Combos de Definiciones

Camila Nanini

24 de noviembre de 2025

Combo 1

Teorema 1 (del Filtro Primo). *Sea (L, s, i) un reticulado terna distributivo y F un filtro. Supongamos $x_0 \in L - F$. Entonces hay un filtro primo P tal que*

$$x_0 \notin P \quad y \quad F \subseteq P.$$

Demostración. Sea

$$\mathcal{F} = \{F_1 : F_1 \text{ es un filtro, } x_0 \notin F_1 \text{ y } F \subseteq F_1\}.$$

Nótese que $\mathcal{F} \neq \emptyset$, por lo cual $(\mathcal{F}, \subseteq)$ es un poset. Veamos que cada cadena en $(\mathcal{F}, \subseteq)$ tiene una cota superior. Sea C una cadena. Si $C = \emptyset$, entonces cualquier elemento de $\mathcal{F}$ es cota de C. Supongamos entonces $C \neq \emptyset$. Sea

$$G = \{x : x \in F_1 \text{ para algún } F_1 \in C\}.$$

Veamos que G es un filtro. Es claro que G es no vacío. Supongamos que $x, y \in G$. Sean $F_1, F_2 \in C$ tales que $x \in F_1$ y $y \in F_2$. Si $F_1 \subseteq F_2$, entonces, ya que F_2 es un filtro, tenemos que

$$x\, i\, y \in F_2 \subseteq G.$$

Si $F_2 \subseteq F_1$, entonces

$$x\, i\, y \in F_1 \subseteq G.$$

Ya que C es una cadena, tenemos que siempre $x\, i\, y \in G$. De forma análoga se prueba la propiedad restante, por lo cual G es un filtro. Además $x_0 \notin G$, por lo que $G \in \mathcal{F}$ es cota superior de C.

Por el **Lema de Zorn**, $(\mathcal{F}, \subseteq)$ tiene un elemento maximal P. Veamos que P es un **filtro primo**. Supongamos $x\, s\, y \in P$ y $x, y \notin P$. Nótese que

$[P \cup \{x\})$ es un filtro el cual contiene propiamente a P. Entonces, ya que P es un elemento maximal de $(\mathcal{F}, \subseteq)$, tenemos que

$$x_0 \in [P \cup \{x\}).$$

Análogamente,

$$x_0 \in [P \cup \{y\}).$$

Ya que $x_0 \in [P \cup \{x\})$, tenemos que existen elementos $p_1, \ldots, p_n \in P$ tales que

$$x_0 \geq p_1 \, i \, \cdots \, i \, p_n \, i \, x$$

(se deja como ejercicio justificar esto usar la def de Filtro generado por S). Ya que $x_0 \in [P \cup \{y\})$, existen elementos $q_1, \ldots, q_m \in P$ tales que

$$x_0 \geq q_1 \, i \, \cdots \, i \, q_m \, i \, y.$$

Si llamamos p al siguiente elemento de P:

$$p = p_1 \, i \, \cdots \, i \, p_n \, i \, q_1 \, i \, \cdots \, i \, q_m,$$

tenemos que

$$x_0 \geq p \, i \, x, \qquad x_0 \geq p \, i \, y.$$

Se tiene entonces que

$$x_0 \geq (p \, i \, x) \, s \, (p \, i \, y) = p \, i \, (x \, s \, y) \in P,$$

lo cual es absurdo ya que $x_0 \notin P$. $\square$

Lema 1 (Propiedades básicas de la consistencia)**.** *Sea (Σ, τ) una teoría.*

(1) Si (Σ, τ) es inconsistente, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, para toda sentencia φ.

(2) Si (Σ, τ) es consistente y $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente.

(3) Si $(\Sigma, \tau) \nvdash \neg\varphi$, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente.

Demostración. (1) Si (Σ, τ) es inconsistente, entonces por definición tenemos que $(\Sigma, \tau) \vdash \psi \wedge \neg\psi$ para alguna sentencia ψ. Dada una sentencia cualquiera φ, tenemos que φ se deduce por la regla del absurdo a partir de $\psi \wedge \neg\psi$, con lo cual (2) del Lema de propiedades básicas de $\vdash$ nos dice que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.

(2) Supongamos (Σ, τ) es consistente y $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$. Si $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ fuera inconsistente, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi \wedge \neg\psi$, para alguna sentencia ψ, lo cual

por (1) del Lema de propiedades básicas de $\vdash$ nos diría que $(\Sigma, \tau) \vdash \psi \wedge \neg\psi$, es decir, nos diría que (Σ, τ) es inconsistente.

(3) Veamos por **contradicción**. Supongamos que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es inconsistente. Esto significa que

$$(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash (\psi \wedge \neg\psi) \quad \text{para algún } \psi.$$

Por **(3)** del **lema de propiedades básicas de** $\vdash$ tenemos

$$(\Sigma, \tau) \vdash \varphi \to (\psi \wedge \neg\psi)$$

Por **regla del absurdo** tenemos

$$(\Sigma, \tau) \vdash \neg\varphi$$

Lo cual **contradice la hipótesis**.

□

Auxiliares de Demostraciones

1. Lema de propiedades básicas de $\vdash$: Sea (Σ, τ) una teoría.

   a) (**Uso de Teoremas**) Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.

   b) Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Si R es una regla distinta de Generalización y Elección, y φ se deduce de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ por la regla R, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.

   c) $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \to \psi)$ si y sólo si $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$.

2. (Lema de Zorn) Sea $(P, \leq)$ un poset y supongamos que cada cadena de $(P, \leq)$ tiene al menos una cota superior. Entonces, hay un elemento maximal en $(P, \leq)$.

3. Filtro generado por S: Dado un conjunto $S \subseteq L$, denotemos con $[S)$ el siguiente conjunto:

$$[S) = \{\, y \in L : y \geq s_1 \, i \cdots i \, s_n, \text{ para algunos } s_1, \ldots, s_n \in S, \ n \geq 1 \,\}.$$

Explicación más intuitiva de la prueba del Teorema del Filtro Primo

Idea general del Teorema del Filtro Primo

Queremos demostrar:

> Si F es un filtro de un reticulado distributivo L y $x_0 \notin F$, entonces existe un *filtro primo* P que contiene a F pero no contiene a x_0.

¿Cómo se demuestra esto?

1. Consideramos todos los filtros posibles que contienen a F pero no contienen a x_0. A este conjunto lo llamamos $\mathcal{F}$.
2. En $\mathcal{F}$ ordenamos los filtros por inclusión.
3. Probamos que cualquier cadena de filtros de $\mathcal{F}$ tiene una cota superior.
4. Como cada cadena tiene cota superior, por el Lema de Zorn existe un elemento maximal de $\mathcal{F}$. A ese maximal lo llamamos P.
5. Demostramos que este filtro maximal P es primo, es decir,

$$xsy \in P \quad \Rightarrow \quad x \in P \text{ o } y \in P.$$

Explicación intuitiva

1. Comenzamos con tu filtro F y el elemento prohibido x_0.

Queremos extender F lo más posible sin permitir que entre x_0.

2. Consideramos todos los filtros que contienen a F y excluyen a x_0.

Definimos:

$$\mathcal{F} = \{\, F_1 : F \subseteq F_1,\ x_0 \notin F_1 \,\}.$$

3. Ordenamos estos filtros por inclusión.

Un filtro es "más grande" que otro si contiene más elementos.

4. Tomamos una cadena de filtros.

Una cadena es una sucesión totalmente ordenada:

$$F_1 \subseteq F_2 \subseteq F_3 \subseteq \cdots$$

Cada uno evita a x_0.

5. Unimos todos los filtros de la cadena: obtenemos una cota superior.

Definimos:

$$G = \bigcup_{F_i \in C} F_i.$$

Se verifica que G es un filtro y que $x_0 \notin G$.
Por lo tanto, toda cadena tiene una cota superior en $\mathcal{F}$.

6. Aplicamos el Lema de Zorn.

Como toda cadena en $(\mathcal{F}, \subseteq)$ tiene una cota superior, existe un filtro maximal

$$P \in \mathcal{F}.$$

Es decir, no podemos agrandarlo sin incluir a x_0.

7. Demostramos que P es un filtro primo.

Si $xsy \in P$ pero $x \notin P$ y $y \notin P$, entonces podríamos extender P agregando, por ejemplo, x:

$$P' = [\, P \cup \{x\}\,).$$

Este P' seguiría siendo un filtro que evita x_0.
Pero eso contradice la maximalidad de P.
Por lo tanto, al menos uno de x o y debe estar en P.

Conclusión

Podemos extender el filtro F todo lo posible sin incluir x_0. Esa extensión maximal—existente por el Lema de Zorn—es necesariamente un filtro primo.