

Combo 6

Camila Nanini

1 de diciembre de 2025

Combo 6

Teorema 1 (Teorema de Completitud). *Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría de primer orden. Si $T \models \varphi$, entonces $T \vdash \varphi$.*

Haga solo el caso en que τ tiene una cantidad infinita de nombres de constantes que no ocurren en las sentencias de Σ . En la exposición de la prueba no es necesario que demuestre los ítems: (1), (2), (3) y (4).

Demostración. Primero probaremos completitud para el caso en que τ tiene una cantidad infinita de nombres de constante que no ocurren en las sentencias de Σ . Lo probaremos por el absurdo: supongamos que hay una sentencia φ_0 tal que $T \models \varphi_0$ y $T \not\vdash \varphi_0$.

Nótese que, ya que $T \not\vdash \varphi_0$, tenemos que $[\varphi_0]_T \neq 1^T = \{\varphi \in S^\tau : T \vdash \varphi\}$ O sea que $[\neg\varphi_0]_T \neq 0^T$.

Por el Lema de enumeracion hay una infinitupla $(\gamma_1, \gamma_2, \dots) \in F^{\tau\mathbb{N}}$ tal que:

- $|Li(\gamma_j)| \leq 1$ para cada $j = 1, 2, \dots$
- Si $|Li(\gamma)| \leq 1$, entonces $\gamma = \gamma_j$ para algún $j \in \mathbb{N}$.

Para cada $j \in \mathbb{N}$, sea $w_j \in Var$ tal que $Li(\gamma_j) \subseteq \{w_j\}$. Para cada j , declaremos $\gamma_j :=_d \gamma_j(w_j)$.

Nótese que por el Lema del Infimo tenemos que

$$\inf(\{[\gamma_j(t)]_T : t \in T_c^\tau\}) = [\forall w_j \gamma_j(w_j)]_T, \quad j = 1, 2, \dots$$

Por el Teorema de Rasiowa–Sikorski, existe un filtro primo U de A_T tal que:

- (a) $[\neg\varphi_0]_T \in U$,

(b) Para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$\{[\gamma_j(t)]_T : t \in T_c^\tau\} \subseteq U \implies [\forall w_j \gamma_j(w_j)]_T \in U.$$

Dado que la infinitupla $(\gamma_1, \gamma_2, \dots)$ cubre todas las fórmulas con a lo sumo una variable libre, podemos reescribir la propiedad (b) como:

(b') Para cada $\varphi :=_d \varphi(v) \in F^\tau$, si

$$\{[\varphi(t)]_T : t \in T_c^\tau\} \subseteq U,$$

entonces

$$[\forall v \varphi(v)]_T \in U.$$

Definimos sobre T_c^τ la siguiente relación:

$$t \bowtie s \quad \text{si y sólo si} \quad [(t \equiv s)]_T \in U.$$

Definamos ahora un modelo A_U de tipo τ de la siguiente manera:

- Universo de $A_U = T_c^\tau / \bowtie$.
- $c^{A_U} = c / \bowtie$, para cada $c \in C$.
- $f^{A_U}(t_1 / \bowtie, \dots, t_n / \bowtie) = f(t_1, \dots, t_n) / \bowtie$, para cada $f \in F_n$ y $t_1, \dots, t_n \in T_c^\tau$.
- $r^{A_U} = \{(t_1 / \bowtie, \dots, t_n / \bowtie) : [r(t_1, \dots, t_n)]_T \in U\}$, para cada $r \in R_n$.

Entonces se verifica que:

1. \bowtie es una relación de equivalencia.
2. Para cada $\varphi :=_d \varphi(v_1, \dots, v_n) \in F_\tau$ y $t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_n \in T_c^\tau$, si

$$t_1 \bowtie s_1, t_2 \bowtie s_2, \dots, t_n \bowtie s_n,$$

entonces

$$[\varphi(t_1, \dots, t_n)]_T \in U \iff [\varphi(s_1, \dots, s_n)]_T \in U.$$

3. Para cada $f \in F_n$ y $t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_n \in T_c^\tau$,

$$t_1 \bowtie s_1, t_2 \bowtie s_2, \dots, t_n \bowtie s_n \implies f(t_1, \dots, t_n) \bowtie f(s_1, \dots, s_n).$$

4. Para cada $t :=_d t(v_1, \dots, v_n) \in T^\tau$ y $t_1, \dots, t_n \in T_c^\tau$, tenemos que

$$t^{A_U}[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie] = t(t_1, \dots, t_n)/\bowtie.$$

5. Para cada $\varphi :=_d \varphi(v_1, \dots, v_n) \in F_\tau$ y $t_1, \dots, t_n \in T_c^\tau$, tenemos que

$$A_U \models \varphi[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie] \quad \text{si y sólo si} \quad [\varphi(t_1, \dots, t_n)]_T \in U.$$

Probaremos (5) por inducción en el k tal que $\varphi \in F_k^\tau$. El caso $k = 0$ es dejado al lector (Al final).

Supongamos que (5) vale para $\varphi \in F_k^\tau$. Sea ahora $\varphi :=_d \varphi(v_1, \dots, v_n) \in F_{k+1}^\tau \setminus F_k^\tau$. Hay varios casos:

Caso $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$

Por la Convención Notacional 6, tenemos $\varphi_i :=_d \varphi_i(v_1, \dots, v_n)$. Entonces:

$$\begin{aligned} A_U \models \varphi[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie] &\iff A_U \models \varphi_1[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie] \text{ o } A_U \models \varphi_2[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie] \\ &\iff [\varphi_1(t_1, \dots, t_n)]_T \in U \text{ o } [\varphi_2(t_1, \dots, t_n)]_T \in U \\ &\iff [\varphi_1(t_1, \dots, t_n)]_T s^T [\varphi_2(t_1, \dots, t_n)]_T \in U \\ &\iff [(\varphi_1(t_1, \dots, t_n) \vee \varphi_2(t_1, \dots, t_n))]_T \in U \\ &\iff [\varphi(t_1, \dots, t_n)]_T \in U. \end{aligned}$$

Caso $\varphi = \forall v \varphi_1$ con $v \in Var \setminus \{v_1, \dots, v_n\}$

Por la Convención Notacional 6, $\varphi_1 :=_d \varphi_1(v_1, \dots, v_n, v)$. Entonces:

$$\begin{aligned} A_U \models \varphi[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie] &\iff A_U \models \varphi_1[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie, t/\bowtie], \quad \text{para todo } t \in T_c^\tau \\ &\iff [\varphi_1(t_1, \dots, t_n, t)]_T \in U, \quad \text{para todo } t \in T_c^\tau \\ &\iff [\forall v \varphi_1(t_1, \dots, t_n, v)]_T \in U \\ &\iff [\varphi(t_1, \dots, t_n)]_T \in U. \end{aligned}$$

Caso $\varphi = \exists v \varphi_1$ con $v \in Var \setminus \{v_1, \dots, v_n\}$

Por la Convención Notacional 6, $\varphi_1 :=_d \varphi_1(v_1, \dots, v_n, v)$. Entonces:

$$\begin{aligned}
A_U \models \varphi[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie] &\iff A_U \models \varphi_1[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie, t/\bowtie], \quad \text{para algún } t \in T_c^\tau \\
&\iff [\varphi_1(t_1, \dots, t_n, t)]_T \in U, \quad \text{para algún } t \in T_c^\tau \\
&\iff ([\varphi_1(t_1, \dots, t_n, t)]_T)^c_T \notin U, \quad \text{para algún } t \in T_c^\tau \\
&\iff [\neg\varphi_1(t_1, \dots, t_n, t)]_T \notin U, \quad \text{para algún } t \in T_c^\tau \\
&\iff [\forall v \neg\varphi_1(t_1, \dots, t_n, v)]_T \notin U \\
&\iff ([\forall v \neg\varphi_1(t_1, \dots, t_n, v)]_T)^{c^T} \in U \\
&\iff [\neg\forall v \neg\varphi_1(t_1, \dots, t_n, v)]_T \in U \\
&\iff [\varphi(t_1, \dots, t_n)]_T \in U.
\end{aligned}$$

Conclusión

El ítem (5) implica que para cada sentencia $\psi \in S^\tau$:

$$A_U \models \psi \quad \text{si y sólo si} \quad [\psi]_T \in U.$$

Por lo tanto:

$$A_U \models \Sigma \quad \text{y} \quad A_U \models \neg\varphi_0,$$

lo cual contradice la suposición de que $T \models \varphi_0$.

Ahora supongamos que τ es cualquier tipo. Sean s_1 y s_2 símbolos no pertenecientes a la lista

$$\forall \exists \neg \vee \wedge \rightarrow \leftrightarrow () , \equiv X 0 1 \dots 9 \mathbf{0} \mathbf{1} \dots \mathbf{9}$$

y tales que ninguno ocurra en alguna palabra de $C \cup F \cup R$.

Si $T \models \varphi$, entonces —usando el Lema de Coincidencia— se tiene:

$$(\Sigma, (C \cup \{s_1 s_2 s_1, s_1 s_2 s_2 s_1, \dots\}, F, R, a)) \models \varphi,$$

por lo cual

$$(\Sigma, (C \cup \{s_1 s_2 s_1, s_1 s_2 s_2 s_1, \dots\}, F, R, a)) \vdash \varphi.$$

Pero por el Lema de Tipos parecidos, concluimos:

$$T \vdash \varphi.$$

□

Caso base: $k = 0$

Si $\varphi \in F_0^\tau$, entonces φ es atómica. Hay dos casos a considerar:

1. Caso φ de la forma $t_1 = t_2$. Debemos ver que

$$A_U \models (t_1 = t_2)[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie] \iff [(t_1 = t_2)]_T \in U.$$

Por definición de la interpretación de términos en A_U ,

$$t^{A_U}[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie] = t(t_1, \dots, t_n)/\bowtie.$$

Asimismo, la interpretación del símbolo “=” en A_U es:

$$A_U \models t_1 = t_2 \iff t_1/\bowtie = t_2/\bowtie \iff [(t_1 \equiv t_2)]_T \in U.$$

Pero en el álgebra de Lindenbaum $[(t_1 = t_2)]_T = [(t_1 \equiv t_2)]_T$, por lo que obtenemos exactamente la condición deseada:

$$A_U \models t_1 = t_2 \iff [(t_1 = t_2)]_T \in U.$$

2. Caso φ de la forma $R(t_1, \dots, t_m)$. Por definición de la interpretación del predicado R en A_U ,

$$A_U \models R(t_1, \dots, t_m)[t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie] \iff [R(t_1, \dots, t_m)]_T \in U.$$

Esta es exactamente la equivalencia requerida para el ítem (5).

Con esto queda demostrado el caso base $k = 0$.

Auxiliares de Demostraciones

1. **(Lema de enumeración).** Sea τ un tipo. Hay una infinitupla $(\gamma_1, \gamma_2, \dots) \in F^{\tau^{\mathbb{N}}}$ tal que:
 - a) $|L_i(\gamma_j)| \leq 1$, para cada $j = 1, 2, \dots$
 - b) Si $|L_i(\gamma)| \leq 1$, entonces $\gamma = \gamma_j$ para algún $j \in \mathbb{N}$.
2. **(Lema del Ínfimo).** Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría y supongamos que τ tiene una cantidad infinita de nombres de constante que no ocurren en las sentencias de Σ . Entonces, para cada fórmula $\varphi =_d \varphi(v)$, se tiene que en el álgebra de Lindenbaum A_T :

$$[\forall v \varphi(v)]_T = \inf(\{ [\varphi(t)]_T : t \in T_c^\tau \}).$$

3. (**Teorema de Rasiowa y Sikorski**). Sea $(B, s, i, c, 0, 1)$ un álgebra de Boole. Sea $a \in B$, $a \neq 0$. Supongamos que (A_1, A_2, \dots) es una infinitupla de subconjuntos de B tal que existe $\inf(A_j)$ para cada $j = 1, 2, \dots$. Entonces existe un filtro primo P que cumple:

- (a) $a \in P$,
- (b) Si $P \supseteq A_j$, entonces $\inf(A_j) \in P$, para cada $j = 1, 2, \dots$

4. (**Tipos parecidos**). Sean $\tau = (C, F, R, a)$ y $\tau' = (C', F', R', a')$ tipos.

a) Si $C \subseteq C'$, $F \subseteq F'$, $R \subseteq R'$ y $a'|_{F \cup R} = a$, entonces

$$(\Sigma, \tau) \vdash \varphi \Rightarrow (\Sigma, \tau') \vdash \varphi.$$

b) Si $C \subseteq C'$, $F = F'$, $R = R'$ y $a' = a$, entonces

$$(\Sigma, \tau') \vdash \varphi \Rightarrow (\Sigma, \tau) \vdash \varphi,$$

cada vez que $\Sigma \cup \{\varphi\} \subseteq S_\tau$.