

Combos de Definiciones

Camila Nanini

27 de noviembre de 2025

Combo 8

Lema 1. Supongamos que $F : A \rightarrow B$ es un isomorfismo. Sea $\varphi =_d \varphi(v_1, \dots, v_n) \in F^\tau$. Entonces:

$$A \vDash \varphi[a_1, a_2, \dots, a_n] \text{ ssi } B \vDash \varphi[F(a_1), F(a_2), \dots, F(a_n)]$$

para cada $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$.

Demostración. Haremos la prueba por inducción en k .

También, en esta prueba se usará sin demostrar el siguiente lema:

Lema 5. Si F es un homomorfismo entonces

$$F(t^A[a_1, \dots, a_n]) = t^B[F(a_1), \dots, F(a_n)]$$

para cada $t \in T^\tau$ y $a_1, \dots, a_n \in A$.

Caso base: $\varphi \in F_0^\tau$. Por el lema de menú para fórmulas, φ puede tener las siguientes formas:

$$\varphi = (s = t) \quad \text{con } s, t \in T^\tau, \quad \text{o bien} \quad \varphi = r(t_1, \dots, t_n), \quad n \geq 1, \quad r \in R_n, \quad t_1, \dots, t_n \in T^\tau.$$

Si $\varphi = (s = t)$ entonces:

$$A \vDash \varphi[a_1, \dots, a_n] \text{ sii } s^A[a_1, \dots, a_n] = t^A[a_1, \dots, a_n].$$

Luego, como F es un isomorfismo,

$$A \vDash \varphi[a_1, \dots, a_n] \text{ sii } F(s^A[a_1, \dots, a_n]) = F(t^A[a_1, \dots, a_n]).$$

Por el Lema 5,

$$A \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \text{ sii } s^B[F(a_1), \dots, F(a_n)] = t^B[F(a_1), \dots, F(a_n)].$$

Por definición,

$$s^B[F(a_1), \dots, F(a_n)] = t^B[F(a_1), \dots, F(a_n)] \text{ sii } B \models \varphi[F(a_1), \dots, F(a_n)].$$

El caso $\varphi = r(t_1, \dots, t_n)$ es similar:

$$A \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \text{ sii } (t_1^A[a_1, \dots, a_n], \dots, t_n^A[a_1, \dots, a_n]) \in r^A.$$

Como F es isomorfismo,

$$A \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \text{ sii } (F(t_1^A[a_1, \dots, a_n]), \dots, F(t_n^A[a_1, \dots, a_n])) \in r^B.$$

Por el Lema 5,

$$A \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \text{ sii } (t_1^B[F(a_1), \dots, F(a_n)], \dots, t_n^B[F(a_1), \dots, F(a_n)]) \in r^B.$$

Y por definición,

$$(t_1^B[F(a_1), \dots, F(a_n)], \dots, t_n^B[F(a_1), \dots, F(a_n)]) \in r^B \text{ sii } B \models \varphi[F(a_1), \dots, F(a_n)].$$

Por lo que queda probado el caso base.

Caso inductivo: $\varphi \in F_{k+1}^\tau$.

Hipótesis inductiva (HI): Si $\varphi \in F_k^\tau$ entonces

$$A \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \iff B \models \varphi[F(a_1), \dots, F(a_n)] \quad \forall a_1, \dots, a_n \in A.$$

Si $\varphi \in F_k^\tau$, entonces claramente se cumple la propiedad, por lo que suponemos $\varphi \in F_{k+1}^\tau - F_k^\tau$. Ahora, por el lema de menú para fórmulas, tenemos distintos casos.

Caso $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, con $\varphi_1, \varphi_2 \in F_k^\tau$.

$$\begin{aligned} A \models \varphi[a_1, \dots, a_n] &\text{ sii } A \models \varphi_1[a_1, \dots, a_n] \text{ o } A \models \varphi_2[a_1, \dots, a_n] && (\text{def. de } \models) \\ &\text{ sii } B \models \varphi_1[F(a_1), \dots, F(a_n)] \text{ o } B \models \varphi_2[F(a_1), \dots, F(a_n)] && (\text{HI}) \\ &\text{ sii } B \models \varphi[F(a_1), \dots, F(a_n)] && (\text{def. de } \models). \end{aligned}$$

Los casos $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, $\varphi = (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$, $\varphi = (\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$ y $\varphi = \neg\varphi_1$ son análogos.

Caso $\varphi = \forall v_j \varphi_1$, con $\varphi_1 \in F_k^\tau$ y $v_j \in v_1, \dots, v_n$. Por definición:

$$A \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \text{ si y solo si } A \models \varphi_1[a_1, \dots, a, \dots, a_n] \text{ para todo } a \in A.$$

Por la HI:

$$A \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \text{ si y solo si } B \models \varphi_1[F(a_1), \dots, F(a), \dots, F(a_n)] \text{ para todo } a \in A.$$

Luego, como F es isomorfismo, $\text{Im}(F) = B$, entonces:

$$A \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \text{ si y solo si } B \models \varphi_1[F(a_1), \dots, b, \dots, F(a_n)] \text{ para todo } b \in B.$$

Finalmente, por definición:

$$A \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \text{ si y solo si } B \models \varphi[F(a_1), \dots, F(a_n)].$$

Caso $\varphi = \forall v \varphi_1$, con $\varphi_1 \in F_k^\tau$ y $v \notin v_1, \dots, v_n$. Por definición:

$$A \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \text{ si y solo si } A \models \varphi_1[a_1, \dots, a_n, a] \text{ para todo } a \in A.$$

Por la HI:

$$A \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \text{ si y solo si } B \models \varphi_1[F(a_1), \dots, F(a_n), F(a)] \text{ para todo } a \in A.$$

Luego, como F es isomorfismo, $\text{Im}(F) = B$, entonces:

$$A \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \text{ si y solo si } B \models \varphi_1[F(a_1), \dots, F(a_n), b] \text{ para todo } b \in B.$$

Finalmente, por definición:

$$A \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \text{ si y solo si } B \models \varphi[F(a_1), \dots, F(a_n)].$$

El caso $\varphi = \exists$ es análogo. \square

Lema 2. Sean (P, \leq) y (P', \leq') posets. Supongamos que F es un isomorfismo de (P, \leq) en (P', \leq') .

- (a) Para cada $S \subseteq P$ y cada $a \in P$, se tiene que a es cota superior (resp. inferior) de S si y sólo si $F(a)$ es cota superior (resp. inferior) de $F(S)$.
- (b) Para cada $S \subseteq P$, se tiene que existe $\sup(S)$ si y sólo si existe $\sup(F(S))$ y en tal caso se cumple que:

$$F(\sup(S)) = \sup(F(S)).$$

Demostración. (a) Supongamos que a es cota superior de S . Veamos que entonces $F(a)$ es cota superior de $F(S)$. Sea $x \in F(S)$. Sea $s \in S$ tal que $x = F(s)$. Ya que $s \leq a$, tenemos que $x = F(s) \leq' F(a)$.

Supongamos ahora que $F(a)$ es cota superior de $F(S)$ y veamos que entonces a es cota superior de S . Sea $s \in S$. Ya que $F(s) \leq' F(a)$, tenemos que

$$s = F^{-1}(F(s)) \leq F^{-1}(F(a)) = a.$$

(b) Supongamos que existe $\sup(S)$. Veamos entonces que $F(\sup(S))$ es el supremo de $F(S)$. Por demostración anterior, $F(\sup(S))$ es cota superior de $F(S)$. Supongamos que b es cota superior de $F(S)$. Entonces $F^{-1}(b)$ es cota superior de S , por lo cual $\sup(S) \leq F^{-1}(b)$, produciendo $F(\sup(S)) \leq' b$.

En forma análoga, se ve que si existe $\sup(F(S))$, entonces $F^{-1}(\sup(F(S)))$ es el supremo de S . \square

Auxiliares de Demostraciones

1. Lectura única de fórmulas declaradas. Sea τ un tipo cualquiera y $\varphi \in F^\tau$. Supongamos

$$\varphi =_d \varphi(v_1, \dots, v_n).$$

Entonces se cumple una y sólo una de las siguientes:

- a) $\varphi = (t \equiv s)$, con $t, s \in T^\tau$, únicos.
- b) $\varphi = r(t_1, \dots, t_m)$, con $r \in R_m$ y $t_1, \dots, t_m \in T^\tau$.
- c) $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, con $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$, únicas.
- d) $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, con $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$, únicas.
- e) $\varphi = (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$, con $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$, únicas.
- f) $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$, con $\varphi_1, \varphi_2 \in F^\tau$, únicas.
- g) $\varphi = \neg\varphi_1$, con $\varphi_1 \in F^\tau$, única.
- h) $\varphi = \forall v_j \varphi_1$, con $v_j \in \{v_1, \dots, v_n\}$ y $\varphi_1 \in F^\tau$, únicas.
- i) $\varphi = \forall v \varphi_1$, con $v \in Var - \{v_1, \dots, v_n\}$ y $\varphi_1 \in F^\tau$, únicas.
- j) $\varphi = \exists v_j \varphi_1$, con $v_j \in \{v_1, \dots, v_n\}$ y $\varphi_1 \in F^\tau$, únicas.
- k) $\varphi = \exists v \varphi_1$, con $v \in Var - \{v_1, \dots, v_n\}$ y $\varphi_1 \in F^\tau$, únicas.