Ordenación interna

(Parte II)

Prof. Cristian Cappo

Abril/2018

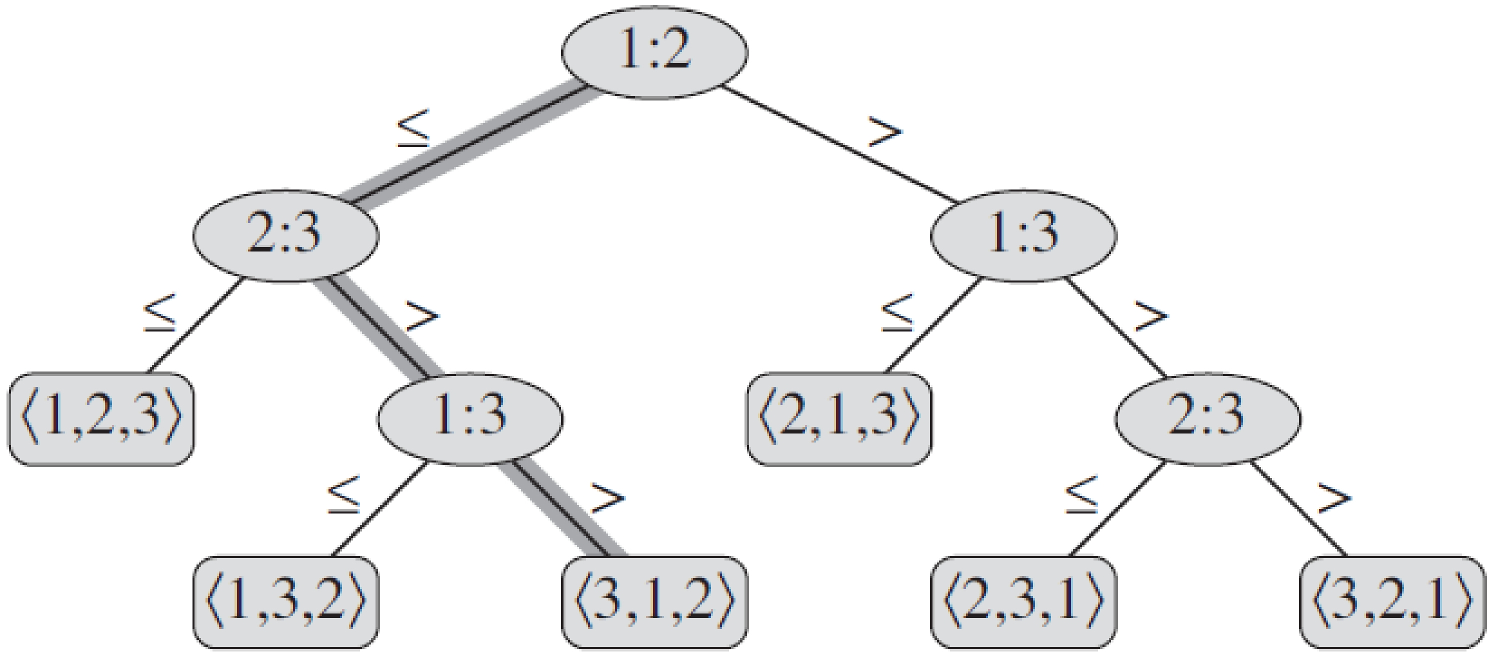
En esta clase

- Revisión de algoritmos
  - Cota mínima para algoritmos de ordenación basados en comparación.
  - Mezcla (*MergeSort*)
  - Montículo (*HeapSort*)
  - CountingSort
  - Residuos (*RadixSort*)
  - Cubetas (BucketSort o BinSort)
- Ejercicios...

Cota mínima para algoritmos de ordenación basados en ordenación

En la pizarra
CLRS – Capítulo 8 – ítem 8.1

Árbol de decisión



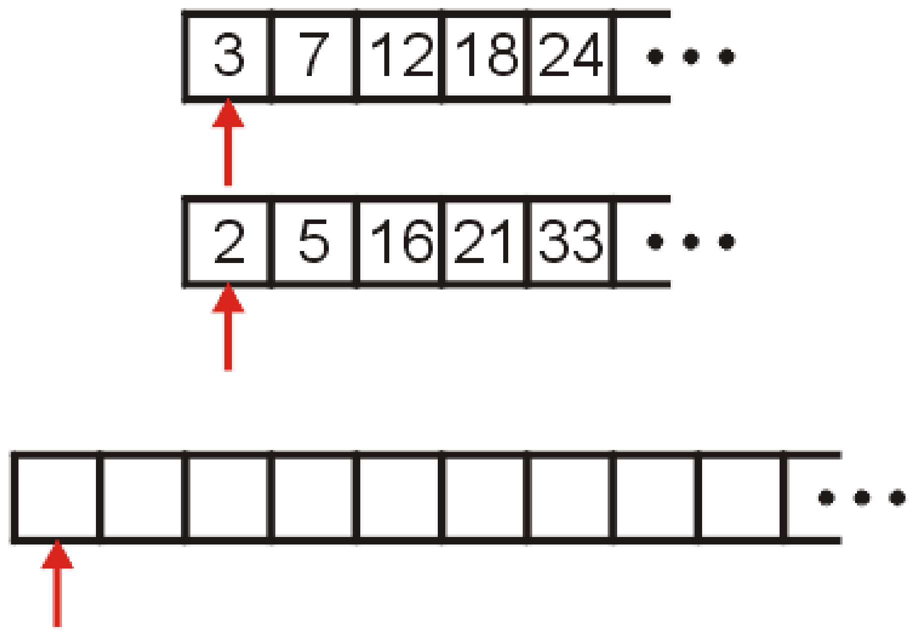
El AD del algoritmo de inserción para 3 elementos. En el nodo interno ***i:j*** indica la comparación entre a_i y a_j . En la hoja se indica la permutacion **<p(1), p(2)..p(n)>** que muestra la ordenación $a_p(1) <= a_p(2) <= .. <= a_p(n)$. El camino sombreado muestra las decisiones tomadas para la entrada ***<**$a_1=6, a_2=8, a_3=5$**>***. La permutación ***<3,1,2>*** en la hoja indica que la entrada ordenada es $a_3=5 <= a_1=6 <= a_2=8$. Existen ***3!=6*** posibles permutaciones de la entrada, así el AD debe tener al menos 6 hojas.

Ordenación
MergeSort

- Definido recursivamente
- Primera implementación por John von Neumann en 1945 en la ENIAC
- Suponga que :
  - Dividimos una lista desordenada en dos sub-listas
  - Ordenamos ambas sub-listas
  - ¿Como puedo recombinar estas dos sub-listas en una sola lista ordenada?

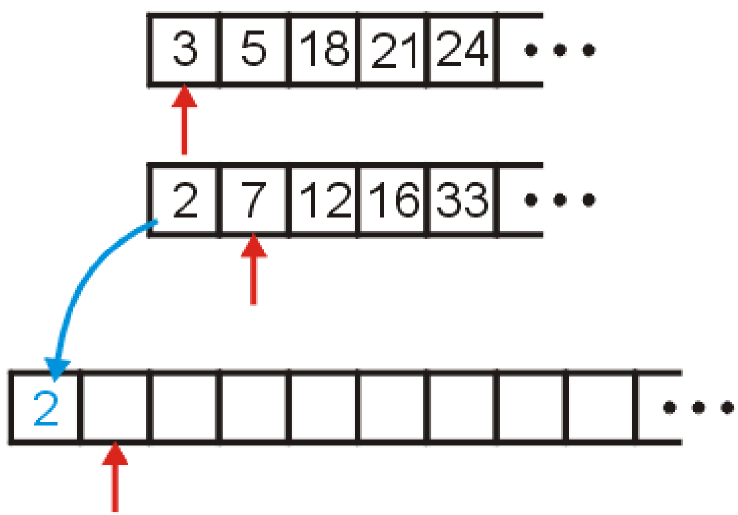
Ordenación
MergeSort

- Ejemplo:
  - Considere dos listas ordenadas y un arreglo vacío
  - Definimos tres índices al principio de cada arreglo



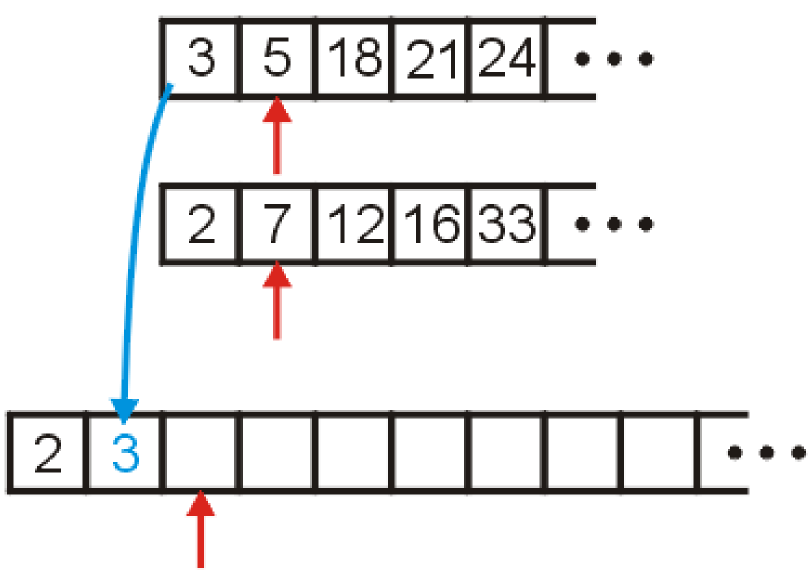
Ordenación
MergeSort

- Ejemplo:
  - Ahora comparamos 2 y 3 : 2 < 3
  - Copiamos 2 en el arreglo vacío
  - Incrementamos los índices



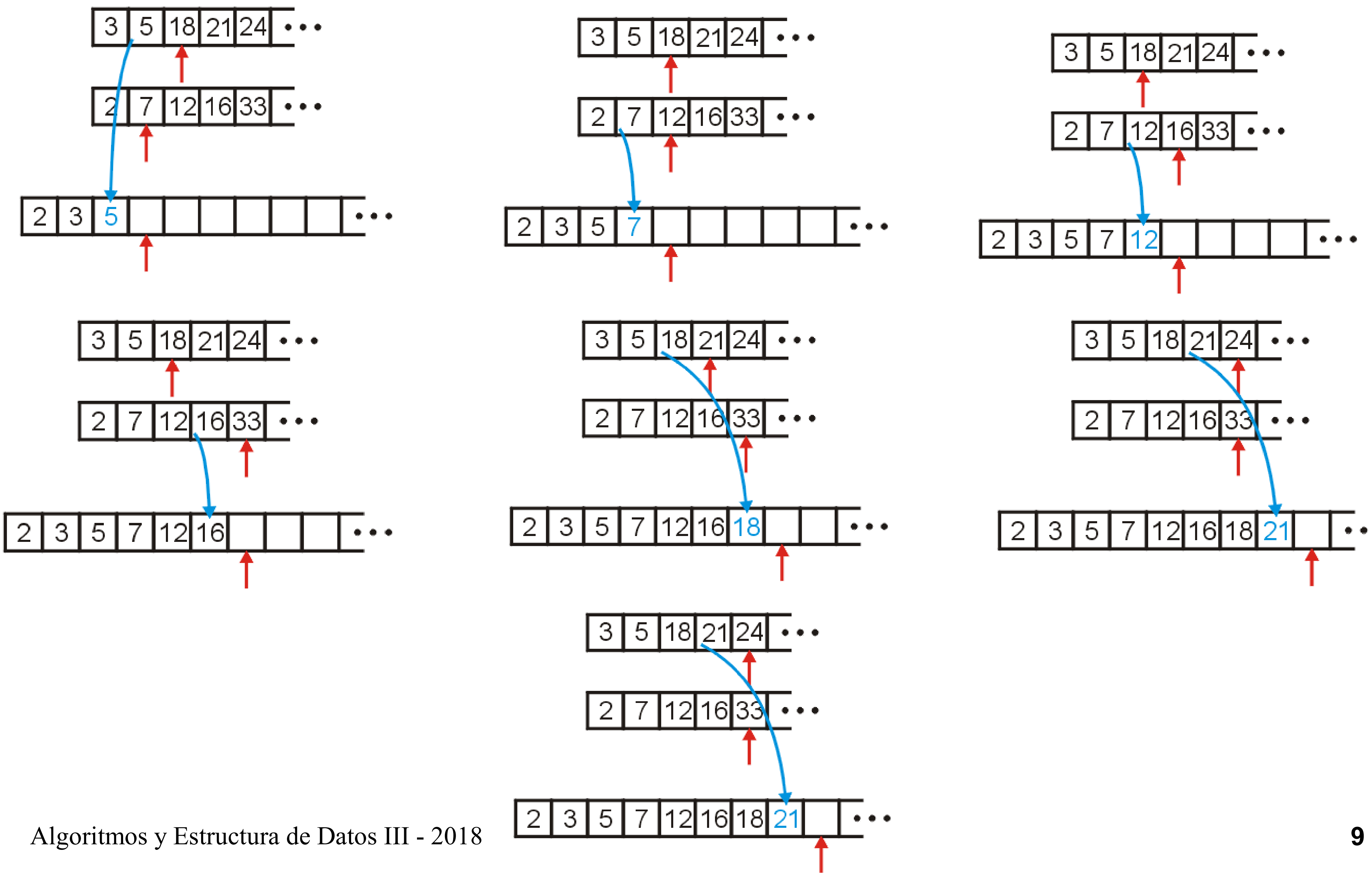
Ordenación
MergeSort

- Ahora comparamos 3 y 7
- Copiamos 3 en el arreglo de abajo
- Incrementamos los índices



Ordenación

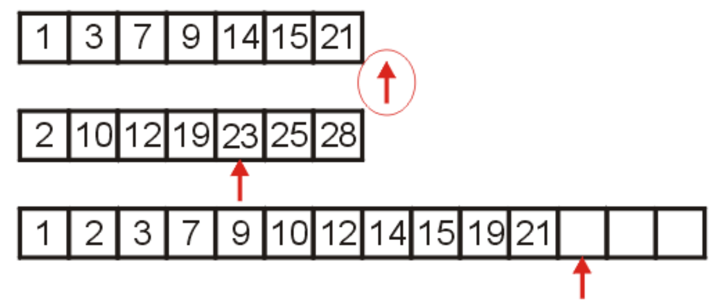
MergeSort

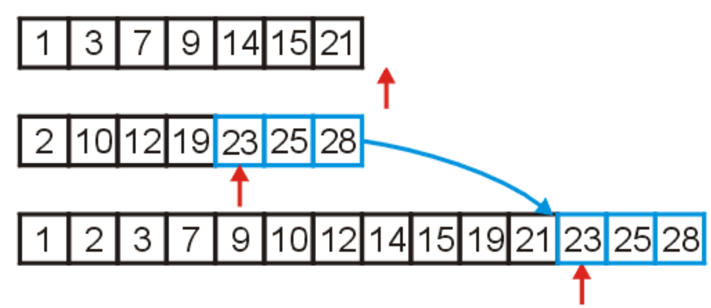


Ordenación
MergeSort

- Continuamos hasta que hayamos pasado fuera de los límites de uno de los arreglos.

  Luego, nosotros simplemente copiamos el resto de las entradas del arreglo que todavía no finalizamos de analizar





Ordenación
MergeSort

Ejemplo del código MERGE (un poco diferente al visto en clases anteriores):

```
int in1 = 0, in2 = 0, out = 0; /* Indices */
while ( in1 < n1 && in2 < n2 ) {
    if ( array1[in1] < array2[in2] ) {
        arrayout[out] = array1[in1];
        ++in1;
    } else {
        arrayout[out] = array2[in2];
        ++in2;
    }
    ++out;
}
/* Copiamos el resto de las listas */
for (; in1 < n1; ++in1, ++out ) arrayout[out] = array1[in1];
for (; in2 < n2; ++in2, ++out ) arrayout[out] = array2[in2];
```

Ordenación
MergeSort

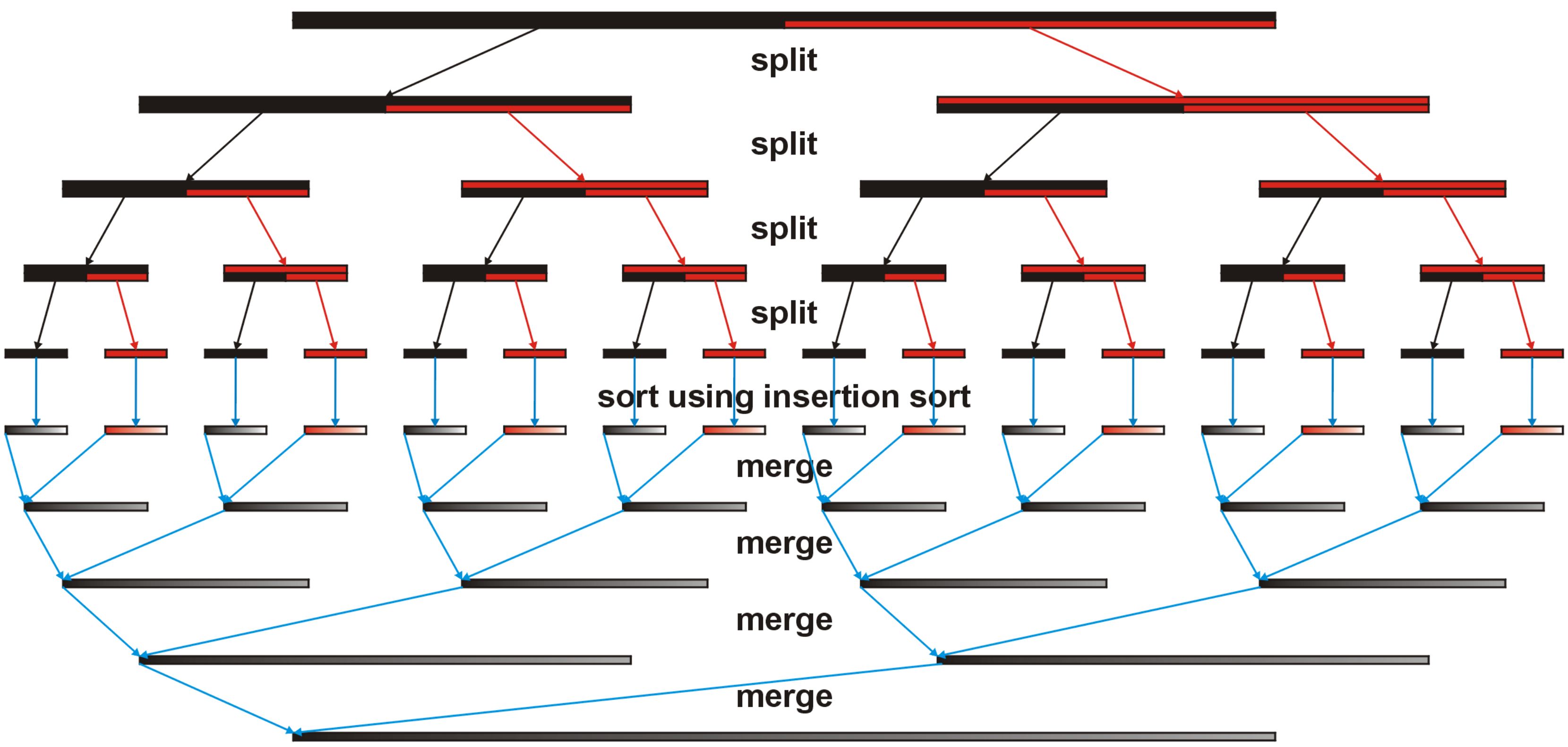
- El tiempo de ejecución del algoritmo de Merge o Mezcla :
  - Asumimos que la suma de la longitud de cada sub-lista es *n*
  - La sentencia *++out* solo puede ejecutarse *n* veces
  - Por tanto, el cuerpo de los ciclos se ejecutan exactamente *n* veces
  - Así, la operación de mezcla es realizado en $\Theta(n)$

Ordenación
MergeSort

- Nosotros partimos la lista en dos listas y las ordenamos. ¿Cómo hago esto?
  - Si el tamaño de la sub-lista es > 1, volvemos a utilizar la ordenación merge.
  - Si la sub-lista es de tamaño 1, no hago nada: esta ordenada.
  - *Aunque teóricamente lo de arriba es correcto, en la práctica se define un umbral a partir del cual podemos utilizar un algoritmo más simple como el de Inserción.*

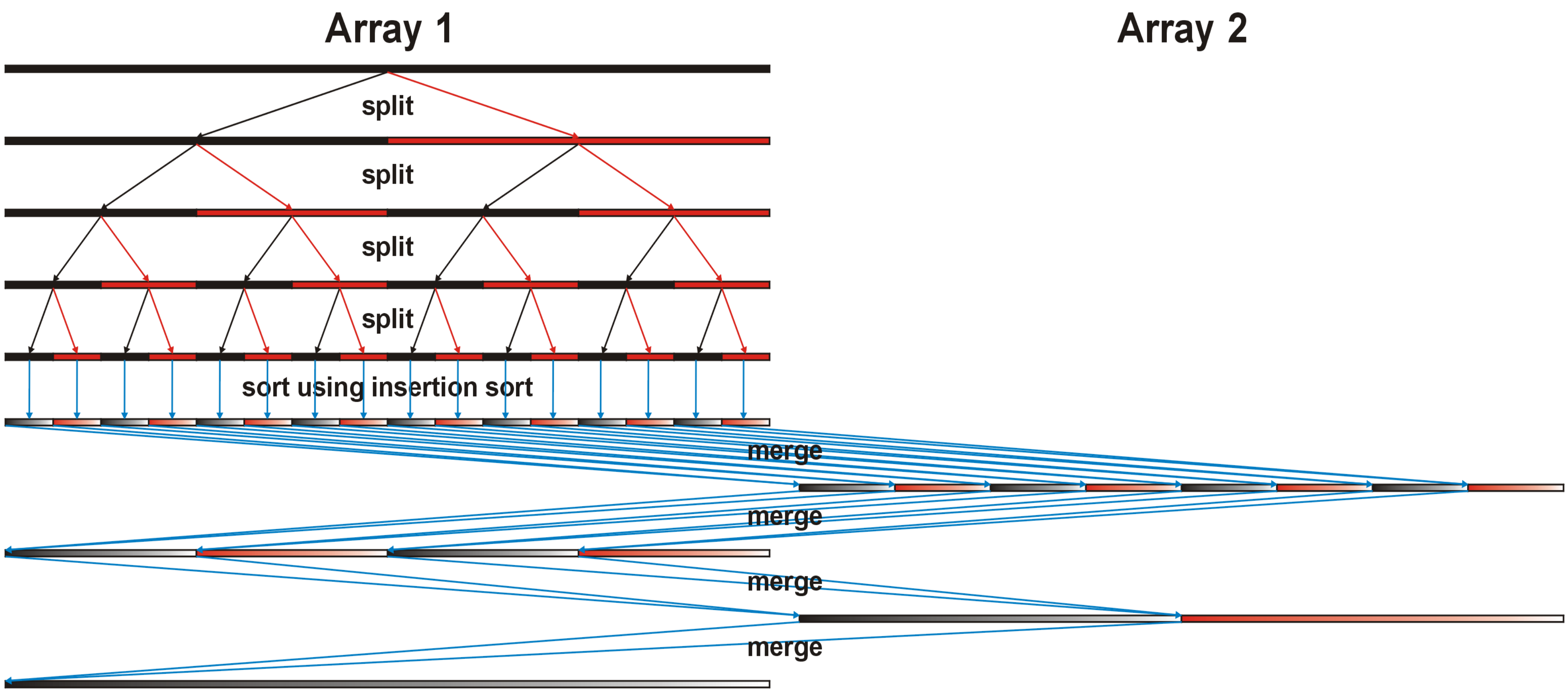
Ordenación
MergeSort

Ejemplo gráfico:



Ordenación
MergeSort

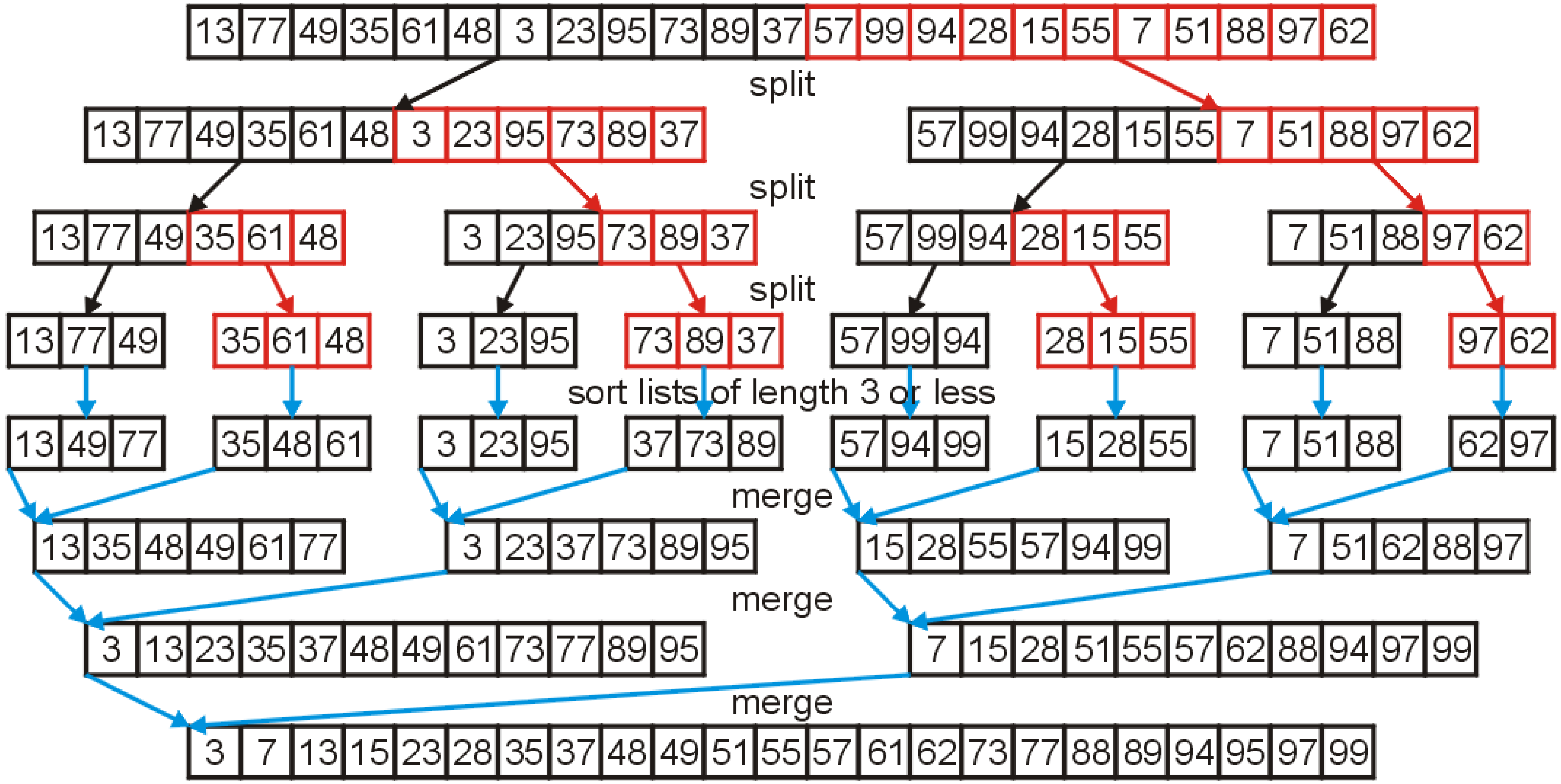
- Para realizar la operación de Merge se necesita un arreglo adicional.



Ordenación
MergeSort

Ejemplo:

- Ordenar la secuencia 13 77 49 35 61 48 3 23 95 73 89 37 57 99 94 28 15 55 7 51 88 97 62

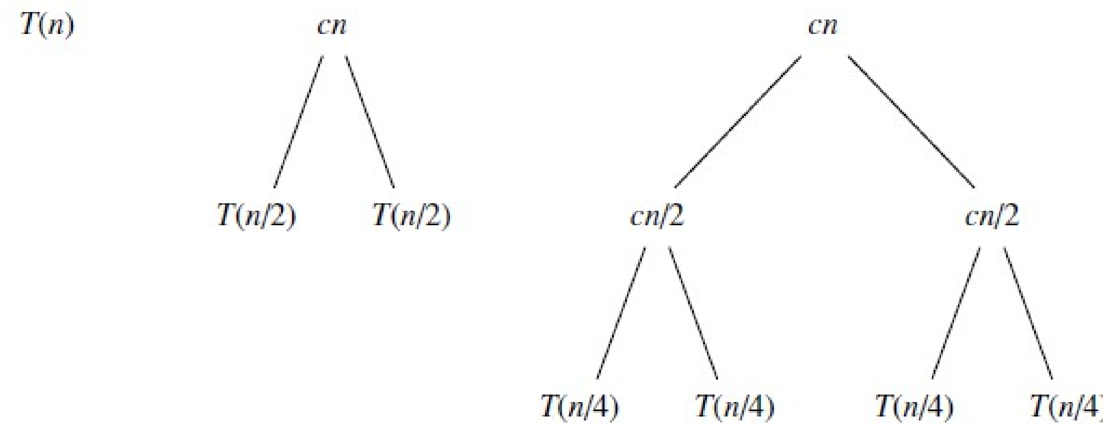


Ordenación
MergeSort

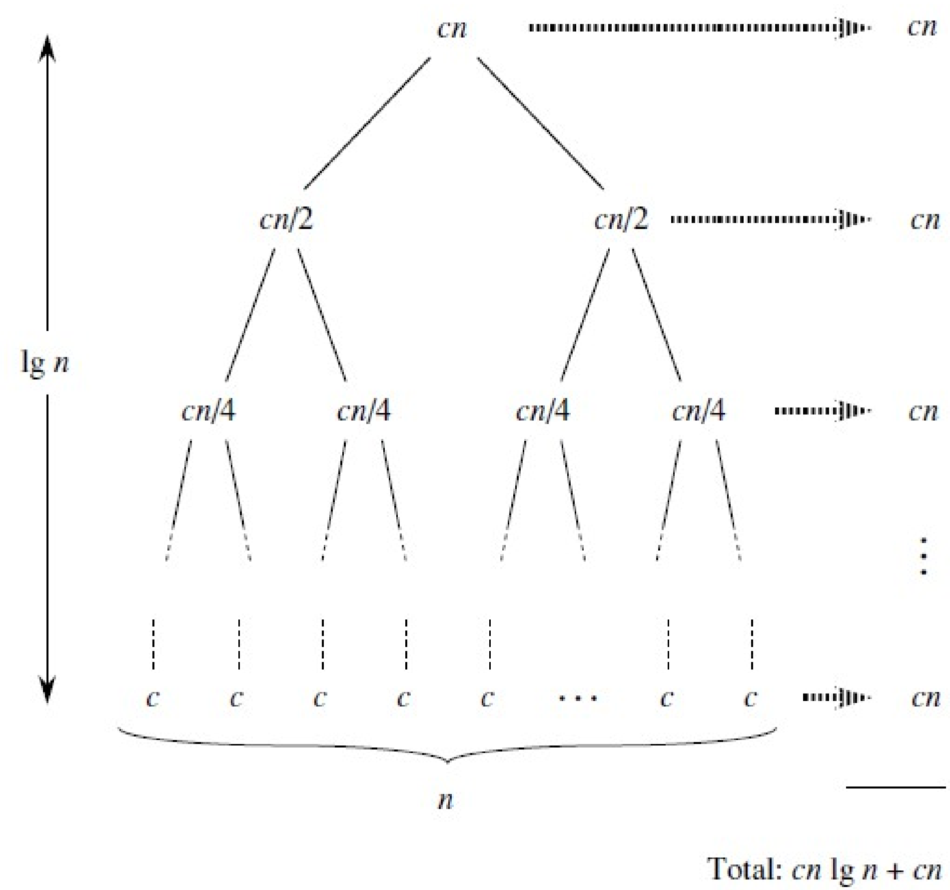
- Análisis de tiempo de ejecución
  - El tiempo requerido para ordenar la primera mitad
  - El tiempo requerido para ordenar la segunda mitad
  - El tiempo requerido para mezclar las dos listas

$$\mathrm{T}(n) = \begin{cases} \boldsymbol{\Theta}(1) & n = 1 \\ 2\,\mathrm{T}\left(\frac{n}{2}\right) + \boldsymbol{\Theta}(n) & n > 1 \end{cases}$$

Ordenación
MergeSort



$\Theta\ (n\ lg_2\ n)$



Ordenación
MergeSort

- Resumen del tiempo de ejecución de esta ordenación

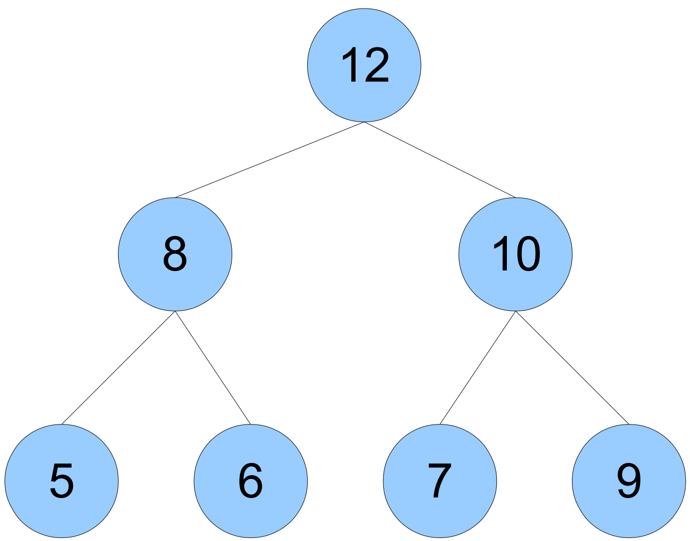
Caso	Cota	Comentario
Peor	$\Theta(n \lg(n))$	No hay
Medio	$\Theta(n \lg(n))$	
Mejor	$\Theta(n \lg(n))$	No hay

Ordenación
HeapSort

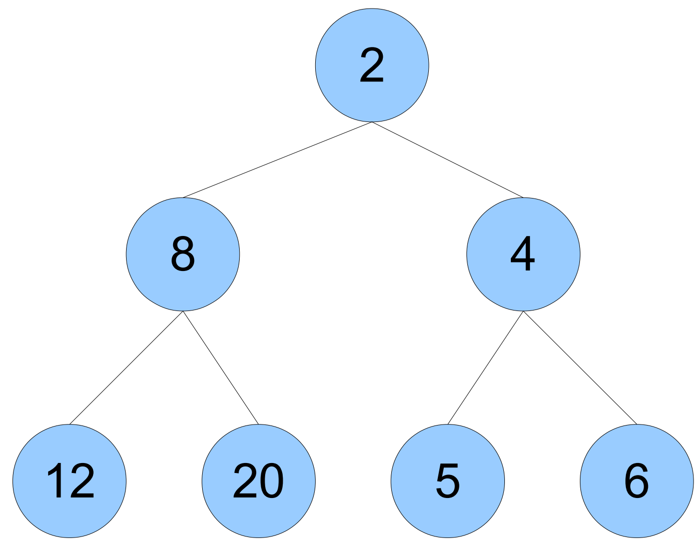
- Utiliza el concepto de Montículo Binario Maximal.
- Un montículo binario con dos condiciones:
  - Es completo (¿*Recuerdan que significa completo?*)
  - Esta parcialmente ordenado
- Normalmente se utiliza para priorizar la elección de un elemento en un árbol binario, ya sea el de menor prioridad (minimal) o el de mayor prioridad (maximal).

Ordenación
HeapSort

- Ejemplo de montículos



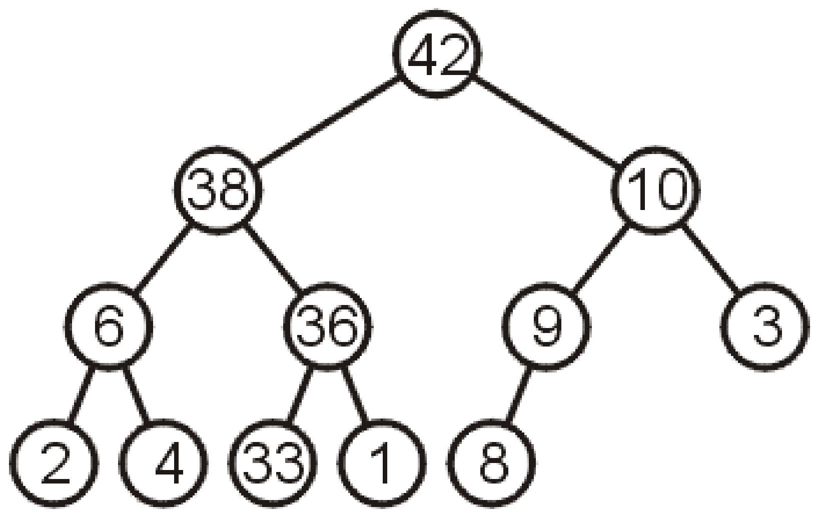
MAXIMAL



MINIMAL

Ordenación
HeapSort

- Consideramos que un arreglo representa un heap



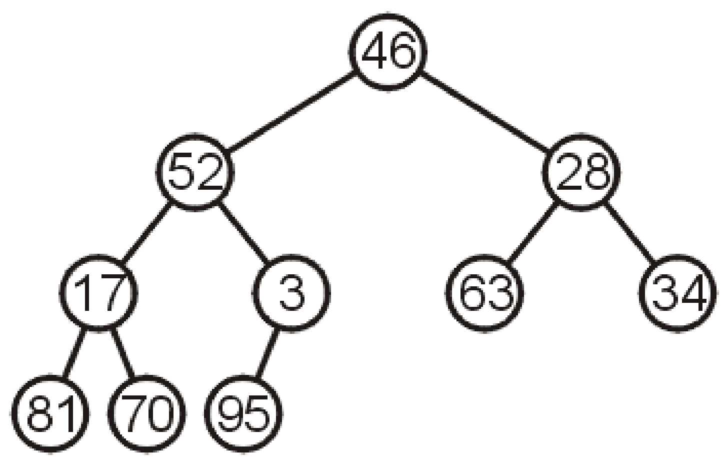
42	38	10	6	36	9	3	2	4	33	1	8

Ordenación
HeapSort

- Consideremos el siguiente arreglo desordenado

46	52	28	17	3	63	34	81	70	95

- El mismo representa el siguiente árbol binario completo

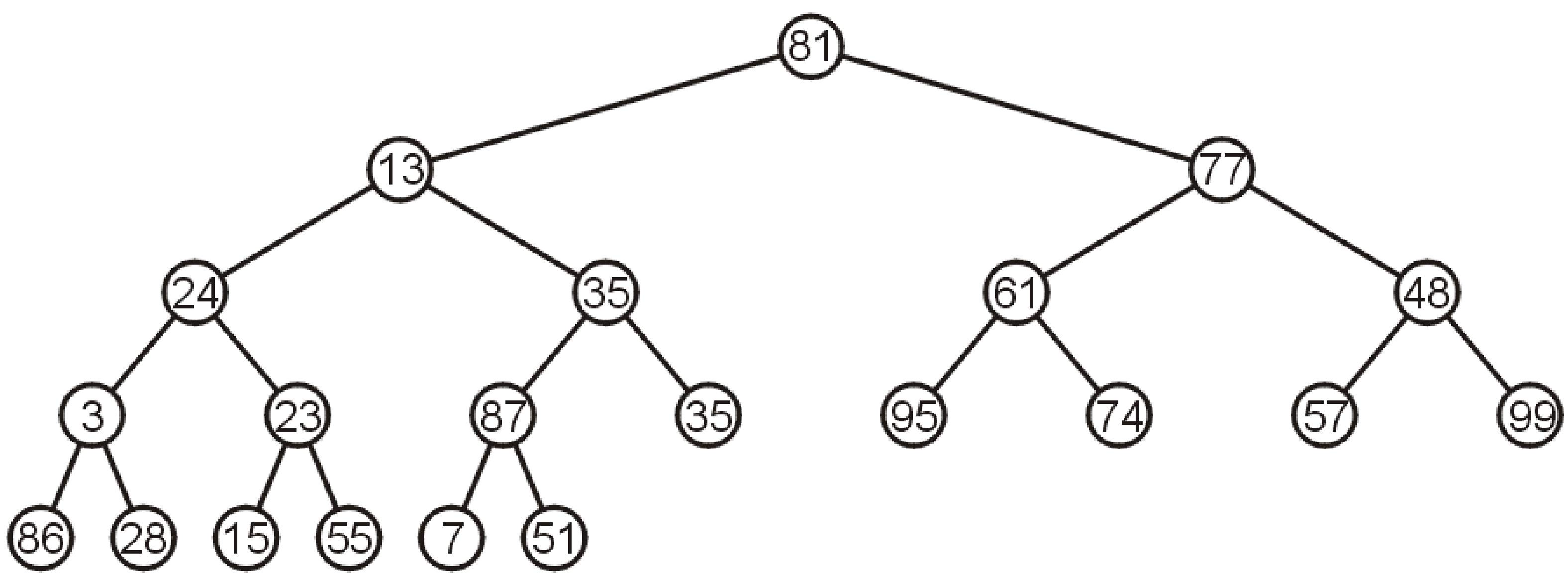


Pero no es un max-heap, min-heap o un BST

Ordenación
HeapSort

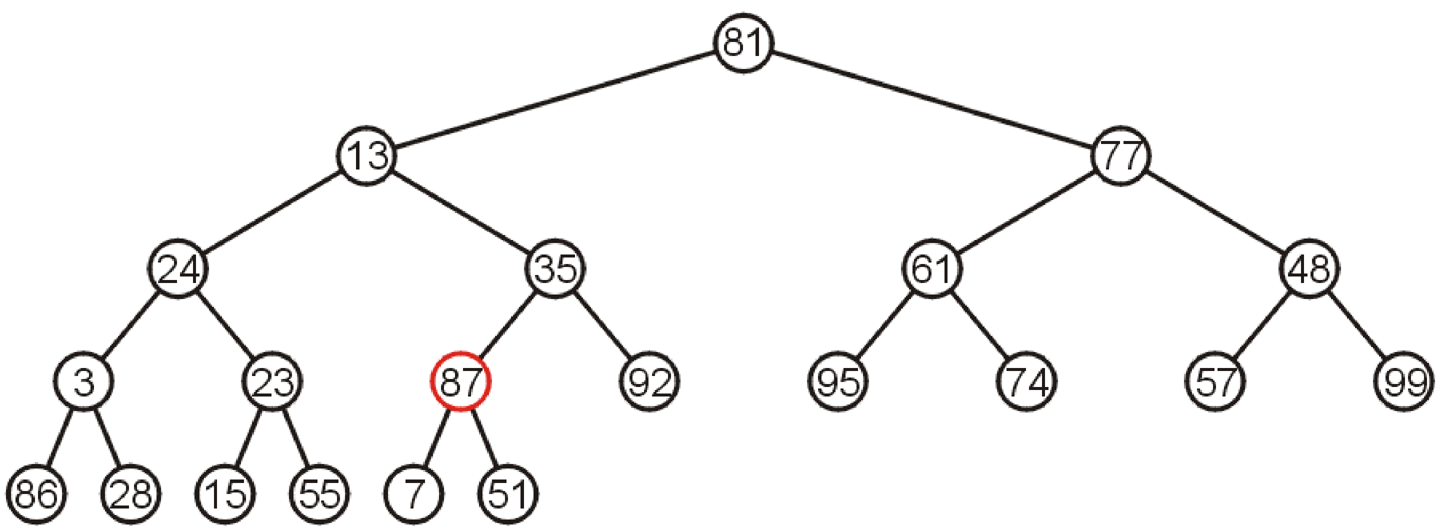
- Ahora vemos como convertir un arreglo en un max-HEAP.
- Ejemplo:

81	13	77	24	35	61	48	3	23	87	92	95	74	57	99	86	28	15	55	7	51



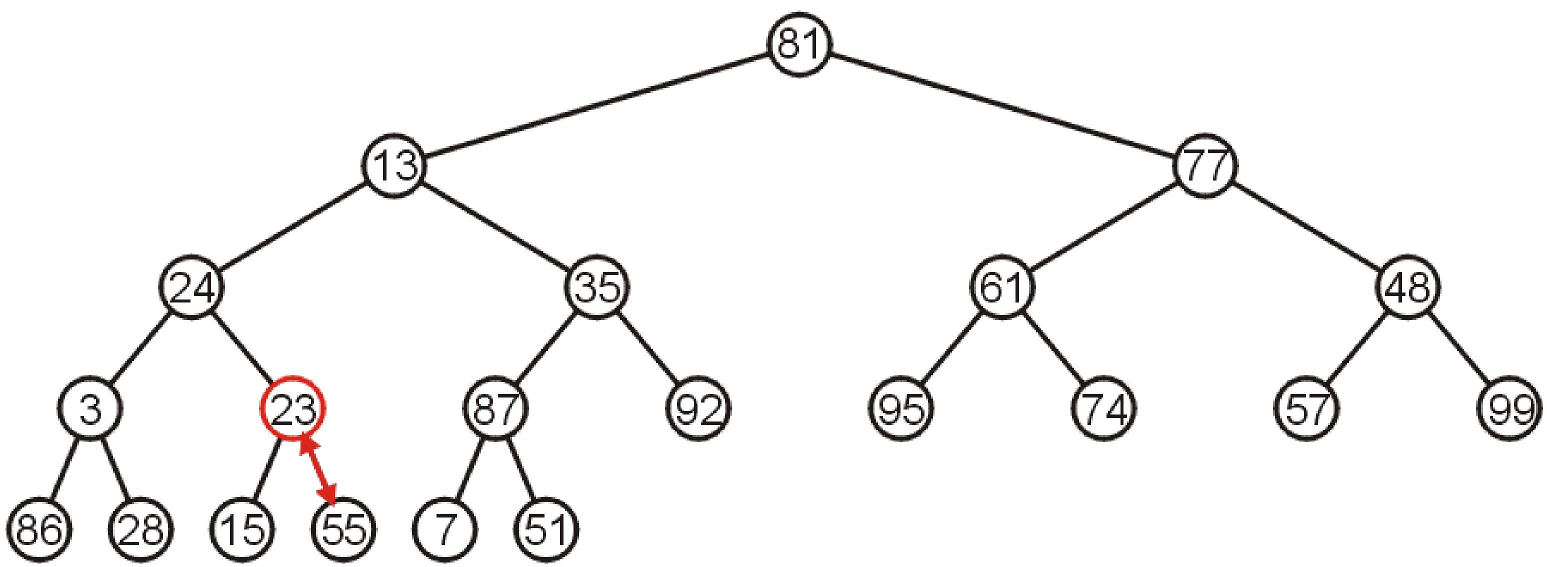
Ordenación
HeapSort

- Vemos que no es un max-HEAP aunque podemos considerar que las hojas son max-HEAP y también el sub-árbol con 87 como raíz es un max-HEAP



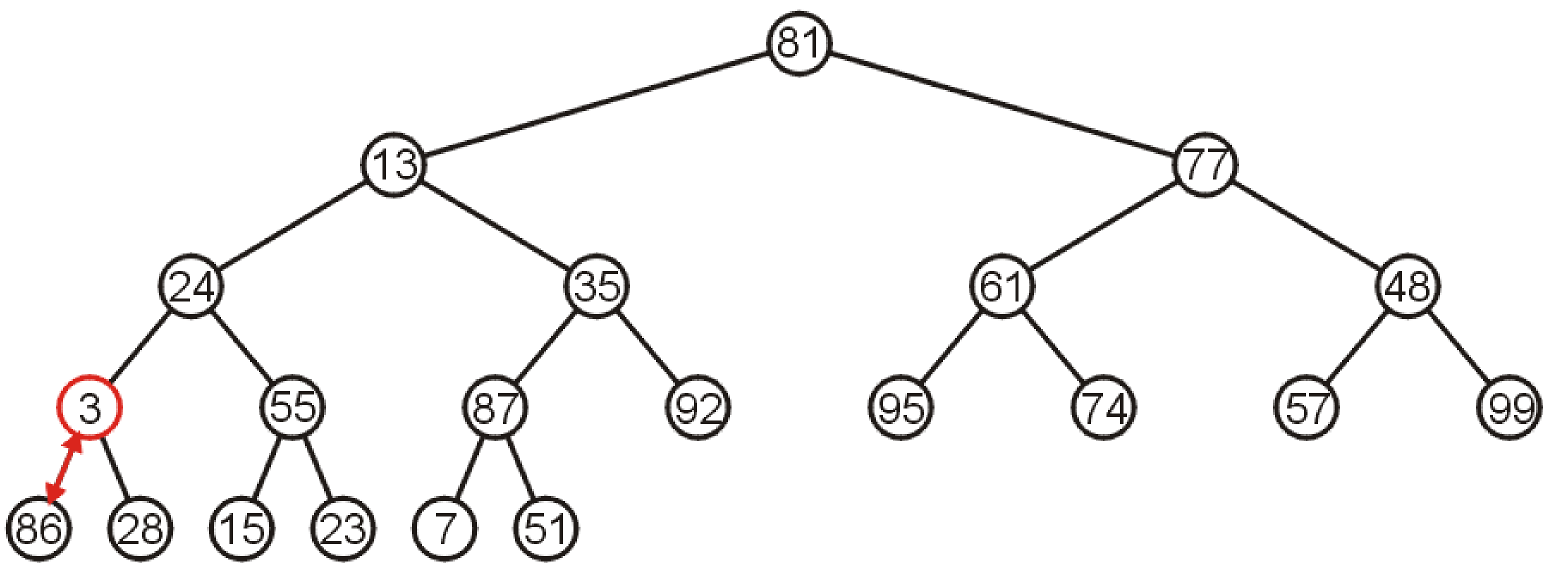
Ordenación
HeapSort

- El sub-arbol con raíz 23 no es un max-HEAP, pero si intercambiamos con el 55 creamos un max-HEAP



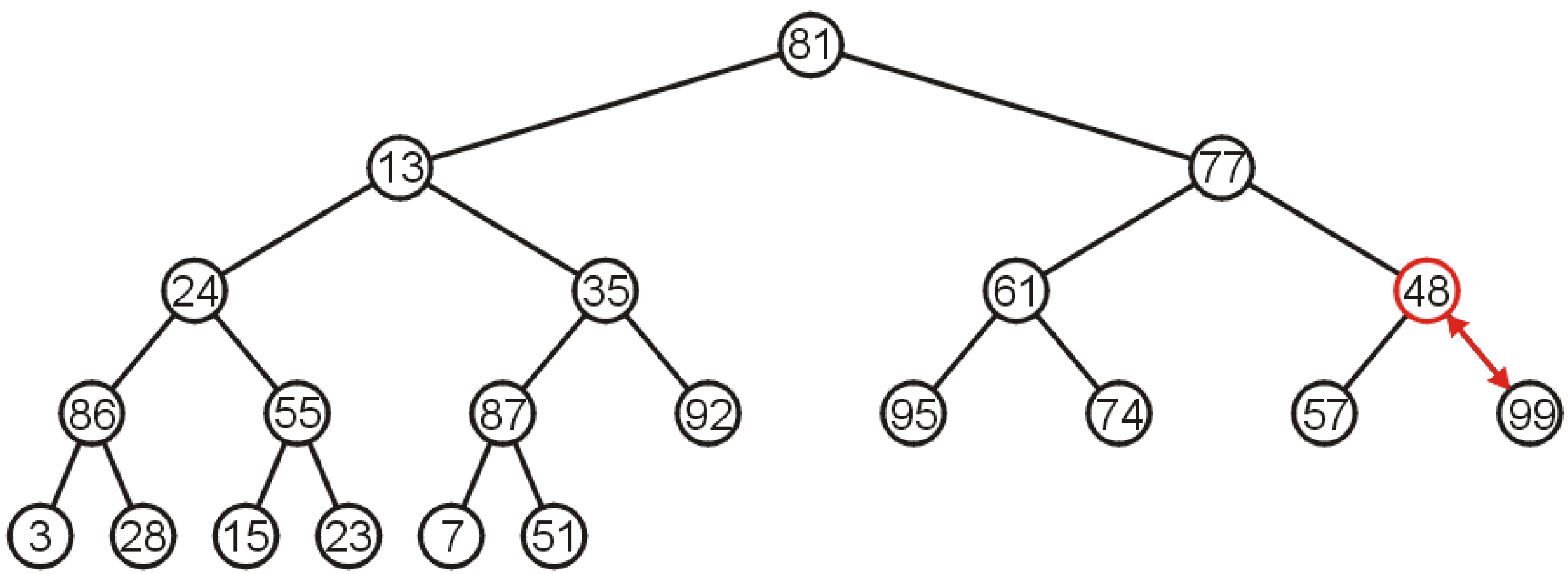
Ordenación
HeapSort

- Lo mismo sucede con el sub-arbol con 3 como raíz



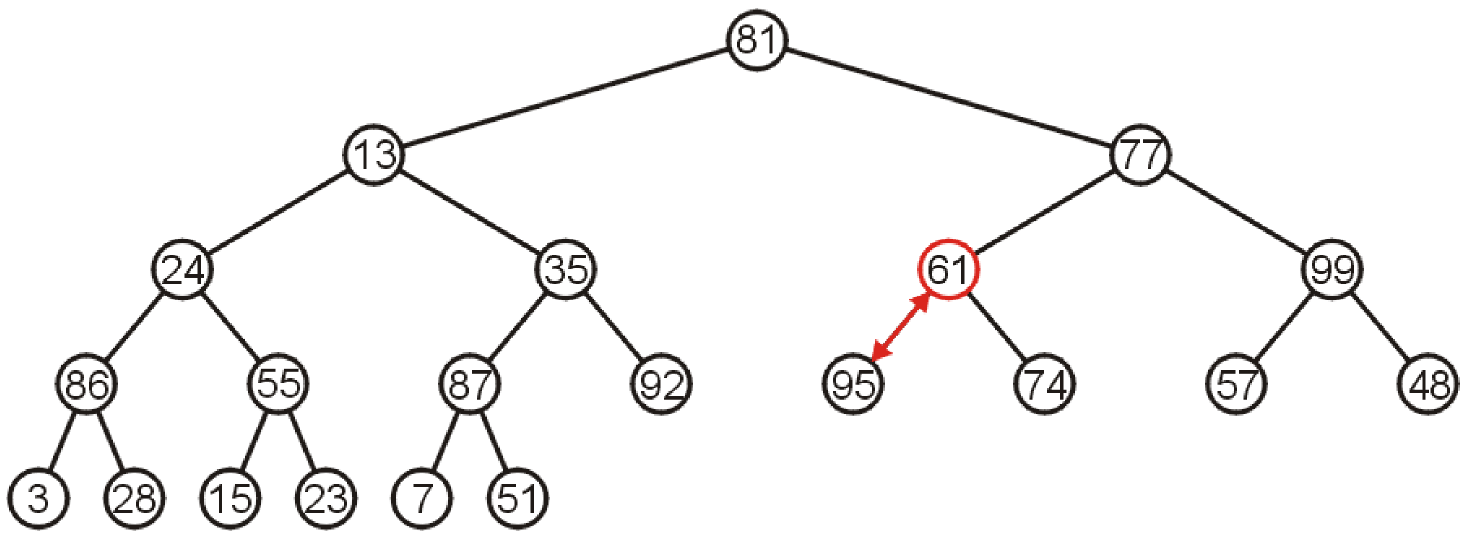
Ordenación
HeapSort

- Ahora subimos de nivel y analizamos el sub-árbol con raíz 48, lo convertimos en max-HEAP intercambiándolo con el 99



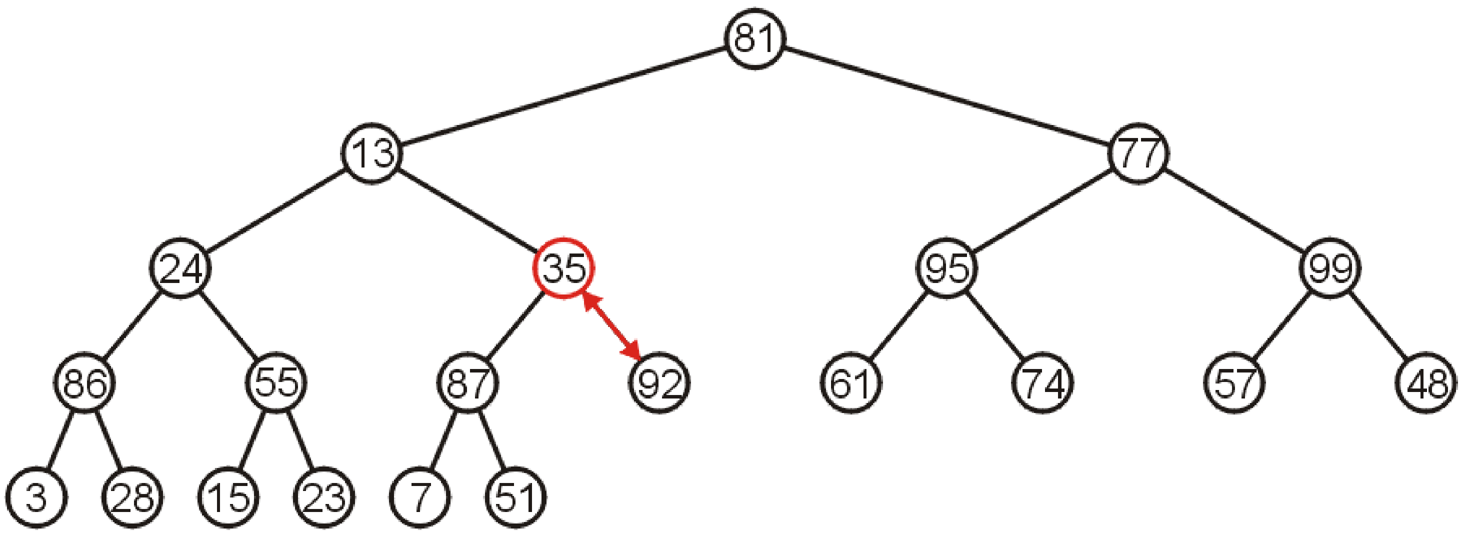
Ordenación
HeapSort

- Lo mismo ocurre con el 61



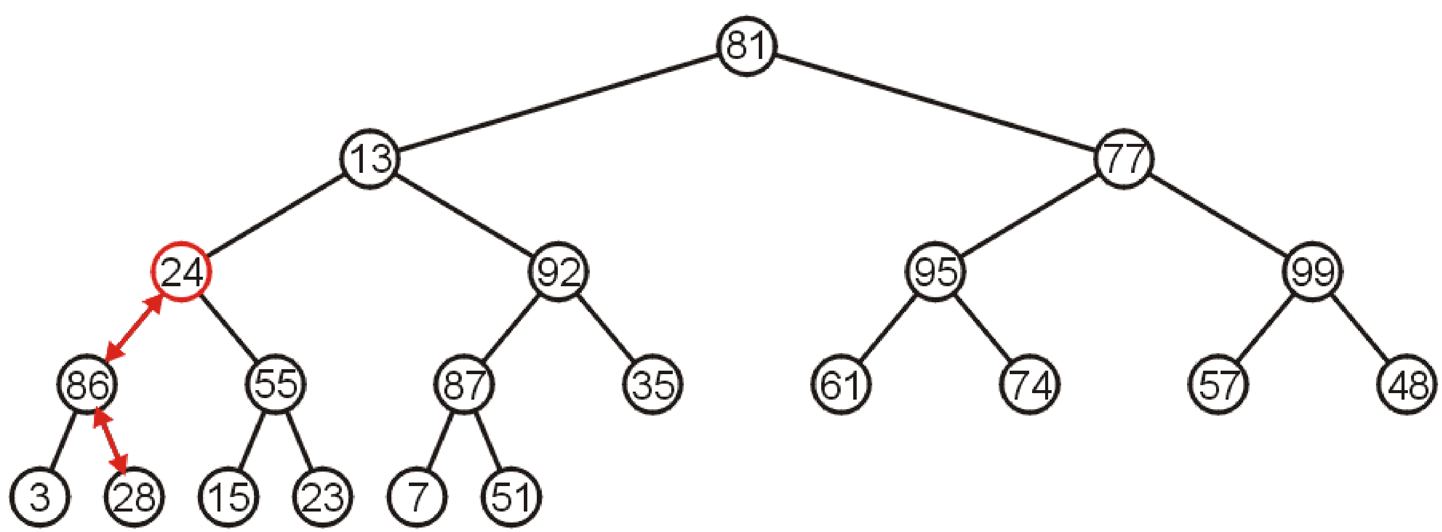
Ordenación
HeapSort

- Continuamos con el 35

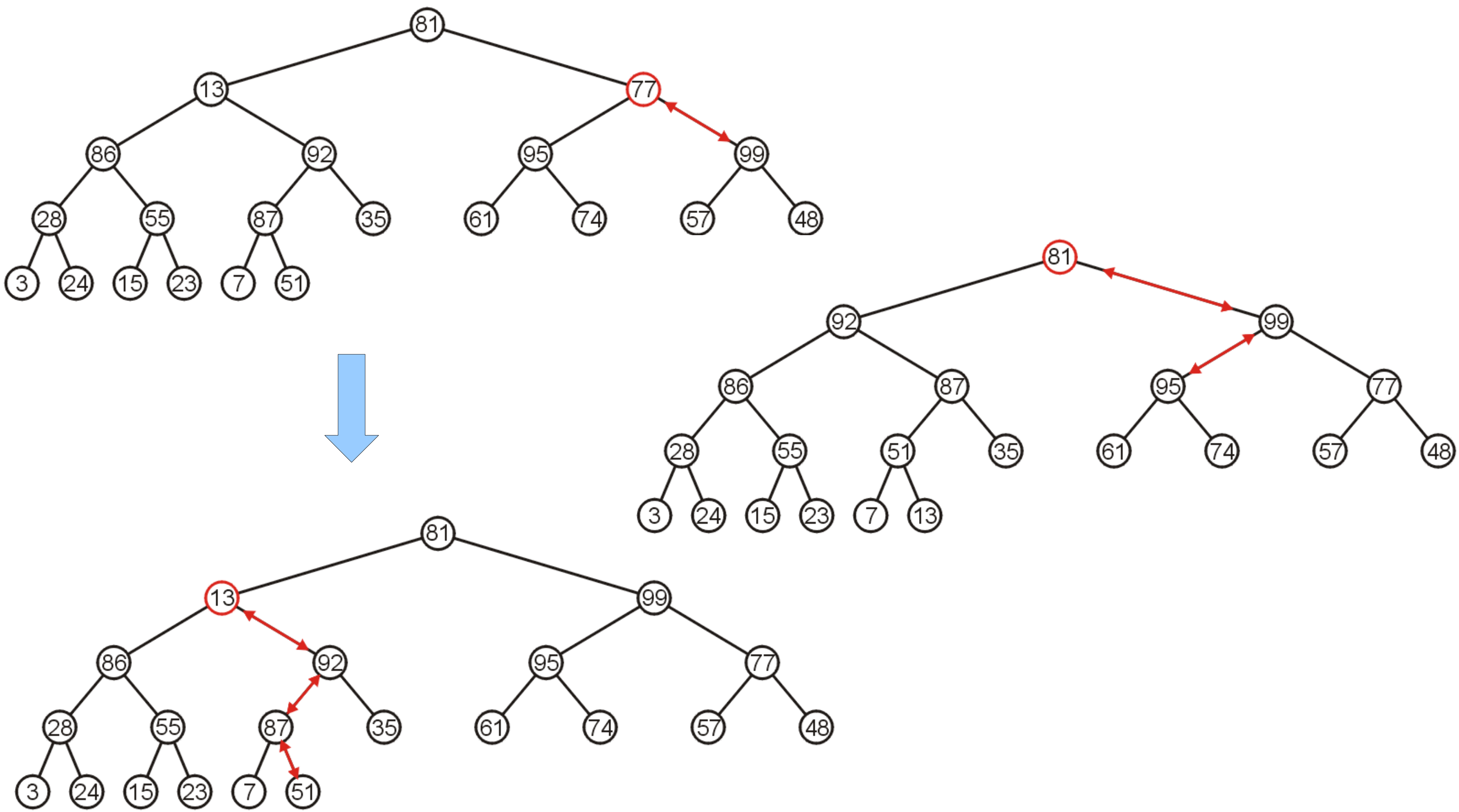


Ordenación
HeapSort

- Ahora analizamos el 24 y vemos que debemos intercambiar con el 86 y luego intercambiando con el 28. Operación de "*empujar*", "*hundir*" o *siftdown*

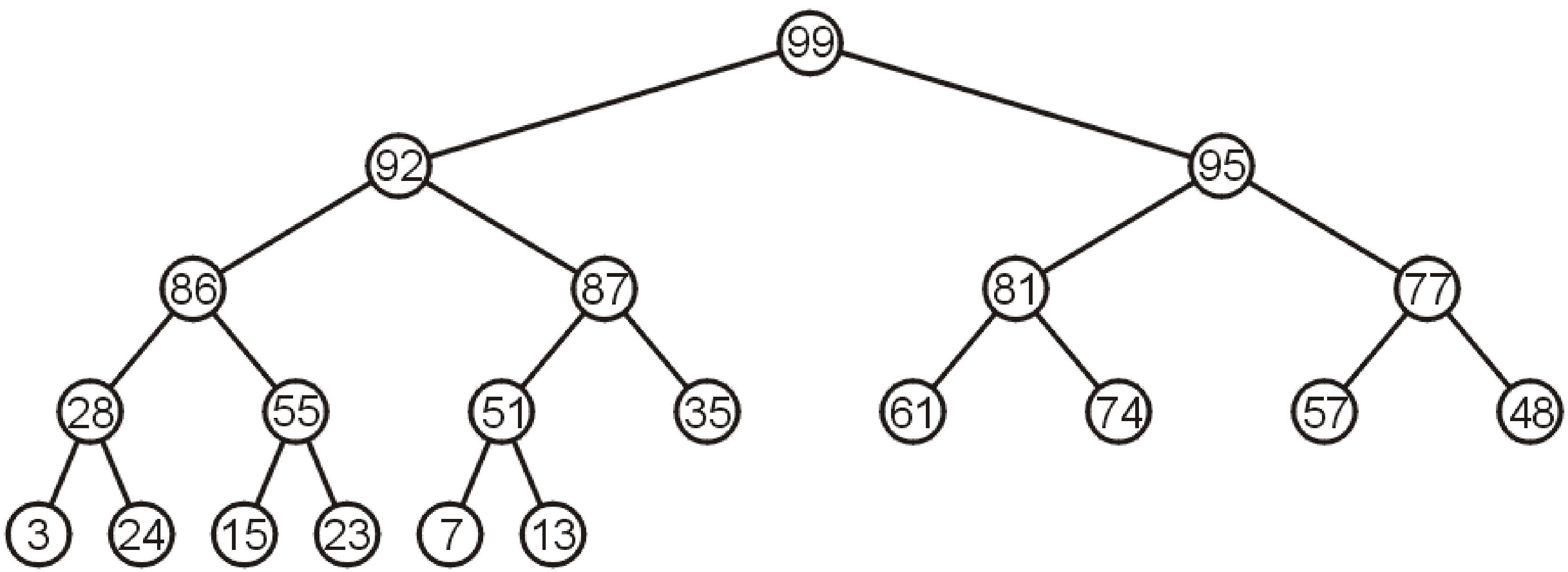


Ordenación
HeapSort



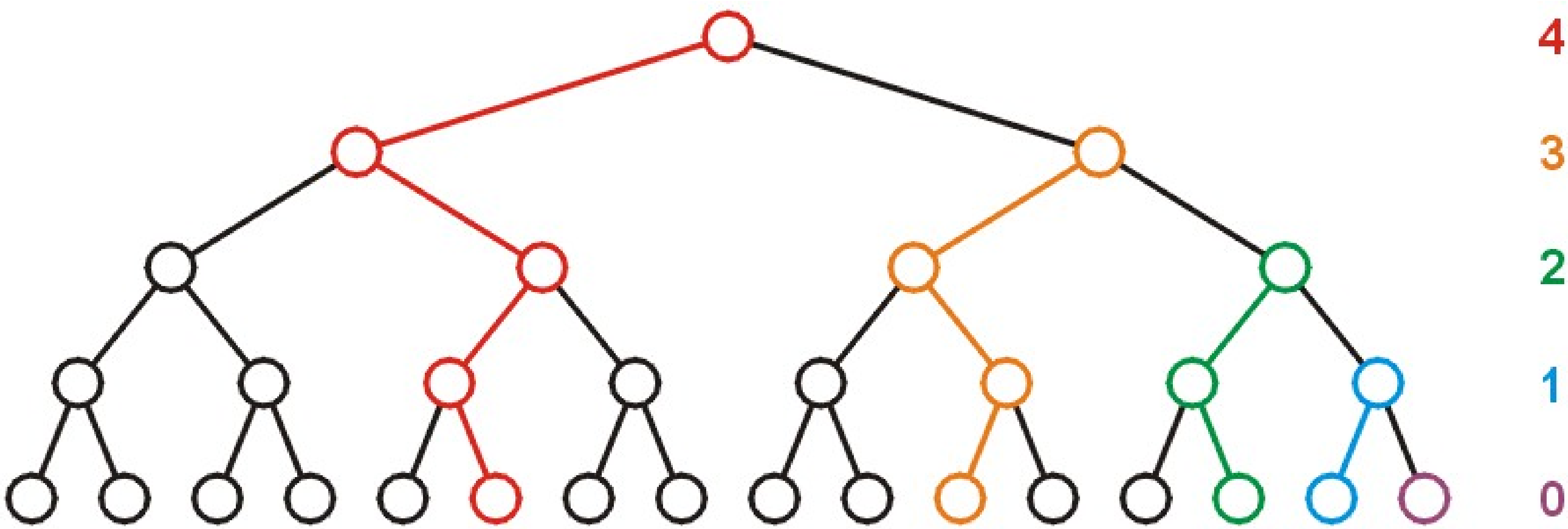
Ordenación
HeapSort

- Y finalmente tenemos construido nuestro max-HEAP



Ordenación
HeapSort

- La operación de construcción de un montículo maximal es O*(n).*



Ordenación
HeapSort

- En el nivel k, hay 2^k nodos, y por tanto en el peor caso todos los nodos deben ser "empujados" *h-k* niveles, requiriendo un total de $2^k(h-k)$ intercambios.
- Entonces tenemos la suma y su expresión en su forma cerrada.

$$\sum_{k=0}^{h} 2^k (h-k) = \left(2^{h+1} - 1\right) - (h+1)$$

Queda como ejercicio la demostración de la forma cerrada
Ver Libro de [Shaffer2013] Pag. 466, ejemplo 14.4

Ordenación
HeapSort

- Un árbol binario perfecto es $n = 2^{h+1} - 1$

  y $h+1 = log_2 (n+1)$, por tanto

$$\sum_{k=0}^{h} 2^k (h-k) = n - \log_2 (n+1)$$

- Finalmente el tiempo esta en *O(n)*

Ordenación
Heapsort

Algoritmo p/ convertir un arreglo en un heap

```
MAX-HEAPIFY(A, i, n)
   l ← LEFT(i )
   r ← RIGHT(i )
   if l ≤ n and A[l] > A[i] then
      largest ←l
   else
      largest ←i
   if r ≤ n and A[r] > A[largest] then
      largest ←r

   if largest ≠ i then
       exchange A[i] ↔ A[largest]
       MAX-HEAPIFY(A, largest, n)
```

```
LEFT(i)
   return 2i

RIGHT(i )
   return (2i + 1)
```

Ordenación
Heapsort

- Algoritmo para construir un montículo (maximal)

```
BUILD-MAX-HEAP(A, n)
   for i ← n/2 downto 1 do
     MAX-HEAPIFY(A, i, n)
```

La ecuación de recurrencia de MAX-HEAPIFY es

$T(n) <= T(2n/3) + O(1)$ ***(Averigue porqué es así)***

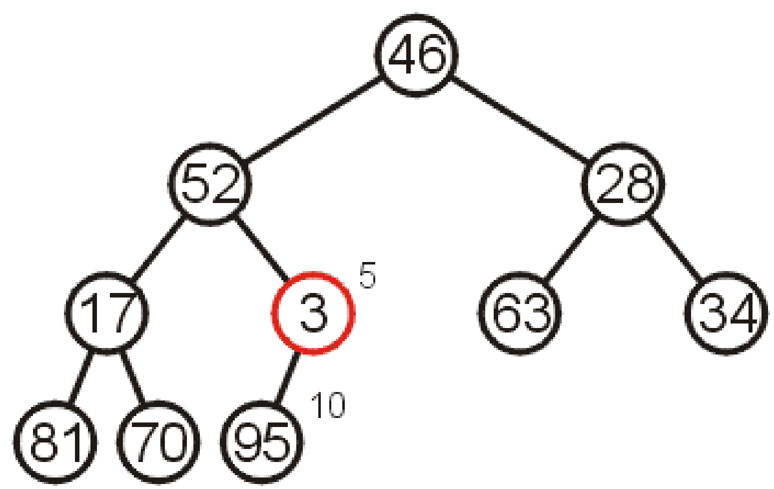
Según el teorema maestro (caso 2) => $T(n) = O(\log n)$

Ordenación
HeapSort

- Proceso de Ordenación, ejemplo.

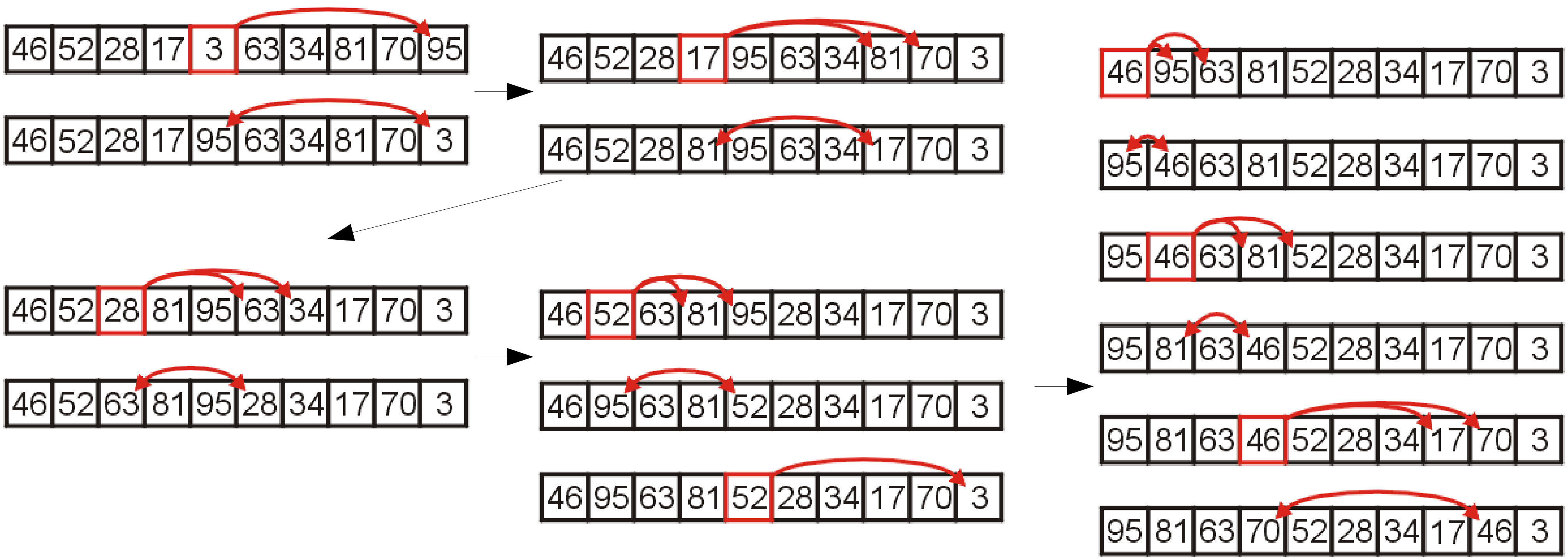
46	52	28	17	3	63	34	81	70	95

- Ninguna de las hojas necesitan ser "empujadas", por tanto empezamos en el primer nodo "interno" en la posición n/2
- Esto es n = 10, empezamos en 5.



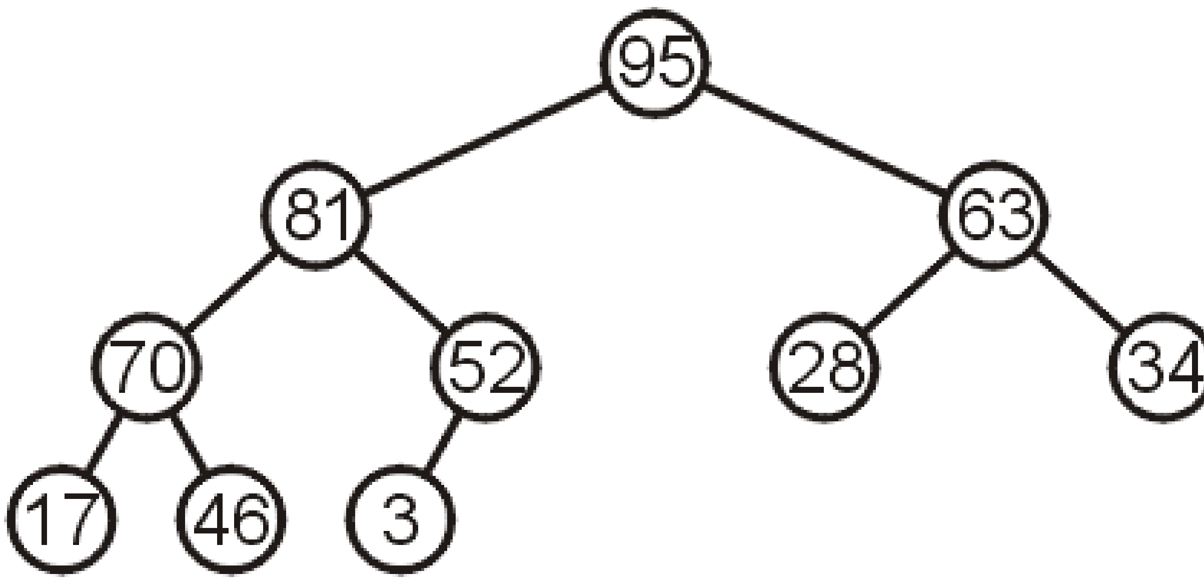
Ordenación HeapSort

- Convertimos en max-HEAP



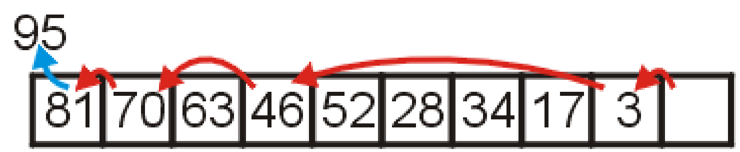
Ordenación
HeapSort

95	81	63	70	52	28	34	17	46	3

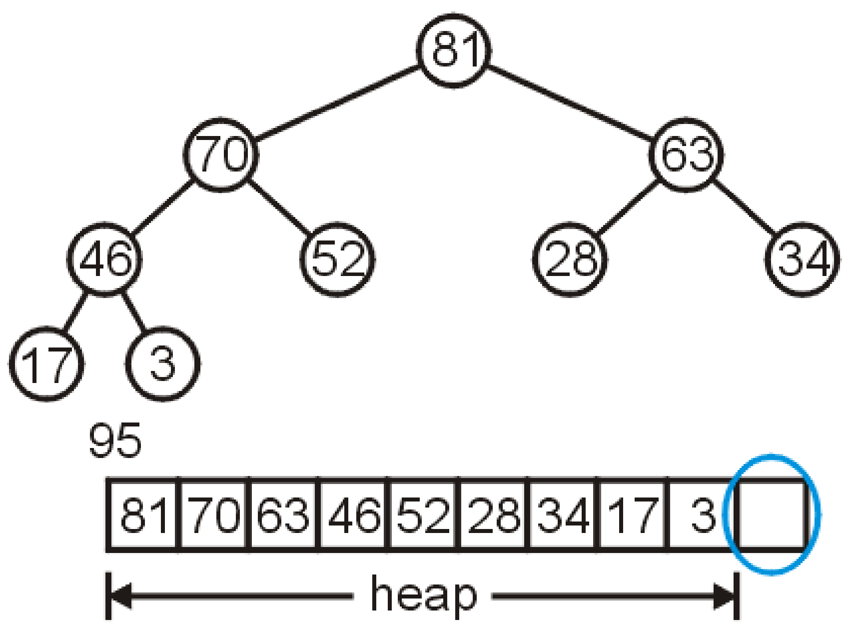


Ordenación
HeapSort

- Suponga ahora que decolamos el máximo elemento de este HEAP

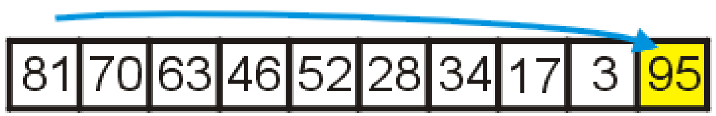


Este deja un hueco al final del arreglo

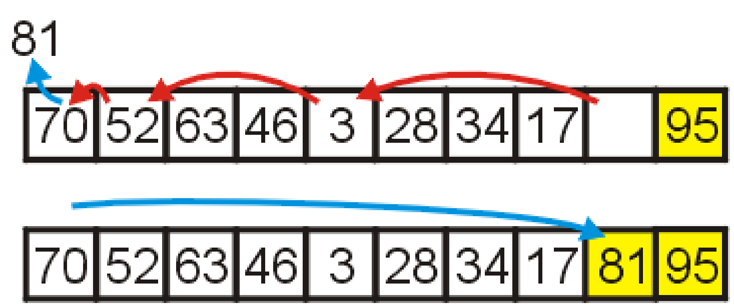


Ordenación
HeapSort

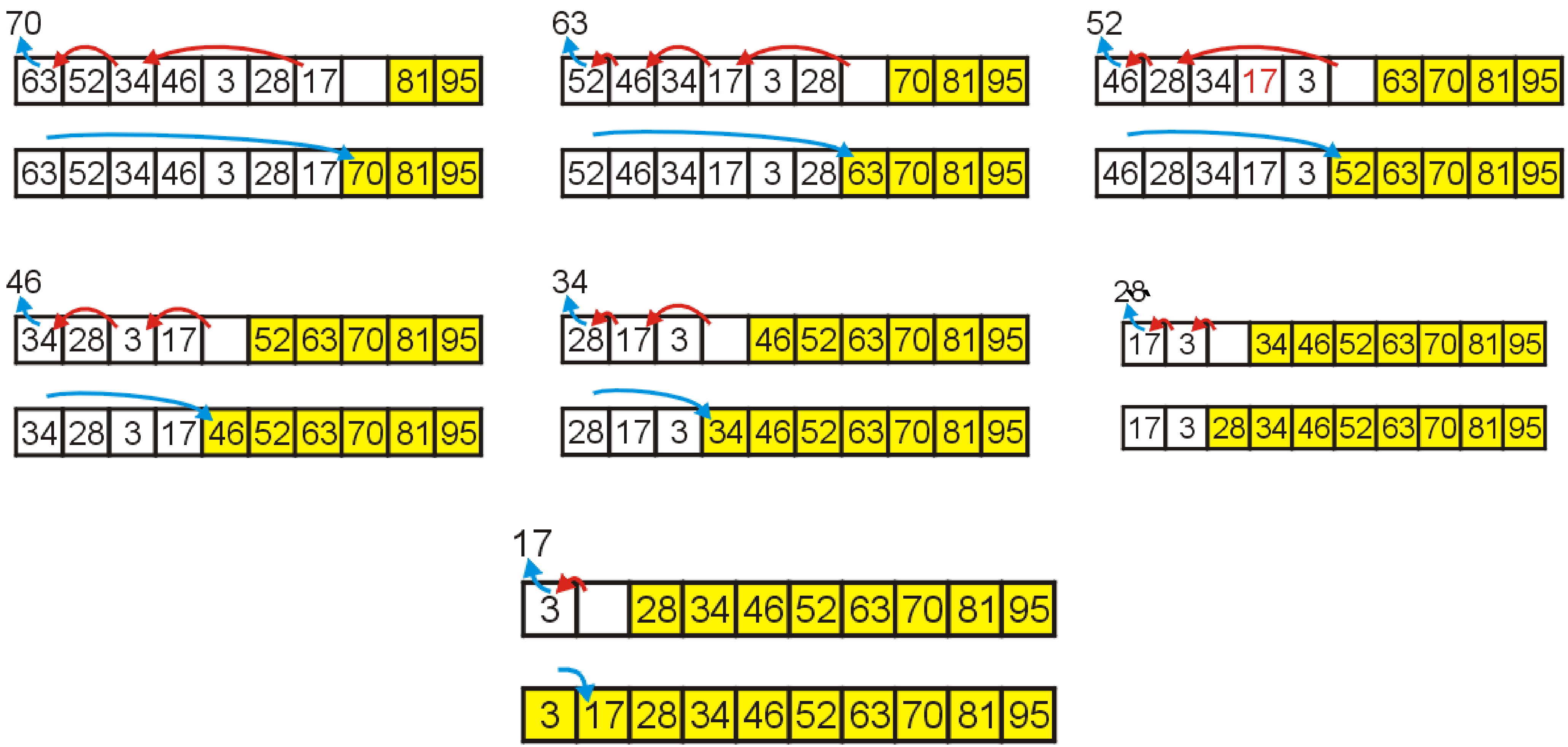
- Colocamos al final del arreglo



- Repetimos el proceso, decolamos el máximo e insertamos al final del arreglo



Ordenación
HeapSort



Finalmente queda el arreglo ordenado

Ordenación
HeapSort

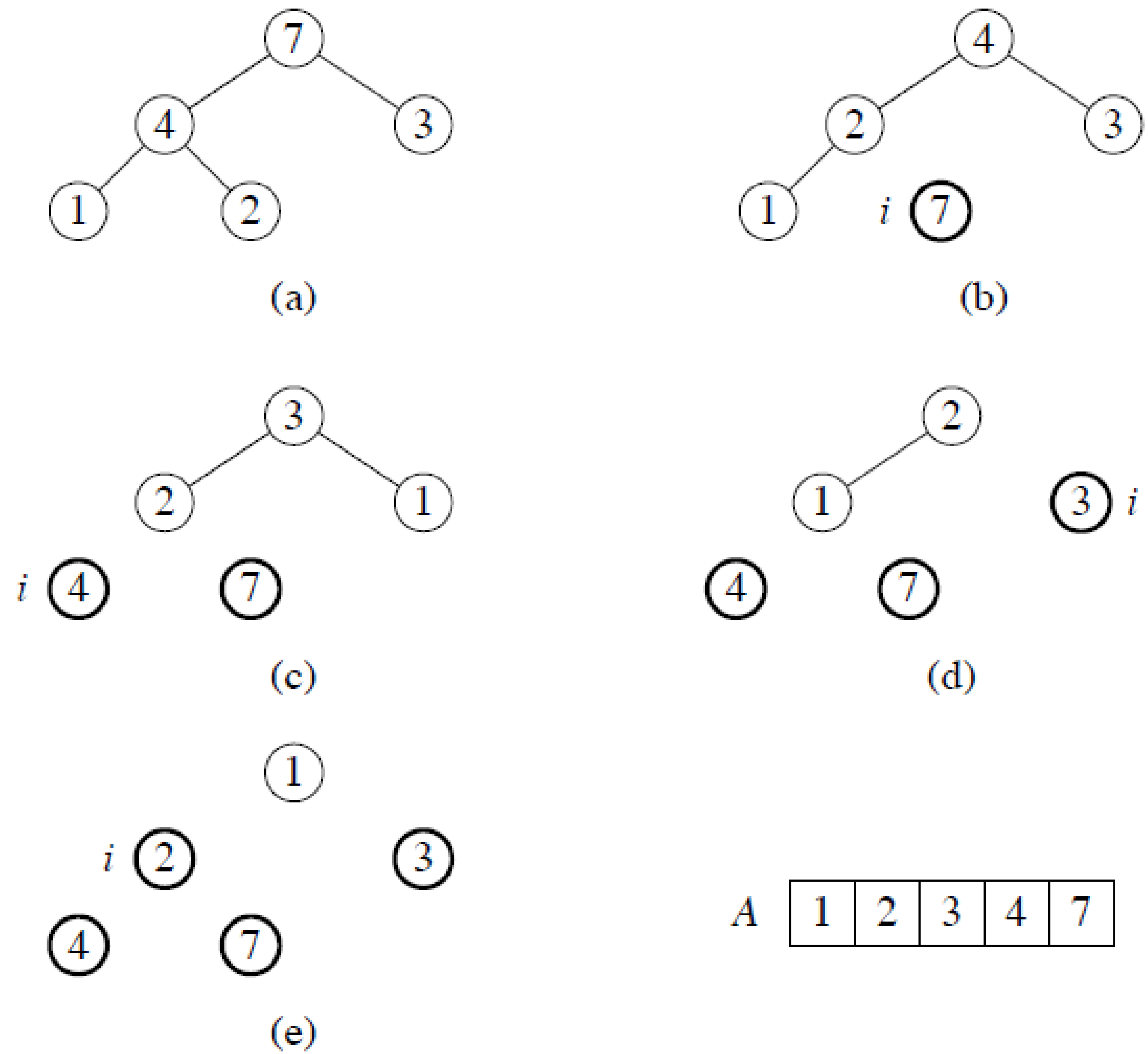
- Algoritmo de ordenación

```
HEAPSORT(A, n)

   BUILD-MAX-HEAP(A, n)

   for i ← n downto 2 do
       exchange A[1] ↔ A[i]
       MAX-HEAPIFY(A, 1, i − 1)
```

Ordenación
Heapsort



Ordenación
HeapSort

- El proceso de construir el Heap lleva *O(n)*
- Decolar n items de un HEAP de tamaño n, esta en *O (n log n)*

  Iterar *n-1* veces

  *I*ntercambiar esta en *O(1)*

  MAX-HEAPIFY esta en *O(log n)*

- Por tanto el algoritmo esta en *O (n log n)*

Ordenación
HeapSort

- Tiempo de ejecución

Caso	Tiempo	Comentario
Peor	$\Theta(n \ln(n))$	No hay
Medio	$\Theta(n \ln(n))$	
Mejor	$\Theta(n \ln(n))$	No hay

Ordenación

El algoritmo de *MergeSort* y *HeapSort* poseen cotas: $O(n \log n)$ y $\Omega(n \log n)$

Por tanto son algoritmos basados en comparación asintóticamente óptimos. ***¿Por qué?***

Ordenación

Algoritmo que no se basan en comparación

- CountingSort
- Radixsort
- BucketSort o BinSort

Ordenación
Counting*Sort*

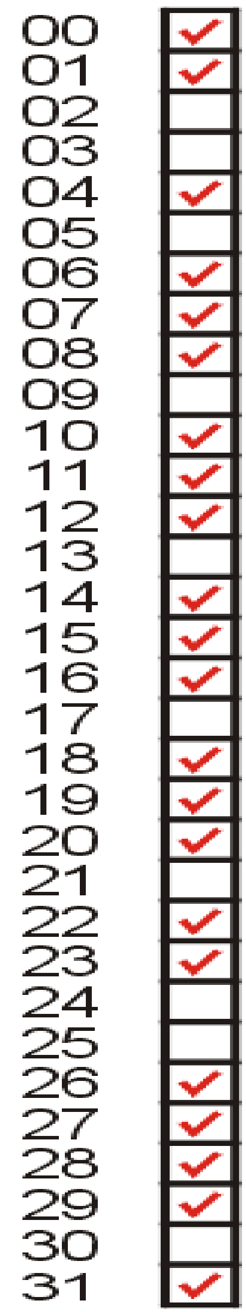
- Posibilidad de ordenar un conjunto de datos en O(n).
- ¡No se basa en comparación!
- Si los datos se encuentran en cierto rango 0..M-1 entonces es posible hacerlo. Por tanto se puede utilizar este método cuando el conjunto de datos no es arbitrario.

Ordenación
CountingSort

- Ejemplo, se tiene una lista de números de 0 a 31 valores posibles.

0 1 4 6 7 8 10 11 12 14 15

16 18 19 20 22 23 26 27 28 29 31



Ordenación
CountingSort

- Datos repetidos
  - Contar
  - Lista Enlazada
- Ejemplo: ordenar estos dígitos

0 3 2 8 5 3 7 5 3 2 8 2 3 5 1 3 2 8 5 3 4
9 2 3 5 1 0 9 3 5 2 3 5 4 2 1 3

0	2
1	3
2	7
3	10
4	2
5	7
6	0
7	1
8	3
9	2

Ordenación
CountingSort

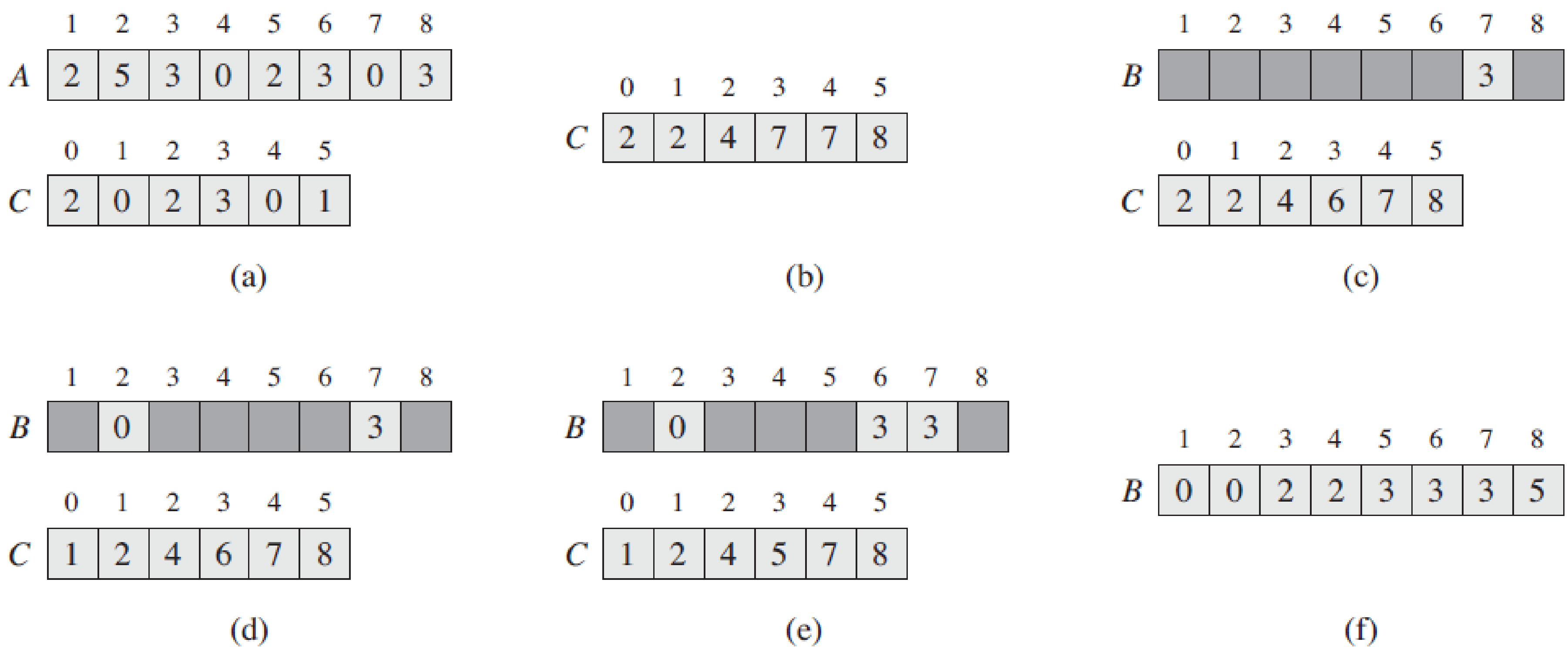
A[1..n] arreglo de entrada.
B[1..n] arreglo ordenado final.
C[0..k] arreglo de trabajo temporal

```
COUNTING-SORT(A,B,k)

for i = 0 to k do
  C[i] = 0
for j = 1 to length(A) do
  C[A[j]]= C[A[j]] + 1
   // C[i] tiene el nro. de elementos == i
for i= 1 to k do
  C[i] = C[i] + C[i-1]
   // C[i] tiene el nro. de elementos <= i
for j = length(A) to 1 do
  B[C[A[j]]] = A[j]
  C[A[j]]   = C[A[j]]-1
```

Ordenación

CountingSort



a) Arreglos A y C iniciales
b) Arreglo C luego de la linea 6
c,d,e) Iteración 1,2 y 3 de las lineas 7-9 (arreglo de salida B y C)
f) Arreglo ordenado de salida B final

Ordenación
CountingSort

- Cada elemento es un entero en el rango 0-k.
- El tiempo para este algoritmo es $\Theta(n+k)$
- Es un algoritmo estable. Los elementos con el mismo valor aparecen en el mismo orden de salida y de entrada.

Ejercicio: probar el algoritmo anterior. Dibujar los arreglos A, B y C.

```
A= {2,5,3,0,2,3,0,3} y k = 5
```

Ordenación
CountingSort

- Debe considerar que el número de ítems es comparable con el número posible de valores.
- Por ejemplo, si n = 20, y se tiene enteros de 1 a 1000000. ¿Es posible considerar esta ordenación? Probablemente no.

Caso	Tiempo	Comentario
Peor	$\mathbf{O}(n)$	No hay
Medio	$\mathbf{O}(n)$	
Mejor	$\mathbf{O}(n)$	No hay

Ordenación
RadixSort

- Suponga que queremos ordenar números de diez dígitos donde haya repetición.
- ¿Podemos usar CountingSort?
- Solo los contadores requerirían 10^{10} cubetas

Ordenación
RadixSort

- Considere el siguiente esquema
- Dado los números

16 31 99 59 27 90 10 26 21 60 18 57 17

- Si ordenamos primero en base al último dígito, tendríamos:

90 10 60 31 21 16 26 27 57 17 18 99 59

- Ahora ordenamos en base al primer dígito

10 16 17 18 21 26 27 31 57 59 60 90 99

¿Qué obtuvimos?

Ordenación
RadixSort

- Esquema:
  - Tratemos de ordenar los siguientes números decimales:
    86 198 466 709 973 981 374 766 473 342

Ordenación
RadixSort

- Creamos un arreglo de 10 colas

0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				

Ordenación
RadixSort

- Encolamos de acuerdo al tercer dígito

086 198 466 709 973 981 374 766 473 342

0				
1	981			
2	342			
3	973	473		
4	374			
5				
6	086	466	766	
7				
8	198			
9	709			

- Y decolamos: 981 342 973 473 374 086 466 766 198 709

Ordenación
RadixSort

- Encolamos de acuerdo al 2do. Dígito

981 342 973 473 374 086 466 766 198 709

0	709			
1				
2				
3				
4	342			
5				
6	466	766		
7	973	473	374	
8	981	086		
9	198			

- Y decolamos: 709 342 466 766 973 473 374 981 086 198

Ordenación
RadixSort

- Encolamos de acuerdo al primer dígito

709 342 466 766 973 473 374 981 086 198

0	086			
1	198			
2				
3	342	374		
4	466	473		
5				
6				
7	709	766		
8				
9	973	981		

- Y decolamos: 086 198 342 374 466 473 709 766 973 981

Ordenación
RadixSort

- Y finalmente tenemos la lista ordenada:

086 198 342 374 466 473 709 766 973 981

- ¿Qué se observa?

- Suponga que ahora queramos ordenar la siguiente secuencia de números binarios:

  1111 11011 11001 10000 11010 101 11100 111 1011 10101

Ordenación
RadixSort

- Necesitamos 2 colas.
- Necesitamos encolar y decolar 5 veces

Ordenación
RadixSort

- Algoritmo sencillo, asume elementos de *d*-dígitos

```
RADIX-SORT(A,d)
   for i = 1 to d do
      Usar un algoritmo estable de ordenacion para
      ordenar A en el dígito i.
```

- Dado *n* números de *d*-dígitos donde cada dígito puede tomar hasta *k* valores. Radix-SORT ordena en un tiempo $\Theta(d\,(n+k))$.

Ordenación
RadixSort

- Tiempo de ejecución

Caso	Tiempo	Comentario
Peor	$\mathbf{O}(n)$	No hay
Medio	$\mathbf{O}(n)$	
Mejor	$\mathbf{O}(n)$	No hay

Ordenación
BucketSort

- Igual que CountingSort asume una característica en los datos
- Asume que la entrada es generada por un proceso randómico que distribuye los elementos uniformemente en un rango [0,1)
- La idea es dividir el intervalo [0,1) en subintervalos denominados buckets o cubetas
- Para producir la salida, simplemente ordenamos los números en cada cubeta y recorremos las cubetas en orden, listando los elementos

Ordenación
BucketSort

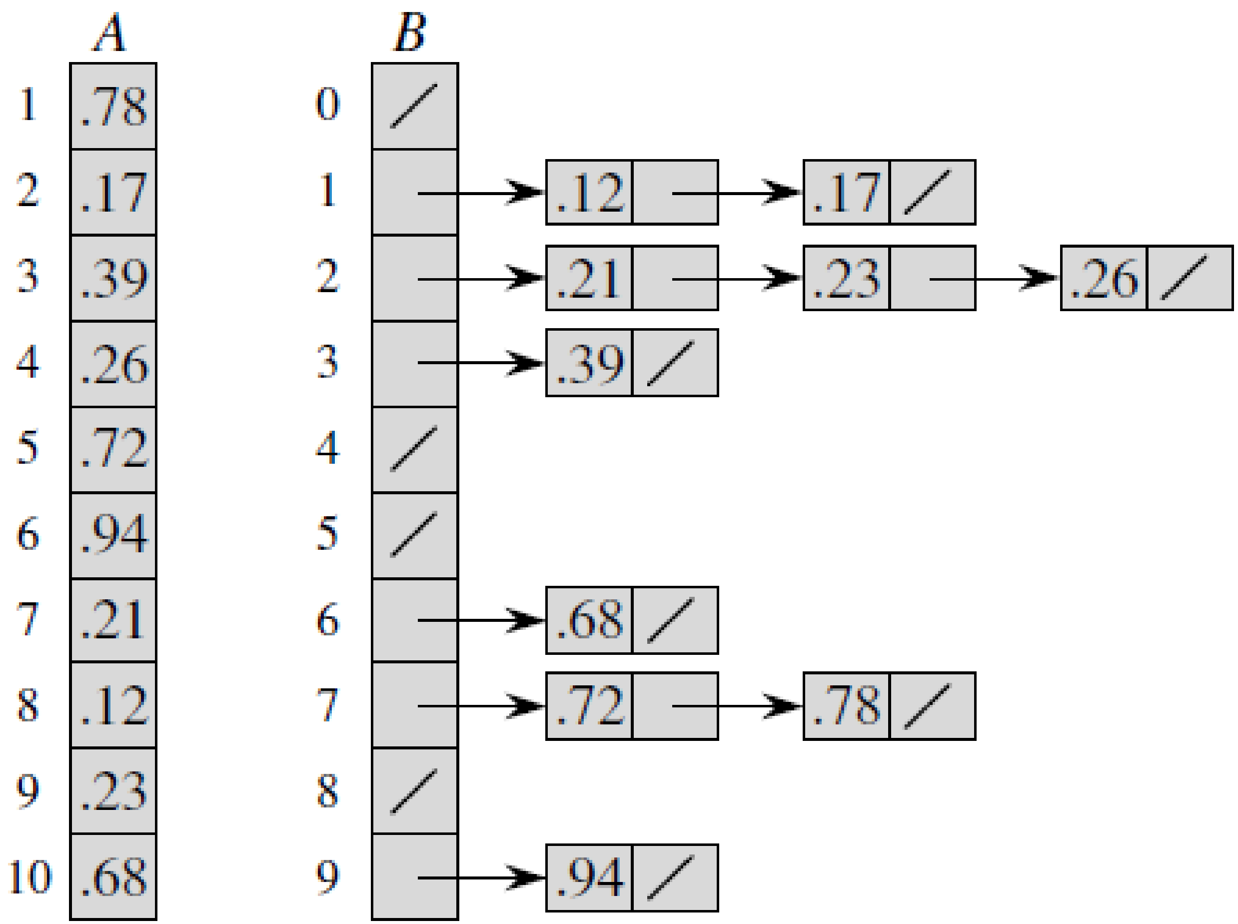
- Algoritmo (CLRS)

  Asume que 0 <= A[i] < 1 y *n* buckets

```
BUCKET-SORT(A)
n ← length[A]
for i ← 1 to n
        do insert A[i] into list B[⌊n A[i]⌋]
for i ← 0 to n − 1
        do sort list B[i] with insertion sort
concatenate the lists B[0], B[1], . . . , B[n − 1] together in order
```

Ordenación
BucketSort

- Ejemplo con n=10



Ordenación
BucketSort

Otro ejemplo

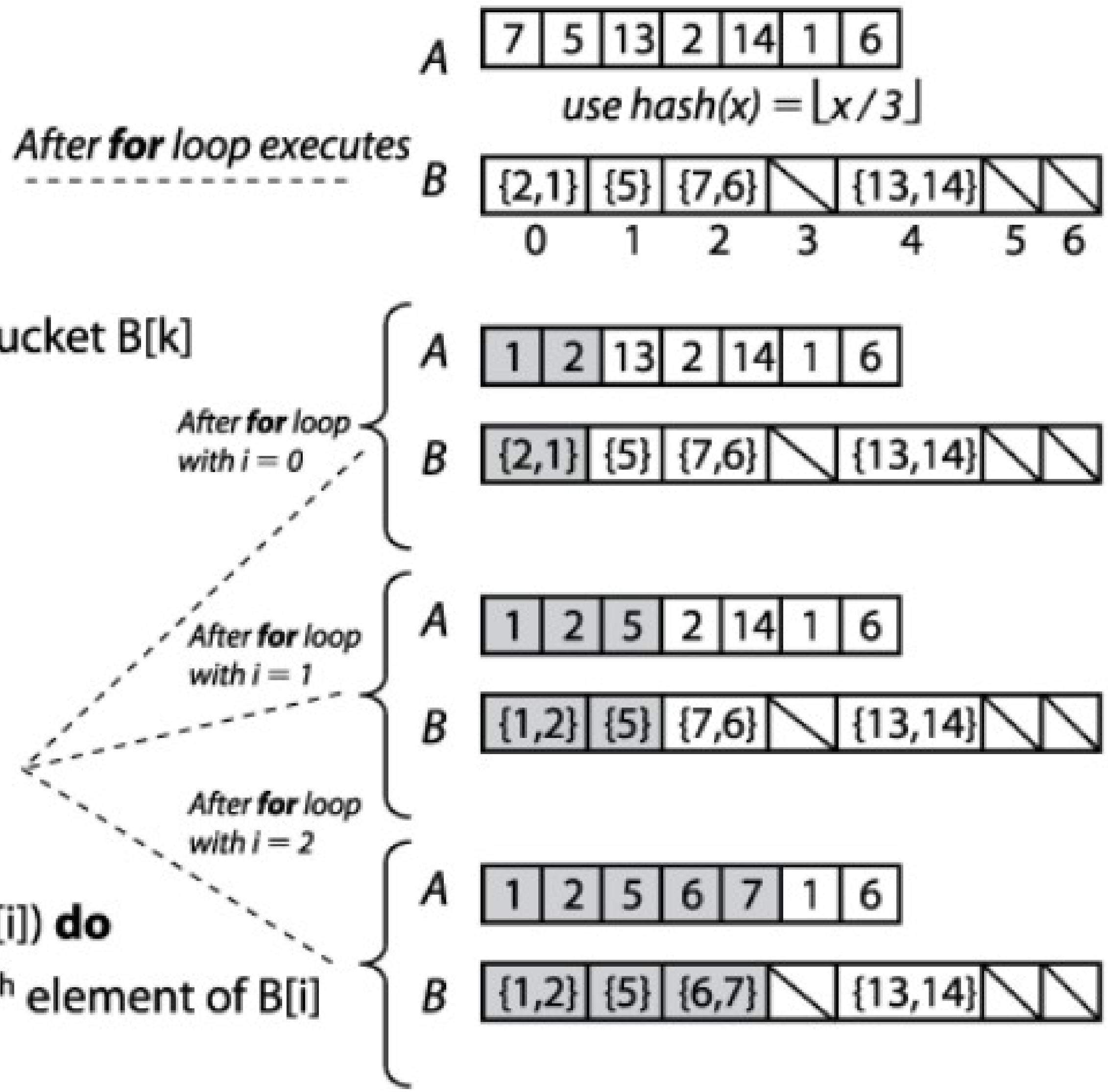
- $n = 2^m$ elementos. Cada elemento es un entero en el rango $[0,2^k)$ donde k >= m distribuido uniformemente.
- Primera fase:
  - Colocamos los elementos en *n* cubetas
  - Cada *j-ésima* cubeta contiene los elementos con los primeros *m* digitos binarios corresponden a j. Si $n = 2^{10}$, la cubeta 3 contiene todos los elementos cuyos primeros 10 digitos binarios son 0000000011.
- Segunda fase:
  - Cada cubeta es ordenada con algún algoritmo de ordenación
  - Concatenar cada cubeta

BucketSort

Ejemplo con hash

```
sort (A)
    create n buckets B
    for i = 0 to n − 1 do
        k = hash(A[i])
        add A[i] to the kth bucket B[k]
    extract (B, A)
end

extract (B, A)
    idx = 0
    for i = 0 to n − 1 do
        insertionSort (B)
        for m = 1 to size(B[i]) do
            A[idx++] = mth element of B[i]
end
```



Ordenación
BucketSort

$$T(n) = \Theta(n) + \sum_{i=0}^{n-1} O(n_i^2)$$

$$E[n_i^2] = 2 - \frac{1}{n} < 2$$

La demostración en CLRS2001 item 8.4

$$T(n) = \Theta(n) + n.O(2 - \frac{1}{n}) = \Theta(n)$$

El algoritmo de bucketSort se *espera* (tiempo promedio) que ordene en tiempo lineal.

Fuentes consultadas

- Mark Allen Weiss. *Estructura de datos en Java. Compatible con Java 2*. Pearson. AW. 2000 (cap. 8 y 20)
- Clifford A. Shaffer. *Data Structures & Algorithm Analysis in Java*. Dover Publications. 2011 (cap. 7)
- T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest y C. Stein. *Introduction to algorithms*. Second edition. MIT Press. 2001. (cap: 6, 7 y 8).
- ECE 250 – Data Structures and Algorithms, Prof. Douglas Wilhelm Header. University of Waterloo