

Aluna Camila Braz Soares

Prova 1 - MatD48 Planejamento de Experimento

① Mostre que

$$E\left[\frac{SQ_{ERRO}}{N-a}\right] = \sigma^2$$

$$E(QME) = E\left(\frac{SQE}{N-a}\right) = \frac{1}{N-a} E(SQE) = \frac{1}{N-a} E(SQ_{Total} - SQ_{Trat}) \quad 2\mu(\tau_i + \epsilon_{ij})$$

$$= \frac{1}{N-a} \left[\underbrace{E(SQ_{Total})}_{(1)} - \underbrace{E(SQ_{Trat})}_{(2)} \right] \quad (\mu + (\tau_i + \epsilon_{ij}))^2$$

$$E(C) = E\left[\frac{(\sum_{i,j} Y_{ij})^2}{N}\right] = \frac{1}{N} E\left[\left(\sum_{i,j} Y_{ij}\right)^2\right] = \frac{1}{N} E\left[\left(\sum_{i,j} (\mu + \tau_i + \epsilon_{ij})\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{N} E\left[\left(N\mu + m\sum_i \tau_i + \sum_{i,j} \epsilon_{ij}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{N} E\left[N^2\mu^2 + 2N\mu m\sum_i \tau_i + 2N\mu \sum_{i,j} \epsilon_{ij} + m^2\tau_i^2 + 2m\tau_i \sum_{i,j} \epsilon_{ij} + \sum_{i,j} \epsilon_{ij}^2\right]$$

$$= \frac{1}{N} \left[N^2\mu^2 + \text{Var}\left(\sum_{i,j} \epsilon_{ij}\right) + E\left(\sum_{i,j} \epsilon_{ij}^2\right)\right]$$

$$= N\mu^2 + \sigma^2$$

$$E(SQ_{Total}) = E\left[\sum_{i,j} Y_{ij}^2 - C\right] = E\left[\sum_{i,j} Y_{ij}^2\right] - E(C)$$

$$= E\left[\sum_{i,j} (\mu + \tau_i + \epsilon_{ij})^2\right] - E(C) =$$

$$E\left[\sum_{i,j} (\mu^2 + 2\mu\tau_i + 2\mu\epsilon_{ij} + \tau_i^2 + 2\tau_i\epsilon_{ij} + \epsilon_{ij}^2)\right] - E(C)$$

$$= E\left[N\mu^2 + 2\mu m\sum_i \tau_i + 2\mu \sum_{i,j} \epsilon_{ij} + m\sum_i \tau_i^2 + 2\sum_i \tau_i \sum_{i,j} \epsilon_{ij} + \sum_{i,j} \epsilon_{ij}^2\right] - E(C)$$

$$= N\mu^2 + m\sum_i \tau_i^2 + N\sigma^2 - N\mu^2 - \sigma^2$$

$$= m\sum_i \tau_i^2 + \sigma^2(N-1)$$

$$\begin{aligned}
E(SQ_{Treat}) &= E\left[\frac{1}{n} \sum_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2 - c\right] = \frac{1}{n} \left\{ E\left[\sum_i (\bar{y}_i (\mu + \tau_i + \epsilon_{ij}))^2\right] - E(c) \right\} \\
&= \frac{1}{n} \left\{ E\left[\sum_i (n^2 \mu^2 + 2n\mu (n\tau_i + \sum_j \epsilon_{ij}) + (n\tau_i + \sum_j \epsilon_{ij})^2) - E(c) \right\} \\
&= \frac{1}{n} \left\{ E\left[\sum_i (n^2 \mu^2 + 2n^2 \mu \tau_i + 2n\mu \sum_j \epsilon_{ij} + n^2 \tau_i^2 + 2n\tau_i \sum_j \epsilon_{ij} + (\sum_j \epsilon_{ij})^2) - E(c) \right\} \\
&= \frac{1}{n} \left\{ a n^2 \mu^2 + 2n^2 \mu \sum_i \tau_i + 2n\mu \sum_{ij} \epsilon_{ij} + n^2 \sum_i \tau_i^2 + 2n \sum_i \tau_i \sum_{ij} \epsilon_{ij} + \sum_i (\sum_j \epsilon_{ij})^2 - E(c) \right\} \\
&= \cancel{N} \mu^2 + n \sum_i \tau_i^2 + a \sigma^2 - (\cancel{N} \mu^2 + \sigma^2) \\
&= n \sum_i \tau_i^2 + \sigma^2(a-1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(QME) &= \frac{1}{N-a} E(SQ_{Res}) = \frac{1}{N-a} [E(SQ_{Total}) - E(SQ_{Treat})] \\
&= \frac{1}{N-a} [(n \sum_i \tau_i^2 + \sigma^2(N-1)) - (n \sum_i \tau_i^2 + \sigma^2(a-1))] \\
&= \frac{1}{N-a} [\sigma^2(N-1) - \sigma^2(a-1)] = \frac{1}{(N-a)} \sigma^2(N-a) = \sigma^2 //
\end{aligned}$$

$$③ N = \sum_{i=1}^a m_i$$

$$\begin{aligned} SQ_{Trat} &= N(\hat{\tau}_1^2 + \dots + \hat{\tau}_a^2) = N \left[\left(\frac{Y_1}{N} - \hat{\mu} \right)^2 + \dots + \left(\frac{Y_a}{N} - \hat{\mu} \right)^2 \right] \\ &= N \left[\left(\frac{Y_1^2}{N^2} - \frac{2Y_1\hat{\mu}}{N} + \hat{\mu}^2 \right) + \dots + \left(\frac{Y_a^2}{N^2} - \frac{2Y_a\hat{\mu}}{N} + \hat{\mu}^2 \right) \right] \\ &= \left(\sum_i Y_i \right)^2 / N - \left(\sum_i \sum_j Y_{ij} \right)^2 / N \\ &= \sum_i Y_i^2 / m_i - \left(\sum_i \sum_j Y_{ij} \right)^2 / N = \sum_i Y_i^2 / m_i - Y_{..}^2 / N // \end{aligned}$$

④

a) H_0 : A resistência da fibra de algodão é igual
($\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \pi_5$)

H_1 : A resistência de pelo menos uma fibra de algodão é diferente. ($\pi_i \neq \pi_j$ para algum $i \neq j$).

b) Erro tipo I: Afirmar que as resistências das fibras de algodão são diferentes quando na verdade são iguais.

Erro tipo II: Afirmar que as resistências das fibras são iguais, quando na verdade são diferentes.

c)

	G.L.	SQ	QM	F
χ_{trat}	4	475,76	118,94	
Res	20	161,20	8,06	14,757
Total	24	636,96		

2,87 24.

$$d) F_{(0,05; 4, 20)} = 2,87$$

Como $F_{calc} = 14,757 > F_{tab} = 2,87$, o engenheiro deverá rejeitar H_0 com 95% de significância.

⑤ $p\text{-valor} = 0,7084618$

Como $p\text{-valor} = 0,71$ é maior que $0,05$, não devemos rejeitar a hipótese nula, portanto, podemos afirmar ao nível de 5% que as variâncias são iguais.

```

d1 = dados %>% filter(`Porcentagemdealgodão(%)`==15)
d2 = dados %>% filter(`Porcentagemdealgodão(%)`==20)
d3 = dados %>% filter(`Porcentagemdealgodão(%)`==25)
d4 = dados %>% filter(`Porcentagemdealgodão(%)`==30)
d5 = dados %>% filter(`Porcentagemdealgodão(%)`==35)

nfact = table(dados$`Porcentagemdealgodão(%)`)
a = length(nfact)
ni = c(nrow(d1),nrow(d2),nrow(d3),nrow(d4),nrow(d5))

mod1 = lm(`Tensão(lb/pulg2)`~factor(`Porcentagemdealgodão(%)`),data=dados)
anov = anova(mod1)
sighat =
c(var(d1$`Tensão(lb/pulg2)`),var(d2$`Tensão(lb/pulg2)`),var(d3$`Tensão(lb/pulg2)`),var(d4$`Te
nsão(lb/pulg2)`),var(d5$`Tensão(lb/pulg2)`))

vi = ni-1
v = sum(vi)

q = v*log(anov$`Mean Sq`[2])-sum(vi*log(sighat))
c = 1+(1/(3*(a-1)))*(sum(1/vi)-1/v)

u = 2.3026*(q/c);u
sttest = qchisq(0.95,a-1);sttest

pvalor = 1-pchisq(u,a-1)
pvalor

```