

Combos de Definiciones

Camila Nanini

11 de noviembre de 2025

Combo 3

Teorema 1 (Lectura única de términos). *Dado $t \in T^\tau$, se da una de las siguientes:*

(1) $t \in \text{Var} \cup C$

(2) Hay únicos $n \geq 1$, $f \in F^n$, $t_1, \dots, t_n \in T^\tau$ tales que $t = f(t_1, \dots, t_n)$.

Demostración. Por la definición de T^τ está claro que vale sin la unicidad (1). En virtud del Lema de Menú de términos solo nos falta probar la unicidad en el punto (2). Supongamos

$$t = f(t_1, \dots, t_n) = g(s_1, \dots, s_m)$$

con $n, m \geq 1$, $f \in F_n$, $g \in F_m$, $t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_m \in T_\tau$. Nótese que $f = g$. Es decir, $n = m = a(f)$.

Nótese que t_1 es tramo inicial de s_1 o s_1 es tramo inicial de t_1 , lo cual, por el lema de mordisqueo de términos, nos dice que $t_1 = s_1$. Con el mismo razonamiento se prueba que necesariamente

$$t_2 = s_2, \dots, t_n = s_n.$$

□

Lema 1. *Supongamos que $F : A \rightarrow B$ es un isomorfismo. Sea $\varphi \in F^\tau$. Entonces*

$$A \models \varphi[(a_1, a_2, \dots)] \text{ si y sólo si } B \models \varphi[(F(a_1), F(a_2), \dots)]$$

para cada $(a_1, a_2, \dots) \in A^N$. En particular, A y B satisfacen las mismas sentencias de tipo τ .

Demostración. Para $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots) \in A^N$, denotemos $(F(a_1), F(a_2), \dots)$ con $F(\vec{a})$. Procedemos por inducción.

Teo_k: Supongamos que $F : A \rightarrow B$ es un isomorfismo. Sea $\varphi \in F_\tau^k$. Entonces

$$A \models \varphi[\vec{a}] \text{ sii } B \models \varphi[F(\vec{a})],$$

para cada $(a_1, a_2, \dots) \in A^N$.

Prueba de Teo₀. Hay dos casos.

Caso $\varphi = r(t_1, \dots, t_n)$, con $n \geq 1$, $r \in R_n$ y $t_1, \dots, t_n \in T^\tau$. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} A \models \varphi[\vec{a}] &\text{ sii } (t_1^A[\vec{a}], \dots, t_n^A[\vec{a}]) \in r^A && (\text{def. de } \models) \\ &\text{ sii } (F(t_1^A[\vec{a}]), \dots, F(t_n^A[\vec{a}])) \in r^B && (F \text{ es iso}) \\ &\text{ sii } (t_1^B[F(\vec{a})], \dots, t_n^B[F(\vec{a})]) \in r^B && (\text{por lema auxiliar 2}) \\ &\text{ sii } B \models \varphi[F(\vec{a})]. \end{aligned}$$

Caso $\varphi = (t \equiv s)$ con $t, s \in T^\tau$. Tenemos ahora que

$$\begin{aligned} A \models \varphi[\vec{a}] &\text{ sii } (t^A[\vec{a}] \equiv s^A[\vec{a}]) && (\text{def. de } \models) \\ &\text{ sii } (F(t^A[\vec{a}]) \equiv F(s^A[\vec{a}])) && (F \text{ es iso}) \\ &\text{ sii } (t^B[F(\vec{a})] \equiv s^B[F(\vec{a})]) && (\text{por lema auxiliar 2}) \\ &\text{ sii } B \models \varphi[F(\vec{a})]. \end{aligned}$$

Veamos ahora que Teo_k implica Teo_{k+1}. Supongamos que vale Teo_k. Probaremos que entonces vale Teo_{k+1}.

Si $\varphi \in F_\tau^k$, podemos aplicar directamente Teo_k. Supongamos entonces que $\varphi \in F_\tau^{k+1} - F_\tau^k$. Por el Lema de Lectura Única de fórmulas, hay varios casos.

Caso $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, con $\varphi_1, \varphi_2 \in F_\tau^k$. Entonces:

$$\begin{aligned} A \models \varphi[\vec{a}] &\text{ sii } A \models \varphi_1[\vec{a}] \text{ o } A \models \varphi_2[\vec{a}] && (\text{def. de } \models) \\ &\text{ sii } B \models \varphi_1[F(\vec{a})] \text{ o } B \models \varphi_2[F(\vec{a})] && (\text{Teo}_k) \\ &\text{ sii } B \models \varphi[F(\vec{a})] && (\text{def. de } \models). \end{aligned}$$

Los casos $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, $\varphi = (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$, $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$ y $\varphi = \neg \varphi_1$ son análogos al anterior.

Caso $\varphi = \forall x_j \varphi_1$, con $\varphi_1 \in F_\tau^k$. Veamos cada implicación por separado.

Supongamos $A \models \varphi[\vec{a}]$. Entonces, por la definición de \models , se tiene que

$$A \models \varphi_1[\downarrow a_j(\vec{a})], \quad \text{para todo } a \in A.$$

Por Teo_k tenemos que

$$B \models \varphi_1[F(\downarrow a_j(\vec{a}))], \quad \text{para todo } a \in A.$$

Pero como

$$F(\downarrow a_j(\vec{a})) = \downarrow F(a)_j(F(\vec{a})),$$

tenemos que

$$B \models \varphi_1[\downarrow F(a)_j(F(\vec{a}))], \quad \text{para todo } a \in A.$$

Como F es sobreyectiva, obtenemos que

$$B \models \varphi_1[\downarrow b_j(F(\vec{a}))], \quad \text{para todo } b \in B.$$

Ahora, por la definición de \models , tenemos que

$$B \models \forall x_j \varphi_1[F(\vec{a})],$$

es decir, $B \models \varphi[F(\vec{a})]$.

Recíprocamente, supongamos que $B \models \varphi[F(\vec{a})]$. La definición de \models nos dice que

$$B \models \varphi_1[\downarrow b_j(F(\vec{a}))], \quad \text{para todo } b \in B.$$

Obviamente, esto implica que

$$B \models \varphi_1[\downarrow F(a)_j(F(\vec{a}))], \quad \text{para todo } a \in A.$$

Pero como

$$\downarrow F(a)_j(F(\vec{a})) = F(\downarrow a_j(\vec{a})),$$

tenemos que

$$B \models \varphi_1[F(\downarrow a_j(\vec{a}))], \quad \text{para todo } a \in A.$$

Por Teo_k, se sigue que

$$A \models \varphi_1[\downarrow a_j(\vec{a})], \quad \text{para todo } a \in A,$$

lo cual, por la definición de \models , nos dice que $A \models \varphi[\vec{a}]$.

El caso $\varphi = \exists x_j \varphi_1$ es análogo al anterior. □

Teorema 2. Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría. Entonces

$$(S^\tau / \dashv\!\!\vdash_T, s^T, i^T, c^T, 0^T, 1^T)$$

es un álgebra de Boole.

Pruebe sólo el ítem (6).

Demostración. Veamos que

$$[\varphi_1]_T s_T ([\varphi_2]_T s_T [\varphi_3]_T) = ([\varphi_1]_T s_T [\varphi_2]_T) s_T [\varphi_3]_T,$$

cualesquiera sean $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in S_\tau$.

Sean $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in S_\tau$ fijas. Por la definición de la operación s_T tenemos que:

$$\begin{aligned} [\varphi_1]_T s_T ([\varphi_2]_T s_T [\varphi_3]_T) &= [\varphi_1]_T s_T [(\varphi_2 \vee \varphi_3)]_T \\ &= [(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))]_T, \\ ([\varphi_1]_T s_T [\varphi_2]_T) s_T [\varphi_3]_T &= [(\varphi_1 \vee \varphi_2)]_T s_T [\varphi_3]_T \\ &= [((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)]_T. \end{aligned}$$

Por tanto, debemos probar que

$$[(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))]_T = [((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)]_T,$$

es decir, que

$$T \vdash ((\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \leftrightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)).$$

Nótese que, por (2) del lema de propiedades básicas de \vdash , basta con probar que:

$$T \vdash ((\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)), \quad T \vdash (((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \rightarrow (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))).$$

A continuación damos una prueba formal de

$$(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \text{ en } T,$$

- | | |
|--|---|
| 1. $(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$ | <i>Hipótesis 1</i> |
| 2. φ_1 | <i>Hipótesis 2</i> |
| 3. $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ | <i>Introducción de \vee (2)</i> |
| 4. $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$ | <i>Tesis 2, Introducción de \vee (3)</i> |
| 5. $\varphi_1 \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$ | <i>Conclusión</i> |
| 6. $(\varphi_2 \vee \varphi_3)$ | <i>Hipótesis 3</i> |
| 7. φ_2 | <i>Hipótesis 4</i> |
| 8. $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ | <i>Introducción de \vee (6)</i> |

9. $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	<i>Tesis 4, Introducción de \vee (7)</i>
10. $\varphi_2 \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	<i>Conclusión</i>
11. φ_3	<i>Hipótesis 5</i>
12. $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	<i>Tesis 5, Introducción de \vee (11)</i>
13. $\varphi_3 \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	<i>Conclusión</i>
14. $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	<i>Tesis 3, División por casos (6, 10, 13)</i>
15. $(\varphi_2 \vee \varphi_3) \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	<i>Conclusión</i>
16. $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	<i>Tesis 1, División por casos (1, 5, 15)</i>
17. $(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	<i>Conclusión</i>

A continuación damos una prueba formal de

$$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \rightarrow (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \text{ en } T,$$

1. $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	<i>Hipótesis 1</i>
2. $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	<i>Hipótesis 2</i>
3. φ_1	<i>Hipótesis 3</i>
4. $(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	<i>Tesis 3 Disjunción Introducción 3</i>
5. $\varphi_1 \rightarrow (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	<i>Conclusión</i>
6. φ_2	<i>Hipótesis 4</i>
7. $(\varphi_2 \vee \varphi_3)$	<i>Disjunción Introducción 6</i>
8. $(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	<i>Tesis 4 Disjunción Introducción 7</i>
9. $\varphi_2 \rightarrow (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	<i>Conclusión</i>
10. $(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	<i>Tesis 2 División por casos 2,5,9</i>
11. $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \rightarrow (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	<i>Conclusión</i>
12. φ_3	<i>Hipótesis 5</i>
13. $(\varphi_2 \vee \varphi_3)$	<i>Disjunción 12</i>

- | | |
|---|---|
| 14. $(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$ | <i>Tesis 5 Disjunción 13</i> |
| 15. $\varphi_3 \rightarrow (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$ | <i>Conclusión</i> |
| 16. $(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$ | <i>Tesis 1 División por casos 1,11,15</i> |
| 17. $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \rightarrow (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$ | <i>Conclusión</i> |

□

Auxiliares de Demostraciones

1. Lema de menú de términos: Supongamos $t \in T_\tau^k$, con $k \geq 1$. Entonces se da alguna de las siguientes:

- (a) $t \in Var \cup C$.
- (b) $t = f(t_1, \dots, t_n)$, con $f \in F_n$, $n \geq 1$ y $t_1, \dots, t_n \in T_{k-1}^\tau$.

2. Lema auxiliar 2: Sea $F : A \rightarrow B$ un homomorfismo. Entonces

$$F(t^A[(a_1, a_2, \dots)]) = t^B[(F(a_1), F(a_2), \dots)]$$

para cada $t \in T^\tau$, $(a_1, a_2, \dots) \in A^N$.

3. Lema de Mordisqueo de terminos: Sean $s, t \in T^\tau$ y supongamos que hay palabras x, y, z , con $y \neq \varepsilon$, tales que $s = xy$ y $t = yz$. Entonces $x = z = \varepsilon$ o bien $s, t \in C$.

En particular, si un término es tramo inicial o final de otro término, entonces dichos términos son iguales.

4. Lema de Lectura Única de fórmulas: Dada $\varphi \in F^\tau$ se da una y sólo una de las siguientes:

- a) $\varphi = (t \equiv s)$, con $t, s \in T^\tau$.
- b) $\varphi = r(t_1, \dots, t_n)$, con $r \in R_n$, $t_1, \dots, t_n \in T^\tau$.
- c) $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$, con $\eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$.
- d) $\varphi = \neg \varphi_1$, con $\varphi_1 \in F^\tau$.
- e) $\varphi = Qv\varphi_1$, con $Q \in \{\forall, \exists\}$, $\varphi_1 \in F^\tau$ y $v \in Var$.

Más aún, en los puntos (1), (2), (3), (4) y (5) tales descomposiciones son únicas.

5. Lema de propiedades básicas de \vdash : Sea (Σ, τ) una teoría.

- a) (**Uso de Teoremas**) Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \dots, \varphi_n$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.
- b) Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \dots, \varphi_n$. Si R es una regla distinta de GENERALIZACIÓN y ELECCIÓN, y φ se deduce de $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ por la regla R , entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.
- c) $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$ si y sólo si $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$.