

# Combos de Definiciones

Camila Nanini

7 de noviembre de 2025

## Combo 1

**Teorema 1** (del Filtro Primo). *Sea  $(L, s, i)$  un reticulado terna distributivo y  $F$  un filtro. Supongamos  $x_0 \in L - F$ . Entonces hay un filtro primo  $P$  tal que*

$$x_0 \notin P \quad y \quad F \subseteq P.$$

**Lema 1** (Propiedades básicas de la consistencia). *Sea  $(\Sigma, \tau)$  una teoría.*

- (1) *Si  $(\Sigma, \tau)$  es inconsistente, entonces  $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$ , para toda sentencia  $\varphi$ .*
- (2) *Si  $(\Sigma, \tau)$  es consistente y  $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$ , entonces  $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$  es consistente.*
- (3) *Si  $(\Sigma, \tau) \not\vdash \neg\varphi$ , entonces  $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$  es consistente.*

## Combo 2

**Teorema 2** (de Dedekind). *Sea  $(L, s, i)$  un reticulado terna. La relación binaria definida por:*

$$x \leq y \quad \text{si y sólo si} \quad xsy = y$$

*es un orden parcial sobre  $L$  para el cual se cumple que:*

$$\sup(\{x, y\}) = xsy, \quad \inf(\{x, y\}) = xiy$$

*cualesquiera sean  $x, y \in L$ .*

*Demuestra*ción. Primero probaremos la reflexividad de  $\leq$ . Para todo  $x \in L$  debemos mostrar  $x \leq x$ , es decir

$$x \ s \ x = x.$$

Ésta es precisamente la identidad de idempotencia para  $s$  (una de las igualdades axiomáticas del reticulado), por lo que  $x \leq x$  para todo  $x \in L$ . Entonces  $\leq$  es reflexiva.

Ahora probaremos la antisimetría. Sean  $x, y \in L$  tales que  $x \leq y$  y  $y \leq x$ . Por la definición de  $\leq$  esto equivale a

$$x \ s \ y = y \quad y \quad y \ s \ x = x.$$

Pero  $s$  es conmutativa, luego  $x \ s \ y = y \ s \ x$ . Combinando las igualdades anteriores obtenemos

$$y = x \ s \ y = y \ s \ x = x,$$

es decir  $x = y$ . Por tanto  $\leq$  es antisimétrica.  $\square$

*Demuestra*ción. Veamos que  $\leq$  es transitiva con respecto a  $L$ . Supongamos que  $x \leq y$  e  $y \leq z$ . Es decir, que por definición de  $\leq$  tenemos que

$$x \ s \ y = y \quad y \quad y \ s \ z = z.$$

Entonces

$$x \ s \ z = x \ s \ (y \ s \ z) = (x \ s \ y) \ s \ z = y \ s \ z = z,$$

por lo cual  $x \leq z$ . O sea que ya sabemos que  $(L, \leq)$  es un poset.

Veamos ahora que  $\sup(\{x, y\}) = x \ s \ y$ . Primero debemos ver que  $x \ s \ y$  es una cota superior del conjunto  $\{x, y\}$ , es decir:

$$x \leq x \ s \ y \quad y \quad y \leq x \ s \ y.$$

Por la definición de  $\leq$ , debemos probar que

$$x \ s \ (x \ s \ y) = x \ s \ y \quad y \quad y \ s \ (x \ s \ y) = x \ s \ y.$$

Estas igualdades se pueden probar usando las propiedades (I1), (I2) y (I4).

Nos falta ver entonces que  $x \ s \ y$  es menor o igual que cualquier cota superior de  $\{x, y\}$ . Supongamos  $x, y \leq z$ . Es decir que, por definición de  $\leq$ , tenemos que

$$x \ s \ z = z \quad y \quad y \ s \ z = z.$$

Pero entonces

$$(x \ s \ y) \ s \ z = x \ s \ (y \ s \ z) = x \ s \ z = z,$$

por lo que  $x \ s \ y \leq z$ . Es decir que  $x \ s \ y$  es la menor cota superior.

Para probar que  $\inf(\{x, y\}) = x \ i \ y$ , probaremos que para todo  $u, v \in L$ ,

$$u \leq v \quad \text{si y sólo si} \quad u \ i \ v = u,$$

lo cual le permitirá al lector aplicar un razonamiento similar al usado en la prueba de que  $\sup(\{x, y\}) = x \ s \ y$ .

Supongamos que  $u \leq v$ . Por definición tenemos que  $u \ s \ v = v$ . Entonces

$$u \ i \ v = u \ i \ (u \ s \ v).$$

Pero por (I7) tenemos que  $u \ i \ (u \ s \ v) = u$ , lo cual implica  $u \ i \ v = u$ .

Recíprocamente, si  $u \ i \ v = u$ , entonces

$$u \ s \ v = (u \ i \ v) \ s \ v = v \ s \ (u \ i \ v) \quad (\text{por (I2)}) = v \ s \ (v \ i \ u) \quad (\text{por (I3)}) = v \quad (\text{por (I6)}).$$

Lo cual nos dice que  $u \leq v$ . □

**Lema 2.** *Supongamos que  $\vec{a}, \vec{b}$  son asignaciones tales que si  $x_i \in Li(\varphi)$ , entonces  $a_i = b_i$ . Entonces:*

$$A \models \varphi[\vec{a}] \quad \text{si y sólo si} \quad A \models \varphi[\vec{b}].$$

*Demostración.* Sea  $A = (A, i)$  una estructura de tipo  $\tau$ . Queremos probar el caso base, hay dos subcasos:

**Caso 1:**  $\varphi$  es una igualdad atómica  $t \equiv s$ .

Supongamos que  $\vec{a}, \vec{b}$  coinciden en todas las variables que ocurren en  $\varphi$ . En particular, todas las variables que ocurren en  $t$  y en  $s$  son variables de  $Li(\varphi)$ . Así que tenemos

$$t^A[\vec{a}] = t^A[\vec{b}] \quad \text{y} \quad s^A[\vec{a}] = s^A[\vec{b}].$$

Esto por lema auxiliar. Entonces

$$\begin{aligned} A \models (t \equiv s)[\vec{a}] &\iff t^A[\vec{a}] = s^A[\vec{a}] && (\text{definición de satisfacción para igualdad}) \\ &\iff t^A[\vec{b}] = s^A[\vec{b}] && (\text{por las igualdades anteriores}) \\ &\iff A \models (t \equiv s)[\vec{b}]. \end{aligned}$$

**Caso 2:**  $\varphi$  es una fórmula atómica de predicado  $r(t_1, \dots, t_m)$ .

Nuevamente por lema auxiliar se da que en cada  $t_j$ :

$$t_j^A[\vec{a}] = t_j^A[\vec{b}] \quad \text{para } j = 1, \dots, m.$$

Entonces las  $m$ -uplas de valores de los términos coinciden:

$$(t_1^A[\vec{a}], \dots, t_m^A[\vec{a}]) = (t_1^A[\vec{b}], \dots, t_m^A[\vec{b}]).$$

Por la definición  $\models$

$$\begin{aligned} A \models r(t_1, \dots, t_m)[\vec{a}] &\iff (t_1^A[\vec{a}], \dots, t_m^A[\vec{a}]) \in i(r) \\ &\iff (t_1^A[\vec{b}], \dots, t_m^A[\vec{b}]) \in i(r) \\ &\iff A \models r(t_1, \dots, t_m)[\vec{b}]. \end{aligned}$$

Veamos que  $\text{Teo}_k$  implica  $\text{Teo}_{k+1}$ . Sea  $\varphi \in F_\tau^{k+1} - F_\tau^k$ . Hay varios casos:

**Caso**  $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ .

Ya que  $L_i(\varphi_i) \subseteq L_i(\varphi)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\text{Teo}_k$  nos dice que  $A \models \varphi_i[\vec{a}]$  si  $A \models \varphi_i[\vec{b}]$ , para  $i = 1, 2$ . Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} A \models \varphi[\vec{a}] &\iff (\text{por (3) en la def. de } A \models \varphi[\vec{a}]) A \models \varphi_1[\vec{a}] \text{ y } A \models \varphi_2[\vec{a}] \\ &\iff (\text{por } \text{Teo}_k) A \models \varphi_1[\vec{b}] \text{ y } A \models \varphi_2[\vec{b}] \\ &\iff (\text{por (3) en la def. de } A \models \varphi[\vec{a}]) A \models \varphi[\vec{b}] \end{aligned}$$

**Caso**  $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$ .

Es completamente similar al anterior.

**Caso**  $\varphi = (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$ .

Es completamente similar al anterior.

**Caso**  $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$ .

Es completamente similar al anterior.

**Caso**  $\varphi = \neg \varphi_1$ .

Es completamente similar al anterior.

**Caso**  $\varphi = \forall x_j \varphi_1$ .

Supongamos  $A \models \varphi[\vec{a}]$ . Entonces, por (8) en la definición de  $A \models \varphi[\vec{a}]$ , se tiene que  $A \models \varphi_1[\downarrow a_j(\vec{a})]$ , para todo  $a \in A$ . Nótese que  $\downarrow a_j(\vec{a})$  y  $\downarrow a_j(\vec{b})$  coinciden en toda  $x_i \in L_i(\varphi_1)$ , ya que  $L_i(\varphi_1) \subseteq L_i(\varphi) \cup \{x_j\}$ . O sea, por  $\text{Teo}_k$  se tiene que  $A \models \varphi_1[\downarrow a_j(\vec{b})]$  para todo  $a \in A$ , lo cual, por (8) en la definición de  $A \models \varphi[\vec{a}]$ , nos dice que  $A \models \varphi[\vec{b}]$ . La prueba de que  $A \models \varphi[\vec{b}]$  implica que  $A \models \varphi[\vec{a}]$  es similar.

**Caso**  $\varphi = \exists x_j \varphi_1$ .

Es similar al anterior. □

*Teorema auxiliar:* Sea  $A$  una estructura de tipo  $\tau$  y sea  $t \in T_\tau$ . Supongamos que  $\vec{a}, \vec{b}$  son asignaciones tales que  $a_i = b_i$  cada vez que  $x_i$  ocurra en  $t$ . Entonces

$$t^A[\vec{a}] = t^A[\vec{b}].$$

*Demostración.* Caso base  $\text{Teo}_0$ , tiene dos subcasos.

**Caso 1:**  $t$  es una variable, digamos  $t = x_k$ .

Por definición del valor de un término en la estructura  $A$  para una asignación  $\vec{a}$ ,

$$t^A[\vec{a}] = a_k,$$

y de forma análoga

$$t^A[\vec{b}] = b_k.$$

Por la hipótesis del enunciado, si  $x_k$  ocurre en  $t$  (y aquí  $x_k$  es precisamente el término), entonces  $a_k = b_k$ . Por tanto  $t^A[\vec{a}] = a_k = b_k = t^A[\vec{b}]$ , como se quería demostrar.

**Caso 2:**  $t$  es una constante, digamos  $t = c \in C$ .

Por definición del valor de una constante en la estructura  $A = (A, i)$ ,

$$t^A[\vec{a}] = c^A = i(c),$$

y análogamente

$$t^A[\vec{b}] = c^A = i(c).$$

Así  $t^A[\vec{a}] = i(c) = t^A[\vec{b}]$ .

Veamos que  $\text{Teo}_k \Rightarrow \text{Teo}_{k+1}$ . Supongamos  $t \in T_\tau^{k+1} - T_\tau^k$  y sean  $\vec{a}, \vec{b}$  asignaciones tales que  $a_i = b_i$  cada vez que  $x_i$  ocurra en  $t$ .

Nótese que  $t = f(t_1, \dots, t_n)$ , con  $f \in F_n$ ,  $n \geq 1$ , y  $t_1, \dots, t_n \in T_\tau^k$ .

Para cada  $j = 1, \dots, n$ , tenemos que  $a_i = b_i$  cada vez que  $x_i$  ocurra en  $t_j$ , lo cual, por hipótesis inductiva ( $\text{Teo}_k$ ), nos dice que

$$t_j^A[\vec{a}] = t_j^A[\vec{b}], \quad j = 1, \dots, n.$$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} t^A[\vec{a}] &= i(f)(t_1^A[\vec{a}], \dots, t_n^A[\vec{a}]) \quad (\text{por definición de } t^A[\vec{a}]) \\ &= i(f)(t_1^A[\vec{b}], \dots, t_n^A[\vec{b}]) \quad (\text{por hipótesis inductiva}) \\ &= t^A[\vec{b}] \quad (\text{por definición de } t^A[\vec{b}]). \end{aligned}$$

□

## Combo 3

**Teorema 3** (Lectura única de términos). *Dado  $t \in T^\tau$ , se da una de las siguientes:*

- (1)  $t \in Var \cup C$
- (2) Hay únicos  $n \geq 1$ ,  $f \in F^n$ ,  $t_1, \dots, t_n \in T^\tau$  tales que  $t = f(t_1, \dots, t_n)$ .

**Lema 3.** *Supongamos que  $F : A \rightarrow B$  es un isomorfismo. Sea  $\varphi \in F^\tau$ . Entonces*

$$A \models \varphi[(a_1, a_2, \dots)] \text{ si y sólo si } B \models \varphi[(F(a_1), F(a_2), \dots)]$$

*para cada  $(a_1, a_2, \dots) \in A^N$ . En particular,  $A$  y  $B$  satisfacen las mismas sentencias de tipo  $\tau$ .*

**Teorema 4.** *Sea  $T = (\Sigma, \tau)$  una teoría. Entonces*

$$(S^\tau / \dashv_T, s^T, i^T, c^T, 0^T, 1^T)$$

*es un álgebra de Boole.*

**Pruebe sólo el ítem (6).**

## Combo 4

**Lema 4** (Propiedades básicas de la deducción). *Sea  $(\Sigma, \tau)$  una teoría.*

- (1) (*Uso de teoremas*) Si  $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \dots, \varphi_n$  y  $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$ , entonces  $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$ .
- (2) *Supongamos  $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \dots, \varphi_n$ . Si  $R$  es una regla distinta de GENERALIZACIÓN y ELECCIÓN y  $\varphi$  se deduce de  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  por la regla  $R$ , entonces  $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$ .*
- (3)  $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$  si y sólo si  $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$ .

**Teorema 5.** *Sea  $(L, s, i, c, 0, 1)$  un álgebra de Boole y sean  $a, b \in B$ . Se tiene que:*

- (1)  $(aib)^c = a^c sb^c$
- (2)  $aib = 0$  si y sólo si  $b \leq a^c$

*Demostración.* (1)

$$(a \ i \ b)^c = a^c \ s \ b^c.$$

Sea  $(L, s, i, c, 0, 1)$  un álgebra de Boole, es decir, un reticulado complementado distributivo. En un álgebra de Boole vale la distributividad:

$$x \ s \ (y \ i \ z) = (x \ s \ y) \ i \ (x \ s \ z), \quad x \ i \ (y \ s \ z) = (x \ i \ y) \ s \ (x \ i \ z).$$

Queremos probar que  $(a \ i \ b)^c$  cumple las propiedades de complemento de  $a^c \ s \ b^c$ . Para ello verificamos:

$$(a \ i \ b) \ s \ (a^c \ s \ b^c) = 1 \quad \text{y} \quad (a \ i \ b) \ i \ (a^c \ s \ b^c) = 0.$$

Primero, la unión da 1:

$$\begin{aligned} (a \ i \ b) \ s \ (a^c \ s \ b^c) &= ((a \ s \ a^c) \ s \ (b \ s \ b^c)) \quad (\text{por distributividad}) \\ &= (1 \ s \ 1) = 1. \end{aligned}$$

Luego, la intersección da 0:

$$\begin{aligned} (a \ i \ b) \ i \ (a^c \ s \ b^c) &= ((a \ i \ a^c) \ s \ (b \ i \ b^c)) \quad (\text{por distributividad}) \\ &= (0 \ s \ 0) = 0. \end{aligned}$$

Por unicidad del complemento, se tiene entonces:

$$(a \ i \ b)^c = a^c \ s \ b^c.$$

(2) Queremos probar que

$$a \ i \ b = 0 \iff b \leq a^c.$$

$\Rightarrow$  Supongamos  $aib = 0$ . Se tiene

$$\begin{aligned} b &= (bia) \ s \ (bia^c) \quad (\text{por lema anterior}) \\ &= (aib) \ s \ (b_i a^c) \\ &= 0 \ s \ (b_i a^c) \\ &= (bia^c) \leq a^c, \end{aligned}$$

por lo cual  $b \leq a^c$ .

$\Leftarrow$  Supongamos ahora  $b \leq a^c$ . Ya que  $a \leq a$ , por lema de "ser menor que infimo", aplicado al reticulado par  $(B, \leq)$ , nos dice que

$$aib \leq aia^c.$$

Ya que  $aia^c = 0$ , obtenemos que

$$aib = 0.$$

□

**Lema 5.** Sean  $(L, s, i)$  y  $(L', s', i')$  reticulados terna y sean  $(L, \leq)$  y  $(L', \leq')$  los posets asociados. Sea  $F : L \rightarrow L'$  una función. Entonces  $F$  es un isomorfismo de  $(L, s, i)$  en  $(L', s', i')$  si y sólo si  $F$  es un isomorfismo de  $(L, \leq)$  en  $(L', \leq')$ .

*Demuestra*ción. Sea  $F : L \rightarrow L'$  un isomorfismo de posets, es decir:

- a)  $F$  es biyectiva,
- b) para todo  $x, y \in L$ , se cumple que

$$x \leq y \iff F(x) \leq' F(y).$$

Queremos probar que  $F$  es un isomorfismo de reticulados terna, es decir, que además preserva las operaciones:

$$F(x \ s \ y) = F(x) \ s' F(y), \quad F(x \ i \ y) = F(x) \ i' F(y),$$

para todo  $x, y \in L$ .

Por el teorema de Dedekind sabemos que

$$a \ s \ b = \sup\{a, b\} \text{ en } (L, \leq).$$

Entonces  $a \leq a \ s \ b$  y  $b \leq a \ s \ b$ .

Sean  $x, y \in L$  y definamos  $z := x \ s \ y$  en  $L$ . Queremos probar que

$$F(z) = F(x) \ s' F(y).$$

### 1. $F(z)$ es cota superior de $\{F(x), F(y)\}$

Puesto que  $z$  es cota superior de  $\{x, y\}$  en  $L$ , se tiene  $x \leq z$  y  $y \leq z$ . Por la hipótesis de isomorfismo,  $F(x) \leq' F(z)$  y  $F(y) \leq' F(z)$ . Por tanto,  $F(z)$  es cota superior de  $\{F(x), F(y)\}$  en  $L'$ .

### 2. $F(z)$ es la menor cota superior

Sea  $w' \in L'$  cualquier cota superior de  $\{F(x), F(y)\}$ ; es decir,  $F(x) \leq' w'$  y  $F(y) \leq' w'$ . Como  $F$  es biyectiva, existe  $w \in L$  tal que  $F(w) = w'$ .

Usando la reflexión del orden (isomorfismo), obtenemos  $x \leq w$  y  $y \leq w$ . Entonces  $z = \sup\{x, y\} \leq w$ . Aplicando  $F$  y usando que  $F$  preserva el orden, se tiene

$$F(z) \leq' F(w) = w'.$$

Esto muestra que cualquier cota superior  $w'$  de  $\{F(x), F(y)\}$  domina a  $F(z)$ . Por la definición de supremo,  $F(z)$  es la menor cota superior, es decir:

$$F(z) = \sup_{L'} \{F(x), F(y)\}.$$

Por la definición de la operación  $s'$  en el reticulado terna asociado a  $(L', \leq')$ , se cumple:

$$\sup_{L'} \{F(x), F(y)\} = F(x) s' F(y).$$

Por tanto,

$$F(x s y) = F(z) = F(x) s' F(y),$$

como queríamos.

La prueba para el ínfimo es dual. □

## Combo 5

**Teorema 6** (de Completitud). *Sea  $T = (\Sigma, \tau)$  una teoría de primer orden. Si  $T \models \varphi$ , entonces  $T \vdash \varphi$ .*

*Haga sólo el caso en que  $\tau$  tiene una cantidad infinita de nombres de constantes que no ocurren en las sentencias de  $\Sigma$ . En la exposición de la prueba no es necesario que demuestre los ítems (1) y (5).*

## Combo 6

**Teorema 7** (de Completitud). *Sea  $T = (\Sigma, \tau)$  una teoría de primer orden. Si  $T \models \varphi$ , entonces  $T \vdash \varphi$ .*

*Haga sólo el caso en que  $\tau$  tiene una cantidad infinita de nombres de constantes que no ocurren en las sentencias de  $\Sigma$ . En la exposición de la prueba no es necesario que demuestre los ítems (1), (2), (3) y (4).*

## Combo 7

**Lema 6** (Propiedades básicas de la deducción). *Sea  $(\Sigma, \tau)$  una teoría.*

- (1) (*Uso de teoremas*) *Si  $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \dots, \varphi_n$  y  $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$ , entonces  $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$ .*
- (2) *Supongamos  $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \dots, \varphi_n$ . Si  $R$  es una regla distinta de GENERALIZACIÓN y ELECCIÓN y  $\varphi$  se deduce de  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  por la regla  $R$ , entonces  $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$ .*

(3)  $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$  si y sólo si  $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$ .

(Ver combo 4.1)

**Lema 7.** Sea  $(L, s, i)$  un reticulado terna y sea  $\theta$  una congruencia de  $(L, s, i)$ . Entonces:

(1)  $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i})$  es un reticulado terna.

(2) El orden parcial  $\tilde{\leq}$  asociado al reticulado terna  $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i})$  cumple:

$$x/\theta \tilde{\leq} y/\theta \quad \text{ssi} \quad y\theta(xsy).$$

*Demostración.* (1)  $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i})$  es un reticulado terna.

Por hipótesis  $\theta$  es una congruencia, por lo tanto las operaciones

$$x/\theta \tilde{s} y/\theta := (xsy)/\theta, \quad x/\theta \tilde{i} y/\theta := (xiy)/\theta$$

están bien definidas (la condición de congruencia garantiza que la clase coiciente no depende de los representantes).

Queda verificar las identidades (I1)–(I7) para las operaciones  $\tilde{s}, \tilde{i}$  en  $L/\theta$ . Tomaremos representantes y usaremos que  $(L, s, i)$  satisface (I1)–(I7).

■ (I1) Identidad idempotente:

$$(x/\theta) \tilde{s} (x/\theta) = (xsx)/\theta = x/\theta,$$

porque  $xsx = x$  en  $L$ . De manera análoga  $(x/\theta) \tilde{i} (x/\theta) = x/\theta$ .

■ (I2) Comutatividad de  $\tilde{s}$ :

$$(x/\theta) \tilde{s} (y/\theta) = (xsy)/\theta = (ysx)/\theta = (y/\theta) \tilde{s} (x/\theta).$$

Igual para  $\tilde{i}$  usando la comutatividad de  $i$  en  $L$ .

■ (I4) Asociatividad de  $\tilde{s}$ :

$$((x/\theta) \tilde{s} (y/\theta)) \tilde{s} (z/\theta) = ((xsy)sz)/\theta = (xs(ysz))/\theta = (x/\theta) \tilde{s} ((y/\theta) \tilde{s} (z/\theta)).$$

Análogo para  $\tilde{i}$  por (I5).

■ (I6) Absorción:

$$(x/\theta) \tilde{s} ((x/\theta) \tilde{i} (y/\theta)) = (xs(xiy))/\theta = x/\theta,$$

porque en  $L$  vale  $xs(xiy) = x$ . La otra ley de absorción (I7) se verifica igual.

Por lo tanto  $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i})$  satisface (I1)–(I7), es decir es un reticulado terna.

**(2) Relación de orden  $\tilde{\leq}$  en el cociente.**

Por definición de  $\tilde{\leq}$  tenemos que

$$x/\theta \tilde{\leq} y/\theta \text{ si } y/\theta = x/\theta \tilde{s} y/\theta.$$

Pero

$$x/\theta \tilde{s} y/\theta = (x s y)/\theta \quad (\text{por definición de } \tilde{s}),$$

por lo cual tenemos que

$$x/\theta \tilde{\leq} y/\theta \text{ si } y/\theta = (x s y)/\theta.$$

□

**Lema 8.** Sean  $(L, s, i)$  y  $(L', s', i')$  reticulados terna y sean  $(L, \leq)$  y  $(L', \leq')$  los posets asociados. Sea  $F : L \rightarrow L'$  una función. Entonces  $F$  es un isomorfismo de  $(L, s, i)$  en  $(L', s', i')$  si y sólo si  $F$  es un isomorfismo de  $(L, \leq)$  en  $(L', \leq')$ .

(Ver combo 4.3)

## Combo 8

**Lema 9.** Supongamos que  $F : A \rightarrow B$  es un isomorfismo. Sea  $\varphi =_d \varphi(v_1, \dots, v_n) \in F_\tau$ . Entonces:

$$A \models \varphi[a_1, a_2, \dots, a_n] \text{ssi } B \models \varphi[F(a_1), F(a_2), \dots, F(a_n)]$$

para cada  $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ .

**Lema 10.** Sean  $(P, \leq)$  y  $(P', \leq')$  posets. Supongamos que  $F$  es un isomorfismo de  $(P, \leq)$  en  $(P', \leq')$ .

(a) Para cada  $S \subseteq P$  y cada  $a \in P$ , se tiene que  $a$  es cota superior (resp. inferior) de  $S$  si y sólo si  $F(a)$  es cota superior (resp. inferior) de  $F(S)$ .

(b) Para cada  $S \subseteq P$ , se tiene que existe  $\sup(S)$  si y sólo si existe  $\sup(F(S))$  y en tal caso se cumple que:

$$F(\sup(S)) = \sup(F(S)).$$