Combos de Definiciones

Camila Nanini

11 de noviembre de 2025

Combo 4

Lema 1 (Propiedades básicas de la deducción)**.** *Sea* (Σ, τ) *una teoría.*

(1) (Uso de teoremas) Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *y* $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$*, entonces* $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$*.*

(2) Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$*. Si* R *es una regla distinta de* Generalización *y* Elección *y* φ *se deduce de* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *por la regla* R*, entonces* $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$*.*

(3) $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$ *si y sólo si* $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$*.*

Demostración. (1) Nótese que basta con hacer el caso $n = 1$. El caso con $n \geq 2$ se obtiene aplicando n veces el caso $n = 1$. Supongamos entonces que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1\}, \tau) \vdash \varphi$. Sea $(\alpha_1, \ldots, \alpha_h, I_1, \ldots, I_h)$ una prueba formal de φ_1 en (Σ, τ). Sea $(\psi_1, \ldots, \psi_m, J_1, \ldots, J_m)$ una prueba formal de φ en $(\Sigma \cup \{\varphi_1\}, \tau)$.

Nótese que, por los Lemas Cambio de indice de hipotesis y Cambio de nombres de constante auxiliares, podemos suponer que estas dos pruebas no comparten ningún nombre de constante auxiliar y que tampoco comparten números asociados a hipótesis o tesis.

Para cada $i = 1, \ldots, m$, definamos $\tilde{J}_i$ de la siguiente manera:

- Si $J_i = \alpha\,\text{AxiomaPropio}$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{Tesis}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$ y $\psi_i = \varphi_1$, entonces $\tilde{J}_i = \alpha\,\text{Evocación}(\bar{h})$.
- Si $J_i = \alpha\,\text{AxiomaPropio}$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{Tesis}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$ y $\psi_i \notin \{\varphi_1\}$, entonces $\tilde{J}_i = \alpha\,\text{AxiomaPropio}$.
- Si $J_i = \alpha\,\text{AxiomaLógico}$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{Tesis}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$, entonces $\tilde{J}_i = \alpha\,\text{AxiomaLógico}$.

- Si $J_i = \alpha\,\textsc{Conclusión}$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\textsc{Tesis}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$, entonces $\tilde{J}_i = \alpha\,\textsc{Conclusión}$.
- Si $J_i = \textsc{Hipótesis}\bar{k}$, entonces $\tilde{J}_i = \textsc{Hipótesis}\bar{k}$.
- Si $J_i = \alpha R(\bar{l}_1, \ldots, \bar{l}_k)$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\textsc{Tesis}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$, entonces
$$\tilde{J}_i = \alpha R(\overline{l_1 + h}, \ldots, \overline{l_k + h}).$$

Es fácil chequear que

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_h, \psi_1, \ldots, \psi_m, I_1, \ldots, I_h, \tilde{J}_1, \ldots, \tilde{J}_m)$$

es una prueba formal de φ en (Σ, τ).

(2) Nótese que:

$$\begin{array}{rll} 1. & \varphi_1 & \textsc{AxiomaPropio} \\ 2. & \varphi_2 & \textsc{AxiomaPropio} \\ \vdots & & \\ n. & \varphi_n & \textsc{AxiomaPropio} \\ n+1. & \varphi & R(\bar{1}, \ldots, \bar{n}) \end{array}$$

es una prueba formal de φ en $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}, \tau)$, lo cual por (1) nos dice que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.

(3) Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \to \psi)$. Entonces tenemos que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash (\varphi \to \psi), \varphi$, lo cual por (2) nos dice que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$.

Supongamos ahora que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$. Sea $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, J_1, \ldots, J_n)$ una prueba formal de ψ en $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$.

Para cada $i = 1, \ldots, n$, definamos $\tilde{J}_i$ como sigue:

- Si $\varphi_i = \varphi$ y $J_i = \alpha\,\textsc{AxiomaPropio}$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\textsc{Tesis}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$, entonces $\tilde{J}_i = \alpha\,\textsc{Evocación}(1)$.
- Si $\varphi_i \neq \varphi$ y $J_i = \alpha\,\textsc{AxiomaPropio}$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\textsc{Tesis}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$, entonces $\tilde{J}_i = \alpha\,\textsc{AxiomaPropio}$.
- Si $J_i = \alpha\,\textsc{AxiomaLógico}$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\textsc{Tesis}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$, entonces $\tilde{J}_i = \alpha\,\textsc{AxiomaLógico}$.
- Si $J_i = \alpha\,\textsc{Conclusión}$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\textsc{Tesis}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$, entonces $\tilde{J}_i = \alpha\,\textsc{Conclusión}$.

- Si $J_i = \text{Hipótesis}\bar{k}$, entonces $\tilde{J}_i = \text{Hipótesis}\bar{k}$.
- Si $J_i = \alpha R(\bar{l}_1, \dots, \bar{l}_k)$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{Tesis}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$, entonces

$$\tilde{J}_i = \alpha R(\overline{l_1 + 1}, \dots, \overline{l_k + 1}).$$

Sea m tal que ninguna J_i es igual a $\text{Hipótesis}\bar{m}$. Nótese que $\tilde{J}_n$ no es de la forma $\text{Tesis}\bar{k}\beta$ ni de la forma $\text{Hipótesis}\bar{k}$, por lo cual $\text{Tesis}\bar{m}\tilde{J}_n$ es una justificación.

Es fácil chequear que:

$$(\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n, (\varphi \to \psi), \text{Hipótesis}\bar{m}, \tilde{J}_1, \dots, \tilde{J}_{n-1}, \text{Tesis}\bar{m}\tilde{J}_n, \text{Conclusión})$$

es una prueba formal de $(\varphi \to \psi)$ en (Σ, τ). $\square$

Teorema 1. *Sea $(L, s, i, c, 0, 1)$ un álgebra de Boole y sean $a, b \in B$. Se tiene que:*

(1) $(aib)^c = a^c s b^c$

(2) $aib = 0$ *si y sólo si* $b \leq a^c$

Demostración. **(1)**

$$(a\, i\, b)^c = a^c\, s\, b^c.$$

Sea $(L, s, i, c, 0, 1)$ un álgebra de Boole, es decir, un reticulado complementado distributivo. En un álgebra de Boole vale la distributividad:

$$x\, s\, (y\, i\, z) = (x\, s\, y)\, i\, (x\, s\, z), \quad x\, i\, (y\, s\, z) = (x\, i\, y)\, s\, (x\, i\, z).$$

Queremos probar que $(a\, i\, b)^c$ cumple las propiedades de complemento de $a^c\, s\, b^c$. Para ello verificamos:

$$(a\, i\, b)\, s\, (a^c\, s\, b^c) = 1 \quad \text{y} \quad (a\, i\, b)\, i\, (a^c\, s\, b^c) = 0.$$

Primero, la unión da 1:

$$\begin{aligned} (a\, i\, b)\, s\, (a^c\, s\, b^c) &= \big((a\, s\, a^c)\, s\, (b\, s\, b^c)\big) \quad \text{(por distributividad)} \\ &= (1\, s\, 1) = 1. \end{aligned}$$

Luego, la intersección da 0:

$$\begin{aligned} (a\, i\, b)\, i\, (a^c\, s\, b^c) &= \big((a\, i\, a^c)\, s\, (b\, i\, b^c)\big) \quad \text{(por distributividad)} \\ &= (0\, s\, 0) = 0. \end{aligned}$$

Por unicidad del complemento, se tiene entonces:

$$(a\,i\,b)^c = a^c\,s\,b^c.$$

(2) Queremos probar que

$$a\,i\,b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b \leq a^c.$$

$\underline{(\Rightarrow)}$ Supongamos $aib = 0$. Se tiene

$$\begin{aligned} b &= (bia)\,s\,(bia^c) \quad \text{(por lema anterior)} \\ &= (aib)\,s\,(b_i a^c) \\ &= 0\,s\,(b_i a^c) \\ &= (bia^c) \leq a^c, \end{aligned}$$

por lo cual $b \leq a^c$.

$\underline{(\Leftarrow)}$ Supongamos ahora $b \leq a^c$. Ya que $a \leq a$, por lema de "ser menor que ínfimo", aplicado al reticulado par $(B, \leq)$, nos dice que

$$aib \leq aia^c.$$

Ya que $aia^c = 0$, obtenemos que

$$aib = 0.$$

□

Lema 2. *Sean (L, s, i) y (L', s', i') reticulados terna y sean $(L, \leq)$ y $(L', \leq'$ $)$ los posets asociados. Sea $F : L \to L'$ una función. Entonces F es un isomorfismo de (L, s, i) en (L', s', i') si y sólo si F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$.*

Demostración. Sea $F : L \to L'$ un isomorfismo de posets, es decir:

a F es biyectiva,

b para todo $x, y \in L$, se cumple que

$$x \leq y \iff F(x) \leq' F(y).$$

Queremos probar que F es un isomorfismo de reticulados terna, es decir, que además preserva las operaciones:

$$F(x\,s\,y) = F(x)\,s'\,F(y), \qquad F(x\,i\,y) = F(x)\,i'\,F(y),$$

para todo $x, y \in L$.

Por el teorema de Dedekind sabemos que

$$a\,s\,b = \sup\{a, b\} \text{ en } (L, \leq).$$

Entonces $a \leq a\,s\,b$ y $b \leq a\,s\,b$.

Sean $x, y \in L$ y definamos $z := x\,s\,y$ en L. Queremos probar que

$$F(z) = F(x)\,s'\,F(y).$$

1. $F(z)$ es cota superior de $\{F(x), F(y)\}$

Puesto que z es cota superior de $\{x, y\}$ en L, se tiene $x \leq z$ y $y \leq z$. Por la hipótesis de isomorfismo, $F(x) \leq' F(z)$ y $F(y) \leq' F(z)$. Por tanto, $F(z)$ es cota superior de $\{F(x), F(y)\}$ en L'.

2. $F(z)$ es la menor cota superior

Sea $w' \in L'$ cualquier cota superior de $\{F(x), F(y)\}$; es decir, $F(x) \leq' w'$ y $F(y) \leq' w'$. Como F es biyectiva, existe $w \in L$ tal que $F(w) = w'$.
Usando la reflexión del orden (isomorfismo), obtenemos $x \leq w$ y $y \leq w$. Entonces $z = \sup\{x, y\} \leq w$. Aplicando F y usando que F preserva el orden, se tiene

$$F(z) \leq' F(w) = w'.$$

Esto muestra que cualquier cota superior w' de $\{F(x), F(y)\}$ domina a $F(z)$. Por la definición de supremo, $F(z)$ es la menor cota superior, es decir:

$$F(z) = \sup_{L'}\{F(x), F(y)\}.$$

Por la definición de la operación s' en el reticulado terna asociado a $(L', \leq')$, se cumple:

$$\sup_{L'}\{F(x), F(y)\} = F(x)\,s'\,F(y).$$

Por tanto,

$$F(x\,s\,y) = F(z) = F(x)\,s'\,F(y),$$

como queríamos.

La prueba para el ínfimo es dual. $\square$

Auxiliares de Demostraciones

1. Teorema de Dedekind: Sea (L, s, i) un reticulado terna. La relación binaria definida por

$$x \leq y \text{ si y sólo si } x\,s\,y = y$$

es un orden parcial sobre L, para el cual se cumple que:

$$\sup\{x, y\} = x\,s\,y \quad \text{y} \quad \text{ínf}\{x, y\} = x\,i\,y$$

cualesquiera sean $x, y \in L$.

2. Unicidad del complemento: Sea $(L, s, i, 0, 1)$ un reticulado acotado. Si $(L, s, i, 0, 1)$ es distributivo, entonces todo elemento tiene a lo sumo un complemento. Es decir, si

$$x\,s\,u = x\,s\,v = 1 \quad \text{y} \quad x\,i\,u = x\,i\,v = 0,$$

entonces $u = v$, cualesquiera sean $x, u, v \in L$.

3. "Lema anterior": Sea $(B, s, i, c, 0, 1)$ un álgebra de Boole. Cualesquiera sean $x, y \in B$, se tiene que

$$y = (y\,i\,x)\,s\,(y\,i\,x^c).$$

4. Cambio de índice de hipótesis: Sea (φ, J) una prueba formal de φ en (Σ, τ). Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $J_i \neq$ HIPÓTESIS$\overline{m}$, para cada $i = 1, \ldots, n(\varphi)$. Supongamos que $J_i =$ HIPÓTESIS$\overline{k}$ y que $J_j =$ TESIS$\overline{k}\,\alpha$, con $[\alpha]_1 \notin$ Num. Sea $\tilde{J}$ el resultado de reemplazar en J la justificación J_i por HIPÓTESIS$\overline{m}$ y reemplazar la justificación J_j por TESIS$\overline{m}\,\alpha$. Entonces $(\varphi, \tilde{J})$ es una prueba formal de φ en (Σ, τ).

5. Cambio de nombres de constantes auxiliares: Sea (φ, J) una prueba formal de φ en (Σ, τ). Sea C_1 el conjunto de nombres de constantes auxiliares de (φ, J). Sea $e \in C_1$. Sea $\tilde{e} \notin C \cup C_1$ tal que

$$(C \cup (C_1 - \{e\}) \cup \{\tilde{e}\}, F, R, a)$$

es un tipo.

Sea $\tilde{\varphi}_i$ el resultado de reemplazar en φ_i cada ocurrencia de e por $\tilde{e}$.

Entonces

$$(\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_{n(\varphi)}, J)$$

es una prueba formal de φ en (Σ, τ).