Combos de Definiciones

Camila Nanini

6 de noviembre de 2025

Combo 1

Teorema 1 (del Filtro Primo)**.** *Sea (L, s, i) un reticulado terna distributivo y F un filtro. Supongamos $x_0 \in L - F$. Entonces hay un filtro primo P tal que*

$$x_0 \notin P \quad y \quad F \subseteq P.$$

Lema 1 (Propiedades básicas de la consistencia)**.** *Sea (Σ, τ) una teoría.*

(1) Si (Σ, τ) es inconsistente, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, para toda sentencia φ.

(2) Si (Σ, τ) es consistente y $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente.

(3) Si $(\Sigma, \tau) \nvdash \neg\varphi$, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente.

Combo 2

Teorema 2 (de Dedekind)**.** *Sea (L, s, i) un reticulado terna. La relación binaria definida por:*

$$x \leq y \quad \textit{si y sólo si} \quad xsy = y$$

es un orden parcial sobre L para el cual se cumple que:

$$\sup(\{x, y\}) = xsy, \quad \inf(\{x, y\}) = xiy$$

cualesquiera sean $x, y \in L$.

Lema 2. *Supongamos que $\vec{a}, \vec{b}$ son asignaciones tales que si $x_i \in Li(\varphi)$, entonces $a_i = b_i$. Entonces:*

$$A \vDash \varphi[\vec{a}] \textit{ si y sólo si } A \vDash \varphi[\vec{b}].$$

Combo 3

Teorema 3 (Lectura única de términos)**.** *Dado $t \in T^\tau$, se da una de las siguientes:*

(1) $t \in Var \cup C$

(2) Hay únicos $n \geq 1$, $f \in F^n$, $t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$ tales que $t = f(t_1, \ldots, t_n)$.

Lema 3. *Supongamos que $F : A \to B$ es un isomorfismo. Sea $\varphi \in F^\tau$. Entonces*

$$A \vDash \varphi[(a_1, a_2, \ldots)] \text{ si y sólo si } B \vDash \varphi[(F(a_1), F(a_2), \ldots)]$$

para cada $(a_1, a_2, \ldots) \in A^N$. En particular, A y B satisfacen las mismas sentencias de tipo τ.

Teorema 4. *Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría. Entonces*

$$(S^\tau / \dashv\vdash_T, s^T, i^T, c^T, 0^T, 1^T)$$

es un álgebra de Boole.
Pruebe sólo el ítem (6).

Combo 4

Lema 4 (Propiedades básicas de la deducción)**.** *Sea (Σ, τ) una teoría.*

(1) (Uso de teoremas) Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.

(2) Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Si R es una regla distinta de GENERALIZACIÓN *y* ELECCIÓN *y φ se deduce de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ por la regla R, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.*

(3) $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \to \psi)$ si y sólo si $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$.

Teorema 5. *Sea $(L, s, i, c, 0, 1)$ un álgebra de Boole y sean $a, b \in B$. Se tiene que:*

(1) $(aib)^c = a^c s b^c$

(2) $aib = 0$ *si y sólo si* $b \leq a^c$

Lema 5. *Sean (L, s, i) y (L', s', i') reticulados terna y sean $(L, \leq)$ y $(L', \leq'$ $)$ los posets asociados. Sea $F : L \to L'$ una función. Entonces F es un isomorfismo de (L, s, i) en (L', s', i') si y sólo si F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$.*

Combo 5

Teorema 6 (de Completitud)**.** *Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría de primer orden. Si $T \models \varphi$, entonces $T \vdash \varphi$.*
Haga sólo el caso en que τ tiene una cantidad infinita de nombres de constantes que no ocurren en las sentencias de Σ. En la exposición de la prueba no es necesario que demuestre los ítems (1) y (5).

Combo 6

Teorema 7 (de Completitud)**.** *Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría de primer orden. Si $T \models \varphi$, entonces $T \vdash \varphi$.*
Haga sólo el caso en que τ tiene una cantidad infinita de nombres de constantes que no ocurren en las sentencias de Σ. En la exposición de la prueba no es necesario que demuestre los ítems (1), (2), (3) y (4).

Combo 7

Lema 6 (Propiedades básicas de la deducción)**.** *Sea (Σ, τ) una teoría.*

(1) (Uso de teoremas) Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.

(2) Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Si R es una regla distinta de GENERALIZACIÓN y ELECCIÓN y φ se deduce de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ por la regla R, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.

(3) $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \to \psi)$ si y sólo si $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$.

Lema 7. *Sea (L, s, i) un reticulado terna y sea θ una congruencia de (L, s, i). Entonces:*

(1) $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i})$ es un reticulado terna.

(2) El orden parcial $\tilde{\leq}$ asociado al reticulado terna $(L/\theta, \tilde{s}, \tilde{i})$ cumple:

$$x/\theta \tilde{\leq} y/\theta \quad ssi \quad y\theta(xsy).$$

Lema 8. *Sean (L, s, i) y (L', s', i') reticulados terna y sean $(L, \leq)$ y $(L', \leq')$ los posets asociados. Sea $F : L \to L'$ una función. Entonces F es un isomorfismo de (L, s, i) en (L', s', i') si y sólo si F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$.*

Combo 8

Lema 9. *Supongamos que* $F : A \to B$ *es un isomorfismo. Sea* $\varphi =_d \varphi(v_1, \ldots, v_n) \in F_\tau$*. Entonces:*

$$A \vDash \varphi[a_1, a_2, \ldots, a_n] \text{ ssi } B \vDash \varphi[F(a_1), F(a_2), \ldots, F(a_n)]$$

para cada $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$*.*

Lema 10. *Sean* $(P, \leq)$ *y* $(P', \leq')$ *posets. Supongamos que* F *es un isomorfismo de* $(P, \leq)$ *en* $(P', \leq')$*.*

(a) Para cada $S \subseteq P$ *y cada* $a \in P$*, se tiene que* a *es cota superior (resp. inferior) de* S *si y sólo si* $F(a)$ *es cota superior (resp. inferior) de* $F(S)$*.*

(b) Para cada $S \subseteq P$*, se tiene que existe* $\sup(S)$ *si y sólo si existe* $\sup(F(S))$ *y en tal caso se cumple que:*

$$F(\sup(S)) = \sup(F(S)).$$