Combos de Definiciones

Camila Nanini

10 de noviembre de 2025

Combo 3

Teorema 1 (Lectura única de términos)**.** *Dado $t \in T^\tau$, se da una de las siguientes:*

(1) $t \in Var \cup C$

(2) Hay únicos $n \geq 1$, $f \in F^n$, $t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$ *tales que* $t = f(t_1, \ldots, t_n)$.

Demostración. Por la definición de T^τ está claro que vale sin la unicidad (1) En virtud del Lema de Menú de términos solo nos falta probar la unicidad en el punto (2). Supongamos

$$t = f(t_1, \ldots, t_n) = g(s_1, \ldots, s_m)$$

con $n, m \geq 1$, $f \in F_n$, $g \in F_m$, $t_1, \ldots, t_n, s_1, \ldots, s_m \in T_\tau$. Nótese que $f = g$. Es decir, $n = m = a(f)$.
Nótese que t_1 es tramo inicial de s_1 o s_1 es tramo inicial de t_1, lo cual, por el lema de mordisqueo de términos, nos dice que $t_1 = s_1$. Con el mismo razonamiento se prueba que necesariamente

$$t_2 = s_2, \ \ldots, \ t_n = s_n.$$

□

Lema 1. *Supongamos que* $F : A \to B$ *es un isomorfismo. Sea* $\varphi \in F^\tau$. *Entonces*

$$A \vDash \varphi[(a_1, a_2, \ldots)] \text{ si y sólo si } B \vDash \varphi[(F(a_1), F(a_2), \ldots)]$$

para cada $(a_1, a_2, \ldots) \in A^N$. *En particular,* A *y* B *satisfacen las mismas sentencias de tipo* τ.

Demostración. Para $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots) \in A^N$, denotemos $(F(a_1), F(a_2), \ldots)$ con $F(\vec{a})$. Procedemos por inducción.

Teo$_k$: Supongamos que $F : A \to B$ es un isomorfismo. Sea $\varphi \in F_\tau^k$. Entonces

$$A \vDash \varphi[\vec{a}] \text{ sii } B \vDash \varphi[F(\vec{a})],$$

para cada $(a_1, a_2, \ldots) \in A^N$.

Prueba de Teo$_0$. Hay dos casos.

Caso $\varphi = r(t_1, \ldots, t_n)$, con $n \geq 1$, $r \in R_n$ y $t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} A \vDash \varphi[\vec{a}] &\text{ sii } (t_1^A[\vec{a}], \ldots, t_n^A[\vec{a}]) \in r^A && (\text{def. de } \vDash) \\ &\text{ sii } (F(t_1^A[\vec{a}]), \ldots, F(t_n^A[\vec{a}])) \in r^B && (F \text{ es iso}) \\ &\text{ sii } (t_1^B[F(\vec{a})], \ldots, t_n^B[F(\vec{a})]) \in r^B && (\text{por lema auxiliar 2}) \\ &\text{ sii } B \vDash \varphi[F(\vec{a})]. \end{aligned}$$

Caso $\varphi = (t \equiv s)$ con $t, s \in T^\tau$. Tenemos ahora que

$$\begin{aligned} A \vDash \varphi[\vec{a}] &\text{ sii } (t^A[\vec{a}] \equiv s^A[\vec{a}]) && (\text{def. de } \vDash) \\ &\text{ sii } (F(t^A[\vec{a}]) \equiv F(s^A[\vec{a}])) && (F \text{ es iso}) \\ &\text{ sii } (t^B[F(\vec{a})] \equiv s^B[F(\vec{a})]) && (\text{por lema auxiliar 2}) \\ &\text{ sii } B \vDash \varphi[F(\vec{a})]. \end{aligned}$$

Veamos ahora que Teo$_k$ implica Teo$_{k+1}$. Supongamos que vale Teo$_k$. Probaremos que entonces vale Teo$_{k+1}$.

Si $\varphi \in F_\tau^k$, podemos aplicar directamente Teo$_k$. Supongamos entonces que $\varphi \in F_\tau^{k+1} - F_\tau^k$. Por el Lema de Lectura Única de fórmulas, hay varios casos.

Caso $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, con $\varphi_1, \varphi_2 \in F_\tau^k$. Entonces:

$$\begin{aligned} A \vDash \varphi[\vec{a}] &\text{ sii } A \vDash \varphi_1[\vec{a}] \text{ o } A \vDash \varphi_2[\vec{a}] && (\text{def. de } \vDash) \\ &\text{ sii } B \vDash \varphi_1[F(\vec{a})] \text{ o } B \vDash \varphi_2[F(\vec{a})] && (\text{Teo}_k) \\ &\text{ sii } B \vDash \varphi[F(\vec{a})] && (\text{def. de } \vDash). \end{aligned}$$

Los casos $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, $\varphi = (\varphi_1 \to \varphi_2)$, $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$ y $\varphi = \neg\varphi_1$ son análogos al anterior.

Caso $\varphi = \forall x_j \varphi_1$, con $\varphi_1 \in F_\tau^k$. Veamos cada implicación por separado.
Supongamos $A \vDash \varphi[\vec{a}]$. Entonces, por la definición de $\vDash$, se tiene que

$$A \vDash \varphi_1[\downarrow a_j(\vec{a})], \quad \text{para todo } a \in A.$$

Por Teo_k tenemos que

$$B \vDash \varphi_1[F(\downarrow a_j(\vec{a}))], \quad \text{para todo } a \in A.$$

Pero como

$$F(\downarrow a_j(\vec{a})) = \downarrow F(a)_j(F(\vec{a})),$$

tenemos que

$$B \vDash \varphi_1[\downarrow F(a)_j(F(\vec{a}))], \quad \text{para todo } a \in A.$$

Como F es sobreyectiva, obtenemos que

$$B \vDash \varphi_1[\downarrow b_j(F(\vec{a}))], \quad \text{para todo } b \in B.$$

Ahora, por la definición de $\vDash$, tenemos que

$$B \vDash \forall x_j \varphi_1[F(\vec{a})],$$

es decir, $B \vDash \varphi[F(\vec{a})]$.
Recíprocamente, supongamos que $B \vDash \varphi[F(\vec{a})]$. La definición de $\vDash$ nos dice que

$$B \vDash \varphi_1[\downarrow b_j(F(\vec{a}))], \quad \text{para todo } b \in B.$$

Obviamente, esto implica que

$$B \vDash \varphi_1[\downarrow F(a)_j(F(\vec{a}))], \quad \text{para todo } a \in A.$$

Pero como

$$\downarrow F(a)_j(F(\vec{a})) = F(\downarrow a_j(\vec{a})),$$

tenemos que

$$B \vDash \varphi_1[F(\downarrow a_j(\vec{a}))], \quad \text{para todo } a \in A.$$

Por Teo_k, se sigue que

$$A \vDash \varphi_1[\downarrow a_j(\vec{a})], \quad \text{para todo } a \in A,$$

lo cual, por la definición de $\vDash$, nos dice que $A \vDash \varphi[\vec{a}]$.
El caso $\varphi = \exists x_j \varphi_1$ es análogo al anterior. $\square$

Teorema 2. *Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría. Entonces*

$$(S^\tau / \dashv\vdash_T, s^T, i^T, c^T, 0^T, 1^T)$$

es un álgebra de Boole.

Pruebe sólo el ítem (6).

Demostración. Veamos que

$$[\varphi_1]_T\, s_T\, \big([\varphi_2]_T\, s_T\, [\varphi_3]_T\big) = \big([\varphi_1]_T\, s_T\, [\varphi_2]_T\big)\, s_T\, [\varphi_3]_T,$$

cualesquiera sean $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in S_\tau$.

Sean $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in S_\tau$ fijas. Por la definición de la operación s_T tenemos que:

$$\begin{aligned} [\varphi_1]_T\, s_T\, \big([\varphi_2]_T\, s_T\, [\varphi_3]_T\big) &= [\varphi_1]_T\, s_T\, [(\varphi_2 \vee \varphi_3)]_T \\ &= [(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))]_T, \\ \big([\varphi_1]_T\, s_T\, [\varphi_2]_T\big)\, s_T\, [\varphi_3]_T &= [(\varphi_1 \vee \varphi_2)]_T\, s_T\, [\varphi_3]_T \\ &= [((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)]_T. \end{aligned}$$

Por tanto, debemos probar que

$$[(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))]_T = [((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)]_T,$$

es decir, que

$$T \vdash \big((\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \leftrightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)\big).$$

Nótese que, por (2) del lema de propiedades básicas de $\vdash$, basta con probar que:

$$T \vdash \big((\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \to ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)\big), \qquad T \vdash \big(((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \to (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))\big).$$

A continuación damos una prueba formal de

$$(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \to ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \text{ en } T,$$

1. $(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$ — *Hipótesis 1*
2. φ_1 — *Hipótesis 2*
3. $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ — *Introducción de* $\vee$ *(2)*
4. $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$ — *Tesis 2, Introducción de* $\vee$ *(3)*
5. $\varphi_1 \to ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$ — *Conclusión*
6. $(\varphi_2 \vee \varphi_3)$ — *Hipótesis 3*
7. φ_2 — *Hipótesis 4*
8. $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ — *Introducción de* $\vee$ *(6)*

9. $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$ *Tesis 4, Introducción de $\vee$ (7)*
10. $\varphi_2 \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$ *Conclusión*
11. φ_3 *Hipótesis 5*
12. $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$ *Tesis 5, Introducción de $\vee$ (11)*
13. $\varphi_3 \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$ *Conclusión*
14. $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$ *Tesis 3, División por casos (6, 10, 13)*
15. $(\varphi_2 \vee \varphi_3) \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$ *Conclusión*
16. $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$ *Tesis 1, División por casos (1, 5, 15)*
17. $(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$ *Conclusión*

$\square$

Auxiliares de Demostraciones

1. Lema de menú de términos: Supongamos $t \in T_\tau^k$, con $k \geq 1$. Entonces se da alguna de las siguientes:
   (a) $t \in Var \cup C$.
   (b) $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, con $f \in F_n$, $n \geq 1$ y $t_1, \ldots, t_n \in T_{k-1}^\tau$.
2. Lema auxiliar 2: Sea $F : A \rightarrow B$ un homomorfismo. Entonces

   $$F\big(t^A[(a_1, a_2, \ldots)]\big) = t^B\big[(F(a_1), F(a_2), \ldots)\big]$$

   para cada $t \in T^\tau$, $(a_1, a_2, \ldots) \in A^N$.
3. Lema de Mordisqueo de terminos: Sean $s, t \in T^\tau$ y supongamos que hay palabras x, y, z, con $y \neq \varepsilon$, tales que $s = xy$ y $t = yz$. Entonces $x = z = \varepsilon$ o bien $s, t \in C$.

   En particular, si un término es tramo inicial o final de otro término, entonces dichos términos son iguales.
4. Lema de Lectura Única de fórmulas: Dada $\varphi \in F^\tau$ se da una y sólo una de las siguientes:

   a) $\varphi = (t \equiv s)$, con $t, s \in T^\tau$.

b) $\varphi = r(t_1, \ldots, t_n)$, con $r \in R_n$, $t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$.

c) $\varphi = (\varphi_1\, \eta\, \varphi_2)$, con $\eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$.

d) $\varphi = \neg\varphi_1$, con $\varphi_1 \in F^\tau$.

e) $\varphi = Qv\varphi_1$, con $Q \in \{\forall, \exists\}$, $\varphi_1 \in F^\tau$ y $v \in Var$.

Más aún, en los puntos (1), (2), (3), (4) y (5) tales descomposiciones son únicas.

5. Lema de propiedades básicas de $\vdash$:Sea (Σ, τ) una teoría.

   a) (**Uso de Teoremas**) Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.

   b) Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Si R es una regla distinta de Generalización y Elección, y φ se deduce de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ por la regla R, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.

   c) $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$ si y sólo si $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$.