

Combos de Definiciones

Camila Nanini

23 de noviembre de 2025

Combo 7

Lema 1 (Propiedades básicas de la deducción). *Sea (Σ, τ) una teoría.*

- (1) *(Uso de teoremas) Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \dots, \varphi_n$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.*
- (2) *Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \dots, \varphi_n$. Si R es una regla distinta de GENERALIZACIÓN y ELECCIÓN y φ se deduce de $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ por la regla R, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.*
- (3) *$(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$ si y sólo si $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$.*

(Ver combo 4.1)

Lema 2. *Sea (L, s, i) un reticulado terna y sea θ una congruencia de (L, s, i) . Entonces:*

- (1) *$(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i})$ es un reticulado terna.*
- (2) *El orden parcial $\tilde{\leq}$ asociado al reticulado terna $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i})$ cumple:*

$$x/\theta \tilde{\leq} y/\theta \quad \text{ssi} \quad y\theta(xsy).$$

Demostración. (1) $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i})$ es un reticulado terna.

Por hipótesis θ es una congruencia, por lo tanto las operaciones

$$x/\theta \tilde{s} y/\theta := (xsy)/\theta, \quad x/\theta \tilde{i} y/\theta := (xiy)/\theta$$

están bien definidas (la condición de congruencia garantiza que la clase coiciente no depende de los representantes).

Queda verificar las identidades (I1)–(I7) para las operaciones \tilde{s}, \tilde{i} en L/θ . Tomaremos representantes y usaremos que (L, s, i) satisface (I1)–(I7).

- (I1) Identidad idempotente:

$$(x/\theta) \tilde{s} (x/\theta) = (xsx)/\theta = x/\theta,$$

porque $xsx = x$ en L . De manera análoga $(x/\theta) \tilde{i} (x/\theta) = x/\theta$.

- (I2) Comutatividad de \tilde{s} :

$$(x/\theta) \tilde{s} (y/\theta) = (xsy)/\theta = (ysx)/\theta = (y/\theta) \tilde{s} (x/\theta).$$

Igual para \tilde{i} usando la comutatividad de i en L .

- (I4) Asociatividad de \tilde{s} :

$$((x/\theta) \tilde{s} (y/\theta)) \tilde{s} (z/\theta) = ((xsy)sz)/\theta = (xs(ySz))/\theta = (x/\theta) \tilde{s} ((y/\theta) \tilde{s} (z/\theta)).$$

Análogo para \tilde{i} por (I5).

- (I6) Absorción:

$$(x/\theta) \tilde{s} ((x/\theta) \tilde{i} (y/\theta)) = (xs(xiy))/\theta = x/\theta,$$

porque en L vale $xs(xiy) = x$. La otra ley de absorción (I7) se verifica igual.

Por lo tanto $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i})$ satisface (I1)–(I7), es decir es un reticulado terna.

(2) Relación de orden $\tilde{\leq}$ en el cociente.

Por definición de $\tilde{\leq}$ tenemos que

$$x/\theta \tilde{\leq} y/\theta \text{ si } y/\theta = x/\theta \tilde{s} y/\theta.$$

Pero

$$x/\theta \tilde{s} y/\theta = (xsy)/\theta \quad (\text{por definición de } \tilde{s}),$$

por lo cual tenemos que

$$x/\theta \tilde{\leq} y/\theta \text{ si } y/\theta = (xsy)/\theta.$$

□

Lema 3. Sean (L, s, i) y (L', s', i') reticulados terna y sean (L, \leq) y (L', \leq') los posets asociados. Sea $F : L \rightarrow L'$ una función. Entonces F es un isomorfismo de (L, s, i) en (L', s', i') si y sólo si F es un isomorfismo de (L, \leq) en (L', \leq') .

(Ver combo 4.3)

Axiomas elementales de reticulados terna:

1. $\forall x (x s x = x)$
2. $\forall x (x i x = x)$
3. $\forall x \forall y (x s y = y s x)$
4. $\forall x \forall y (x i y = y i x)$
5. $\forall x \forall y \forall z ((x s y) s z = x s (y s z))$
6. $\forall x \forall y \forall z ((x i y) i z = x i (y i z))$
7. $\forall x \forall y (x s (x i y) = x)$
8. $\forall x \forall y (x i (x s y) = x)$