Planejamento de Experimentos

Regressão Polinomial e Análise de Variância

Vimos que!

Tratamentos

- **qualitativos.** Exemplos: Variedades de milho, clones de eucalípto, raça, etc.
- **quantitativos.** Exemplos: Nível de adubação, época de semeadura, quantidade de água, teor de nutriente no solo, etc.

Regressão Polinomial e Análise de Variância

Exemplo: Ragazzi (1979) utilizou um experimento inteiramente casualizado com quatro repetições para estudar o efeito de 7 doses de gesso: 0, 50, 100, 150, 200, 250 e 300 kg/ha sobre diversas características do feijoeiro. Para a característica peso de 1000 sementes, obteve os resultados apresentados na Tabela.

Tabela: Peso de 1000 sementes de feijão, em g, em função da dose de gesso, em kg/ha

Dose	Peso de 1000 sementes, em g			
0	134,8	139,7	147,6	132,3
50	161,7	157,7	150,3	144,7
100	160,7	172,7	163,4	161,3
150	169,8	168,2	160,7	161,0
200	165,7	160,0	158,2	151,0
250	171,8	157,3	150,4	160,4
300	154,5	160,4	148,8	154,0

Regressão Polinomial e Análise de Variância

Exemplo:

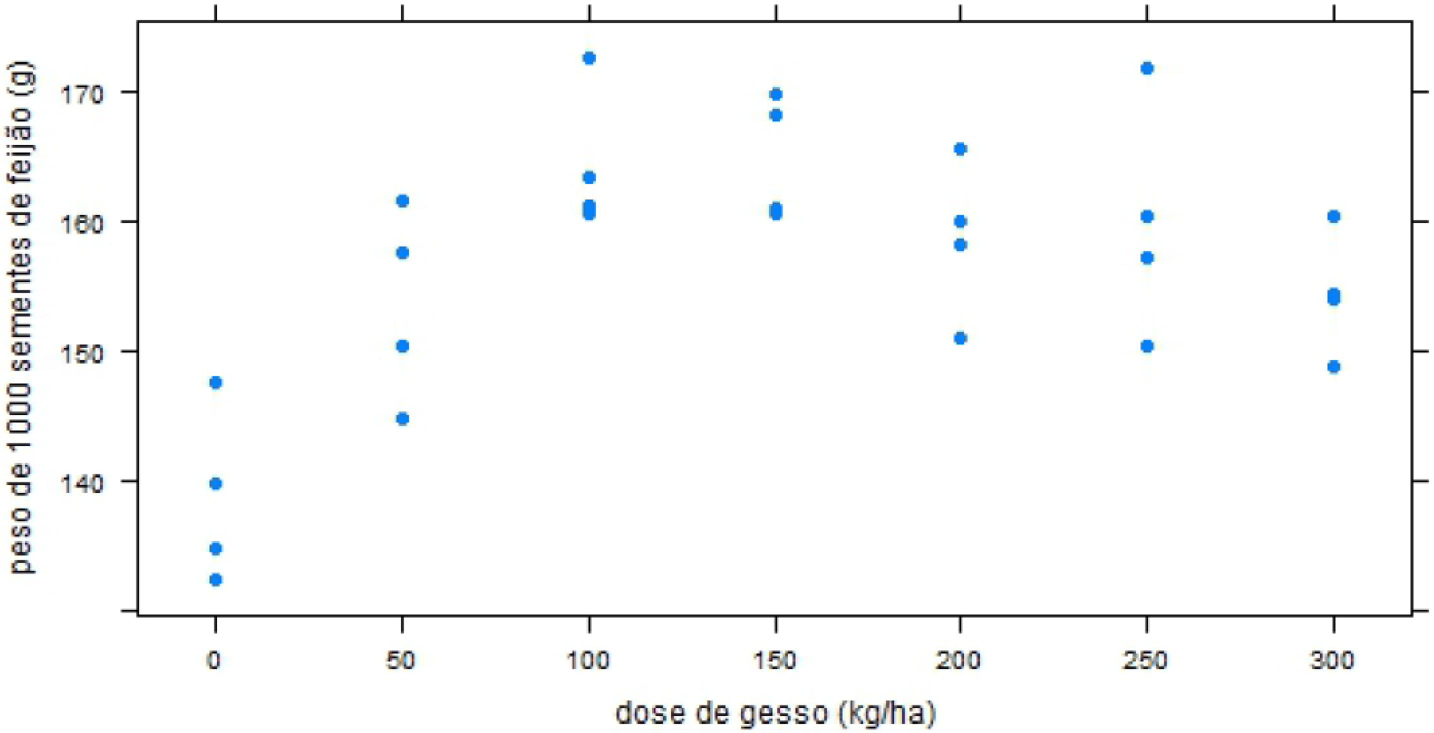


Figura: Peso de 1000 sementes de feijão, em g, em função da dose de gesso, em kg/ha

Regressão Polinomial e Análise de Variância

Exemplo:

$$H_0 : \mu_{D0} = \mu_{D1} = \mu_{D2} = \ldots = \mu_{D6}$$
$$H_1 : \text{pelo menos duas médias diferem entre si.}$$

Tabela: Quadro da análise da variância

Fonte de Variação	gl	SQ	QM	F	Pr>Fc
Doses	6	1941,83	323,64	7,67	0,00018763
Resíduo	21	886,34	42,21		
Total	27	2828,17			

Há efeito de Dose

Regressão Polinomial e Análise de Variância

Relação funcional:

Fatores quantitativos $\Rightarrow$ Relação funcional entre a variável resposta (y) e os níveis desses fatores (x).

Regressão Polinomial e Análise de Variância

Modelo:

$$y = f(x) + \epsilon,$$

em que $f(x)$ é uma função desconhecida.

Objetivos:

- Obter uma função que represente $f(x)$ aproximadamente;
- Obter o nível de x que leva à máxima/mínima resposta;
- ...

Regressão Polinomial e Análise de Variância

Função Polinomial de grau "p":

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots + \beta_p x^p + \epsilon$$

Características:

- Fácil ajuste;
- Interpretação limitada ao intervalo de estudo;

Regressão Polinomial e Análise de Variância

Falta de ajuste:

Mais de uma observação da variável resposta por nível do fator

$$\Downarrow$$

Verificação da **Falta de Ajuste**

Falta de Ajuste = Desvios de Regressão

Regressão Polinomial e Análise de Variância

Polinômio:

Se I é o número de níveis do fator quantitativo

$$\Downarrow$$

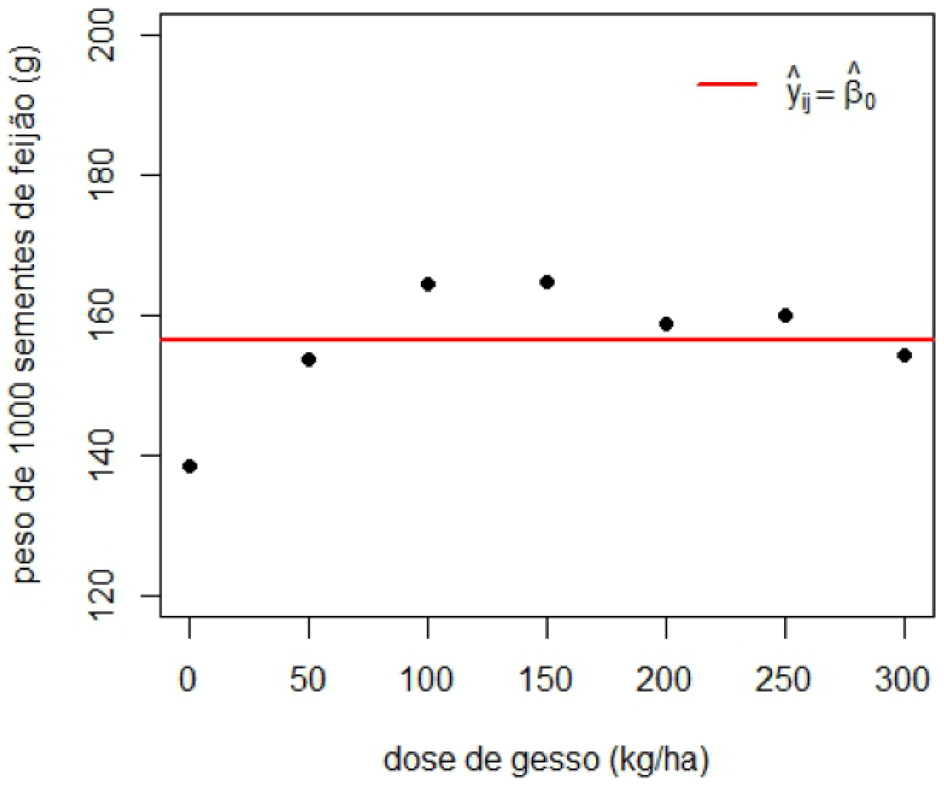
Ajuste de um polinômio de no máximo grau $(I - 1)$

No exemplo

$I = 7$ **doses** de gesso, 0, 50, 100, 150, 200, 250 e 300. Logo podemos ajustar um **polinômio de grau no máximo 6**.

Regressão Polinomial e Análise de Variância

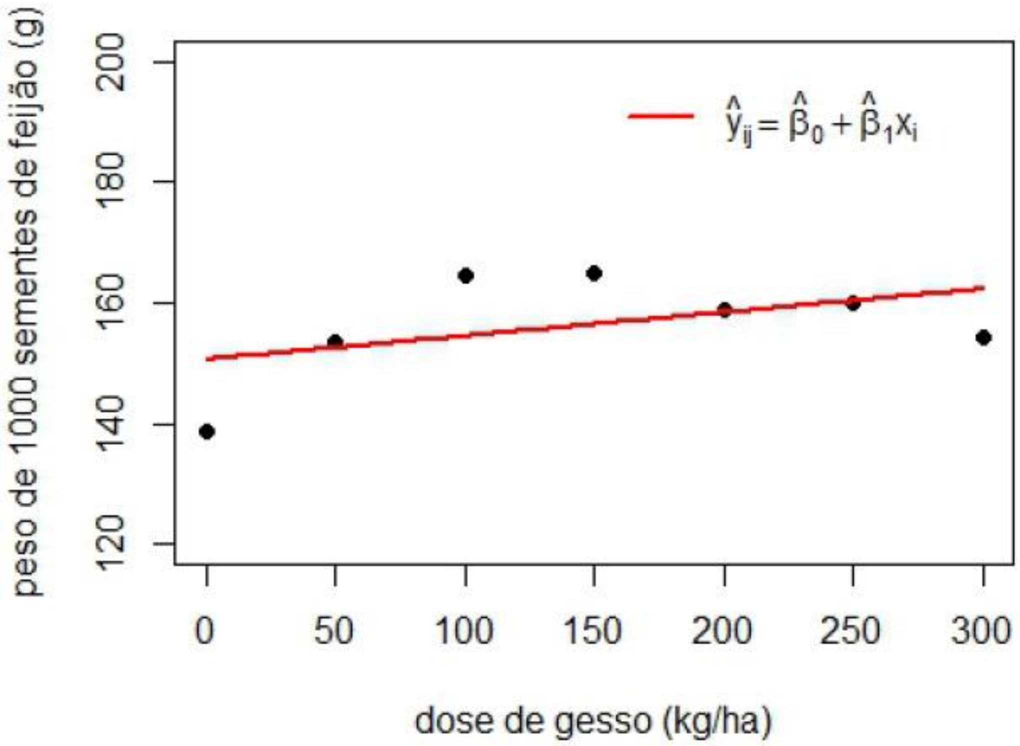
Polinômio: Possíveis ajustes



Não há efeito de dose!

Regressão Polinomial e Análise de Variância

Polinômio: Possíveis ajustes



$$\underbrace{\beta_0 + \beta_1 x}_{\text{modelo ajustado}} + \underbrace{\color{red}{\beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \beta_4 x^4 + \beta_5 x^5 + \beta_6 x^6}}_{\color{red}{\text{termos que podemos adicionar no modelo}}}$$

Regressão Polinomial e Análise de Variância

Polinômio: Possíveis ajustes

$$\underbrace{\beta_0 + \beta_1 x}_{\text{RL}} + \underbrace{\beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \beta_4 x^4 + \beta_5 x^5 + \beta_6 x^6}_{\text{Desvios de Regressão}}$$

Hipóteses:

- Regressão Linear

  $H_0 : \beta_1 = 0 | \beta_0$ está no modelo

  $H_1 : \beta_1 \neq 0 | \beta_0$ está no modelo

- Desvios de Regressão

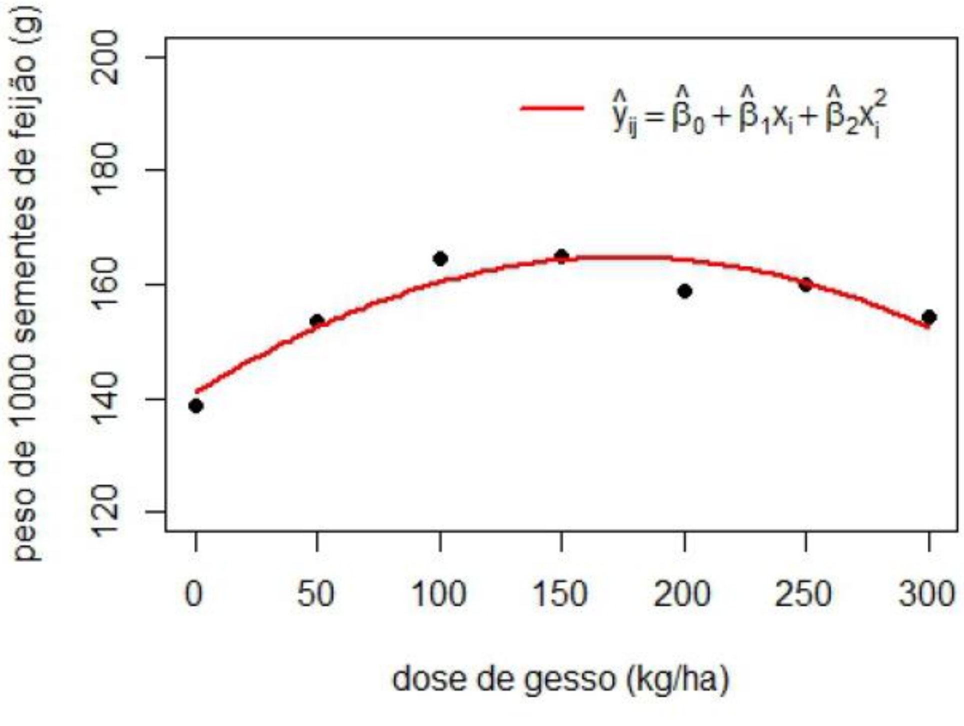
  $H_0 : \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6 = 0 | \beta_0, \beta_1$ estão no modelo

  $H_1 : \beta_k \neq 0 | \beta_0, \beta_1$ estão no modelo, para algum $k = 2, \ldots, 6$

Causas de Variação	gl	
Doses	6	
Regressão Linear		1
Desvios de Regressão		5
Resíduo	21	
Total	27	

Regressão Polinomial e Análise de Variância

Polinômio: Possíveis ajustes



$$\underbrace{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2}_{\text{modelo ajustado}} + \underbrace{\beta_3 x^3 + \beta_4 x^4 + \beta_5 x^5 + \beta_6 x^6}_{\text{termos que podemos adicionar no modelo}}$$

Regressão Polinomial e Análise de Variância

Polinômio: Possíveis ajustes

$$\underbrace{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2}_{\text{modelo quadrático}} + \underbrace{\beta_3 x^3 + \beta_4 x^4 + \beta_5 x^5 + \beta_6 x^6}_{\text{desvios de regressão}}$$

Hipóteses:

- Regressão Quadrática
  $H_0 : \beta_2 = 0 | \beta_0, \beta_1$ estão no modelo
  $H_1 : \beta_2 \neq 0 | \beta_0, \beta_1$ estão no modelo

- Desvios de Regressão
  $H_0 : \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6 = 0 | \beta_0, \beta_1, \beta_2$ estão no modelo
  $H_1 : \beta_k \neq 0 | \beta_0, \beta_1, \beta_2$ estão no modelo, para algum $k = 3, \ldots, 6$

Causas de Variação	gl	
Doses	6	
Regressão Linear		1
Regressão Quadrática		1
Desvios de Regressão		4
Resíduo	21	
Total	27	

Regressão Polinomial e Análise de Variância

Polinômio: Possíveis ajustes

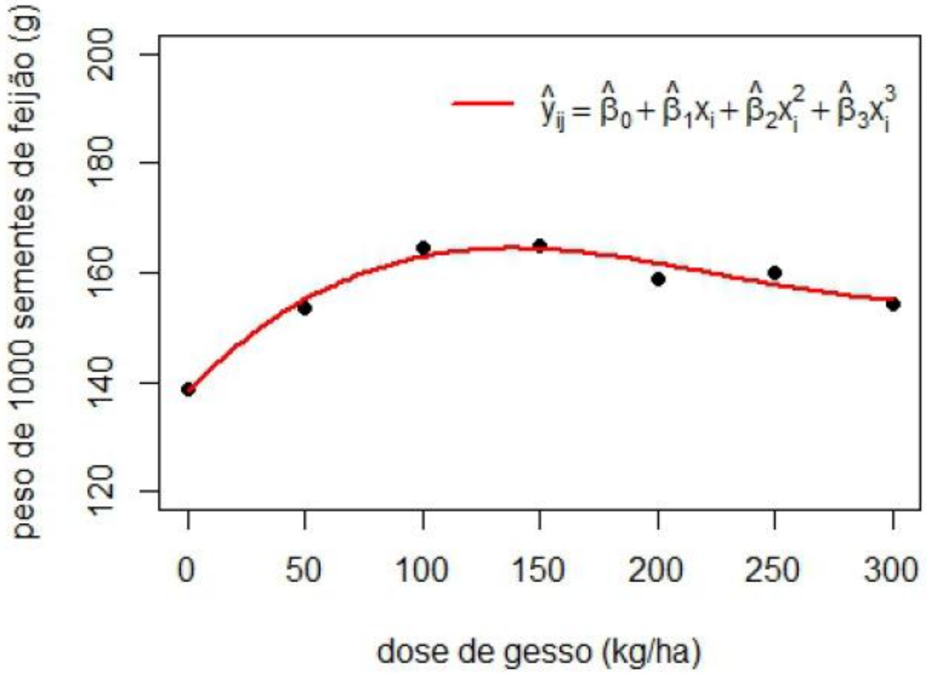
Procedimento...

- Se Desvios de Regressão for **não significativo** $\Rightarrow$ verificar a significância da Regressão Quadrática;

- Se Desvios de Regressão for **significativo** $\Rightarrow$ continuar "procurando" o modelo.

Regressão Polinomial e Análise de Variância

Polinômio: Possíveis ajustes



$$\underbrace{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3}_{\text{ajustado}} + \underbrace{\beta_4 x^4 + \beta_5 x^5 + \beta_6 x^6}_{\text{termos que podemos adicionar no modelo}}$$

Regressão Polinomial e Análise de Variância

Polinômio: Possíveis ajustes

$$\underbrace{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3}_{\text{modelo cúbico}} + \underbrace{\beta_4 x^4 + \beta_5 x^5 + \beta_6 x^6}_{\text{desvios de regressão}}$$

Hipóteses:

- Regressão Cúbica

  $H_0 : \beta_3 = 0 | \beta_0, \beta_1, \beta_2$ estão no modelo

  $H_1 : \beta_3 \neq 0 | \beta_0, \beta_1, \beta_2$ estão no modelo

- Desvios de Regressão

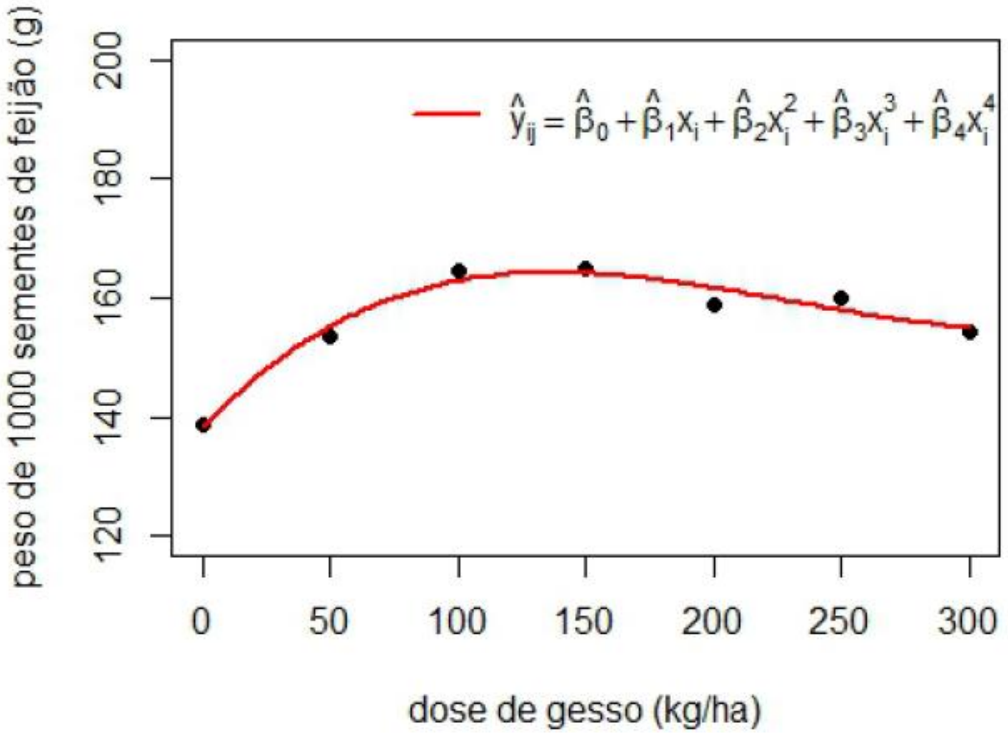
  $H_0 : \beta_4, \beta_5, \beta_6 = 0 | \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ estão no modelo

  $H_1 : \beta_k \neq 0 | \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ estão no modelo, para algum $k = 4, 5, 6$

Causas de Variação	gl	
Doses	6	
Regressão Linear		1
Regressão Quadrática		1
Regressão Cúbica		1
Desvios de Regressão		3
Resíduo	21	
Total	27	

Regressão Polinomial e Análise de Variância

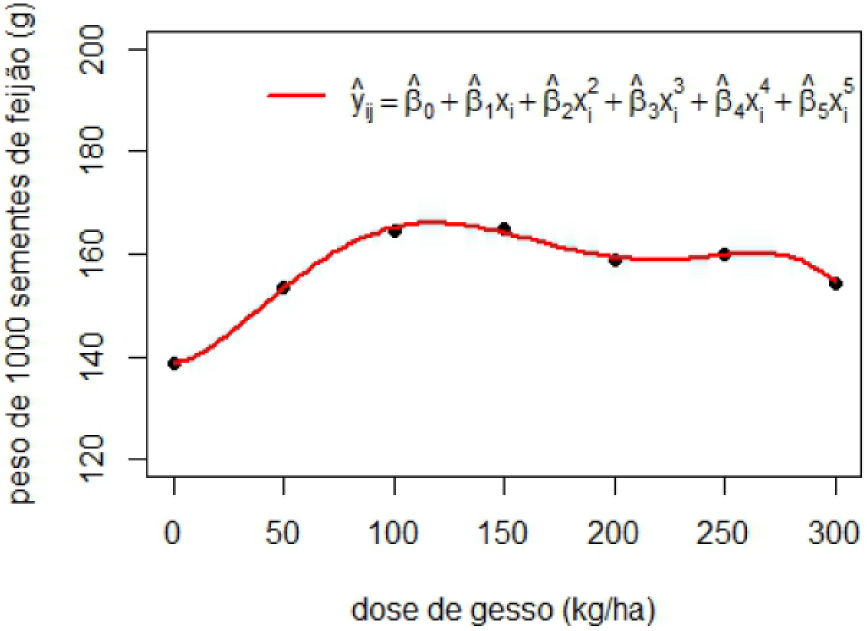
Polinômio: Possíveis ajustes



$$\underbrace{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \beta_4 x^4}_{\text{ajustado}} + \underbrace{\color{red}{\beta_5 x^5 + \beta_6 x^6}}_{\color{red}{\text{podemos adicionar}}}$$

Regressão Polinomial e Análise de Variância

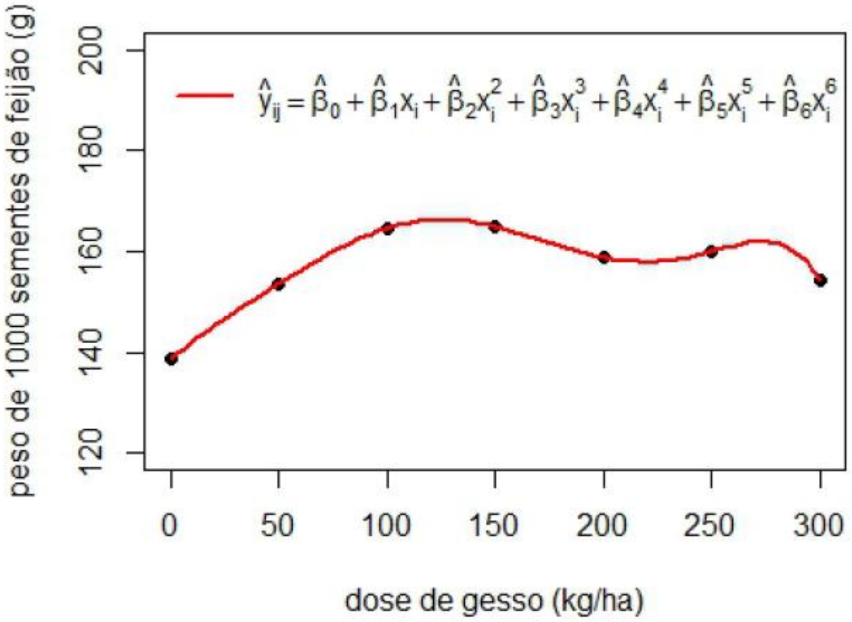
Polinômio: Possíveis ajustes



$$\underbrace{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \beta_4 x^4 + \beta_5 x^5}_{\text{ajustado}} + \underbrace{\color{red}{\beta_6 x^6}}_{\color{red}{\text{podemos adicionar}}}$$

Regressão Polinomial e Análise de Variância

Polinômio: Possíveis ajustes



$$\underbrace{\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \beta_4 x^4 + \beta_5 x^5 + \beta_6 x^6}_{\text{ajustado}}$$

Regressão Polinomial e Análise de Variância

Falta de ajuste: generalizado

Hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \text{Não há falta de ajuste no modelo} \\ H_1 : \text{Há falta de ajuste no modelo} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = 0 | \beta_0 \text{ está no modelo} \\ H_1 : \beta_1 \neq 0 | \beta_0 \text{ está no modelo} \end{cases}$$

Fontes de Variação	gl
Tratamentos	I-1
Regressão linear $(\beta_1 \vert \beta_0)$	1
Falta de Ajuste $(\beta_2, \ldots, \beta_{I-1} \vert \beta_0, \beta_1)$	I-2
Resíduo	I(J-1)
Total	IJ-1

Regressão Polinomial e Análise de Variância

Falta de ajuste: generalizado

Hipóteses:

$$\begin{cases} H_0: \text{Não há falta de ajuste no modelo} \\ H_1: \text{Há falta de ajuste no modelo} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0: \beta_2 = 0 | \beta_0, \beta_1 \text{ estão no modelo} \\ H_1: \beta_2 \neq 0 | \beta_0, \beta_1 \text{ estão no modelo} \end{cases}$$

Fontes de Variação	gl
Tratamentos	I-1
Regressão linear $(\beta_1 \| \beta_0)$	1
Regressão quadrática $(\beta_2 \| \beta_0, \beta_1)$	1
Falta de Ajuste $(\beta_3, \ldots, \beta_{I-1} \| \beta_0, \beta_1, \beta_2)$	I-3
Resíduo	I(J-1)
Total	IJ-1

Regressão Polinomial e Análise de Variância

Falta de ajuste: generalizado

Hipóteses:

$$\begin{cases} H_0 : \text{Não há falta de ajuste no modelo} \\ H_1 : \text{Há falta de ajuste no modelo} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_0 : \beta_3 = 0 | \beta_0, \beta_1, \beta_2 \text{ estão no modelo} \\ H_1 : \beta_3 \neq 0 | \beta_0, \beta_1, \beta_2 \text{ estão no modelo} \end{cases}$$

Fontes de Variação	gl
Tratamentos	I-1
Regressão linear $(\beta_1 \mid \beta_0)$	1
Regressão quadrática $(\beta_2 \mid \beta_0, \beta_1)$	1
Regressão cúbica $(\beta_3 \mid \beta_0, \beta_1, \beta_2)$	1
Falta de Ajuste $(\beta_4, \ldots, \beta_{I-1} \mid \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$	I-4
Resíduo	I(J-1)
Total	IJ-1

Regressão Polinomial e Análise de Variância

Falta de ajuste: generalizado

Observação

Aumentamos progressivamente o grau do polinômio ajustado (p) até que a **falta de ajuste** do modelo seja **não significativa** e que a conclusão do teste da hipótese:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_p = 0 | \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{p-1} \text{ estão no modelo} \\ H_1 : \beta_p \neq 0 | \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{p-1} \text{ estão no modelo} \end{cases}$$

seja pela rejeição de H_0.

Obrigado!

Jalmar M F Carrasco
carrascojalmar@gmail.com