

Reto 2: Interpolación y Curvas de Bézier

1st María Camila Aguirre Collante
Ingeniería de Sistemas
Pontificia Universidad Javeriana
Bogotá, Colombia
aguirrec.mcamila@javeriana.edu.co

2nd Estefanía Bermúdez Arroyo
Ingeniería de Sistemas
Pontificia Universidad Javeriana
Bogotá, Colombia
estefania_bermudeza@javeriana.edu.co

3rd Jessica Tatiana Naizaque Guevara
Ingeniería de Sistemas
Pontificia Universidad Javeriana
Bogotá, Colombia
j.naizaque@javeriana.edu.co

4th Angie Tatiana Peña Peña
Ingeniería de Sistemas
Pontificia Universidad Javeriana
Bogotá, Colombia
penap_at@javeriana.edu.co

Resumen—Se implementan los conceptos relacionados al ajuste de curvas de la clase de Análisis Numérico, haciendo uso de distintos programas y sus herramientas. El propósito de este reto es poder graficar mediante interpolación una figura plana. Además, se busca identificar y analizar el error que la implementación de esta solución pueda llegar a tener.

Palabras clave—Interpolación, Curvas Bézier, Ajuste de Curvas, Splines, Error

I. INTRODUCCIÓN

En el presente informe se evidenciará el desarrollo del ajuste de curvas mediante métodos de interpolación como interpolación cúbica y las curvas de Bezier, los cuales permiten mejorar la aplicación y solución del problema en cuestión. Lo anterior, se llevó a cabo utilizando tanto las herramientas RStudio, Graphixy y Desmos como las librerías de RStudio. A lo largo del mismo, se encontrarán distintos análisis y explicaciones concretas y necesarias para el correcto entendimiento del problema. Inicialmente, se escogió la imagen presentada en la Figura 1, para la cual se utilizaría la interpolación y se llegaría a la solución. Por lo tanto, durante el documento se presentarán así mismo los resultados obtenidos y el error de la solución planteada.



Figura 1. Imagen inicial.

II. MARCO TEÓRICO

II-A. Interpolación

La interpolación busca hallar un dato existente dentro de un intervalo del cual se conocen sus valores extremos. El problema principal de este método ocurre cuando solo se conoce una serie de puntos de la misma: $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Se requiere encontrar el valor de un punto x (que se encuentre entre x_0 y x_n) de esta función. En la interpolación se pueden tomar dos o tres puntos, por lo cual, se utilizará la interpolación lineal y cuadrática, respectivamente. [1]

II-A1. Interpolación Cúbica: Teniendo en cuenta inicialmente cuatro puntos no alineados: $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ de una función, de la cual se desconoce su expresión algebraica, es posible calcular el valor que toma la función en un punto $x \in [x_0, x_3]$ de forma aproximada. Lo anterior se puede realizar por medio de la ecuación 1:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (1)$$

En esta ecuación se pueden observar los coeficientes a , b , c y d los cuales se calculan al resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} y_0 &= ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d \\ y_1 &= ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d \\ y_2 &= ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d \\ y_3 &= ax_3^3 + bx_3^2 + cx_3 + d \end{aligned}$$

[2]

II-A2. Curvas de Bézier: Dada $n + 1$ puntos (P_0, \dots, P_n) llamados puntos de control, la curva de Bézier que se define gracias a los mismos es:

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \cdot P_i, t \in [0, 1] \quad (2)$$

Donde $B(t)$ es el polinomio de Bernstein. Este polinomio está definido por:

$$B_i^n(t) = \binom{n}{r} t^i (1-t)^{n-i}, \binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad (3)$$

Al observar la fórmula binomial de Newton (ecuación 4), se puede identificar que el polinomio de Bernstein es el k-ésimo término de esta fórmula en la expansión de $(t + (1-t))^n = 1$. Esto quiere decir que el n-ésimo término siempre va a llegar hasta 1. [3]

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad (4)$$

Las curvas de Bézier se utilizan para crear líneas curvas suaves. Este consiste en dos o más puntos de control, como se indicó anteriormente, que definen el tamaño y la forma de la línea. El primer y último punto marcan el comienzo y el final de la línea, mientras que los puntos intermedios definen la curvatura de la ruta, tal y como se puede ver en la Figura 2.

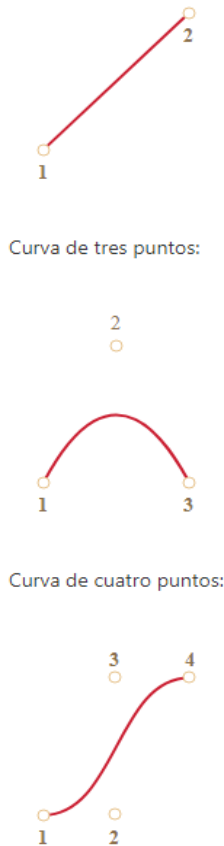


Figura 2. Curvas de Bézier.

Algunas características a tener en cuenta acerca de las curvas de Bézier son:

- No todos los puntos de control están en la curva.

- El orden de la curva es igual al número de puntos menos uno.
- Una curva siempre está dentro del casco convexo de los puntos de control.

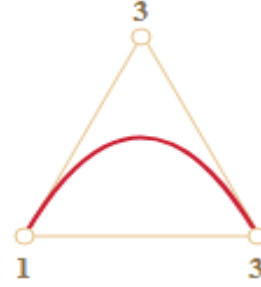


Figura 3. Curvas dentro del casco convexo.

La forma de una curva de Bézier se calcula utilizando la interpolación. Como las pantallas de las computadoras muestran gráficos usando píxeles, las curvas de Bézier siempre se aproximan cuando se muestran en una pantalla. [4] [5]

II-B. Librerías Usadas

II-B1. stats: Esta librería se utilizó para la solución con splines de interpolación cúbica. Esta librería contiene funciones para los cálculos estadísticos y para generar números aleatorios. Posee más de 300 funciones que van desde la distribución geométrica y obtener estimaciones de parámetros iniciales hasta suavizar objetos de kernel y predicciones de modelos. [6] En esta se encuentran tres funciones “spline”, “splinefun” y “splinefunH”, las cuales pueden cumplir la funcionalidad de realizar las curvas requeridas. Sin embargo, para el trabajo actual se escogió y utilizó splinefun teniendo en cuenta las características que presentaban. Lo anterior, debido a que se acomoda mucho más a los resultados esperados gracias a los parámetros que permite.

II-B2. grid: Esta librería se utilizó para la solución con curvas de bezier. Esta librería implementa funciones gráficas que son primitivas y que subyacen al sistema de trazado ggplot2. Adicionalmente, proporciona un conjunto de funciones y clases que cumplen la función de representar objetos gráficos o “grobs”, que pueden manipularse como un objeto en R. Con los grobs, es posible manipular elementos gráficos con la ayuda de funciones R estándar. [7] Esta librería es usada para la función “newpage”, la cual permite ejecutar un contenido específico en un nuevo lienzo. La nueva página se pinta con el color de relleno, que normalmente es transparente. Cuando un dispositivo tiene un color de lienzo diferente al default, la página se pinta primero con el color del lienzo y luego con el color de fondo. [8]

II-B3. gridBezier: Esta librería se utilizó para la solución con curvas de bezier. La librería contiene funciones para renderizar Bezier curvas en “grid”. Las funciones permiten ejecutar curvas de Bézier cuadráticas y cúbicas. También hay funciones para calcular puntos en curvas, tangentes a curvas y normales a curvas. La función utilizada de esta librería fue

“bezier”, la cual dibuja una curva de Bézier o, también, un spline de Bézier, es decir, puede dibujar varias curvas de Bézier unidas. [9]

II-B4. polynom: Esta librería se utilizó para ambas soluciones, curvas de Bézier e interpolación cúbica. La librería contiene funciones para implementar una clase para manipulaciones polinomiales univariadas. Presenta aproximadamente 20 funciones que están directamente relacionadas con los polinomios, de estas se utilizó “poly.calc”. Esta función permite calcular el polinomio con ceros especificados o el polinomio de interpolación de Lagrange a través de los puntos (x, y) . [10]

III. ANÁLISIS Y DESARROLLO

III-A. Proceso de Interpolación Cúbica

El proceso seguido para poder obtener el resultado fue:

- Se realizó la obtención de puntos utilizando la herramienta Graphixy. Este es un programa que permite la extracción de datos de una imagen, como las coordenadas x y y de los puntos de la imagen a analizar. Para poder tener mejor claridad de los puntos a extraer de la Figura 1, se señalan los puntos a buscar como se puede observar en la Figura 4.



Figura 4. Imagen con puntos señalados.

- Posteriormente, se obtienen las coordenadas en x y y con ayuda de la ubicación del cursor en Graphixy, tal y como se observa en la Figura 5.
- Al obtener los datos necesarios, se empieza la implementación de RStudio:
 - Se crean dos vectores con los datos obtenidos, en total se generan 231 puntos. Estos puntos, se pueden evidenciar de la Tabla I a la Tabla XIV, la columna x es el vector x y la columna y corresponde al vector y .
 - Se realiza una división de la silueta en 110 curvas, donde para cada una se crean dos vectores x y y .
 - Se utiliza la función “splinefun” para cada curva, con el fin de obtener una lista de puntos interpolados mediante splines cúbicos.

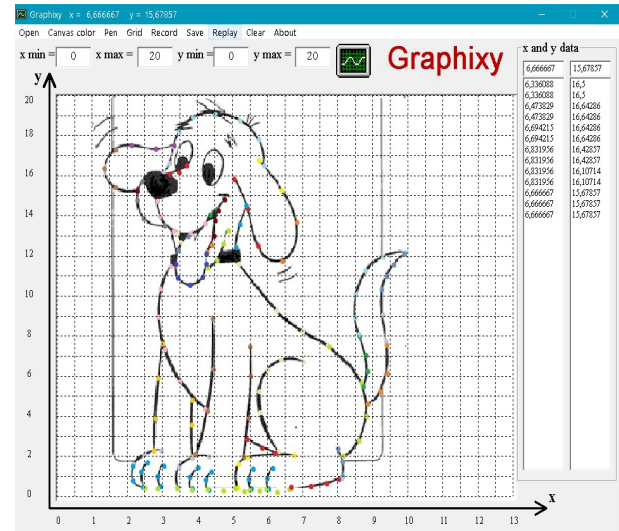


Figura 5. Implementación en Graphixy.

- Finalmente, los puntos interpolados que se generan para cada curva, se agregan al gráfico para mostrar la conformación de la silueta.

III-B. Proceso de Curvas de Bézier

El proceso seguido para poder obtener el resultado fue:

- Se realizó la obtención de puntos haciendo uso de la herramienta Desmos. Este programa es una calculadora gráfica online, la cual permite obtener los puntos de control de las curvas de Bézier. En este caso, se obtuvieron 4 puntos, debido a que se hallan curvas cúbicas de Bézier. En la Figura 6. se puede observar con mayor claridad la obtención de los puntos en las coordenadas x y y .

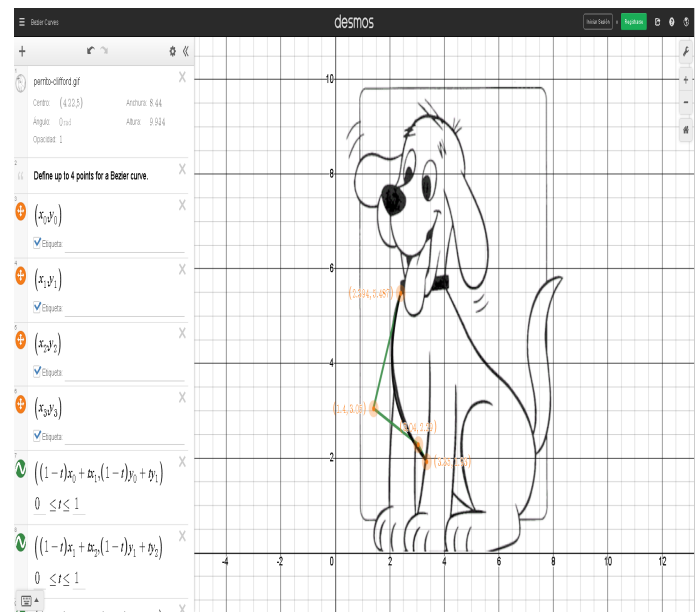


Figura 6. Implementación con Desmos.

- Al obtener los datos necesarios, se empieza la implementación de RStudio:
 1. Se usa la función “grid.newpage” para crear la página donde se va a realizar la gráfica.
 2. Se realiza una división de la silueta en 50 curvas, donde, para cada una, se crean dos vectores x y y . Es importante notar que el tamaño de estos vectores es 4, ya que para tener un mejor manejo de las curvas de Bézier, es importante tener 4 puntos de control.
 3. Finalmente, se utiliza la función “grid.bezier” para poder graficar la curva condicionado por los 4 puntos de control dados por los vectores x y y . en el grip creado inicialmente.

III-C. Interpolación Cúbica vs Curvas de Bézier

Como se pudo observar en la descripción de los procesos y en las tablas adjuntadas en la sección de resultados, la cantidad de puntos usados en la interpolación cúbica es mayor que el proceso de las curvas de Bézier, ya que en la interpolación cúbica la cantidad de puntos usados fueron 231 y en las curvas de Bézier 200.

Otra diferencia que se puede encontrar es la cantidad de curvas utilizadas en cada proceso. La cantidad de curvas utilizadas en el proceso de interpolación cúbica es mayor a las curvas usadas en el proceso de las curvas de Bézier. En el proceso de interpolación cúbica la cantidad de curvas realizadas fueron 110 y en el proceso de curvas de Bézier 50.

Es importante decir que en el proceso de curvas de Bézier hay un limitante en el dominio y rango del gráfico, ya que el máximo valor que puede tener cada vector de cada curva es de 1. En cambio, en el proceso de interpolación no se encontró ningún limitante en el dominio o rango del gráfico.

III-D. Error

Para analizar el error en cada método (se encuentran en la Tabla XXXIII), se escogió la parte derecha de la imagen principal en la que se observa la cola del perro.

III-D1. Interpolación Cúbica: Para obtener el error en el método de Interpolación Cúbica con splines se realiza el siguiente proceso:

1. Se obtiene una expresión matemática a partir de dos vectores que conforman cada curva mediante la función `poly.calc`.
2. Se transforma la expresión obtenida a función por medio de la función `as.function()`.
3. Se usa la herramienta Graphixy para obtener los puntos de cada curva que no se han utilizado.
4. Se reemplaza un x en la función creada y, el valor que retorna, es la variable “valor” de la ecuación (5). La variable `valorEsperado` es la y correspondiente al punto tomado. La siguiente ecuación se utiliza para obtener el error relativo de cada curva:

$$error = \frac{|valor - valorEsperado|}{valorEsperado} \quad (5)$$

En la Tabla XXXI, en la sección de *Resultados* se observa cada uno de ellos.

5. Se crea un vector en el que se almacena el error de cada curva, el cual se utiliza para hallar el promedio y así obtener el error.

III-D2. Curvas de Bézier: Para obtener el error en el método de curvas de Bézier se realiza el siguiente proceso:

1. Se obtiene la función de cada curva con ayuda de la herramienta Desmos, la cual se guarda en una función en R.
2. Se usa la herramienta Desmos para obtener los puntos de cada curva que no se han utilizado.
3. Se reemplaza un x en la función creada y, el valor que retorna, es la variable “valor” de la ecuación (6). La variable y es la que corresponde al punto tomado. La siguiente ecuación se utiliza para obtener el error relativo de cada curva:

$$error = \frac{|valor - y|}{y} \quad (6)$$

En la Tabla XXXII, en la sección de *Resultados* se observa cada uno de ellos.

4. Se crea un vector en el que se almacena el error de cada curva, el cual se utiliza para hallar el promedio y así obtener el error.

IV. RESULTADOS

IV-A. Interpolación Cúbica

De la Tabla I a la Tabla XIV, se pueden observar los puntos utilizados para poder realizar la Figura 7 hallados con la herramienta Graphixy.

Tabla I
PUNTOS OREJA IZQUIERDA INTERPOLACIÓN CÚBICA

| x | y |
|------|-------|
| 5.07 | 17.53 |
| 4.35 | 17.32 |
| 3.20 | 17.64 |
| 2.51 | 17.32 |
| 2.23 | 17.07 |
| 2.12 | 16.86 |
| 2.04 | 16.39 |
| 2.12 | 15.96 |
| 2.29 | 15.71 |
| 2.53 | 15.46 |
| 3.53 | 15.32 |

Tabla II
PUNTOS CABEZA INTERPOLACIÓN CÚBICA

| x | y |
|------|-------|
| 9.01 | 16.61 |
| 9.01 | 17.07 |
| 8.95 | 17.32 |
| 8.79 | 17.90 |
| 8.43 | 18.45 |
| 7.88 | 18.88 |
| 6.91 | 19.18 |
| 5.98 | 18.89 |
| 5.32 | 18.21 |
| 5.07 | 17.53 |
| 4.93 | 16.79 |
| 4.63 | 16.21 |

Tabla V
PUNTOS LENGUA INTERPOLACIÓN CÚBICA

| x | y |
|------|-------|
| 6.94 | 14.39 |
| 6.86 | 13.75 |
| 6.78 | 13.11 |
| 6.67 | 12.64 |
| 6.50 | 12.21 |
| 6.36 | 11.29 |
| 6.30 | 11.11 |
| 5.79 | 10.64 |
| 5.51 | 10.69 |
| 5.19 | 11 |
| 5.12 | 11.38 |
| 5.14 | 12 |
| 5.45 | 13.21 |

Tabla III
PUNTOS NARIZ PARTE 1 INTERPOLACIÓN CÚBICA

| x | y |
|------|-------|
| 4.30 | 16.22 |
| 3.97 | 16.19 |
| 3.83 | 16.11 |
| 3.80 | 15.86 |
| 3.94 | 15.43 |
| 4.21 | 14.96 |
| 4.82 | 15 |
| 5.21 | 15.36 |
| 5.26 | 15.57 |
| 5.22 | 15.79 |
| 4.30 | 16.19 |

Tabla VI
PUNTOS BOCA INTERPOLACIÓN CÚBICA

| x | y |
|------|-------|
| 4.88 | 13.43 |
| 5.14 | 12 |
| 6.36 | 11.29 |
| 6.94 | 11.93 |
| 7.19 | 12.71 |
| 7.33 | 13.25 |

Tabla VII
PUNTOS OREJA DERECHA INTERPOLACIÓN CÚBICA

| x | y |
|-------|-------|
| 8.79 | 16.79 |
| 9.78 | 15.32 |
| 10.41 | 13.75 |
| 10.39 | 12.81 |
| 10.06 | 12.14 |
| 9.26 | 11.96 |
| 8.90 | 12.21 |
| 8.76 | 12.57 |
| 8.46 | 13.5 |
| 8.29 | 14.39 |
| 7.71 | 15.82 |

Tabla IV
PUNTOS HOCICO INTERPOLACIÓN CÚBICA

| x | y |
|------|-------|
| 3.80 | 15.86 |
| 3.53 | 15.32 |
| 3.50 | 15.05 |
| 3.47 | 14.79 |
| 3.64 | 14.21 |
| 3.97 | 13.82 |
| 4.24 | 13.68 |
| 4.68 | 13.57 |
| 4.35 | 14.89 |
| 4.41 | 14.35 |
| 4.52 | 13.90 |
| 4.68 | 13.57 |
| 5.12 | 13.32 |
| 5.45 | 13.21 |
| 5.81 | 13.18 |
| 6.14 | 13.39 |
| 6.42 | 13.68 |
| 6.58 | 14 |
| 6.94 | 14.39 |
| 7.27 | 14.96 |

Tabla VIII
PUNTOS CARA Y COLLAR INTERPOLACIÓN CÚBICA

| x | y |
|------|-------|
| 8.24 | 14.61 |
| 7.91 | 13.75 |
| 7.74 | 12.43 |
| 7.11 | 12.32 |
| 7.88 | 12.43 |
| 7.89 | 11.89 |
| 6.92 | 11.73 |

Tabla IX
PUNTOS CUERPO INTERPOLACIÓN CÚBICA

| x | y |
|-------|-------|
| 7.79 | 11.89 |
| 9.56 | 9.39 |
| 10.72 | 8.36 |
| 11.87 | 7.68 |
| 12.53 | 7.03 |
| 13.25 | 5.89 |
| 13.50 | 4.81 |
| 13.42 | 4.14 |
| 13.11 | 3.04 |
| 12.45 | 2.21 |
| 4.99 | 11.61 |
| 4.49 | 10.46 |
| 4.41 | 9.82 |
| 4.44 | 9.11 |
| 4.60 | 7.71 |
| 4.88 | 6.93 |
| 5.32 | 5.93 |
| 5.95 | 5.14 |
| 6.50 | 4.61 |
| 8.26 | 3.11 |
| 8.93 | 2.68 |
| 9.53 | 2.43 |

Tabla XI
PUNTOS PATA 2 INTERPOLACIÓN CÚBICA

| x | y |
|------|------|
| 6.78 | 9.11 |
| 6.83 | 6.5 |
| 6.50 | 4.61 |
| 5.88 | 2.32 |
| 8.40 | 7.60 |
| 8.43 | 6.11 |
| 8.29 | 4.15 |
| 8.13 | 2.25 |
| 5.88 | 2.32 |
| 5.26 | 1.68 |
| 5.10 | 1.17 |
| 5.21 | 0.68 |
| 5.87 | 0.64 |
| 5.76 | 1.21 |
| 6.12 | 1.68 |
| 5.87 | 0.64 |
| 6.56 | 0.57 |
| 6.50 | 1.04 |
| 6.72 | 1.5 |
| 6.56 | 0.57 |
| 7.19 | 0.5 |
| 7.80 | 0.71 |

Tabla X
PUNTOS PATA 1 INTERPOLACIÓN CÚBICA

| x | y |
|------|------|
| 4.60 | 7.71 |
| 4.44 | 6.11 |
| 4.30 | 4.11 |
| 4.24 | 2.57 |
| 5.95 | 5.14 |
| 5.84 | 3.71 |
| 5.88 | 2.32 |
| 4.55 | 2.5 |
| 4.24 | 2.57 |
| 3.75 | 2.29 |
| 3.31 | 1.82 |
| 3.30 | 1 |
| 3.72 | 0.75 |
| 3.64 | 1.39 |
| 3.94 | 1.93 |
| 3.75 | 0.75 |
| 4.49 | 0.61 |
| 4.38 | 1.25 |
| 4.66 | 1.79 |
| 4.49 | 0.61 |
| 5.21 | 0.68 |

Tabla XII
PUNTOS PATA 3 INTERPOLACIÓN CÚBICA

| x | y |
|-------|------|
| 7.80 | 0.71 |
| 7.70 | 1.21 |
| 7.82 | 1.86 |
| 8.35 | 2.18 |
| 10.28 | 2.32 |
| 7.80 | 0.71 |
| 8.40 | 0.64 |
| 8.32 | 1.04 |
| 8.60 | 1.68 |
| 8.40 | 0.64 |
| 9.15 | 0.61 |
| 9.04 | 1.04 |
| 9.42 | 1.64 |
| 9.15 | 0.61 |
| 9.70 | 0.53 |
| 10.19 | 0.68 |
| 11.40 | 0.86 |
| 12.37 | 1.29 |
| 12.42 | 1.79 |
| 12.23 | 2.5 |

Tabla XIII
PUNTOS COLA INTERPOLACIÓN CÚBICA

| x | y |
|-------|-------|
| 13.25 | 5.89 |
| 13.50 | 6.46 |
| 13.39 | 7.18 |
| 13.17 | 8.18 |
| 12.95 | 9.21 |
| 13 | 10.29 |
| 13.44 | 11.46 |
| 14.21 | 12.10 |
| 15.15 | 12.32 |
| 14.63 | 11.64 |
| 14.24 | 11.11 |
| 14.10 | 10.43 |
| 14.02 | 9.75 |
| 14.33 | 7.71 |
| 14.16 | 9.24 |
| 14.35 | 6.89 |
| 14.19 | 5.89 |
| 13.99 | 5.43 |
| 13.50 | 4.81 |

En la Figura 7, se puede ver la gráfica resultante al ejecutar el programa desarrollado.

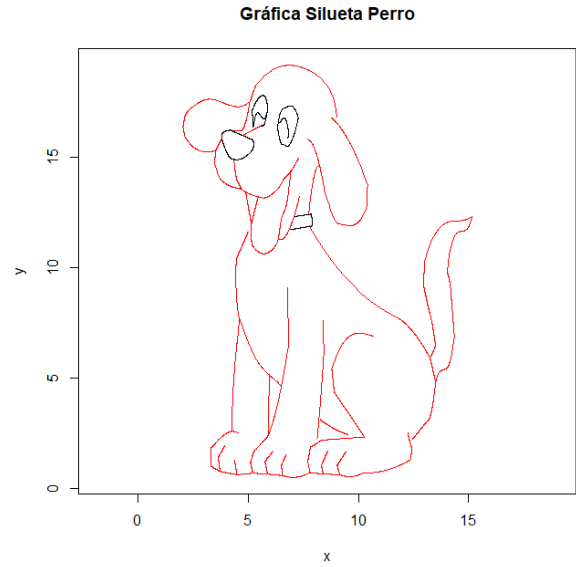


Figura 7. Imagen Resultante con Interpolación Cúbica.

Tabla XIV
PUNTOS ADICIONALES INTERPOLACIÓN CÚBICA

| x | y |
|-------|-------|
| 10.28 | 2.32 |
| 8.90 | 4.36 |
| 8.79 | 5.39 |
| 9.23 | 6.46 |
| 9.81 | 7 |
| 10.69 | 6.89 |
| 6.36 | 16.57 |
| 6.53 | 16.71 |
| 6.78 | 16.46 |
| 6.83 | 16.14 |
| 6.80 | 15.86 |
| 5.89 | 17.29 |
| 5.73 | 16.75 |
| 5.54 | 16.93 |
| 5.32 | 16.86 |
| 5.23 | 16.36 |

IV-B. Curvas de Bézier

De la Tabla XV a la Tabla XXX, se pueden encontrar los puntos usados en el proceso de Curvas de Bézier.

Tabla XV
PUNTOS CABEZA CURVAS DE BÉZIER

| x | y |
|------|------|
| 0.25 | 0.83 |
| 0.27 | 1 |
| 0.5 | 0.9 |
| 0.48 | 0.79 |

Tabla XVI
PUNTOS OREJA DERECHA CURVAS DE BÉZIER

| x | y |
|------|------|
| 0.47 | 0.8 |
| 0.64 | 0.64 |
| 0.53 | 0.48 |
| 0.46 | 0.6 |
| 0.46 | 0.6 |
| 0.43 | 0.68 |
| 0.43 | 0.72 |
| 0.4 | 0.77 |
| 0.43 | 0.7 |
| 0.41 | 0.65 |
| 0.41 | 0.61 |
| 0.4 | 0.59 |

Tabla XVII
PUNTOS PARTE SUPERIOR DEL CUERPO CURVAS DE BÉZIER

| x | y |
|------|------|
| 0.41 | 0.56 |
| 0.61 | 0.29 |
| 0.63 | 0.42 |
| 0.73 | 0.25 |
| 0.73 | 0.25 |
| 0.75 | 0.11 |
| 0.68 | 0.08 |
| 0.65 | 0.08 |

Tabla XVIII
PUNTOS COLA CURVAS DE BÉZIER

| x | y |
|-------|-------|
| 0.73 | 0.25 |
| 0.78 | 0.3 |
| 0.59 | 0.55 |
| 0.83 | 0.58 |
| 0.83 | 0.58 |
| 0.69 | 0.46 |
| 0.87 | 0.32 |
| 0.735 | 0.205 |

Tabla XX
PUNTOS PATA 2 CURVAS DE BÉZIER

| x | y |
|--------|---------|
| 0.3446 | 0.434 |
| 0.348 | 0.30093 |
| 0.352 | 0.232 |
| 0.3021 | 0.0838 |
| 0.441 | 0.3554 |
| 0.4446 | 0.3006 |
| 0.442 | 0.1918 |
| 0.423 | 0.074 |
| 0.334 | 0.088 |
| 0.2494 | 0.0898 |
| 0.2406 | 0.0254 |
| 0.2656 | 0.0014 |
| 0.3103 | 0.0546 |
| 0.2953 | 0.0485 |
| 0.2807 | 0.0172 |
| 0.2895 | 0.0014 |
| 0.3403 | 0.0546 |
| 0.3253 | 0.0485 |
| 0.3207 | 0.0172 |
| 0.3295 | 0.0014 |

Tabla XXI
PUNTOS PARTE INFERIOR DEL CUERPO CURVAS DE BÉZIER

| x | y |
|--------|--------|
| 0.4293 | 0.1296 |
| 0.4544 | 0.107 |
| 0.4805 | 0.1032 |
| 0.5072 | 0.0892 |
| 0.3306 | 0.1966 |
| 0.2236 | 0.275 |
| 0.164 | 0.4314 |
| 0.2436 | 0.554 |

Tabla XIX
PUNTOS PATA 1 CURVAS DE BÉZIER

| x | y |
|--------|--------|
| 0.62 | 0.1 |
| 0.68 | 0.05 |
| 0.72 | 0.023 |
| 0.55 | 0 |
| 0.574 | 0.314 |
| 0.499 | 0.345 |
| 0.401 | 0.267 |
| 0.512 | 0.0895 |
| 0.548 | 0.0876 |
| 0.473 | 0.084 |
| 0.377 | 0.1 |
| 0.4106 | 0.0014 |
| 0.4497 | 0.0544 |
| 0.4396 | 0.0459 |
| 0.429 | 0.0284 |
| 0.4411 | 0.0014 |
| 0.4997 | 0.0544 |
| 0.4896 | 0.0459 |
| 0.479 | 0.0284 |
| 0.4911 | 0.0014 |

Tabla XXII
PUNTOS PATA 3 CURVAS DE BÉZIER

| x | y |
|--------|--------|
| 0.22 | 0.35 |
| 0.206 | 0.327 |
| 0.1935 | 0.123 |
| 0.1966 | 0.0988 |
| 0.2956 | 0.2278 |
| 0.289 | 0.199 |
| 0.2918 | 0.1206 |
| 0.2953 | 0.08 |
| 0.2086 | 0.0994 |
| 0.166 | 0.099 |
| 0.104 | 0.039 |
| 0.169 | 0.0014 |
| 0.1813 | 0.0684 |
| 0.171 | 0.06 |
| 0.151 | 0.0334 |
| 0.1802 | 0.0014 |
| 0.2213 | 0.0684 |
| 0.211 | 0.06 |
| 0.191 | 0.0334 |
| 0.2202 | 0.0014 |

Tabla XXIII
PUNTOS OREJA IZQUIERDA CURVAS DE BÉZIER

| x | y |
|--------|--------|
| 0.1573 | 0.7335 |
| 0.0674 | 0.71 |
| 0.0286 | 0.8203 |
| 0.1278 | 0.8426 |
| 0.1278 | 0.8426 |
| 0.1614 | 0.8456 |
| 0.191 | 0.816 |
| 0.2494 | 0.8454 |

Tabla XXIV
PUNTOS CARA CURVAS DE BÉZIER

| x | y |
|--------|--------|
| 0.25 | 0.83 |
| 0.2418 | 0.827 |
| 0.2392 | 0.788 |
| 0.2196 | 0.7744 |

Tabla XXV
PUNTOS NARIZ CURVAS DE BÉZIER

| x | y |
|--------|--------|
| 0.2223 | 0.774 |
| 0.184 | 0.7876 |
| 0.1385 | 0.7683 |
| 0.2007 | 0.713 |
| 0.2223 | 0.774 |
| 0.244 | 0.7724 |
| 0.3014 | 0.7254 |
| 0.2007 | 0.713 |

Tabla XXVI
PUNTOS HOCICO CURVAS DE BÉZIER

| x | y |
|--------|--------|
| 0.2023 | 0.713 |
| 0.1944 | 0.6678 |
| 0.2676 | 0.5758 |
| 0.3354 | 0.661 |
| 0.1696 | 0.759 |
| 0.126 | 0.699 |
| 0.182 | 0.63 |
| 0.224 | 0.65 |

Tabla XXVII
PUNTOS BOCA CURVAS DE BÉZIER

| x | y |
|--------|--------|
| 0.3354 | 0.661 |
| 0.3594 | 0.685 |
| 0.3675 | 0.6968 |
| 0.3754 | 0.7218 |
| 0.3498 | 0.6756 |
| 0.3513 | 0.6693 |
| 0.3508 | 0.6018 |
| 0.3318 | 0.5824 |
| 0.3318 | 0.5824 |
| 0.3254 | 0.553 |
| 0.3314 | 0.5025 |
| 0.2885 | 0.501 |
| 0.2784 | 0.6257 |
| 0.2578 | 0.5896 |
| 0.2256 | 0.5125 |
| 0.2885 | 0.501 |
| 0.257 | 0.583 |
| 0.2451 | 0.606 |
| 0.2434 | 0.621 |
| 0.2395 | 0.6385 |
| 0.3271 | 0.5426 |
| 0.3589 | 0.5422 |
| 0.371 | 0.6016 |
| 0.3838 | 0.6372 |
| 0.234 | 0.771 |
| 0.269 | 0.7875 |
| 0.29 | 0.7804 |
| 0.2942 | 0.8276 |

Tabla XXVIII
PUNTOS OJO IZQUIERDO CURVAS DE BÉZIER

| x | y |
|--------|--------|
| 0.2942 | 0.8276 |
| 0.297 | 0.8792 |
| 0.237 | 0.8412 |
| 0.2555 | 0.78 |
| 0.284 | 0.7977 |
| 0.277 | 0.8265 |
| 0.2522 | 0.8205 |
| 0.2555 | 0.78 |

Tabla XXIX
PUNTOS OJO DERECHO CURVAS DE BÉZIER

| x | y |
|--------|--------|
| 0.3408 | 0.744 |
| 0.3064 | 0.7466 |
| 0.3162 | 0.8325 |
| 0.3496 | 0.8283 |
| 0.3408 | 0.744 |
| 0.3696 | 0.7466 |
| 0.3864 | 0.8325 |
| 0.3496 | 0.8283 |
| 0.3408 | 0.744 |
| 0.3556 | 0.7554 |
| 0.3543 | 0.8178 |
| 0.3216 | 0.7914 |

Tabla XXX
PUNTOS COLLAR CURVAS DE BÉZIER

| x | y |
|---------|--------|
| 0.3661 | 0.5838 |
| 0.386 | 0.581 |
| 0.406 | 0.5894 |
| 0.4146 | 0.5856 |
| 0.4146 | 0.5838 |
| 0.4156 | 0.5832 |
| 0.4173 | 0.5704 |
| 0.4146 | 0.5556 |
| 0.3461 | 0.5538 |
| 0.386 | 0.551 |
| 0.406 | 0.5594 |
| 0.4146 | 0.5556 |
| 0.2386 | 0.5752 |
| 0.2363 | 0.5636 |
| 0.239 | 0.5562 |
| 0.2401 | 0.548 |
| 0.2386 | 0.5752 |
| 0.2437 | 0.5748 |
| 0.2504 | 0.577 |
| 0.2561 | 0.5765 |
| 0.240 | 0.548 |
| 0.24484 | 0.5485 |
| 0.24645 | 0.5484 |
| 0.252 | 0.5486 |

Tabla XXXI
ERRORES RELATIVOS SPLINES

| Curva | ErrorRelativo |
|---------|---------------|
| curva89 | 0.04769627 |
| curva90 | 0.1467925 |
| curva91 | 0.1485501 |
| curva93 | 0.1460924 |
| curva93 | 0.1242553 |
| curva94 | 0.002791047 |
| curva95 | 0.1850749 |
| curva96 | 0.1489471 |
| curva97 | 0.2854815 |

Tabla XXXII
ERRORES RELATIVOS CURVAS BÉZIER

| Curva | ErrorRelativo |
|--------|---------------|
| curva7 | 0.05166806 |
| curva8 | 0.02355642 |

IV-C3. *Error Interpolación Cúbica vs Error Curvas de Bézier:* En la Tabla XXXIII, se puede observar la comparación del error promedio entre los métodos.

En la Figura 8, se puede ver la gráfica resultante al ejecutar el programa desarrollado.



Figura 8. Imagen Resultante con Curvas de Bézier.

Tabla XXXIII
ERRORES RELATIVOS SPLINES VS ERRORES RELATIVOS BÉZIER

| Metodo | ErrorPromedio |
|---------|---------------|
| Splines | 0.1372979 |
| Bézier | 0.03761224 |

V. CONCLUSIONES

Después de realizar este análisis, se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- Es más rápido realizar el proceso de curvas de Bézier que el proceso de interpolación cúbica, ya que la cantidad de puntos utilizados en el primero es mucho menor si se compara con el segundo.
- Las curvas se observan más suavizadas en la gráfica resultante del proceso de Bézier que en la gráfica resultante del proceso de interpolación cúbica.
- En comparación con las curvas de Bézier, el método de interpolación cúbica presenta oscilaciones no deseadas.
- Se puede notar la efectividad del método de Bézier, ya que la cantidad de curvas tomadas para realizar la figura, fue menor a comparación del método de interpolación cúbica.
- Considerando los trazos de las curvas en el método de Bézier, se puede decir que estos son mucho más independientes de la resolución que los trazos en la interpolación cúbica con los splines.
- Se puede afirmar que el proceso realizado por la curvas de Bézier es más preciso que el de interpolación cúbica, ya que el error es menor en las curvas de Bézier.

IV-C. Error

IV-C1. *Interpolación Cúbica:* En la Tabla XXXI, se puede observar el error de cada curva del fragmento escogido de la silueta inicial:

IV-C2. *Curvas de Bézier:* En la Tabla XXXII, se puede observar el error de cada curva del fragmento escogido de la silueta inicial:

REFERENCIAS

- [1] P. Arias, G. Camaras, and G. Guerrero, “Interpolación lineal y cuadrática”, 2012. Recuperado de: <https://sites.google.com/site/numerictron/unidad-4/4-1-interpolacion-lineal-y-cuadratica>
- [2] Calculo.cc, “Interpolación cuadrática”, 2012. Recuperado de: http://calculo.cc/temas/temas_bachillerato/primeros_ciencias_sociales/funciones_elementales/teoria/interpolacion_lineal.html
- [3] O. Aflak, “Bézier Curve”. Towards data science. Mayo 2020. Recuperado de: <https://towardsdatascience.com/bézier-curve-bfffdadea212>
- [4] I. Kantor, “Curva de Bézier”. Javascript.info, Agosto 2020. Recuperado de: <https://es.javascript.info/bezier-curve>
- [5] Anónimo, “Curva Bézier”. TechLib, 2005. Recuperado de: https://techlib.net/definition/bezier_curve.html
- [6] R Core Team, “stats-package: The R Stats Package”. RDRR. Recuperado de: <https://rdr.io/r/stats/stats-package.html>
- [7] R. Peng, S. Kross, B. Anderson, “Mastering Software Development in R”. Chapter 4: The grid package. Diciembre 2020. Recuperado de: <https://bookdown.org/rdpeng/RProgDA/the-grid-package.html>
- [8] Base de datos de R, “grid.newpage: Move to a New Page on a Grid Device”. RDocumentation. Recuperado de: <https://www.rdocumentation.org/packages/grid/versions/3.6.2/topics/grid.newpage>
- [9] P. Murrell, “Bezier Curves in ‘grid’”. Package ‘grid-Bezier’. Mayo 2019. Recuperado de: <https://cran.r-project.org/web/packages/gridBezier/gridBezier.pdf>
- [10] B. Venables, K. Hornik, M. Maechler, “poly.calc”. Package ‘polynom’. Marzo 2019. Recuperado de: <https://cran.r-project.org/web/packages/polynom/polynom.pdf>