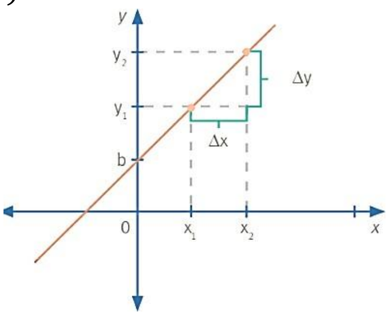
Función afín

A la función polinómica de primer grado $f(x) = mx + b$, siendo m y b números reales, se la denomina ***función afín***.
Los coeficientes principal e independiente de la función reciben el nombre de *pendiente* y *ordenada al origen*, respectivamente.

Ecuación explicita de la recta: $y = mx + b$ Ordenada al origen.
Pendiente

La ***pendiente*** de una recta es el cociente entre la variación de la variable dependiente (Δy) y la variación de la variable independiente (Δx) de cualquier punto de la misma.

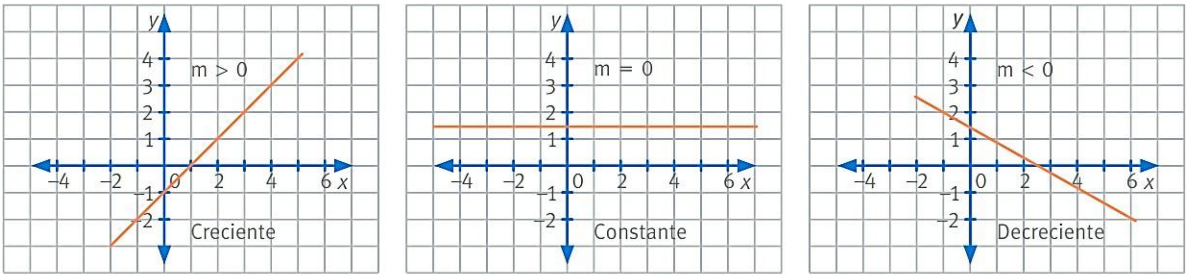


$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La ***ordenada al origen*** es el valor donde la recta corta al eje y.

$$f(0) = b$$

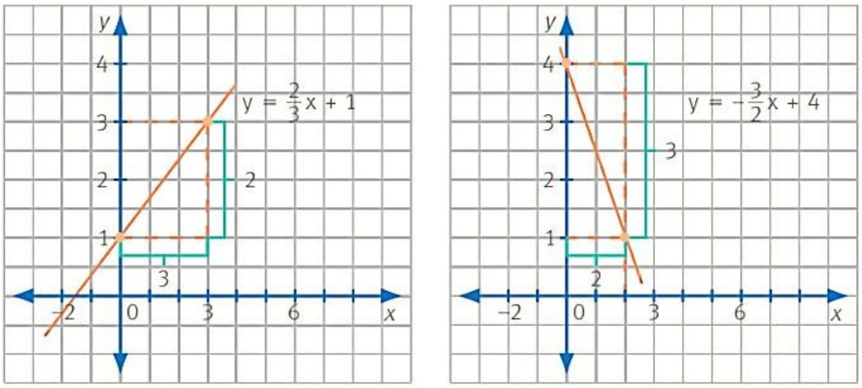
El valor de la pendiente determina que una función afín sea ***creciente***, ***constante*** o ***decreciente***.



A las funciones que pasan por el origen de coordenadas $(0; 0)$, se las denomina ***funciones lineales.***

<u>Representación gráfica de una función lineal dada de forma explícita</u>

Para graficar una función lineal, se debe marcar la ordenada al origen (b) y, a partir de ella, representar un par de valores cuyo cociente sea igual al valor de la pendiente (m).

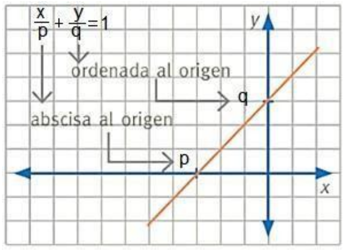


$b = 1 \qquad m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{3}$

$b = 4 \qquad m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{3}{2}$

Ecuación de la recta

Toda ecuación de la forma $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$, representa una recta en ***forma segmentaria***.
Los denominadores p y q representan a la abscisa y a la ordenada al origen, respectivamente.



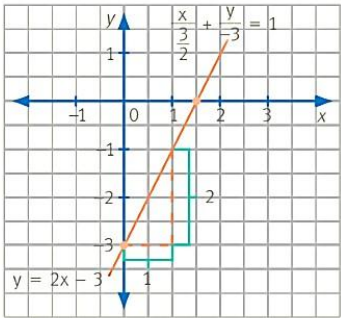
Ejemplo:

Para pasar de la ecuación explícita a la segmentaria, se procede de la siguiente manera.

Dada la recta $y = 2x - 3 \Rightarrow 2x - y = 3$

$$\frac{2x - y}{3} = \frac{3}{3} \Rightarrow \frac{2x}{3} + \frac{y}{-3} = 1 \Rightarrow \frac{x}{\frac{3}{2}} + \frac{y}{-3} = 1$$

Para representar gráficamente una función lineal en forma segmentaria, se determinan sobre los ejes las intersecciones con la recta y luego se traza la misma.



Ecuación de una recta, dadas la pendiente y un punto de la misma

Fórmula para hallar la ecuación de una recta, dada su pendiente (m) y un punto perteneciente a la misma $(x_1; y_1)$.

$$y - y_1 = m.(x - x_1)$$

Ejemplo:

La ecuación explícita de una recta cuya pendiente es 2 y pasa por el punto (1;3).

$y - 3 = 2.(x - 1) \Rightarrow y - 3 = 2x - 2 \Rightarrow y = 2x - 2 + 3 \Rightarrow y = 2x + 1$

Ecuación de una recta dados dos puntos de la misma

Fórmula para hallar la ecuación de una recta, dados dos puntos pertenecientes a ella $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$.

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo:

La ecuación explícita de una recta que pasa por los puntos (2;1) y (5;3) es:

$(\underbrace{2}_{x_1};\underbrace{1}_{y_1})$ y $(\underbrace{5}_{x_2};\underbrace{3}_{y_2})$ $\quad \frac{y-1}{3-1} = \frac{x-2}{5-2} \Rightarrow \frac{y-1}{2} = \frac{x-2}{3} \Rightarrow y - 1 = \left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right) \cdot 2 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} + 1 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

Rectas paralelas

Dos rectas son paralelas si y solo si sus pendientes son ***iguales***.

$$R: y = m_1x + b_1 \text{ A } S: y = m_2x + b_2 \text{ A } R \text{ " } S \text{ - } m_1 = m_2$$

Rectas perpendiculares

Dos rectas son perpendiculares si y solo si sus pendientes son ***inversas y opuestas***.

$R: y = m_1x + b_1$ A $S: y = m_2x + b_2$ A $R \perp S$ – $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$

Función cuadrática

A la función polinómica de segundo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$, siendo a, b y c números reales y a G 0, se la denomina ***función cuadrática***.

Los términos de la función reciben los siguientes nombres: $y = ax^2 + bx + c$ Término Independiente

Término Cuadrático Término Lineal

La representación gráfica de una función cuadrática es una **parábola.**

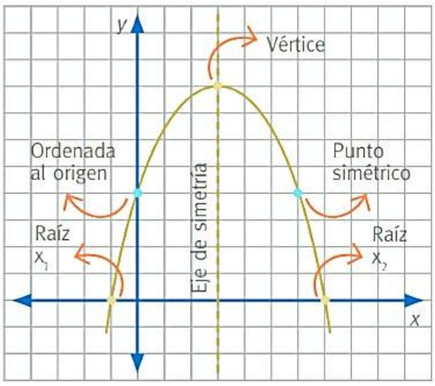
Para realizar el gráfico de una parábola, $f(x) = ax^2 + bx + c$, se deben calcular los elementos de la misma y luego, representarla.

U **Raíces de la parábola**

Son los puntos de intersección de la gráfica y el eje x, vale decir que $f(x) = 0$.

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

U **Vértice de la parábola**



$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad o \quad x_v = -\frac{b}{2a}$$

Las coordenadas del vértice son: $V = (x_v;\ y_v)$.

U **Eje de simetría**

Es la recta que tiene por ecuación $x = x_v$.

U **Ordenada al origen**

Es el punto de intersección de la gráfica con el eje y, vale decir que $f(0) = c$.

U **Punto simétrico a la ordenada al origen con respecto al eje de simetría.**

Ejemplo:

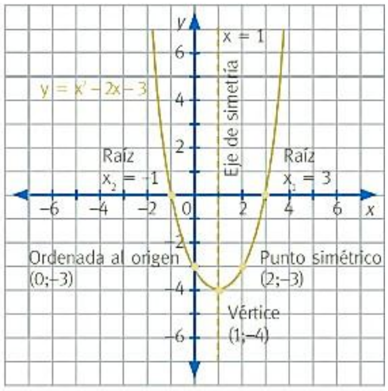
Representen la función f(x) teniendo en cuenta los elementos de la parábola.

$f(x) = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow a = 1 \wedge b = -2 \wedge c = -3$

Raíces:

$$x_1; x_2 = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, (-3)}}{2 \,.\, 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = \frac{2+4}{2} = 3 \qquad x_2 = \frac{2-4}{2} = -1$$



Vértice:

$x_v = \frac{-(-2)}{2 \,.\, 1} \quad x_v = 1$

$y_v = 1^2 - 2 \,.\, 1 - 3 \quad y_v = -4$

$V = (1;-4)$

Eje de simetría: $x = 1$ **Ordenada al origen**: $(0;-3)$ **Punto simétrico**: $(2;-3)$

Las funciones cuadráticas pueden ser expresadas de distintas maneras.

POLINÓMICA
$f(x) = ax^2 + bx + c$

Se desarrolla el cuadrado de un binomio.

Se aplica la propiedad distributiva.

Se busca el vértice.

Se buscan las raíces.

CANÓNICA
$f(x) = a \,.\, (x - x_v)^2 + y_v$

FACTORIZADA
$f(x) = a \,.\, (x - x_1) \,.\, (x - x_2)$

Sistema de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales formado por dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas cada una representa dos rectas en el plano, y resolverlo es hallar la intersección de ambas (conjunto solución).

$$*ax + by = c \ dx + ey = f$$

Los sistemas se clasifican en ***compatibles*** e ***incompatibles***, según tengan o no solución; los sistemas compatibles pueden ser ***determinados*** o ***indeterminados***, según tenga una o infinitas soluciones.

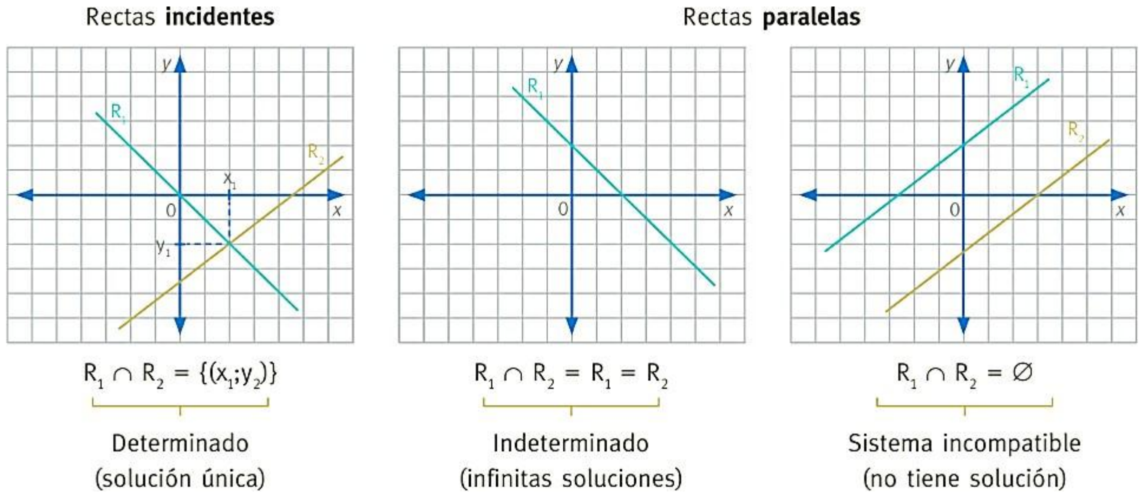
Métodos de resolución

Para resolver un sistema de ecuaciones, existen varios métodos, uno de ellos es el *gráfico* y los demás *analíticos*. Todos ellos permiten obtener el mismo resultado, y la utilización de uno u otro dependerá de cómo está planteado el sistema original.

- **Método gráfico**

Para resolver gráficamente un sistema de ecuaciones, se deben representar ambas rectas en un mismo sistemas de ejes y hallar la intersección de ambas. Dos rectas en un plano pueden ser

incidentes (tienen un punto en común) o ***paralelas*** (no tienen ningún punto en común o son coincidentes).



- **Método de Igualación**

Se debe despejar en ambas ecuaciones la misma incógnita y luego, igualar las ecuaciones obtenidas.

$$\begin{cases} 2x - 2y = \frac{3}{2} & (a) \\ 3x + y = \frac{5}{4} & (b) \end{cases}$$

(a): $-2y = \frac{3}{2} - 2x \Rightarrow y = x - \frac{3}{4}$ (b) $y = \frac{5}{4} - 3x$

1. Se despeja *y* de ambas ecuaciones.

$x - \frac{3}{4} = \frac{5}{4} - 3x \Rightarrow 4x = 2 \Rightarrow \mathbf{x = \frac{1}{2}}$

2. Se igualan ambas ecuaciones y se calcula el valor de *x*.

$2 \cdot \frac{1}{2} - 2y = \frac{3}{2} \Rightarrow -2y = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbf{y = -\frac{1}{4}}$

3. Se reemplaza el valor de *x* obtenido, en cualquiera de las ecuaciones, y se calcula el de *y*.

$S = \left\{\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)\right\}$

4. Se escribe el conjunto solución.

- **Método de sustitución**

Se debe despejar una de las variables en una de las ecuaciones, y luego reemplazarla en la otra ecuación.

$\begin{cases} 2x + 4y = 2 \ (a) \\ 3x - 2y = 9 \ (b) \end{cases} \Rightarrow \quad (a)\ x = 1 - 2y$

1. Se despeja x en la ecuación (a).

$3 \,.\, (1 - 2y) - 2y = 9$

2. Se reemplaza la x por "1 – 2y" en la ecuación (b).

$3 - 6y - 2y = 9 \Rightarrow 3 - 8y = 9 \Rightarrow -8y = 6 \Rightarrow \mathbf{y = -\frac{3}{4}}$

3. Se resuelve, obteniendo el valor de y.

$2x + 4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 2 \Rightarrow 2x - 3 = 2 \Rightarrow \mathbf{x = \frac{5}{2}}$

4. Se reemplaza el valor de y, en cualquiera de las dos ecuaciones, y se calcula el de x.

$S = \left\{\left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{4}\right)\right\}$

5. Se escribe el conjunto solución.

- **Métodos de reducción por sumas y restas**

Se igualan los coeficientes de una de las incógnitas en ambas ecuaciones multiplicando los dos miembros convenientemente, obteniéndose un sistema equivalente al dado, y luego se suman o restan ambas ecuaciones para eliminarla.

$\begin{cases} 5x - 2y = 2 \\ 2x - 4y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (5x - 2y).\,2 = 2.\,2 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$

1. Se igualan los coeficientes de y.

$\begin{cases} 10x - 4y = 4 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases} + \\ \overline{12x \qquad = 12}$

2. Se suman las ecuaciones, miembro a miembro.

$12x = 12 \Rightarrow \mathbf{x = 1}$

3. Luego, se calcula el valor de x.

$2 \,.\, 1 + 4y = 8 \Rightarrow 4y = 6 \Rightarrow \mathbf{y = \frac{3}{2}}$

4. Se reemplaza el valor de x obtenido, en cualquiera de las dos ecuaciones, y se calcula el de y.

$S = \left\{\left(1; \frac{3}{2}\right)\right\}$

5. Se escribe el conjunto solución.

- **Métodos de Cramer**

El valor del determinante de una matriz cuadrada de orden 2 es la diferencia entre el producto de los elementos de la diagonal marcada con verde y los elementos de la diagonal marcada con naranja.

$$A_{2x2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \,.\, a_{22} - a_{21} \,.\, a_{12}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} = 5 \,.\, (-3) - (-7) \,.\, 2 = -15 + 14 = -1$$

La **regla de Cramer** es un método para resolver, mediante el uso de determinantes, sistemas de ecuaciones cuadrados, es decir, que contengan el mismo número de ecuaciones que de incógnitas. El procedimiento se explica para un sistema de 2×2 y de manera análoga se resuelve cualquier sistema cuadrado de $n \times n$.

Para resolver un sistema *$a_1x + b_1y = c_1$ $a_2x + b_2y = c_2$ se deben realizar dos procedimientos.

1. Se hallan los valores de los siguientes determinantes.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Determinante general
Se forma con los coeficientes de las incógnitas.

Determinante en *x*
Se reemplazan en Δ los coeficientes de x por los términos independientes.

Determinante en *y*
Se reemplazan en Δ los coeficientes de y por los términos independientes.

2. Se calculan los valores de las incógnitas.

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \wedge y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

Resuelvan el sistema $\begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ -2x + 6y = 2 \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta = 20$ $\qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_x = 40$ $\qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_y = 20$

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{40}{20} \Rightarrow x = 2$ $\qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{20}{20} \Rightarrow y = 1$ $\qquad S = \{(2;1)\}$

La **clasificación** de un sistema se establece de acuerdo con los valores de los determinantes.

Sistema compatible determinado	Sistema compatible indeterminado	Sistema incompatible
$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0 \wedge \Delta_x = \Delta_y = 0$	$\Delta = 0 \wedge (\Delta_x \neq 0 \vee \Delta_y \neq 0)$

Expresiones Algebraicas Enteras: Polinomios

Una ***expresión algebraica*** es una combinación cualquiera y finita de números, de letras, o de números y letras, ligados entre sí con la adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

$$5x - 3 \qquad 3x^2 + 2x - \frac{1}{7} \qquad x^3 - \sqrt{5x} \qquad \frac{x^6 - 4}{x^2}$$

Los números o parte numérica son los **coeficientes**, y las letras o parte literal, son las **variables**.
Si la variable no está afectada por una raíz o como divisor, las expresiones algebraicas son enteras y se denominan polinomios. De los ejemplos anteriores, los dos últimos no son polinomios.

Clasificación de los polinomios

Según la cantidad de términos, un polinomio se denomina:
- ***monomio:*** un solo término.
- **binomio**: dos términos.

- **trinomio**: tres términos.

Los términos que tienen la misma variable y exponente son ***semejantes*.**

Se denomina ***grado*** al mayor exponente que tiene la variable de los términos con coeficientes no nulos.

$$P(x) = 6x + x^2 - 7x^5; \; grado: 5$$

$$Q(x) = 10 - x^3 + x; \; grado: 3$$

$$T(x) = 7; \; grado: 0$$

Se llama ***coeficiente principal*** al que multiplica a la variable de mayor exponente.

$$S(x) = -x + 2x^4 - 5x^3; \; coeficiente\ principal: 2$$

$$T(x) = -x^6 - 8x + x^4; \; coeficiente\ principal: -1$$

Al polinomio cuyo coeficiente principal es **1**, se lo denomina ***normalizado***.

Un polinomio está ***ordenado*** si sus términos están ordenados en forma creciente o decreciente respecto de los exponentes de la variable.

$$F(x) = 2x^4 + x^3 - \frac{2}{5}x^2 - \frac{1}{3}x + 5$$

$$G(x) = 7 + x + 3x^2 - \frac{3}{2}x^3$$

$$H(x) = x^5 + 2x^2 - 7$$

Un polinomio está ***completo*** si tiene todas las potencias decrecientes del grado.

$$R(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - 8x + 7; \; está\ completo.$$

$$Q(x) = x^4 - \frac{2}{5}x^2 + 9; \; está\ incompleto.$$

Para completar un polinomio, se agregan los términos que faltan con coeficiente cero.

$$N(x) = 8x^4 + 3x^2 = 8x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x + 0$$

$$O(x) = x^5 - 9 = x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 9$$

Método 1 para sumar polinomios

Pasos:

- Ordenar los polinomios del término de mayor grado al de menor.

- Agrupar los monomios del mismo grado.
- Sumar los monomios semejantes.

Ejemplo del primer método para sumar polinomios

Sumar los polinomios

$$\mathrm{P(x)} = 2\mathrm{x}^3 + 5x - 3, \qquad Q(x) = 4x - 3x^2 + 2x^3$$

Ordenamos los polinomios, si no lo están.

$$\mathrm{P(x)} = 2\mathrm{x}^3 + 5x - 3\,\mathrm{Q(x)} = 2\mathrm{x}^3 - 3x^2 + 4x$$

Agrupamos los monomios del mismo grado.

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (2x^3 + 5x - 3) + (2x^3 - 3x^2 + 4x) \\ &= (2x^3 + 2x^3) + (-3x^2) + (5x + 4x) + (-3) \end{aligned}$$

Sumamos los monomios semejantes.

$$\mathrm{P(x)} + \mathrm{Q(x)} = 4\mathrm{x}^3 - 3x^2 + 9x - 3$$

Método 2 para sumar polinomios

También podemos sumar polinomios escribiendo uno debajo del otro, de forma que los monomios semejantes queden en columnas y se puedan sumar.

Ejemplo del segundo método para sumar polinomios

$$\mathrm{P(x)} = 7\mathrm{x}^4 + 4x^2 + 7x + 2, \qquad Q(x) = 6x^3 + 8x + 3$$

Acomodar en columnas a los términos de mayor a menor grado, y sumar.
Así, se obtiene:

$$\mathrm{P(x)} + \mathrm{Q(x)} = 7\mathrm{x}^4 + 6x^3 + 4x^2 + 15x + 5$$

Resta de polinomios

La resta de polinomios consiste en sumar al minuendo el opuesto del sustraendo.

Ejemplo de resta de polinomios

Restar los polinomios

$$\mathrm{P(x)} = 2\mathrm{x}^3 + 5x - 3, \qquad Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$$

$$\mathrm{P(x)} - \mathrm{Q(x)} = (2\mathrm{x}^3 + 5x - 3) - (2x^3 - 3x^2 + 4x)$$

Obtenemos el opuesto al sustraendo de $\mathrm{Q(x)}$.

$$\mathrm{P(x)} - \mathrm{Q(x)} = 2\mathrm{x}^3 + 5x - 3 - 2x^3 + 3x^2 - 4x$$

Agrupamos.

$$\mathrm{P(x)} - \mathrm{Q(x)} = 2\mathrm{x}^3 - 2x^3 + 3x^2 + 5x - 4x - 3$$

Resultado de la resta.

$$\mathrm{P(x)} - \mathrm{Q(x)} = 3\mathrm{x}^2 + x - 3$$

Multiplicación de polinomios

1. Multiplicación de un número por un polinomio

La multiplicación de un número por un polinomio es otro polinomio. El polinomio que se obtiene tiene el mismo grado del polinomio inicial. Los coeficientes del polinomio que resulta, son el producto de los coeficientes del polinomio inicial, por el número y dejando las mismas partes literales.

Ejemplos:

$$3 \cdot(2x^3 - 3x^2 + 4x - 2) = 6x^3 - 9x^2 + 12x - 6$$

$$2 \cdot(3x^3 + 4x^2 + 2x - 1) = 6x^3 + 8x^2 + 4x - 2$$

2. Multiplicación de un monomio por un polinomio

En la multiplicación de un monomio por un polinomio se multiplica el monomio por todos y cada uno de los monomios que forman el polinomio.

Recordar que primero debemos multiplicar signos, posteriormente multiplicar los monomios correspondientes, para lo cual, se debe multiplicar los coeficientes, y luego, realizar la multiplicación de la parte literal, en donde, al multiplicar variables iguales los exponentes se sumarán.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 3x^2 \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x - 2) &= (3x^2 \cdot 2x^3) - (3x^2 \cdot 3x^2) + (3x^2 \cdot 4x) - (3x^2 \cdot 2) \\ &= 6x^5 - 9x^4 + 12x^3 - 6x^2 \end{aligned}$$

3. Multiplicación de polinomios

Este tipo de operaciones se puede llevar a cabo de dos formas distintas.

Método 1 para multiplicar polinomios

Pasos:

1) Se multiplica cada monomio del primer polinomio por todos los elementos del segundo polinomio.
2) Se suman los monomios del mismo grado, obteniendo otro polinomio cuyo grado es la suma de los grados de los polinomios que se multiplican.

Ejemplo:

Multiplicar los siguientes polinomios

$$\mathrm{P(x)} = 2\mathrm{x}^2 - 3, \qquad Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$$

1) Se multiplica cada monomio del primer polinomio por todos los elementos del segundo polinomio.

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= (2x^2 - 3) \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x) \\ &= 4x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 6x^3 + 9x^2 - 12x \end{aligned}$$

2) Se suman los monomios del mismo grado.

$$\begin{aligned} P(x) \cdot Q(x) &= 4x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 6x^3 + 9x^2 - 12x \\ &= 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x \end{aligned}$$

3) Se obtiene otro polinomio cuyo grado es la suma de los grados de los polinomios que se multiplican.

$$\text{Grado del polinomio} = \text{Grado de } \ \mathrm{P(x)} + \text{Grado de } \ \mathrm{Q(x)} = 2 + 3 = 5$$

$$\mathrm{P(x)} \ \cdot Q(x) = 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x$$

Método 2 para multiplicar polinomios

También podemos multiplicar polinomios escribiendo un polinomio debajo del otro. En cada fila se multiplica cada uno de los monomios del segundo polinomio por todos los monomios del primer polinomio. Se colocan los monomios semejantes en la misma columna y posteriormente se suman los monomios semejantes.

Ejemplo:

Multiplicar los siguientes polinomios

$\mathrm{P(x)} = 2\mathrm{x}^2 - 3, \qquad Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$

Como la multiplicación de polinomios cumple la propiedad conmutativa, hemos tomado como polinomio multiplicador el polinomio más sencillo.

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + 4x \\ \times quad 2x^2 - 3 \\ \hline -6x^3 + 9x^2 - 12x \\ 4x^5 - 6x^4 + 8x^3 \qquad\qquad\quad \\ \hline 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x \end{array}$$

División de polinomios

Abordaremos la explicación con un ejemplo.

Ejemplo:

Resolver la división de los polinomios

$\mathrm{P(x)} = \mathrm{x}^5 + 2x^3 - x - 8, \qquad Q(x) = \ x^2 - 2x + 1$

P(x) : Q(x)

1) A la izquierda situamos el dividendo. Si el polinomio no es completo dejamos huecos en los lugares que correspondan.

$$x^5 \qquad + 2x^3 \qquad - x - 8 \qquad \underline{|\ x^2 - 2x + 1}$$

2) A la derecha situamos el divisor dentro de una caja.
3) Dividimos el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor.

$$[\ x^5 : x^2 = x^3$$

4) Multiplicamos cada término del polinomio divisor por el resultado anterior y lo restamos del polinomio dividendo:

$$\begin{array}{llll} x^5 & +2x^3 & -x-8 & \underline{|\ x^2-2x+1} \\ \underline{-x^5+2x^4-x^3} & & & x^3 \\ \quad 2x^4 + & x^3 & -x-8 & \end{array}$$

5) Volvemos a dividir el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor. Y el resultado lo multiplicamos por el divisor y lo restamos al dividendo.

obteniendo

$$2x^4 : x^2 = 2x^2$$

$$\begin{array}{llll} x^5 & +2x^3 & -x-8 & \underline{|\ x^2-2x+1} \\ \underline{-x^5+2x^4-x^3} & & & x^3+2x^2 \\ \quad 2x^4 + & x^3 & -x-8 & \\ \underline{-2x^4+4x^3-2x^2} & & & \\ \quad 5x^3 - 2x^2 - x - 8 & & & \end{array}$$

6) Procedemos igual que antes. Y esta vez

$$5x^3 : x^2 = 5x$$

entonces

$$
\begin{array}{llll|l}
x^5 & +2x^3 & & -x-8 & x^2-2x+1 \\
\cline{5-5}
\underline{-x^5+2x^4-x^3} & & & & x^3+2x^2+5x \\
\quad 2x^4+\ x^3 & & & -x-8 & \\
\quad \underline{-2x^4+4x^3-2x^2} & & & & \\
\qquad 5x^3-2\ x^2-\ x-8 & & & & \\
\qquad \underline{-5x^3+10x^2-5x} & & & & \\
\qquad\qquad 8x^2-6\ x-8 & & & &
\end{array}
$$

7) Como en los pasos anteriores, dividimos $8x^2$ por x^2, y obtenemos 8. Multiplicamos por 8 cada término del divisor y obtenemos:

$$8x^2-16x+8$$

Procedemos con la resta:

$$(8x^2-6x-8)-(8x^2-16x+8) = 8x^2-6x-8-8x^2+16x-8 = 10x-16$$

Concluimos que 10x − 16 es el resto, porque su grado es menor que el del divisor y por tanto no se puede continuar dividiendo. Y el cociente es $x^3+2x^2\ +5x+8$

Regla de Ruffini

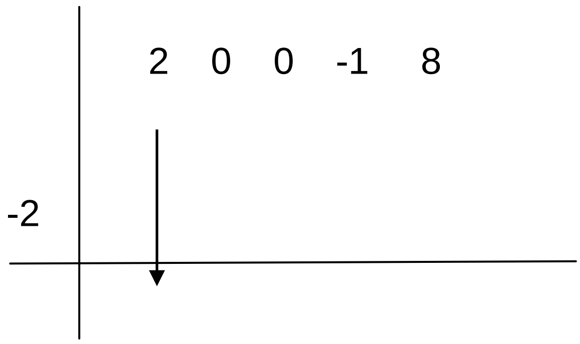
Cuando el divisor es un polinomio de la forma x - α, siendo α un número real, se simplifica el proceso utilizando la regla de Ruffini. Se muestra el proceso con el ejemplo anterior P(x) = 2x4– x + 8 y Q(x) = x + 2

Primero escribimos en una fila los coeficientes del dividendo completo y ordenado, según las potencias decrecientes de la variable:

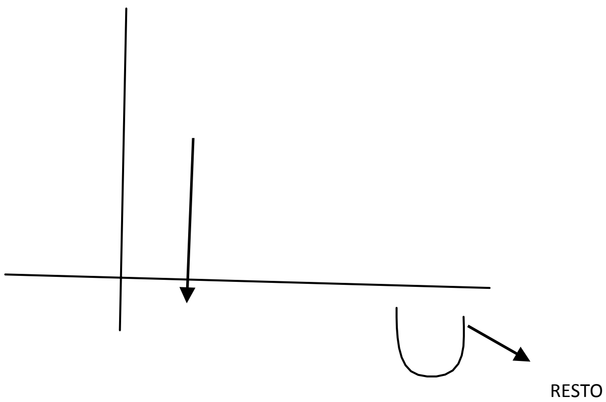
2 0 0 -1 8

Luego se traza una cruz como indica la figura, y en el ángulo izquierdo se escribe el opuesto del término independiente del divisor

En la tercer fila se obtienen los coeficientes del cociente, el primero de los cuáles es el primero del dividendo:



Los restantes coeficientes del cociente se obtienen multiplicando el resultado anterior obtenido por el número que figura en el ángulo izquierdo (que actúa como “pivote”) y se lo coloca en la segunda fila en la columna correspondiente. Luego se suma este producto al correspondiente coeficiente de la primera fila (ubicado en la misma columna). El último número así obtenido es el resto.



Como se puede observar, como en estos casos el divisor es de grado uno, el grado del cociente es una unidad menor que el grado del dividendo. El grado del resto, es cero, por tratarse de una constante. Así nos queda $C(x) = 2x^3 – 4 x^2 + 8x – 17$ y Resto = 42

Teorema del Resto

Hipótesis: Sea el polinomio P(x) y otro polinomio Q(x) de la forma $Q(x) = (x + \alpha)$

Tesis: El resto de la división entre P(x) y Q(x) es igual al valor numérico del polinomio P(x) valorizado en $- \alpha$ es decir $P(-\alpha)$, siendo α un número real.

Demostración: Sabemos que si C(x) es el cociente de la división de P(x) por Q(x), entonces:

$P(x) = C(x) . Q(x) + R(x)$, pero $Q(x) = (x + \alpha)$

reemplazando: $P(x) = C(x) . (x + \alpha) + R(x)$,

Pero para $x = - \alpha$, se tiene: $P(-\alpha) = C(-\alpha) . (-\alpha + \alpha) + R(-\alpha) = 0$

es decir : $P(-\alpha) = R(-\alpha)$

Ejemplo: $P(x) = x^2 – 2x + 1$ $\quad Q(x) = x – 1$

$P(1) = 1^2 – 2 (1) + 1 = 0 \Rightarrow$ resto de la división es 0

Factorización de polinomios

Factorizar un polinomio significa expresar al polinomio como el producto de dos o varios monomios, binomios, trinomios, etc.

Existen seis maneras básicas de factorizar un polinomio:

1° caso: Factor común

Es cuando observamos que todos los monomios tienen algo en común. Puede ser una letra o un número o ambas.

Por ejemplo: $2x^3 + 4x^2 + 6x$

Vemos en todos los términos que está la x y el número 2 como divisor común, es decir, está contenido en los tres números. Tomamos también la letra de menor exponente, ya que debe estar contenida en todos los términos. Por lo tanto, sacamos como factor común al 2 y a la x.

$$2x \,.\, (x^2 + 2x + 3)$$

Los términos que quedan dentro del paréntesis resultan de dividir a cada término del polinomio inicial por 2 x. Los resultados quedan dentro del paréntesis. Para aplicar factor común, todos deben tener algo en común. De lo contrario no se aplicará este caso.

2° caso: Factor común en grupos

En estos casos el polinomio debe tener un número par de términos como 4 o 6. Ya que al formar grupos, cada grupo deberá tener la misma cantidad de términos.

Por ejemplo: $x^3 + 3x^2 + 2x + 6$

Vemos que no hay ningún factor común en los 4 términos.

Entonces podemos separar a estos en dos grupos de dos términos. Los dos primeros por un lado y los otros dos por otro. Debemos aclarar que no siempre se toman los términos vecinos. En otros casos se tomarán en otro orden, el que más nos convenga.

$$(x^3 + 3x^2) + (2x + 6)$$

Ahora sacaremos un factor común para cada grupo por separado.

$$x^2 \,.\, (x + 3) + 2 \,.\, (x + 3)$$

Observamos que ambos términos tienen algo en común que es (x+3). Por lo tanto lo sacaremos como factor común de toda la expresión. Ya que esto no es un producto, aún es una suma. Quedando:

$$(x + 3) \,.\, (x^2 + 2)$$

Esta es la expresión final del factoreado ya que lo hemos transformado en un producto.

<u>3° caso: Trinomio Cuadrado Perfecto</u>

Responde al siguiente modelo.

$$a^2 + 2 . a . b + b^2$$

La forma factorizada es

$$(a + b)^2$$

Son tres términos. Dos de ellos deben ser cuadrados perfectos y debemos reconocerlos.

Ejemplo: $x^2 + 12 x + 36$

El primer y tercer término son cuadrados perfectos. Ya que de x^2 la base es x y de 36 la base es 6 (un número perfecto). Sin embargo para que sea un trinomio cuadrado perfecto se debe cumplir otra condición más. El doble del producto de las bases debe dar como resultado el término restante, en este caso, 12 x. $2 . x . 6 = 12 x$ Como vemos coincide perfectamente.

Ahora si aseguramos que el trinomio es un cuadrado perfecto.

Su forma factorizada es: $(x + 6)^2$

Es bueno aclarar esto. Ya que hay muchos trinomios que no son perfectos, como por ejemplo si hubiéramos tenido $x^2 + 16 x + 36$ en lugar del trinomio que teníamos antes. $2 . x . 6$ no será igual a 16 x.

<u>4° caso: Cuatrinomio cubo perfecto</u>

Es similar al anterior, nada más que es más largo ya que se trata de 4 términos y no de 3.

Su modelo es:

$$a^3 + 3 . a^2.b + 3 . a.b^2 + b^3$$

Su forma factorizada es:

$$(a + b)^3$$

Debemos identificar dos cubos perfectos y que las bases de estos coincidan con los dos triples que aparecen en la fórmula.

Ej: $x^3 + 6 x^2 + 12 x + 8$ El 8 es 2^3, su base es entonces 2. La otra es obviamente x.

Ya tenemos a los dos cubos. Ahora hay que ver si coinciden los dos triplos. $3 . x^2. 2 = 6 x^2$ $3 . x . 2^2 = 12 x$ Ambos resultados estan en el cuatrinomio que tenemos de ejemplo. Por lo tanto aseguramos que es un cubo perfecto. La forma final factorizada es: $(x + 2)^3$

5° caso: Diferencia de Cuadrados

Son binomios donde aparece una resta de dos términos al cuadrado.

Su forma y la forma factorizada son las siguientes.

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$$

Ejemplo: $x^2 - 25$

El 25 es 5^2

entonces ponemos:

$x^2 - 5^2 = (x - 5) \cdot (x + 5)$

Otro ejemplo que a veces trae complicaciones: $4x^2 - 36$ Aquí al 4 lo debemos tener en cuenta a la hora de expresar la base. El $4x^2$ quedará como $(2x)^2$. $(2x)^2 - 6^2 = (2x - 6) \cdot (2x + 6)$

6° caso: Suma o Resta de potencias de igual exponente

Para factorizar un polinomio por este método, dicho polinomio debe constar de dos términos sumados o restados, elevados a la misma potencia.

Por lo tanto el polinomio debe ser de la forma $P(x) = x^k \pm b^k$

Lo que vamos hacer para factorizar un polinomio de estos, es dividirlo usando el Método de Ruffini. Ahora la pregunta es ¿por qué binomio lo dividimos?

Vamos a ver el siguiente esquema:

- Cuando k es un número impar :
  - Si el signo es un menos dividimos el polinomio por x-b
  - Si el signo es un mas dividimos el polinomio por x+b
- Cuando k es un número par:
  - Si el signo es un menos podemos dividir el polinomio por x-b o por x+b
  - Si el signo es un más no podemos dividir el polinomio por nada.

Ejemplos:

$P(x) = x^5 + 2^5$ en este caso podemos dividir por (x + 2)

$Q(x) = x^3 - y^3$ podemos dividir por (x - y)

23 Representación gráfica de funciones racionales

INFO ACTIVADOS

Para **representar una función racional**, se deben seguir estos pasos:

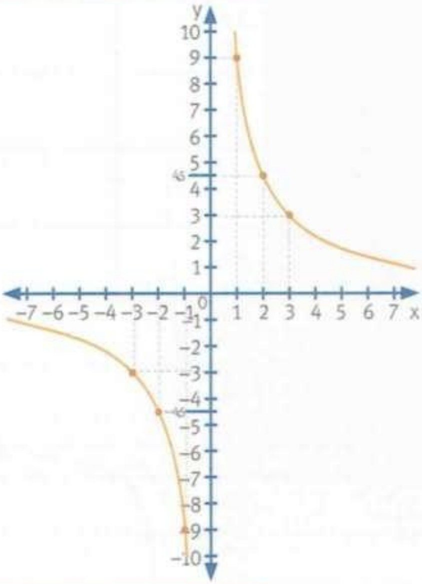
1. Se determinan los conjuntos dominio e imagen.
2. Se hallan las ecuaciones de las asíntotas.
3. Se hallan distintos puntos de la función, entre ellos los puntos de intersección con los ejes.

En el caso de la función de proporcionalidad inversa, las asíntotas siempre son $x = 0 \wedge y = 0$; por lo tanto no hay intersección con los ejes.

Representen la función $f(x) = \frac{9}{x}$.

1. $D_f = \mathbb{R} - \{0\} \wedge I_m = \mathbb{R} - \{0\}$
2. Asíntota vertical: $x = 0$; asíntota horizontal: $y = 0$
3. Se hallan distintos puntos de la función.

x	f(x)
−3	−3
−2	−4,5
−1	−9
1	9
2	4,5
3	3



En el caso de esta función, la asíntota horizontal siempre es $y = 0$; por lo tanto, no hay intersección con el eje **x**.

Representen la función $f(x) = \frac{3}{2x+1}$.

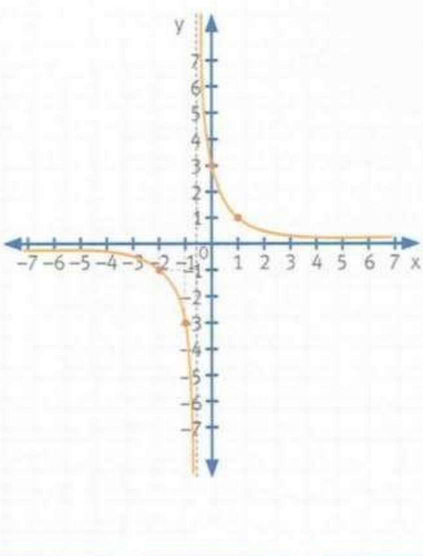
1. $2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

$y = \frac{3}{2x+1} \Rightarrow 2x + 1 = \frac{3}{y} \Rightarrow x = \left(\frac{3}{y} - 1\right) \cdot \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{3}{2y} - \frac{1}{2} \rightarrow C_f = \mathbb{R} - \{0\}$

2. Asíntota vertical: $x = -\frac{1}{2}$; asíntota horizontal: $y = 0$.
3. Se hallan distintos puntos de la función y se representa gráficamente.

x	−2	−1	0	1	2
f(x)	−1	−3	3	1	$\frac{3}{5}$



Nombre: ______________________ curso: ______ fecha: ______

24 Función homográfica

INFO ACTIVADOS

Una función de la forma $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$, siendo *a*, *b*, *c* y *d* números reales $\wedge$ $c \neq 0$, es una **función homográfica**.

Dominio de una función homográfica

El denominador de la función debe ser distinto de cero: $cx + d \neq 0 \Rightarrow x \neq -\frac{d}{c}$

Por lo tanto: $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$

La recta de ecuación $x = -\frac{d}{c}$ es **asíntota vertical** (A. V.) de la función.

Imagen de una función homográfica

$I_m = \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$

La recta de ecuación $y = \frac{a}{c}$ es **asíntota horizontal** (A. H.) de la función.

Representación gráfica

Para representar una función homográfica de la forma $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$, se debe:

1. Determinar los conjuntos dominio e imagen.
2. Encontrar las ecuaciones de las asíntotas.
3. Determinar el punto de intersección con el eje *y*: $x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{b}{d}$
4. Encontrar el punto de intersección con el eje *x*: $\frac{ax + b}{cx + d} = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$

$f(x) = \frac{2x + 1}{x - 3} \Rightarrow a = 2; b = 1; c = 1; d = -3$

1. $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{-3}{1}\right\} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{3\} \wedge I_m = \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{1}\right\} \Rightarrow I_m = \mathbb{R} - \{2\}$

2. A. V.: $x = 3 \wedge$ A. H.: $y = 2$

3. $f(0) = \frac{1}{-3} \Rightarrow f(0) = -\frac{1}{3} \rightarrow \left(0; -\frac{1}{3}\right)$ es punto de intersección con el eje y.

4. $\frac{2x + 1}{x - 3} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \rightarrow \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ es punto de intersección con el eje x.

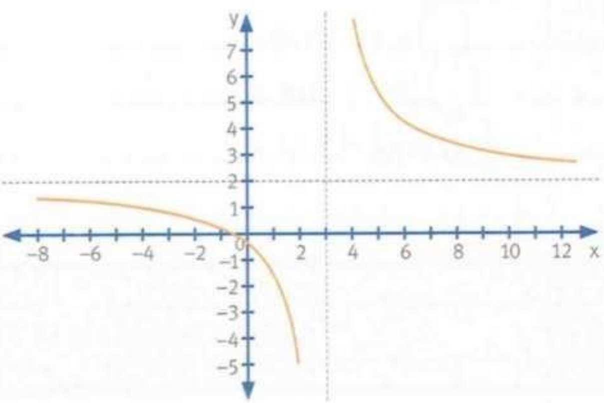
TIC

1. Ingresen en rebrand.ly/FcHomografica* para observar las características de la representación de las funciones homográficas.

*Enlace acortado de https://www.geogebra.org/m/B73C46d4.

Para realizar una gráfica más aproximada, se pueden calcular otros puntos de la función.

x	f(x)
−2	$\frac{3}{5}$
−1	$\frac{1}{4}$
0	$-\frac{1}{3}$
1	$-\frac{3}{2}$
2	−5



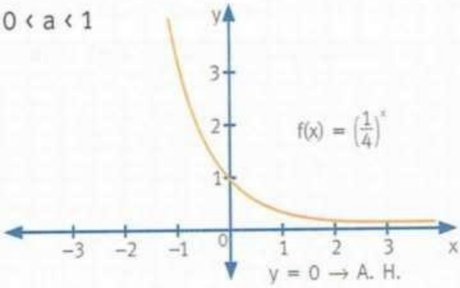
25 Función exponencial

INFO ACTIVADOS

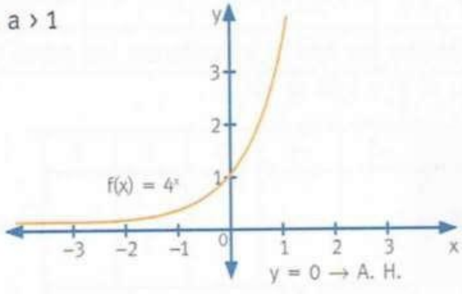
Se denomina **función exponencial** a toda función de la forma $f(x) = k \cdot a^{x-b} + c \wedge a > 0 \wedge a \neq 1$.

- Funciones de la forma $f(x) = a^x$

1. $0 < a < 1$



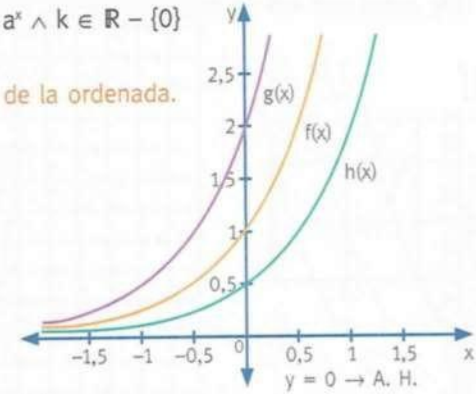
2. $a > 1$



- Funciones de la forma $f(x) = k \cdot a^x \wedge k \in \mathbb{R} - \{0\}$

"k" modifica el valor de la ordenada.

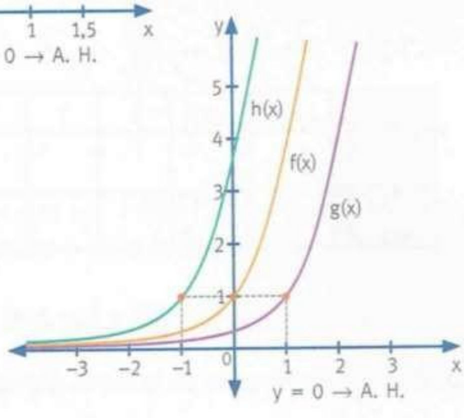
$f(x) = k \cdot 4^x$	k
$f(x) = 1 \cdot 4^x$	1
$g(x) = 2 \cdot 4^x$	2
$h(x) = 0{,}5 \cdot 4^x$	0,5



- Funciones de la forma $f(x) = k \cdot a^{x-b}$

"b" indica el corrimiento sobre el eje *x*.

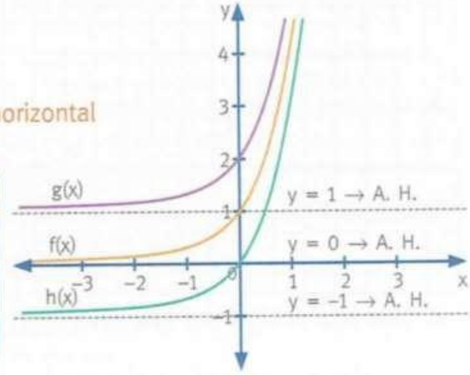
$f(x) = 4^{x-b}$	b	Corrimiento
$f(x) = 4^x$	0	No presenta
$g(x) = 4^{x-1}$	1	1 hacia la derecha
$h(x) = 4^{x+1}$	–1	1 hacia la izquierda



- Funciones de la forma $f(x) = a^x + c \wedge c \in \mathbb{R}$

"c" indica el corrimiento sobre el eje *y*, es decir, la asíntota horizontal

$f(x) = 4^x + c$	c	Corrimiento	A. H.
$f(x) = 4^x$	0	No tiene.	$y = 0$
$g(x) = 4^x + 1$	1	Hacia arriba, 1.	$y = 1$
$h(x) = 4^x - 1$	–1	Hacia abajo, 1.	$y = -1$



26 Logaritmos

INFO ACTIVADOS

La **logaritmación** es una operación entre dos números reales *a* y *b*, llamados **base** y **argumento**, respectivamente, que se define como:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b \wedge a > 0 \wedge a \neq 1 \wedge b > 0$$

$\log_3 81 = 4 \Leftrightarrow 3^4 = 81$

Existen dos logaritmos cuya notación es especial:

- Si la **base es 10**, recibe el nombre de **logaritmo decimal** y se simboliza $\log_{10} b = \log b$;
- Si la **base es el número e** ($e \cong 2{,}71...$), recibe el nombre de **logaritmo natural o neperiano** y se simboliza $\log_e b = \ln b$.

Propiedades de los logaritmos

El logaritmo de 1 es cero. $\log_a 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$	$\log_4 1 = 0 \Leftrightarrow 4^0 = 1$
El logaritmo de la base es 1. $\log_a a = 1 \Leftrightarrow a^1 = a$	$\log 10 = 1 \Leftrightarrow 10^1 = 10$
El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y \wedge x > 0 \wedge y > 0$	$\log_3 (27 . 9) = \log_3 27 + \log_3 9 = 3 + 2 = 5$
El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia entre el logaritmo del numerador y el del denominador. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \wedge x > 0 \wedge y > 0$	$\log_6 \frac{216}{36} = \log_6 216 - \log_6 36 = 3 - 2 = 1$
El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base. $\log_a b^n = n . \log_a b$	$\log_5 625^2 = 2 . \log_5 625 = 2 . 4 = 8$

Para poder resolver aquellos logaritmos en los cuales el argumento no es una potencia de la base, se debe aplicar un **cambio de base**, eligiendo para ello logaritmos con bases convenientes o logaritmos decimales o neperianos que pueden calcularse con cualquier calculadora científica.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\ln b}{\ln a}$$

$$\log_8 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 8} = \frac{\log 32}{\log 8} = \frac{\ln 32}{\ln 8} = \frac{5}{3}$$

TIC

1. Ingresen en rebrand.ly/LogCambioBase* para ver un video donde se explica un ejemplo de logaritmos con cambio de base.

*Enlace acortado de https://www.youtube.com/watch?v=A91qvN1ZKas.

Nombre: ______________________ curso: ______ fecha: ______

28 Ecuaciones exponenciales

INFO ACTIVADOS

Toda ecuación en la que la incógnita se encuentra en el exponente recibe el nombre de **ecuación exponencial.**

Para resolver una ecuación exponencial, hay que tener en cuenta:

1. $a^x \Rightarrow a > 0 \wedge a \neq 1$
2. $a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$
3. Las propiedades de las potencias.

Resuelvan las siguientes ecuaciones exponenciales.

a. $5^{2x-1} = 125$

$5^{2x-1} = 5^3 \Rightarrow 2x - 1 = 3 \Rightarrow x = 2$

b. $\sqrt[x-2]{3^{2x+1}} = \sqrt{27}$

$3^{\frac{x-3}{2x+1}} = 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{x-3}{2x+1} = \frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{9}{4}$

TIC

1. Ingresen en rebrand.ly/EcuExpon * para observar un video sobre la resolución de ecuaciones exponenciales.

*Enlace acortado de https://www.youtube.com/watch?v=-Oi9yiNyeT0.

c. $2^{x+1} + 2^{x-3} + 2^x = 100$

$2^x . 2 + \frac{2^x}{2^3} + 2^x = 100 \Rightarrow 2^x . \left(2 + \frac{1}{8} + 1\right) = 100$

$2^x . \frac{25}{8} = 100 \Rightarrow 2^x = 32 \Rightarrow 2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5$

d. $4^{2x} + 3 . 4^x - 4 = 0$

Se utiliza un cambio de variable; así, llamamos $t^2 = (4^x)^2 \Rightarrow t^2 = 4^{2x}$

La ecuación inicial queda:

$$t^2 + 3 . t^x - 4 = 0 \begin{cases} t_1 = 1 \Rightarrow 4^x = 1 \Rightarrow x_1 = 0 \\ t_2 = -4 \Rightarrow 4^x = -4 \Rightarrow x_2 \text{ no es solución.} \end{cases}$$

e. $2 - 3^{-x} + 3^{x+1} = 0$

$2 - 3^{-x} + 3^{x+1} = 0 \Rightarrow 2 - \frac{1}{3^x} + 3^x . 3 = 0$

Se utiliza nuevamente un cambio de variable, $t = 3^x$ entonces la ecuación queda:

$2 - \frac{1}{t} + 3 . t = 0 \Rightarrow 3t^2 + 2t - 1 = 0$

$$3t^2 + 2t - 1 = 0 \begin{cases} t_1 = -1 \Rightarrow 3^x = -1 \Rightarrow \text{no tiene solución} \\ t_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3} \Rightarrow x_2 = -1 \end{cases}$$

En algunos casos, las **ecuaciones exponenciales** tienen **bases distintas**, entonces para poder resolverlas se deberá despejar la variable. Para poder lograr el despeje se aplicarán logaritmos a ambos miembros de la ecuación cuya base es la base de la potencia que tiene la incógnita como exponente:

$a^x = b$

$\log_a a^x = \log_a b \Rightarrow x . \log_a a = \log_a b \Rightarrow x = \log_a b$

f. $e^{x+1} = 5$

$\ln e^{x+1} = \ln 5 \Rightarrow (x + 1) . \ln e = \ln 5 \Rightarrow x = \ln 5 - 1$

Nombre: ______ curso: ______ fecha: ______

27 Función logarítmica

INFO ACTIVADOS

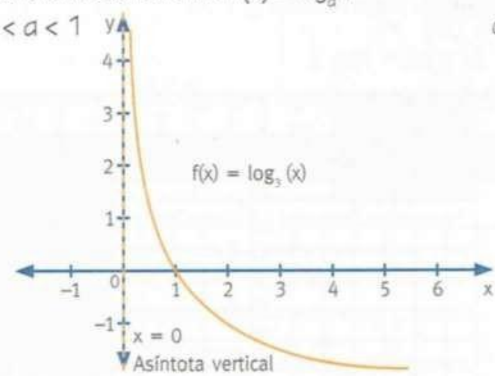
Se define **función logarítmica** de base a, a toda función de la forma:

$f(x) = \log_a (x - b) + c \Leftrightarrow a > 0 \wedge a \neq 1 \wedge x - b > 0 \wedge b \in \mathbb{R} \wedge c \in \mathbb{R}$

La función logarítmica es la inversa de la función exponencial, así: $f(x) = y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$

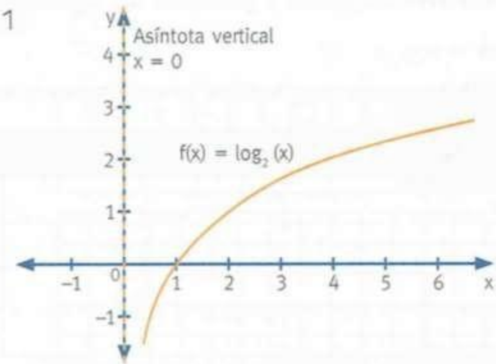
- Funciones de la forma $f(x) = \log_a x$

$0 < a < 1$



$D_f = (0;+\infty)$

$a > 1$

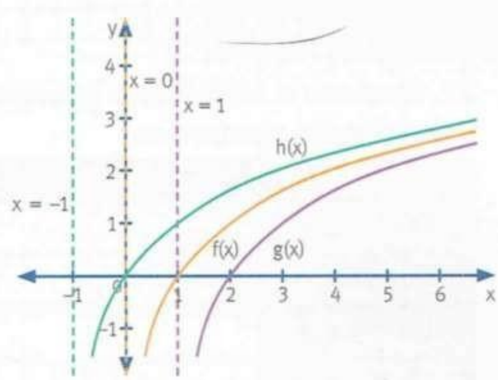


$D_f = (0;+\infty)$

- Funciones de la forma $f(x) = \log_a (x - b) \wedge b \in \mathbb{R}$

"b" indica el corrimiento sobre el eje x, es decir, la asíntota vertical.

$f(x) = \log_a (x - b)$	b	Corrimiento	Dominio
$f(x) = \log_2 x$	0	No presenta	$(0;+\infty)$
$g(x) = \log_2 (x - 1)$	1	1 hacia la derecha	$(1;+\infty)$
$h(x) = \log_2 (x + 1)$	−1	1 hacia la izquierda	$(-1;+\infty)$



- Funciones de la forma $f(x) = \log_a (x) + c \wedge c \in \mathbb{R}$

"c" indica el corrimiento sobre el eje y.

$f(x) = \log_a (x - b)$	b	Corrimiento	Dominio
$f(x) = \log_2 x$	0	No presenta	$(0;+\infty)$
$g(x) = \log_2 (x) + 1$	1	1 hacia arriba	$(0;+\infty)$
$h(x) = \log_2 (x) - 1$	−1	1 hacia abajo	$(0;+\infty)$