Combo 4

Camila Nanini

25 de noviembre de 2025

Combo 4

Lema 1 (Propiedades básicas de la deducción)**.** *Sea* (Σ, τ) *una teoría.*

(1) (Uso de teoremas) Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *y* $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$*, entonces* $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$*.*

(2) Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$*. Si* R *es una regla distinta de* GENERALIZACIÓN *y* ELECCIÓN *y* φ *se deduce de* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *por la regla* R*, entonces* $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$*.*

(3) $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \to \psi)$ *si y sólo si* $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$*.*

Demostración. (1) Nótese que basta con hacer el caso $n = 1$. El caso con $n \geq 2$ se obtiene aplicando n veces el caso $n = 1$. Supongamos entonces que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1\}, \tau) \vdash \varphi$. Sea $(\alpha_1, \ldots, \alpha_h, I_1, \ldots, I_h)$ una prueba formal de φ_1 en (Σ, τ). Sea $(\psi_1, \ldots, \psi_m, J_1, \ldots, J_m)$ una prueba formal de φ en $(\Sigma \cup \{\varphi_1\}, \tau)$.

Nótese que, por los Lemas Cambio de indice de hipotesis y Cambio de nombres de constante auxiliares, podemos suponer que estas dos pruebas no comparten ningún nombre de constante auxiliar y que tampoco comparten números asociados a hipótesis o tesis.

Para cada $i = 1, \ldots, m$, definamos $\tilde{J}_i$ de la siguiente manera:

- Si $J_i = \alpha\,$AXIOMAPROPIO, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$ y $\psi_i = \varphi_1$, entonces $\tilde{J}_i = \alpha\,\text{EVOCACIÓN}(\bar{h})$.
- Si $J_i = \alpha\,$AXIOMAPROPIO, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$ y $\psi_i \notin \{\varphi_1\}$, entonces $\tilde{J}_i = \alpha\,$AXIOMAPROPIO.
- Si $J_i = \alpha\,$AXIOMALÓGICO, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$, entonces $\tilde{J}_i = \alpha\,$AXIOMALÓGICO.

- Si $J_i = \alpha\,\textsc{Conclusión}$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\textsc{Tesis}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$, entonces $\tilde{J}_i = \alpha\,\textsc{Conclusión}$.

- Si $J_i = \textsc{Hipótesis}\bar{k}$, entonces $\tilde{J}_i = \textsc{Hipótesis}\bar{k}$.

- Si $J_i = \alpha R(\bar{l}_1, \ldots, \bar{l}_k)$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\textsc{Tesis}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$, entonces
$$\tilde{J}_i = \alpha R(\overline{l_1 + h}, \ldots, \overline{l_k + h}).$$

Es fácil chequear que
$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_h, \psi_1, \ldots, \psi_m, I_1, \ldots, I_h, \tilde{J}_1, \ldots, \tilde{J}_m)$$
es una prueba formal de φ en (Σ, τ).

(2) Nótese que:
$$\begin{array}{rll} 1. & \varphi_1 & \textsc{AxiomaPropio} \\ 2. & \varphi_2 & \textsc{AxiomaPropio} \\ \vdots & & \\ n. & \varphi_n & \textsc{AxiomaPropio} \\ n+1. & \varphi & R(\bar{1}, \ldots, \bar{n}) \end{array}$$
es una prueba formal de φ en $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}, \tau)$, lo cual por (1) nos dice que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.

(3) Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \to \psi)$. Entonces tenemos que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash (\varphi \to \psi), \varphi$, lo cual por (2) nos dice que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$.

Supongamos ahora que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$. Sea $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, J_1, \ldots, J_n)$ una prueba formal de ψ en $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$.

Para cada $i = 1, \ldots, n$, definamos $\tilde{J}_i$ como sigue:

- Si $\varphi_i = \varphi$ y $J_i = \alpha\,\textsc{AxiomaPropio}$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\textsc{Tesis}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$, entonces $\tilde{J}_i = \alpha\,\textsc{Evocación}(1)$.

- Si $\varphi_i \neq \varphi$ y $J_i = \alpha\,\textsc{AxiomaPropio}$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\textsc{Tesis}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$, entonces $\tilde{J}_i = \alpha\,\textsc{AxiomaPropio}$.

- Si $J_i = \alpha\,\textsc{AxiomaLógico}$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\textsc{Tesis}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$, entonces $\tilde{J}_i = \alpha\,\textsc{AxiomaLógico}$.

- Si $J_i = \alpha\,\textsc{Conclusión}$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\textsc{Tesis}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$, entonces $\tilde{J}_i = \alpha\,\textsc{Conclusión}$.

- Si $J_i = \text{Hipótesis}\bar{k}$, entonces $\tilde{J}_i = \text{Hipótesis}\bar{k}$.
- Si $J_i = \alpha R(\bar{l}_1, \ldots, \bar{l}_k)$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{Tesis}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$, entonces
$$\tilde{J}_i = \alpha R(\overline{l_1 + 1}, \ldots, \overline{l_k + 1}).$$

Sea m tal que ninguna J_i es igual a $\text{Hipótesis}\bar{m}$. Nótese que $\tilde{J}_n$ no es de la forma $\text{Tesis}\bar{k}\beta$ ni de la forma $\text{Hipótesis}\bar{k}$, por lo cual $\text{Tesis}\bar{m}\tilde{J}_n$ es una justificación.

Es fácil chequear que:

$$(\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, (\varphi \to \psi), \text{Hipótesis}\bar{m}, \tilde{J}_1, \ldots, \tilde{J}_{n-1}, \text{Tesis}\bar{m}\tilde{J}_n, \text{Conclusión})$$

es una prueba formal de $(\varphi \to \psi)$ en (Σ, τ). □

Teorema 1. *Sea $(L, s, i, c, 0, 1)$ un álgebra de Boole y sean $a, b \in B$. Se tiene que:*

(1) $(aib)^c = a^c s b^c$

(2) $aib = 0$ *si y sólo si* $b \leq a^c$

Demostración. **(1)**
$$(a\, i\, b)^c = a^c\, s\, b^c.$$

Sea $(L, s, i, c, 0, 1)$ un álgebra de Boole, es decir, un reticulado complementado distributivo. En un álgebra de Boole vale la distributividad:

$$x\, s\, (y\, i\, z) = (x\, s\, y)\, i\, (x\, s\, z), \quad x\, i\, (y\, s\, z) = (x\, i\, y)\, s\, (x\, i\, z).$$

Queremos probar que $(a\, i\, b)^c$ cumple las propiedades de complemento de $a^c\, s\, b^c$. Para ello verificamos:

$$(a\, i\, b)\, s\, (a^c\, s\, b^c) = 1 \quad \text{y} \quad (a\, i\, b)\, i\, (a^c\, s\, b^c) = 0.$$

Primero, la unión da 1:

$$\begin{aligned}(a\, i\, b)\, s\, (a^c\, s\, b^c) &= \big((a\, s\, a^c)\, s\, (b\, s\, b^c)\big) \quad \text{(por distributividad)}\\ &= (1\, s\, 1) = 1.\end{aligned}$$

Luego, la intersección da 0:

$$\begin{aligned}(a\, i\, b)\, i\, (a^c\, s\, b^c) &= \big((a\, i\, a^c)\, s\, (b\, i\, b^c)\big) \quad \text{(por distributividad)}\\ &= (0\, s\, 0) = 0.\end{aligned}$$

Por unicidad del complemento, se tiene entonces:

$$(a\, i\, b)^c = a^c\, s\, b^c.$$

(2) Queremos probar que $a\, i\, b = 0 \iff b \leq a^c$.

$\underline{(\Rightarrow)}$ Supongamos $aib = 0$. Se tiene

$$\begin{aligned} b &= (bia)\, s\, (bia^c) \quad \text{(por lema anterior)} \\ &= (aib)\, s\, (b_i a^c) \\ &= 0\, s\, (b_i a^c) \\ &= (bia^c) \leq a^c, \end{aligned}$$

por lo cual $b \leq a^c$.

$\underline{(\Leftarrow)}$ Supongamos ahora $b \leq a^c$. Entonces como $aib \leq b$ por transitividad $aib \leq a^c$. Ahora $a \leq a$, por lo que $aib \leq aia^c$. Ya que $aia^c = 0$, obtenemos que $aib \leq 0$ y por axioma $0 \leq aib$, entonces $aib = 0$.

Pequeña demo del paso $aib \leq aia^c$ Supongamos $a\, i\, b \leq a^c$. Por definición de $\leq$,

$$(a\, i\, b)\, i\, a^c = a\, i\, b. \tag{1}$$

Queremos probar $a\, i\, b \leq a\, i\, a^c$, es decir demostrar

$$(a\, i\, b)\, i\, (a\, i\, a^c) = a\, i\, b.$$

$$\begin{aligned} (a\, i\, b)\, i\, (a\, i\, a^c) &= a\, i\, \big(b\, i\, (a\, i\, a^c)\big) && \text{(asociatividad / conmutatividad)} \\ &= a\, i\, \big((b\, i\, a)\, i\, a^c\big) && \text{(asociatividad)} \\ &= a\, i\, \big((a\, i\, b)\, i\, a^c\big) && \text{(conmutatividad } b\, i\, a = a\, i\, b) \\ &= a\, i\, (a\, i\, b) && \text{(por (1), sustituyendo } (a\, i\, b)\, i\, a^c = a\, i\, b) \\ &= (a\, i\, a)\, i\, b && \text{(asociatividad)} \\ &= a\, i\, b && \text{(idempotencia } a\, i\, a = a). \end{aligned}$$

Hemos obtenido

$$(a\, i\, b)\, i\, (a\, i\, a^c) = a\, i\, b,$$

que por la definición de $\leq$ es precisamente $a\, i\, b \leq a\, i\, a^c$.

$\square$

Lema 2. *Sean* (L, s, i) *y* (L', s', i') *reticulados terna y sean* $(L, \leq)$ *y* $(L', \leq'$ $)$ *los posets asociados. Sea* $F : L \to L'$ *una función. Entonces* F *es un isomorfismo de* (L, s, i) *en* (L', s', i') *si y sólo si* F *es un isomorfismo de* $(L, \leq)$ *en* $(L', \leq')$.

Demostración. $(\Leftarrow)$; Sea $F : L \to L'$ un isomorfismo de posets, es decir:

a F es biyectiva,

b para todo $x, y \in L$, se cumple que $x \leq y \iff F(x) \leq' F(y)$

Queremos probar que F es un isomorfismo de reticulados terna, es decir, que preserva las operaciones:

$$F(x\,s\,y) = F(x)\,s'\,F(y), \qquad F(x\,i\,y) = F(x)\,i'\,F(y),$$

para todo $x, y \in L$.

Por el teorema de Dedekind sabemos que $a\,s\,b = \sup\{a, b\}$ en $(L, \leq)$. Entonces $a \leq a\,s\,b$ y $b \leq a\,s\,b$.

Sean $x, y \in L$ y definamos $z := x\,s\,y$ en L. Queremos probar que

$$F(z) = F(x)\,s'\,F(y).$$

1. $F(z)$ **es cota superior de** $\{F(x), F(y)\}$

Puesto que z es cota superior de $\{x, y\}$ en L, se tiene $x \leq z$ y $y \leq z$. Por la hipótesis de isomorfismo, $F(x) \leq' F(z)$ y $F(y) \leq' F(z)$. Por tanto, $F(z)$ es cota superior de $\{F(x), F(y)\}$ en L'.

2. $F(z)$ **es la menor cota superior**

Sea $w' \in L'$ cualquier cota superior de $\{F(x), F(y)\}$; es decir, $F(x) \leq' w'$ y $F(y) \leq' w'$. Como F es biyectiva, existe $w \in L$ tal que $F(w) = w'$.
Usando la reflexión del orden (isomorfismo), obtenemos $x \leq w$ y $y \leq w$. Entonces $z = \sup\{x, y\} \leq w$. Aplicando F y usando que F preserva el orden, se tiene

$$F(z) \leq' F(w) = w'.$$

Esto muestra que cualquier cota superior w' de $\{F(x), F(y)\}$ domina a $F(z)$.

$(\Rightarrow)$; Supongamos que F es un isomorfismo de (L, s, i) en (L', s', i'). Sean x, y $\in$ L tales que x $\leq$ y. Tenemos que y = xsy, por lo cual F(y) = F(xsy) = F(x)s'F(y), ocurriendo que $F(x) \leq' F(y)$. De forma similar se puede ver que F^{-1} es también un homomorfismo de $(L', \leq')$ en $(L, \leq)$.

La prueba para el ínfimo es dual. □

Auxiliares de Demostraciones

1. Teorema de Dedekind: Sea (L, s, i) un reticulado terna. La relación binaria definida por

   $$x \leq y \text{ si y sólo si } x\, s\, y = y$$

   es un orden parcial sobre L, para el cual se cumple que:

   $$\sup\{x, y\} = x\, s\, y \quad \text{y} \quad \inf\{x, y\} = x\, i\, y$$

   cualesquiera sean $x, y \in L$.

2. Unicidad del complemento: Sea $(L, s, i, 0, 1)$ un reticulado acotado. Si $(L, s, i, 0, 1)$ es distributivo, entonces todo elemento tiene a lo sumo un complemento. Es decir, si

   $$x\, s\, u = x\, s\, v = 1 \quad \text{y} \quad x\, i\, u = x\, i\, v = 0,$$

   entonces $u = v$, cualesquiera sean $x, u, v \in L$.

3. "Lema anterior": Sea $(B, s, i, c, 0, 1)$ un álgebra de Boole. Cualesquiera sean $x, y \in B$, se tiene que

   $$y = (y\, i\, x)\, s\, (y\, i\, x^c).$$

4. Cambio de índice de hipótesis: Sea (φ, J) una prueba formal de φ en (Σ, τ). Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $J_i \neq$ HIPÓTESIS$\overline{m}$, para cada $i = 1, \ldots, n(\varphi)$. Supongamos que $J_i =$ HIPÓTESIS$\overline{k}$ y que $J_j =$ TESIS$\overline{k}\,\alpha$, con $[\alpha]_1 \notin$ Num. Sea $\tilde{J}$ el resultado de reemplazar en J la justificación J_i por HIPÓTESIS$\overline{m}$ y reemplazar la justificación J_j por TESIS$\overline{m}\,\alpha$. Entonces $(\varphi, \tilde{J})$ es una prueba formal de φ en (Σ, τ).

5. Cambio de nombres de constantes auxiliares: Sea (φ, J) una prueba formal de φ en (Σ, τ). Sea C_1 el conjunto de nombres de constantes auxiliares de (φ, J). Sea $e \in C_1$. Sea $\tilde{e} \notin C \cup C_1$ tal que

   $$(C \cup (C_1 - \{e\}) \cup \{\tilde{e}\}, F, R, a)$$

   es un tipo.

   Sea $\tilde{\varphi}_i$ el resultado de reemplazar en φ_i cada ocurrencia de e por $\tilde{e}$.

   Entonces

   $$(\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_{n(\varphi)}, J)$$

   es una prueba formal de φ en (Σ, τ).

Axiomas elementales de reticulados terna:

1. $\forall x\,(x\,s\,x = x)$
2. $\forall x\,(x\,i\,x = x)$
3. $\forall x \forall y\,(x\,s\,y = y\,s\,x)$
4. $\forall x \forall y\,(x\,i\,y = y\,i\,x)$
5. $\forall x \forall y \forall z\,((x\,s\,y)\,s\,z = x\,s\,(y\,s\,z))$
6. $\forall x \forall y \forall z\,((x\,i\,y)\,i\,z = x\,i\,(y\,i\,z))$
7. $\forall x \forall y\,(x\,s\,(x\,i\,y) = x)$
8. $\forall x \forall y\,(x\,i\,(x\,s\,y) = x)$