Combos de Definiciones

Camila Nanini

10 de noviembre de 2025

Combo 7

Lema 1 (Propiedades básicas de la deducción)**.** *Sea* (Σ, τ) *una teoría.*

(1) (Uso de teoremas) Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *y* $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$*, entonces* $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$*.*

(2) Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$*. Si* R *es una regla distinta de* GENERALIZACIÓN *y* ELECCIÓN *y* φ *se deduce de* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *por la regla* R*, entonces* $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$*.*

(3) $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$ *si y sólo si* $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$*.*

(Ver combo 4.1)

Lema 2. *Sea* (L, s, i) *un reticulado terna y sea* θ *una congruencia de* (L, s, i)*. Entonces:*

(1) $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i})$ *es un reticulado terna.*

(2) El orden parcial $\tilde{\leq}$ *asociado al reticulado terna* $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i})$ *cumple:*

$$x/\theta \tilde{\leq} y/\theta \quad ssi \quad y\theta(xsy).$$

Demostración. **(1)** $(L/\theta, \widetilde{s}, \widetilde{\imath})$ **es un reticulado terna.**

Por hipótesis θ es una congruencia, por lo tanto las operaciones

$$x/\theta \;\widetilde{s}\; y/\theta := (xsy)/\theta, \qquad x/\theta \;\widetilde{\imath}\; y/\theta := (x\imath y)/\theta$$

están bien definidas (la condición de congruencia garantiza que la clase cociente no depende de los representantes).

Queda verificar las identidades (I1)–(I7) para las operaciones $\widetilde{s}, \widetilde{\imath}$ en L/θ. Tomaremos representantes y usaremos que (L, s, i) satisface (I1)–(I7).

- (I1) Identidad idempotente:

$$(x/\theta)\ \widetilde{s}\ (x/\theta) = (xsx)/\theta = x/\theta,$$

porque $xsx = x$ en L. De manera análoga $(x/\theta)\ \widetilde{\imath}\ (x/\theta) = x/\theta$.

- (I2) Conmutatividad de $\widetilde{s}$:

$$(x/\theta)\ \widetilde{s}\ (y/\theta) = (xsy)/\theta = (ysx)/\theta = (y/\theta)\ \widetilde{s}\ (x/\theta).$$

Igual para $\widetilde{\imath}$ usando la conmutatividad de i en L.

- (I4) Asociatividad de $\widetilde{s}$:

$$\big((x/\theta)\,\widetilde{s}\,(y/\theta)\big)\,\widetilde{s}\,(z/\theta) = ((xsy)sz)/\theta = (xs(ysz))/\theta = (x/\theta)\,\widetilde{s}\,\big((y/\theta)\,\widetilde{s}\,(z/\theta)\big).$$

Análogo para $\widetilde{\imath}$ por (I5).

- (I6) Absorción:

$$(x/\theta)\ \widetilde{s}\ \big((x/\theta)\ \widetilde{\imath}\ (y/\theta)\big) = (xs(x\imath y))/\theta = x/\theta,$$

porque en L vale $xs(x\imath y) = x$. La otra ley de absorción (I7) se verifica igual.

Por lo tanto $(L/\theta, \widetilde{s}, \widetilde{\imath})$ satisface (I1)–(I7), es decir es un reticulado terna.

(2) Relación de orden $\widetilde{\leq}$ en el cociente.
Por definición de $\widetilde{\leq}$ tenemos que

$$x/\theta \widetilde{\leq} y/\theta \text{ sii } y/\theta = x/\theta \widetilde{s} y/\theta.$$

Pero

$$x/\theta \widetilde{s} y/\theta = (xsy)/\theta \quad \text{(por definición de } \widetilde{s}\text{)},$$

por lo cual tenemos que

$$x/\theta \widetilde{\leq} y/\theta \text{ sii } y/\theta = (x\,s\,y)/\theta.$$

□

Lema 3. *Sean (L, s, i) y (L', s', i') reticulados terna y sean $(L, \leq)$ y $(L', \leq'$ $)$ los posets asociados. Sea $F : L \to L'$ una función. Entonces F es un isomorfismo de (L, s, i) en (L', s', i') si y sólo si F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$.*

(Ver combo 4.3)