

# Combos de Definiciones

Camila Nanini

27 de noviembre de 2025

## Combo 3

**Teorema 1** (Lectura única de términos). *Dado  $t \in T^\tau$ , se da una de las siguientes:*

(1)  $t \in Var \cup C$

(2) Hay únicos  $n \geq 1$ ,  $f \in F_n$ ,  $t_1, \dots, t_n \in T^\tau$  tales que  $t = f(t_1, \dots, t_n)$ .

*Demostración.* Por la definición de  $T^\tau$  está claro que vale sin la unicidad (1). En virtud del Lema de Menú de términos solo nos falta probar la unicidad en el punto (2). Supongamos

$$t = f(t_1, \dots, t_n) = g(s_1, \dots, s_m)$$

con  $n, m \geq 1$ ,  $f \in F_n$ ,  $g \in F_m$ ,  $t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_m \in T^\tau$ . Nótese que  $f = g$ . Es decir,  $n = m = a(f)$ .

Nótese que  $t_1$  es tramo inicial de  $s_1$  o  $s_1$  es tramo inicial de  $t_1$ , lo cual, por el lema de mordisqueo de términos, nos dice que  $t_1 = s_1$ . Con el mismo razonamiento se prueba que necesariamente

$$t_2 = s_2, \dots, t_n = s_n.$$

□

**Lema 1.** *Supongamos que  $F : A \rightarrow B$  es un isomorfismo. Sea  $\varphi \in F^\tau$ . Entonces*

$$A \models \varphi[(a_1, a_2, \dots)] \text{ si y sólo si } B \models \varphi[(F(a_1), F(a_2), \dots)]$$

*para cada  $(a_1, a_2, \dots) \in A^N$ . En particular,  $A$  y  $B$  satisfacen las mismas sentencias de tipo  $\tau$ .*

*Demostración.* Para  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots) \in A^N$ , denotemos  $(F(a_1), F(a_2), \dots)$  con  $F(\vec{a})$ . Procedemos por inducción.

**Teo<sub>k</sub>:** Supongamos que  $F : A \rightarrow B$  es un isomorfismo. Sea  $\varphi \in F_k^\tau$ . Entonces

$$A \models \varphi[\vec{a}] \text{ sii } B \models \varphi[F(\vec{a})],$$

para cada  $(a_1, a_2, \dots) \in A^N$ .

**Prueba de Teo<sub>0</sub>.** Hay dos casos.

**Caso**  $\varphi = r(t_1, \dots, t_n)$ , con  $n \geq 1$ ,  $r \in R_n$  y  $t_1, \dots, t_n \in T^\tau$ . Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} A \models \varphi[\vec{a}] &\text{ sii } (t_1^A[\vec{a}], \dots, t_n^A[\vec{a}]) \in r^A && (\text{def. de } \models) \\ &\text{ sii } (F(t_1^A[\vec{a}]), \dots, F(t_n^A[\vec{a}])) \in r^B && (F \text{ es iso}) \\ &\text{ sii } (t_1^B[F(\vec{a})], \dots, t_n^B[F(\vec{a})]) \in r^B && (\text{por lema auxiliar 2}) \\ &\text{ sii } B \models \varphi[F(\vec{a})]. \end{aligned}$$

**Caso**  $\varphi = (t \equiv s)$  con  $t, s \in T^\tau$ . Tenemos ahora que

$$\begin{aligned} A \models \varphi[\vec{a}] &\text{ sii } (t^A[\vec{a}] \equiv s^A[\vec{a}]) && (\text{def. de } \models) \\ &\text{ sii } (F(t^A[\vec{a}]) \equiv F(s^A[\vec{a}])) && (F \text{ es iso}) \\ &\text{ sii } (t^B[F(\vec{a})] \equiv s^B[F(\vec{a})]) && (\text{por lema auxiliar 2}) \\ &\text{ sii } B \models \varphi[F(\vec{a})]. \end{aligned}$$

Veamos ahora que Teo<sub>k</sub> implica Teo<sub>k+1</sub>. Supongamos que vale Teo<sub>k</sub>. Probaremos que entonces vale Teo<sub>k+1</sub>.

Si  $\varphi \in F_k^\tau$ , podemos aplicar directamente Teo<sub>k</sub>. Supongamos entonces que  $\varphi \in F_{k+1}^\tau - F_k^\tau$ . Por el Lema de Lectura Única de fórmulas, hay varios casos.

**Caso**  $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$ , con  $\varphi_1, \varphi_2 \in F_k^\tau$ . Entonces:

$$\begin{aligned} A \models \varphi[\vec{a}] &\text{ sii } A \models \varphi_1[\vec{a}] \text{ o } A \models \varphi_2[\vec{a}] && (\text{def. de } \models) \\ &\text{ sii } B \models \varphi_1[F(\vec{a})] \text{ o } B \models \varphi_2[F(\vec{a})] && (\text{Teo}_k) \\ &\text{ sii } B \models \varphi[F(\vec{a})] && (\text{def. de } \models). \end{aligned}$$

Los casos  $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ ,  $\varphi = (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$ ,  $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$  y  $\varphi = \neg \varphi_1$  son análogos al anterior.

**Caso**  $\varphi = \forall x_j \varphi_1$ , con  $\varphi_1 \in F_k^\tau$ . Veamos cada implicación por separado.

Supongamos  $A \models \varphi[\vec{a}]$ . Entonces, por la definición de  $\models$ , se tiene que

$$A \models \varphi_1[\downarrow_j^a(\vec{a})], \quad \text{para todo } a \in A.$$

Por Teo<sub>k</sub> tenemos que

$$B \models \varphi_1[F(\downarrow_j^a(\vec{a}))], \quad \text{para todo } a \in A.$$

Pero como

$$F(\downarrow_j^a(\vec{a})) = \downarrow_j^{F(a)}(F(\vec{a})),$$

tenemos que

$$B \models \varphi_1[\downarrow_j^{F(a)}(F(\vec{a}))], \quad \text{para todo } a \in A.$$

Como  $F$  es sobreyectiva, obtenemos que

$$B \models \varphi_1[\downarrow_j^b(F(\vec{a}))], \quad \text{para todo } b \in B.$$

Ahora, por la definición de  $\models$ , tenemos que

$$B \models \forall x_j \varphi_1[F(\vec{a})],$$

es decir,  $B \models \varphi[F(\vec{a})]$ .

Recíprocamente, supongamos que  $B \models \varphi[F(\vec{a})]$ . La definición de  $\models$  nos dice que

$$B \models \varphi_1[\downarrow_j^b(F(\vec{a}))], \quad \text{para todo } b \in B.$$

Obviamente, esto implica que

$$B \models \varphi_1[\downarrow_j^{F(a)}(F(\vec{a}))], \quad \text{para todo } a \in A.$$

Pero como

$$\downarrow_j^{F(a)}(F(\vec{a})) = F(\downarrow_j^a(\vec{a})),$$

tenemos que

$$B \models \varphi_1[F(\downarrow_j^a(\vec{a}))], \quad \text{para todo } a \in A.$$

Por Teo<sub>k</sub>, se sigue que

$$A \models \varphi_1[\downarrow_j^a(\vec{a})], \quad \text{para todo } a \in A,$$

lo cual, por la definición de  $\models$ , nos dice que  $A \models \varphi[\vec{a}]$ .

El caso  $\varphi = \exists x_j \varphi_1$  es análogo al anterior. □

**Teorema 2.** Sea  $T = (\Sigma, \tau)$  una teoría. Entonces

$$(S^\tau / \Vdash_T, s^T, i^T, c^T, 0^T, 1^T)$$

es un álgebra de Boole.

**Pruebe sólo el ítem (6).**

*Demostración.* Veamos que

$$[\varphi_1]_T s^T ([\varphi_2]_T s^T [\varphi_3]_T) = ([\varphi_1]_T s^T [\varphi_2]_T) s^T [\varphi_3]_T,$$

cualesquiera sean  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in S^\tau$ .

Sean  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in S^\tau$  fijas. Por la definición de la operación  $s^T$  tenemos que:

$$\begin{aligned} [\varphi_1]_T s^T ([\varphi_2]_T s^T [\varphi_3]_T) &= [\varphi_1]_T s^T [(\varphi_2 \vee \varphi_3)]_T \\ &= [(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))]_T, \\ ([\varphi_1]_T s^T [\varphi_2]_T) s^T [\varphi_3]_T &= [(\varphi_1 \vee \varphi_2)]_T s^T [\varphi_3]_T \\ &= [((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)]_T. \end{aligned}$$

Por tanto, debemos probar que

$$[(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))]_T = [((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)]_T,$$

es decir, que

$$T \vdash ((\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \leftrightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)).$$

Nótese que, por (2) del lema de propiedades básicas de  $\vdash$ , basta con probar que:

$$T \vdash ((\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)), \quad T \vdash (((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \rightarrow (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))).$$

A continuación damos una prueba formal de

$$(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \text{ en } T,$$

- |  |   |
|--|---|
| 1. $(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$                       | <i>Hipótesis 1</i>                                    |
| 2. $\varphi_1$   | <i>Hipótesis 2</i>                                    |
| 3. $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$  | <i>Introducción de <math>\vee</math> (2)</i>          |
| 4. $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$                       | <i>Tesis 2, Introducción de <math>\vee</math> (3)</i> |
| 5. $\varphi_1 \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$ | <i>Conclusión</i>                                     |
| 6. $(\varphi_2 \vee \varphi_3)$  | <i>Hipótesis 3</i>                                    |
| 7. $\varphi_2$   | <i>Hipótesis 4</i>                                    |
| 8. $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$  | <i>Introducción de <math>\vee</math> (6)</i>          |

9. $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	<i>Tesis 4, Introducción de <math>\vee</math> (7)</i>
10. $\varphi_2 \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	<i>Conclusión</i>
11. $\varphi_3$	<i>Hipótesis 5</i>
12. $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	<i>Tesis 5, Introducción de <math>\vee</math> (11)</i>
13. $\varphi_3 \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	<i>Conclusión</i>
14. $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	<i>Tesis 3, División por casos (6, 10, 13)</i>
15. $(\varphi_2 \vee \varphi_3) \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	<i>Conclusión</i>
16. $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	<i>Tesis 1, División por casos (1, 5, 15)</i>
17. $(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \rightarrow ((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	<i>Conclusión</i>

A continuación damos una prueba formal de

$$((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \rightarrow (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3)) \text{ en } T,$$

1. $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3)$	<i>Hipótesis 1</i>
2. $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$	<i>Hipótesis 2</i>
3. $\varphi_1$	<i>Hipótesis 3</i>
4. $(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	<i>Tesis 3 Disjunción Introducción 3</i>
5. $\varphi_1 \rightarrow (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	<i>Conclusión</i>
6. $\varphi_2$	<i>Hipótesis 4</i>
7. $(\varphi_2 \vee \varphi_3)$	<i>Disjunción Introducción 6</i>
8. $(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	<i>Tesis 4 Disjunción Introducción 7</i>
9. $\varphi_2 \rightarrow (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	<i>Conclusión</i>
10. $(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	<i>Tesis 2 División por casos 2,5,9</i>
11. $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \rightarrow (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$	<i>Conclusión</i>
12. $\varphi_3$	<i>Hipótesis 5</i>
13. $(\varphi_2 \vee \varphi_3)$	<i>Disjunción 12</i>

- |   |   |
|---|---|
| 14. $(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$   | <i>Tesis 5 Disjunción 13</i>              |
| 15. $\varphi_3 \rightarrow (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$                                   | <i>Conclusión</i>                         |
| 16. $(\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$   | <i>Tesis 1 División por casos 1,11,15</i> |
| 17. $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \rightarrow (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \vee \varphi_3))$ | <i>Conclusión</i>                         |

□

## Auxiliares de Demostraciones

1. Lema de menú de términos: Supongamos  $t \in T_k^\tau$ , con  $k \geq 1$ . Entonces se da alguna de las siguientes:
  - (a)  $t \in Var \cup C$ .
  - (b)  $t = f(t_1, \dots, t_n)$ , con  $f \in F_n$ ,  $n \geq 1$  y  $t_1, \dots, t_n \in T_{k-1}^\tau$ .
2. Dado un tipo  $\tau$ , definamos recursivamente los conjuntos de palabras  $T_k^\tau$ , con  $k \geq 0$ , de la siguiente manera:

$$T_0^\tau = Var \cup C$$

$$T_{k+1}^\tau = T_k^\tau \cup \{ f(t_1, \dots, t_n) : f \in F_n, n \geq 1, \text{ y } t_1, \dots, t_n \in T_k^\tau \}.$$

Sea

$$T_\tau = \bigcup_{k \geq 0} T_k^\tau.$$

Los elementos de  $T^\tau$  serán llamados *términos de tipo  $\tau$* .

3. Lema auxiliar 2: Sea  $F : A \rightarrow B$  un homomorfismo. Entonces

$$F(t^A[(a_1, a_2, \dots)]) = t^B[(F(a_1), F(a_2), \dots)]$$

para cada  $t \in T^\tau$ ,  $(a_1, a_2, \dots) \in A^N$ .

4. Lema de Mordisqueo de terminos: Sean  $s, t \in T^\tau$  y supongamos que hay palabras  $x, y, z$ , con  $y \neq \varepsilon$ , tales que  $s = xy$  y  $t = yz$ . Entonces  $x = z = \varepsilon$  o bien  $s, t \in C$ .

En particular, si un término es tramo inicial o final de otro término, entonces dichos términos son iguales.

5. Lema de Lectura Única de fórmulas: Dada  $\varphi \in F^\tau$  se da una y sólo una de las siguientes:

- a)  $\varphi = (t \equiv s)$ , con  $t, s \in T^\tau$ .
- b)  $\varphi = r(t_1, \dots, t_n)$ , con  $r \in R_n$ ,  $t_1, \dots, t_n \in T^\tau$ .
- c)  $\varphi = (\varphi_1 \eta \varphi_2)$ , con  $\eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ ,  $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$ .
- d)  $\varphi = \neg\varphi_1$ , con  $\varphi_1 \in F^\tau$ .
- e)  $\varphi = Qv\varphi_1$ , con  $Q \in \{\forall, \exists\}$ ,  $\varphi_1 \in F^\tau$  y  $v \in Var$ .

Más aún, en los puntos (1), (2), (3), (4) y (5) tales descomposiciones son únicas.

6. Lema de propiedades básicas de  $\vdash$ : Sea  $(\Sigma, \tau)$  una teoría.

- a) (**Uso de Teoremas**) Si  $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \dots, \varphi_n$  y  $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$ , entonces  $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$ .
- b) Supongamos  $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \dots, \varphi_n$ . Si  $R$  es una regla distinta de GENERALIZACIÓN y ELECCIÓN, y  $\varphi$  se deduce de  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  por la regla  $R$ , entonces  $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$ .
- c)  $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$  si y sólo si  $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$ .