

# **ЛК 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАФИКИ**

1. Системы координат

2. Координаты в матричном виде

3. Произведение матриц

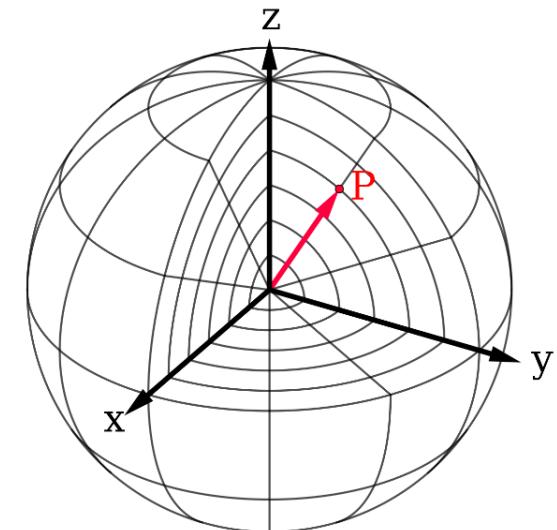
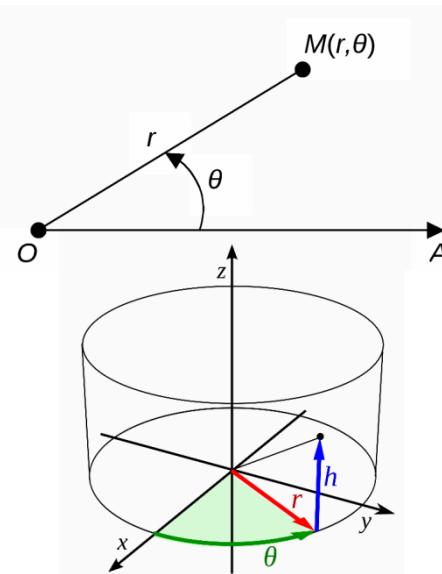
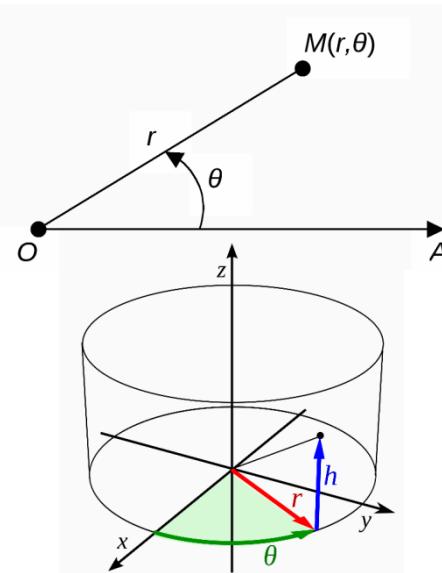
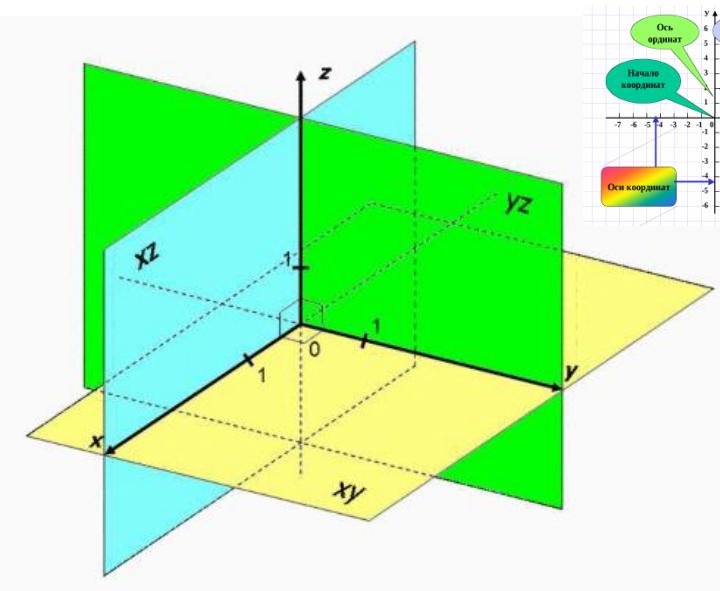
4. Преобразование координат

# 1. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Координаты - величины, определяющие положение точки на плоскости и в пространстве.

Основные системы координат:

- прямоугольная система координат;
- полярная система координат;
- цилиндрическая система координат;
- сферическая система координат.

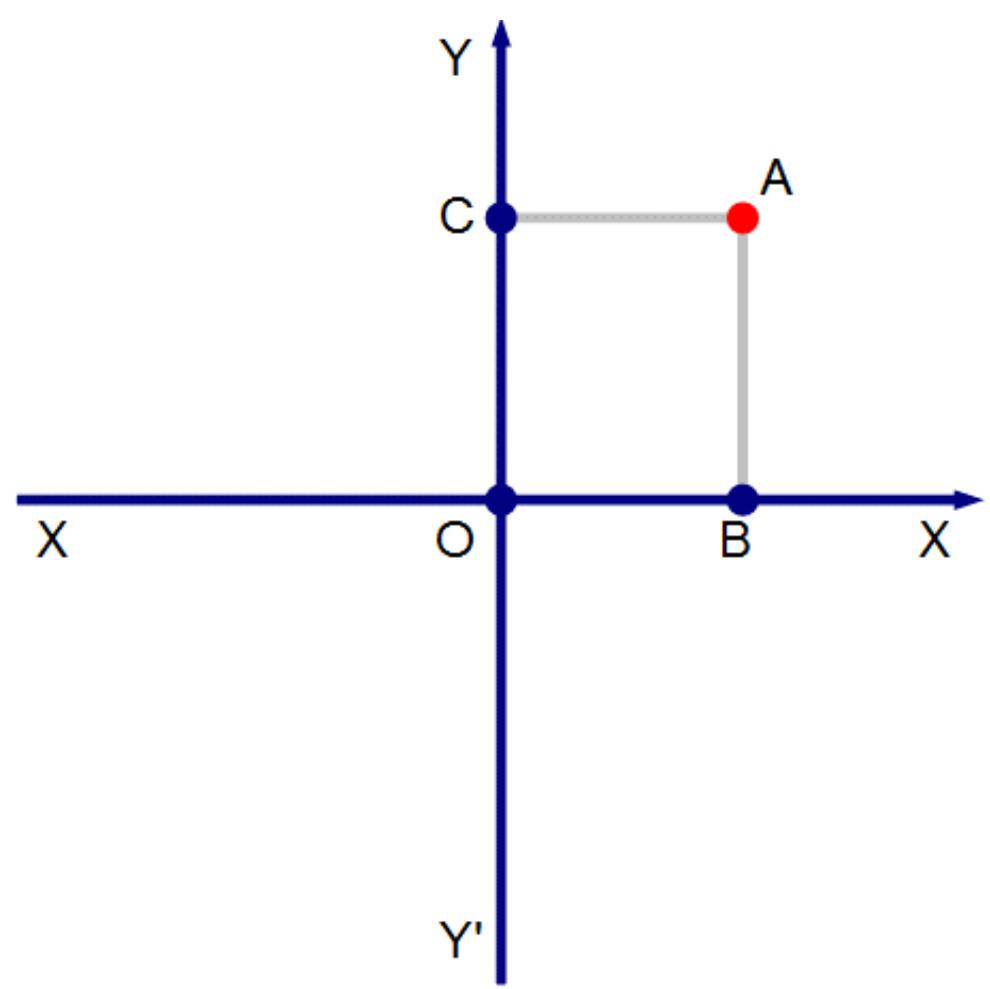


# **Прямоугольная система координат на плоскости.**

Прямоугольная система координат (Декартова) – прямолинейная система координат с взаимно перпендикулярными осями на плоскости или в пространстве.

*// Прямоугольная система координат на плоскости образуется двумя взаимно перпендикулярными осями координат  $Y'Y$  и  $X'X$*

*// Оси координат пересекаются в точке  $O$ , которая называется началом координат, на каждой оси выбрано положительное направление*



// Положение точки  $A$  на плоскости определяется двумя координатами  $x$  и  $y$

// Координата  $x$  равна длине отрезка  $OB$ , координата  $y$  – длине отрезка  $OC$  в выбранных единицах измерения

// Отрезки  $OB$  и  $OC$  определяются линиями, проведенными из точки  $A$  параллельно осям  $Y'Y$  и  $X'X$  соответственно.

// Координата  $x$  называется абсциссой точки  $A$ , координата  $y$  называется ординатой точки  $A$   
// Символически это записывают так:

$A(x, y)$  или  $A = (x, y)$

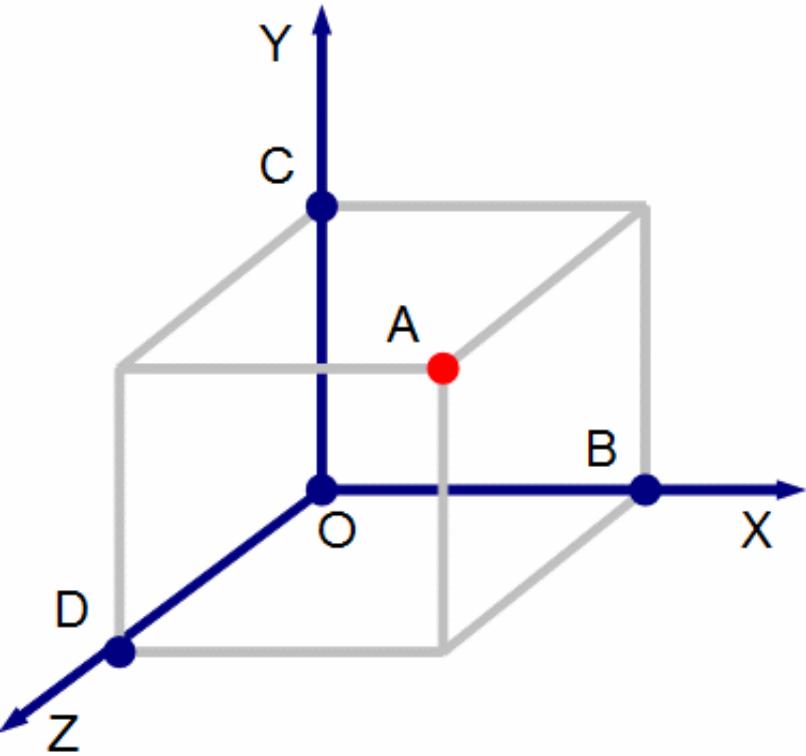
# **Прямоугольная система координат в 3-х мерном пространстве.**

Прямоугольная система координат в пространстве образуется тремя взаимно перпендикулярными осями координат  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$ .

*// Оси координат пересекаются в точке  $O$ , которая называется началом координат, на каждой оси выбрано положительное направление, указанное стрелками, и единица измерения отрезков на осях*

*// Единицы измерения обычно (не обязательно) одинаковы для всех осей*

*//  $OX$  - ось абсцисс,  $OY$  - ось ординат,  $OZ$  - ось аппликат.*



// Положение точки  $A$  в пространстве определяется тремя координатами  $x$ ,  $y$  и  $z$

// Координата  $x$  равна длине отрезка  $OB$ , координата  $y$  – длине отрезка  $OC$ , координата  $z$  – длине отрезка  $OD$  в выбранных единицах измерения

// Отрезки  $OB$ ,  $OC$  и  $OD$  определяются плоскостями, проведенными из точки  $A$  параллельно плоскостям  $YOZ$ ,  $XOZ$  и  $XOY$  соответственно

// Координата  $x$  называется абсциссой точки  $A$ , координата  $y$  - ординатой точки  $A$ , координата  $z$  - аппликатой точки  $A$

// Символически это записывают так:  $A(x, y, z)$  или  $A = (x, y, z)$ .

## Прямоугольная система координат в n-мерном пространстве.

Прямоугольная система координат может быть использована и в пространстве любой конечной размерности аналогично тому, как это делается для трехмерного пространства. Количество координатных осей при этом равно размерности пространства.

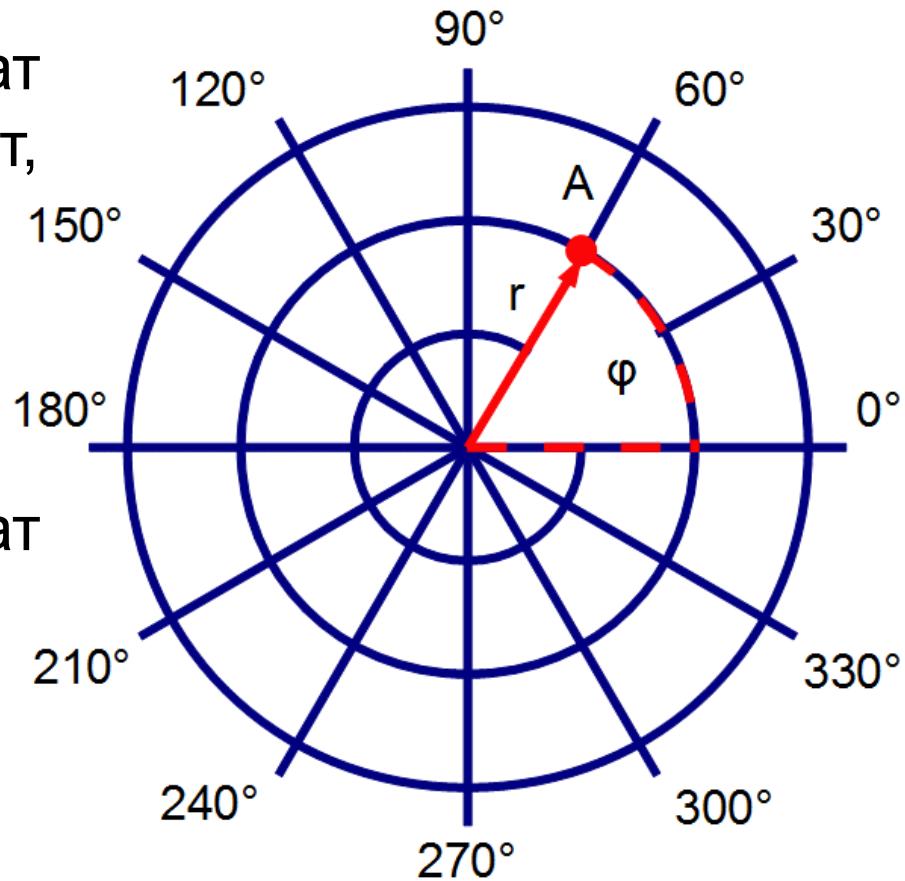
*// Для обозначения координат обычно применяют не разные буквы, а одну и ту же букву с числовым индексом. Чаще всего это:  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$ ,  $\mathbf{x}_3$ , ...  $\mathbf{x}_n$*

*// Для обозначения произвольной i-ой координаты из этого набора используют буквенный индекс:  $\mathbf{x}_i$*

# Полярная система координат.

Полярная система координат – двумерная система координат, в которой каждая точка на плоскости определяется двумя числами - полярным углом и полярным радиусом.

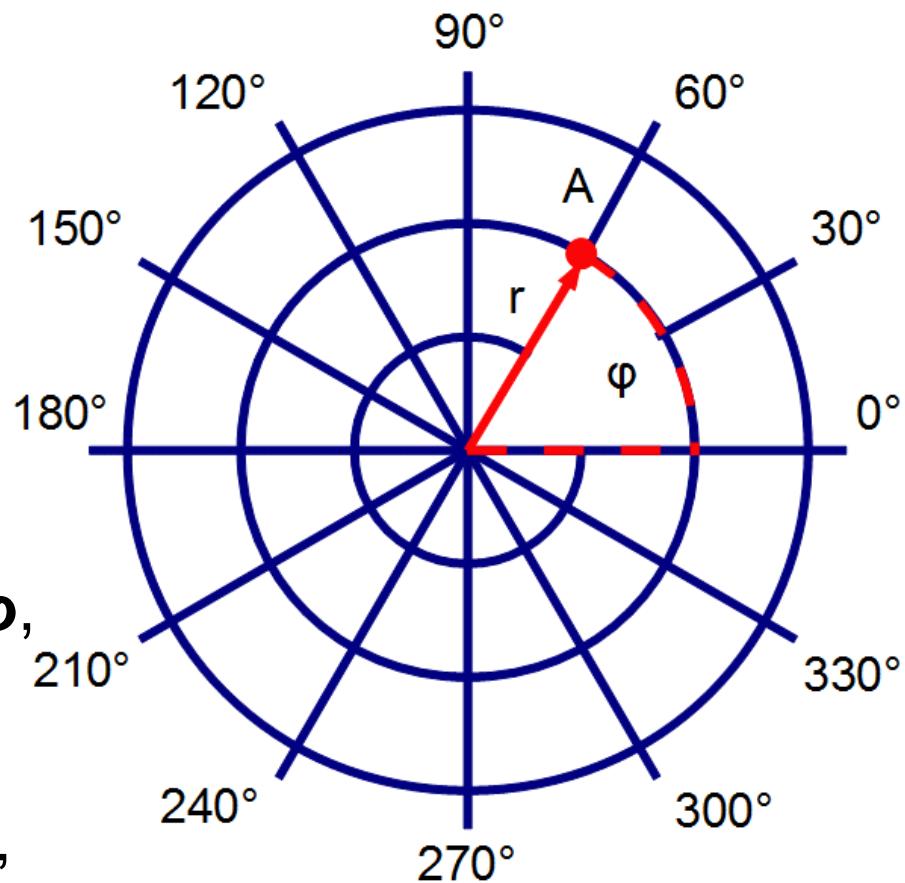
Полярная система координат задается лучом, который называют **нулевым** или **полярной осью**. Точка, из которой выходит этот луч, называется началом координат или **полюсом**.



Любая точка на плоскости определяется двумя полярными координатами: *радиальной* и *угловой*.

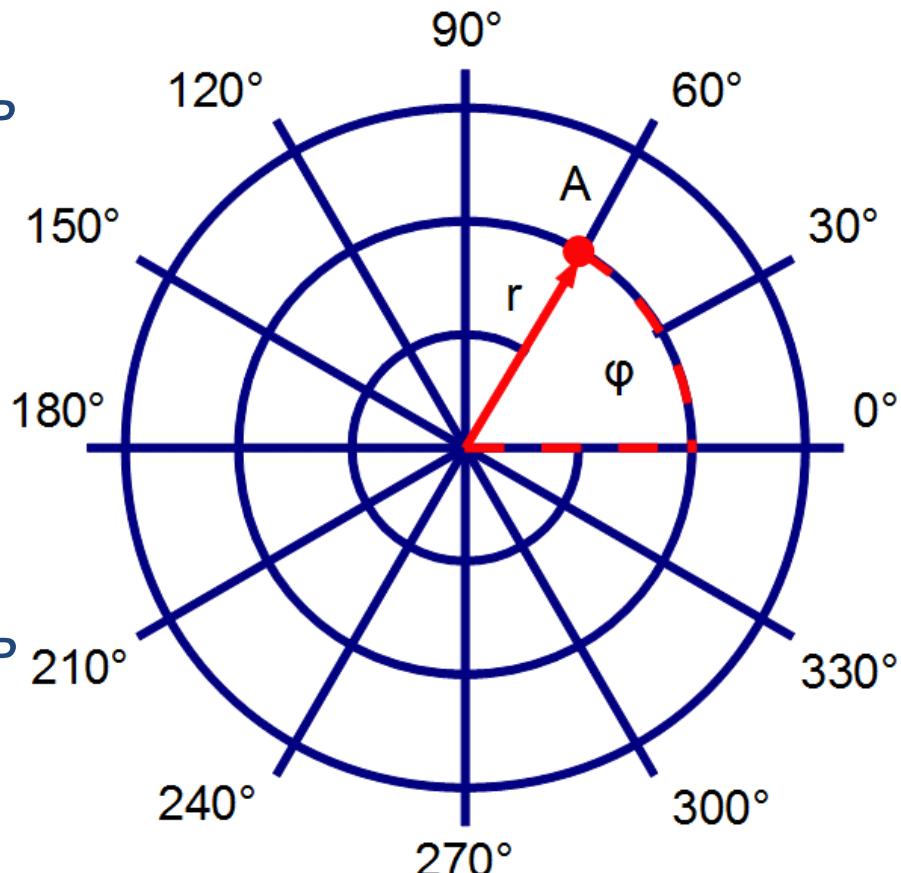
Радиальная координата (обычно обозначается  $r$ ) соответствует расстоянию от точки до начала координат.

Угловая координата, также называется *полярным углом* или азимутом и обозначается  $\varphi$ , равна углу, на который нужно повернуть против часовой стрелки полярную ось для того, чтобы попасть в эту точку.



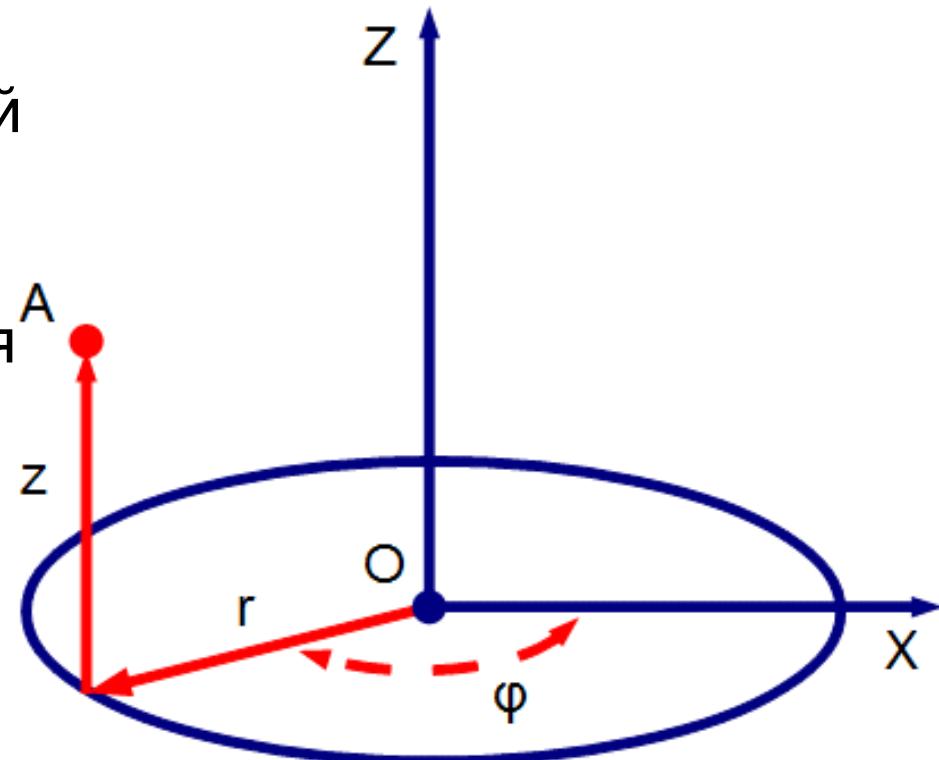
*// Определенная таким образом радиальная координата может принимать значения от нуля до бесконечности, а угловая координата изменяется в пределах от  $0^\circ$  до  $360^\circ$*

*// Однако, для удобства область значений полярной координаты можно расширить за пределы полного угла, а также «разрешить» ей принимать отрицательные значения, что отвечает повороту полярной оси по часовой стрелке.*



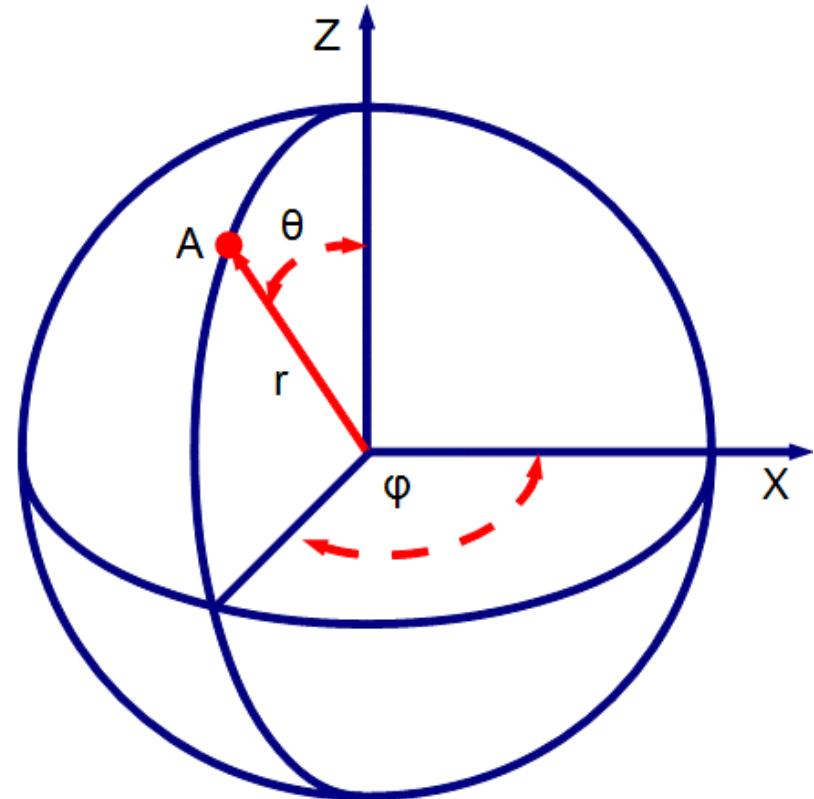
# Цилиндрическая система координат

Цилиндрическая система координат расширяет плоскую полярную систему добавлением третьей линейной координаты, называемой «высотой» и равной высоте точки над нулевой плоскостью подобно тому, как Декартова система расширяется на случай трех измерений. Третья координата обычно обозначается как  $z$ , образуя тройку координат  $(r, \varphi, z)$ .



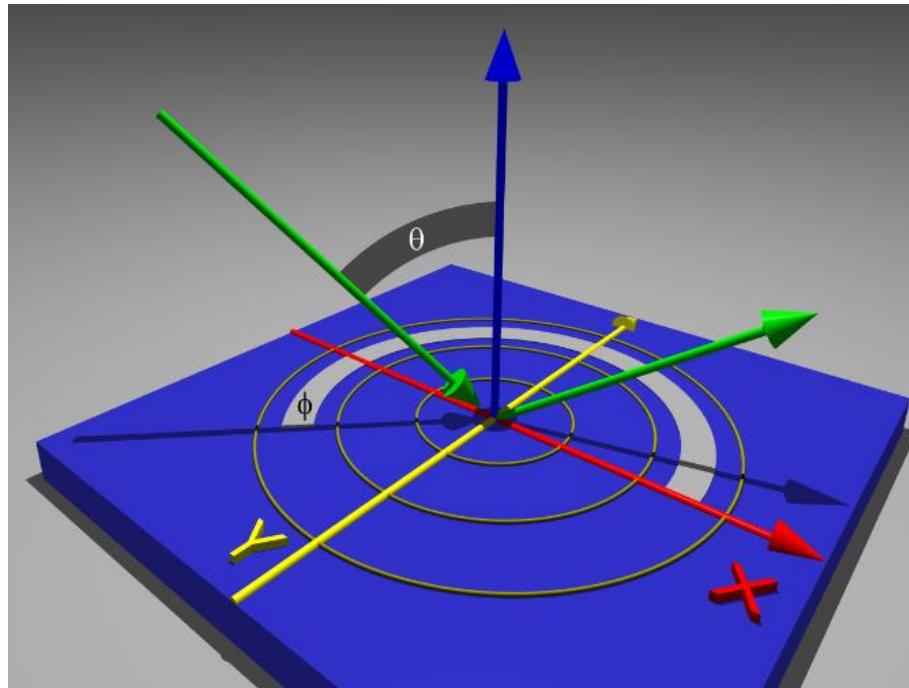
# Сферическая система координат

Также полярные координаты можно расширить на случай трех измерений путем добавления угловой координаты  $\theta$ , равным углу поворота от вертикальной оси  $z$  (называется зенитом или широтой, значения находятся в интервале от 0 до  $180^\circ$ ). То есть, сферические координаты, это тройка  $(r, \varphi, \theta)$ , где  $r$  - расстояние от центра координат,  $\varphi$  - угол от оси  $x$  (как и в плоских полярных координатах),  $\theta$  - широта.



# Сферическая система координат

// Лучшим контекстом применения полярных координат являются случаи, тесно связанные с направлением и расстоянием от некоторого центра. Кроме того, многие физических системы - такие, которые содержат тела, движущиеся вокруг центра, либо явления, распространяющиеся из некоторого центра — гораздо проще моделировать в полярных координатах.



## 2.КООРДИНАТЫ В МАТРИЧНОМ ВИДЕ

Координаты точки на плоскости можно задать так называемым вектор-столбцом:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

В 3-х мерном пространстве:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

### 3. ПРОИЗВЕДЕНИЕ МАТРИЦ

Для двух матриц  $A$  размером  $(m \times n)$  и  $B$  размером  $(n \times p)$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix},$$

произведением матриц является матрица  $C = A \times B$ :  $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$ ,  $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$  размером  $(m \times p)$ :

«строка на столбец»:

$$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & c_{ij} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \cdots & \cdots & b_{2j} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & b_{nj} & \cdots \end{bmatrix}.$$

## 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ

Пусть задана  $n$ -мерная система координат в базисе  $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \dots, \mathbf{k}_n)$ , описывающая положение точки в пространстве с помощью числовых значений  $k_i$ .

В компьютерной графике чаще всего используется 2-х мерная ( $n=2$ ) и 3-х мерная ( $n=3$ ) системы координат.

Если задать другую,  $N$ -мерную, систему координат в базисе  $(\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3, \dots, \mathbf{m}_N)$  и поставить задачу определения координат в новой системе, зная координаты в старой, то решение (если оно существует) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} m_1 = f_1(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n), \\ m_2 = f_2(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n), \\ \dots \\ m_N = f_N(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n), \end{cases}$$

где  $f_i$  - функция пересчета  $i$ -й координаты,  
аргументы - координаты в системе  $k_n$ .

Можно поставить и обратную задачу - по известным  
координатам ( $m_1, m_2, m_3, \dots, m_N$ ) определить  
координаты ( $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ ).

$$\begin{cases} k_1 = F_1(m_1, m_2, m_3, \dots, m_n), \\ k_2 = F_2(m_1, \underset{\dots}{m_2}, m_3, \dots, m_n), \\ \dots \\ k_N = F_N(m_1, m_2, m_3, \dots, m_n), \end{cases}$$

где  $F_i$  – функция обратного преобразования.

If  $n \neq N$  - осуществить однозначное преобразование координат зачастую не удается.

// Например, по двумерным экранным координатам нельзя без дополнительных условий однозначно определить трехмерные координаты отображаемых объектов

Преобразование координат классифицируют:

- по системам координат // например, преобразование из **полярной системы в Декартову**;
- по виду функции преобразования  $f_i$ .

По виду функции преобразования:

линейные

$$f_i = a_{i1} k_1 + a_{i2} k_2 + \dots + a_{in} k_n + a_{in+1}$$

$a_{ij} = \text{const}$ ; if  $n=N$  – аффинные преобразования

нелинейные

**If** для хотя бы одного  $i$  функция  $f_i$  -  
нелинейная относительно  $(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$

Линейные преобразования в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{Nn} & a_{Nn+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_N \end{bmatrix}$$

*Благодарю за внимание!)*

