Combo 6

Camila Nanini

27 de noviembre de 2025

Combo 6

Teorema 1 (Teorema de Completitud)**.** *Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría de primer orden. Si $T \models \varphi$, entonces $T \vdash \varphi$.*

Haga solo el caso en que τ tiene una cantidad infinita de nombres de constantes que no ocurren en las sentencias de Σ. En la exposición de la prueba no es necesario que demuestre los ítems: (1), (2), (3) y (4).

Demostración. Primero probaremos completitud para el caso en que τ tiene una cantidad infinita de nombres de constante que no ocurren en las sentencias de Σ. Lo probaremos por el absurdo: supongamos que hay una sentencia φ_0 tal que $T \models \varphi_0$ y $T \nvdash \varphi_0$.

Nótese que, ya que $T \nvdash \varphi_0$, tenemos que $[\varphi_0]_T \neq 1^T = \{\varphi \in S^\tau : T \vdash \varphi\}$ O sea que $[\neg\varphi_0]_T \neq 0^T$.

Por el Lema de enumeracion hay una infinitupla $(\gamma_1, \gamma_2, \dots) \in F^{\tau\mathbb{N}}$ tal que:

- $|Li(\gamma_j)| \leq 1$ para cada $j = 1, 2, \dots$
- Si $|Li(\gamma)| \leq 1$, entonces $\gamma = \gamma_j$ para algún $j \in \mathbb{N}$.

Para cada $j \in \mathbb{N}$, sea $w_j \in Var$ tal que $Li(\gamma_j) \subseteq \{w_j\}$. Para cada j, declaremos $\gamma_j :=_d \gamma_j(w_j)$.

Nótese que por el Lema del Infimo tenemos que

$$\inf\big(\{[\gamma_j(t)]_T : t \in T_c^\tau\}\big) = [\forall w_j\, \gamma_j(w_j)]_T, \qquad j = 1, 2, \dots$$

Por el Teorema de Rasiowa–Sikorski, existe un filtro primo U de A_T tal que:

(a) $[\neg\varphi_0]_T \in U$,

(b) Para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$\{[\gamma_j(t)]_T : t \in T_c^\tau\} \subseteq U \quad \Longrightarrow \quad [\forall w_j\, \gamma_j(w_j)]_T \in U.$$

Dado que la infinitupla $(\gamma_1, \gamma_2, \dots)$ cubre todas las fórmulas con a lo sumo una variable libre, podemos reescribir la propiedad (b) como:

(b′) Para cada $\varphi{:=}_d\varphi(v) \in F^\tau$, si

$$\{[\varphi(t)]_T : t \in T_c^\tau\} \subseteq U,$$

entonces

$$[\forall v\, \varphi(v)]_T \in U.$$

Definimos sobre T_c^τ la siguiente relación:

$$t \bowtie s \quad \text{si y sólo si} \quad [(t \equiv s)]_T \in U.$$

Entonces se verifica que:

1. $\bowtie$ es una relación de equivalencia.
2. Para cada $\varphi{:=}_d\varphi(v_1, \dots, v_n) \in F_\tau$ y $t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_n \in T_c^\tau$, si

$$t_1 \bowtie s_1,\ t_2 \bowtie s_2,\ \dots,\ t_n \bowtie s_n,$$

entonces

$$[\varphi(t_1, \dots, t_n)]_T \in U \quad \Longleftrightarrow \quad [\varphi(s_1, \dots, s_n)]_T \in U.$$

3. Para cada $f \in F_n$ y $t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_n \in T_c^\tau$,

$$t_1 \bowtie s_1,\ t_2 \bowtie s_2,\ \dots,\ t_n \bowtie s_n \quad \Longrightarrow \quad f(t_1, \dots, t_n) \bowtie f(s_1, \dots, s_n).$$

4. Para cada $t{:=}_d t(v_1, \dots, v_n) \in T^\tau$ y $t_1, \dots, t_n \in T_c^\tau$, tenemos que

$$t^{A_U}[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie] = t(t_1, \dots, t_n)/\bowtie.$$

5. Para cada $\varphi{:=}_d\varphi(v_1, \dots, v_n) \in F_\tau$ y $t_1, \dots, t_n \in T_c^\tau$, tenemos que

$$A_U \models \varphi[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie] \quad \text{si y sólo si} \quad [\varphi(t_1, \dots, t_n)]_T \in U.$$

Probaremos (5) por inducción en el k tal que $\varphi \in F_k^\tau$. El caso $k = 0$ es dejado al lector (Al final).

Supongamos que (5) vale para $\varphi \in F_k^\tau$. Sea ahora $\varphi{:=}_d\varphi(v_1, \dots, v_n) \in F_{k+1}^\tau \setminus F_k^\tau$. Hay varios casos:

Caso $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$

Por la Convención Notacional 6, tenemos $\varphi_i{:=}_d\varphi_i(v_1, \ldots, v_n)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
A_U \models \varphi[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] &\iff A_U \models \varphi_1[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] \text{ o } A_U \models \varphi_2[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] \\
&\iff [\varphi_1(t_1, \ldots, t_n)]_T \in U \text{ o } [\varphi_2(t_1, \ldots, t_n)]_T \in U \\
&\iff [\varphi_1(t_1, \ldots, t_n)]_T \, s^T \, [\varphi_2(t_1, \ldots, t_n)]_T \in U \\
&\iff [(\varphi_1(t_1, \ldots, t_n) \vee \varphi_2(t_1, \ldots, t_n))]_T \in U \\
&\iff [\varphi(t_1, \ldots, t_n)]_T \in U.
\end{aligned}$$

Caso $\varphi = \forall v \, \varphi_1$ **con** $v \in Var \setminus \{v_1, \ldots, v_n\}$

Por la Convención Notacional 6, $\varphi_1{:=}_d\varphi_1(v_1, \ldots, v_n, v)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
A_U \models \varphi[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] &\iff A_U \models \varphi_1[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie, t/\bowtie], \quad \text{para todo } t \in T_c^\tau \\
&\iff [\varphi_1(t_1, \ldots, t_n, t)]_T \in U, \quad \text{para todo } t \in T_c^\tau \\
&\iff [\forall v \, \varphi_1(t_1, \ldots, t_n, v)]_T \in U \\
&\iff [\varphi(t_1, \ldots, t_n)]_T \in U.
\end{aligned}$$

Caso $\varphi = \exists v \, \varphi_1$ **con** $v \in Var \setminus \{v_1, \ldots, v_n\}$

Por la Convención Notacional 6, $\varphi_1{:=}_d\varphi_1(v_1, \ldots, v_n, v)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
A_U \models \varphi[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] &\iff A_U \models \varphi_1[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie, t/\bowtie], \quad \text{para algún } t \in T_c^\tau \\
&\iff [\varphi_1(t_1, \ldots, t_n, t)]_T \in U, \quad \text{para algún } t \in T_c^\tau \\
&\iff ([\varphi_1(t_1, \ldots, t_n, t)]_T)^c_T \notin U, \quad \text{para algún } t \in T_c^\tau \\
&\iff [\neg\varphi_1(t_1, \ldots, t_n, t)]_T \notin U, \quad \text{para algún } t \in T_c^\tau \\
&\iff [\forall v \, \neg\varphi_1(t_1, \ldots, t_n, v)]_T \notin U \\
&\iff ([\forall v \, \neg\varphi_1(t_1, \ldots, t_n, v)]_T)^{c^T} \in U \\
&\iff [\neg\forall v \, \neg\varphi_1(t_1, \ldots, t_n, v)]_T \in U \\
&\iff [\varphi(t_1, \ldots, t_n)]_T \in U.
\end{aligned}$$

Conclusión

El ítem (5) implica que para cada sentencia $\psi \in S^\tau$:

$$A_U \models \psi \quad \text{si y sólo si} \quad [\psi]_T \in U.$$

Por lo tanto:

$$A_U \models \Sigma \qquad \text{y} \qquad A_U \models \neg\varphi_0,$$

lo cual contradice la suposición de que $T \models \varphi_0$.

Ahora supongamos que τ es cualquier tipo. Sean s_1 y s_2 símbolos no pertenecientes a la lista

$$\forall \; \exists \; \neg \; \vee \; \wedge \; \rightarrow \leftrightarrow \; (\;) \; , \; \equiv \; X \; \mathit{0} \; \mathit{1} \; \ldots \; \mathit{9} \; \mathbf{0} \; \mathbf{1} \; \ldots \; \mathbf{9}$$

y tales que ninguno ocurra en alguna palabra de $C \cup F \cup R$.

Si $T \models \varphi$, entonces —usando el Lema de Coincidencia— se tiene:

$$(\Sigma, (C \cup \{s_1 s_2 s_1,\; s_1 s_2 s_2 s_1, \ldots\}, F, R, a)) \models \varphi,$$

por lo cual

$$(\Sigma, (C \cup \{s_1 s_2 s_1,\; s_1 s_2 s_2 s_1, \ldots\}, F, R, a)) \vdash \varphi.$$

Pero por el Lema de Tipos parecidos, concluimos:

$$T \vdash \varphi.$$

□

Caso base: $k = 0$

Si $\varphi \in F_0^\tau$, entonces φ es atómica. Hay dos casos a considerar:

1. Caso φ de la forma $t_1 = t_2$. Debemos ver que

$$A_U \models (t_1 = t_2)[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] \quad \Longleftrightarrow \quad [(t_1 = t_2)]_T \in U.$$

Por definición de la interpretación de términos en A_U,

$$t^{A_U}[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] = t(t_1, \ldots, t_n)/\bowtie.$$

Asimismo, la interpretación del símbolo "=" en A_U es:

$$A_U \models t_1 = t_2 \quad \Longleftrightarrow \quad t_1/\bowtie = t_2/\bowtie \quad \Longleftrightarrow \quad [(t_1 \equiv t_2)]_T \in U.$$

Pero en el álgebra de Lindenbaum $[(t_1 = t_2)]_T = [(t_1 \equiv t_2)]_T$, por lo que obtenemos exactamente la condición deseada:

$$A_U \models t_1 = t_2 \quad \Longleftrightarrow \quad [(t_1 = t_2)]_T \in U.$$

2. Caso φ de la forma $R(t_1, \ldots, t_m)$. Por definición de la interpretación del predicado R en A_U,

$$A_U \models R(t_1, \ldots, t_m)[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] \iff [R(t_1, \ldots, t_m)]_T \in U.$$

Esta es exactamente la equivalencia requerida para el ítem (5).

Con esto queda demostrado el caso base $k = 0$.

Auxiliares de Demostraciones

1. **(Lema de enumeración).** Sea τ un tipo. Hay una infinitupla $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots) \in F^{\tau^{\mathbb{N}}}$ tal que:

   a) $|L_i(\gamma_j)| \leq 1$, para cada $j = 1, 2, \ldots$

   b) Si $|L_i(\gamma)| \leq 1$, entonces $\gamma = \gamma_j$ para algún $j \in \mathbb{N}$.

2. **(Lema del Ínfimo).** Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría y supongamos que τ tiene una cantidad infinita de nombres de constante que no ocurren en las sentencias de Σ. Entonces, para cada fórmula $\varphi =_d \varphi(v)$, se tiene que en el álgebra de Lindenbaum A_T:

$$[\forall v\, \varphi(v)]_T = \text{ínf}\big(\{\, [\varphi(t)]_T : t \in T_c^\tau \,\}\big).$$

3. **(Teorema de Rasiowa y Sikorski).** Sea $(B, s, i, c, 0, 1)$ un álgebra de Boole. Sea $a \in B$, $a \neq 0$. Supongamos que $(A_1, A_2, \ldots)$ es una infinitupla de subconjuntos de B tal que existe $\text{ínf}(A_j)$ para cada $j = 1, 2, \ldots$. Entonces existe un filtro primo P que cumple:

   (a) $a \in P$,

   (b) Si $P \supseteq A_j$, entonces $\text{ínf}(A_j) \in P$, para cada $j = 1, 2, \ldots$.

4. **(Tipos parecidos).** Sean $\tau = (C, F, R, a)$ y $\tau' = (C', F', R', a')$ tipos.

   a) Si $C \subseteq C'$, $F \subseteq F'$, $R \subseteq R'$ y $a'|_{F \cup R} = a$, entonces

$$(\Sigma, \tau) \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad (\Sigma, \tau') \vdash \varphi.$$

   b) Si $C \subseteq C'$, $F = F'$, $R = R'$ y $a' = a$, entonces

$$(\Sigma, \tau') \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad (\Sigma, \tau) \vdash \varphi,$$

   cada vez que $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq S_\tau$.