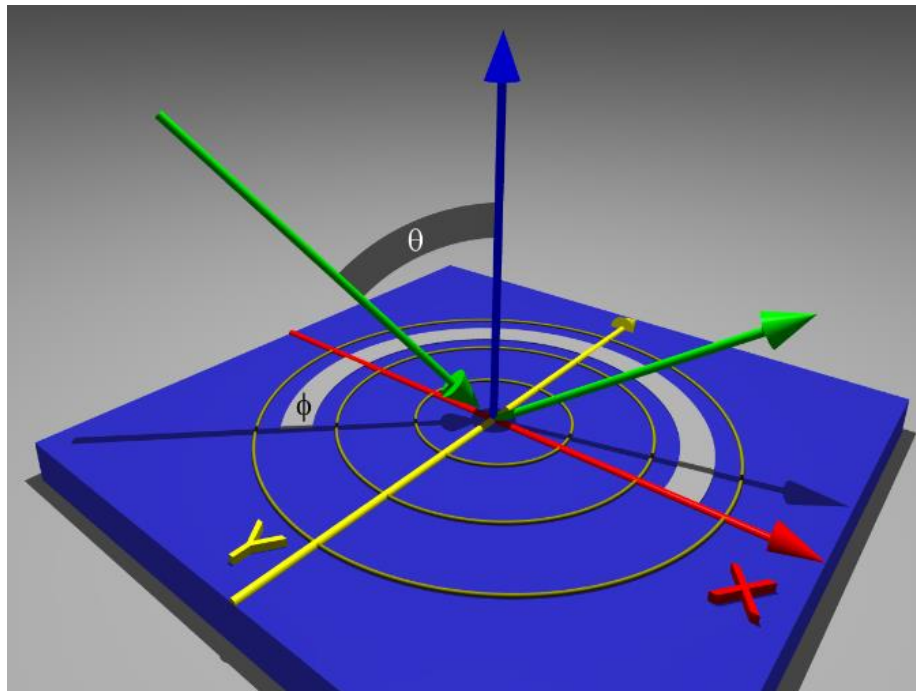
Сферическая система координат

Также полярные координаты можно расширить на случай трех измерений путём добавления угловой координаты θ , равным углу поворота от вертикальной оси z (называется зенитом или широтой, значения находятся в интервале от 0 до 180°). То есть, сферические координаты, это тройка (r, φ, θ) , где r - расстояние от центра координат, φ - угол от оси x (как и в плоских полярных координатах), θ - широта.



Сферическая система координат

// Лучшим контекстом применения полярных координат являются случаи, тесно связанные с направлением и расстоянием от некоторого центра. Кроме того, многие физических системы - такие, которые содержат тела, движущиеся вокруг центра, либо явления, распространяющиеся из некоторого центра — гораздо проще моделировать в полярных координатах.



2.КООРДИНАТЫ В МАТРИЧНОМ ВИДЕ

Координаты точки на плоскости можно задать так называемым вектор-столбцом:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

В 3-х мерном пространстве:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

3.ПРОИЗВЕДЕНИЕ МАТРИЦ

Для двух матриц A размером $(m \times n)$ и B размером $(n \times p)$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix},$$

произведением матриц
является матрица $C = A \times B$: $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$
размером $(m \times p)$:

«строка на столбец»:

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & c_{ij} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & b_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & b_{nj} & \vdots \end{bmatrix}.$$

4.ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ

Пусть задана n -мерная система координат в базисе $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \dots, \mathbf{k}_n)$, описывающая положение точки в пространстве с помощью числовых значений k_i .

В компьютерной графике чаще всего используется 2-х мерная ($n=2$) и 3-х мерная ($n=3$) системы координат.

Если задать другую, N -мерную, систему координат в базисе $(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3, \dots, \mathbf{m}_N)$ и поставить задачу определения координат в новой системе, зная координаты в старой, то решение (если оно существует) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} m_1 = f_1(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n), \\ m_2 = f_2(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n), \\ \dots \\ m_N = f_N(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n), \end{cases}$$

где f_i - функция пересчета i -й координаты,
аргументы - координаты в системе k_n .

Можно поставить и обратную задачу - по известным координатам ($m_1, m_2, m_3, \dots, m_N$) определить координаты ($k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$).

$$\begin{cases} k_1 = F_1(m_1, m_2, m_3, \dots, m_n), \\ k_2 = F_2(m_1, m_2, m_3, \dots, m_n), \\ \dots \\ k_N = F_N(m_1, m_2, m_3, \dots, m_n), \end{cases}$$

где F_i – функция обратного преобразования.

If $n \neq N$ - осуществить однозначное преобразование координат зачастую не удастся.

// Например, по двумерным экранным координатам нельзя без дополнительных условий однозначно определить трехмерные координаты отображаемых объектов

Преобразование координат классифицируют:

- по системам координат // например, преобразование из полярной системы в Декартову;
- по виду функции преобразования f_i .

По виду функции преобразования:

□ линейные

$$f_i = a_{i1} k_1 + a_{i2} k_2 + \dots + a_{in} k_n + a_{in+1}$$

$a_{ij} = \text{const}$; if $n=N$ – аффинные преобразования

□ нелинейные

If для хотя бы одного i функция f_i -
нелинейная относительно $(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$

Линейные преобразования в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{Nn} & a_{Nn+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_N \end{bmatrix}$$

Благодарю за внимание!)

