Combos de Definiciones

Camila Nanini

10 de noviembre de 2025

Combo 4

Lema 1 (Propiedades básicas de la deducción)**.** *Sea* (Σ, τ) *una teoría.*

(1) (Uso de teoremas) Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *y* $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$*, entonces* $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$*.*

(2) Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$*. Si* R *es una regla distinta de* GENERALIZACIÓN *y* ELECCIÓN *y* φ *se deduce de* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *por la regla* R*, entonces* $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$*.*

(3) $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \to \psi)$ *si y sólo si* $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$*.*

Teorema 1. *Sea* $(L, s, i, c, 0, 1)$ *un álgebra de Boole y sean* $a, b \in B$*. Se tiene que:*

(1) $(aib)^c = a^c s b^c$

(2) $aib = 0$ *si y sólo si* $b \leq a^c$

Demostración. **(1)**

$$(a\,i\,b)^c = a^c\,s\,b^c.$$

Sea $(L, s, i, c, 0, 1)$ un álgebra de Boole, es decir, un reticulado complementado distributivo. En un álgebra de Boole vale la distributividad:

$$x\,s\,(y\,i\,z) = (x\,s\,y)\,i\,(x\,s\,z), \quad x\,i\,(y\,s\,z) = (x\,i\,y)\,s\,(x\,i\,z).$$

Queremos probar que $(a\,i\,b)^c$ cumple las propiedades de complemento de $a^c\,s\,b^c$. Para ello verificamos:

$$(a\,i\,b)\,s\,(a^c\,s\,b^c) = 1 \quad \text{y} \quad (a\,i\,b)\,i\,(a^c\,s\,b^c) = 0.$$

Primero, la unión da 1:

$$\begin{aligned}(a\,i\,b)\,s\,(a^c\,s\,b^c) &= \big((a\,s\,a^c)\,s\,(b\,s\,b^c)\big) \quad \text{(por distributividad)}\\ &= (1\,s\,1) = 1.\end{aligned}$$

Luego, la intersección da 0:

$$\begin{aligned}(a\,i\,b)\,i\,(a^c\,s\,b^c) &= \big((a\,i\,a^c)\,s\,(b\,i\,b^c)\big) \quad \text{(por distributividad)}\\ &= (0\,s\,0) = 0.\end{aligned}$$

Por unicidad del complemento, se tiene entonces:

$$(a\,i\,b)^c = a^c\,s\,b^c.$$

(2) Queremos probar que

$$a\,i\,b = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad b \leq a^c.$$

($\Rightarrow$) Supongamos $aib = 0$. Se tiene

$$\begin{aligned}b &= (bia)\,s\,(bia^c) \quad \text{(por lema anterior)}\\ &= (aib)\,s\,(b_ia^c)\\ &= 0\,s\,(b_ia^c)\\ &= (bia^c) \leq a^c,\end{aligned}$$

por lo cual $b \leq a^c$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora $b \leq a^c$. Ya que $a \leq a$, por lema de "ser menor que ínfimo", aplicado al reticulado par $(B, \leq)$, nos dice que

$$aib \leq aia^c.$$

Ya que $aia^c = 0$, obtenemos que

$$aib = 0.$$

$\square$

Lema 2. *Sean (L, s, i) y (L', s', i') reticulados terna y sean $(L, \leq)$ y $(L', \leq'$ $)$ los posets asociados. Sea $F : L \to L'$ una función. Entonces F es un isomorfismo de (L, s, i) en (L', s', i') si y sólo si F es un isomorfismo de $(L, \leq)$ en $(L', \leq')$.*

Demostración. Sea $F : L \to L'$ un isomorfismo de posets, es decir:

a F es biyectiva,

b para todo $x, y \in L$, se cumple que

$$x \leq y \iff F(x) \leq' F(y).$$

Queremos probar que F es un isomorfismo de reticulados terna, es decir, que además preserva las operaciones:

$$F(x\,s\,y) = F(x)\,s'\,F(y), \qquad F(x\,i\,y) = F(x)\,i'\,F(y),$$

para todo $x, y \in L$.

Por el teorema de Dedekind sabemos que

$$a\,s\,b = \sup\{a, b\} \text{ en } (L, \leq).$$

Entonces $a \leq a\,s\,b$ y $b \leq a\,s\,b$.

Sean $x, y \in L$ y definamos $z := x\,s\,y$ en L. Queremos probar que

$$F(z) = F(x)\,s'\,F(y).$$

1. $F(z)$ es cota superior de $\{F(x), F(y)\}$

Puesto que z es cota superior de $\{x, y\}$ en L, se tiene $x \leq z$ y $y \leq z$. Por la hipótesis de isomorfismo, $F(x) \leq' F(z)$ y $F(y) \leq' F(z)$. Por tanto, $F(z)$ es cota superior de $\{F(x), F(y)\}$ en L'.

2. $F(z)$ es la menor cota superior

Sea $w' \in L'$ cualquier cota superior de $\{F(x), F(y)\}$; es decir, $F(x) \leq' w'$ y $F(y) \leq' w'$. Como F es biyectiva, existe $w \in L$ tal que $F(w) = w'$.
Usando la reflexión del orden (isomorfismo), obtenemos $x \leq w$ y $y \leq w$. Entonces $z = \sup\{x, y\} \leq w$. Aplicando F y usando que F preserva el orden, se tiene

$$F(z) \leq' F(w) = w'.$$

Esto muestra que cualquier cota superior w' de $\{F(x), F(y)\}$ domina a $F(z)$. Por la definición de supremo, $F(z)$ es la menor cota superior, es decir:

$$F(z) = \sup_{L'}\{F(x), F(y)\}.$$

Por la definición de la operación s' en el reticulado terna asociado a $(L', \leq')$, se cumple:

$$\sup_{L'}\{F(x), F(y)\} = F(x)\, s'\, F(y).$$

Por tanto,

$$F(x\, s\, y) = F(z) = F(x)\, s'\, F(y),$$

como queríamos.

La prueba para el ínfimo es dual. $\square$

Auxiliares de Demostraciones

1. Teorema de Dedekind: Sea (L, s, i) un reticulado terna. La relación binaria definida por

   $$x \leq y \text{ si y sólo si } x\, s\, y = y$$

   es un orden parcial sobre L, para el cual se cumple que:

   $$\sup\{x, y\} = x\, s\, y \quad \text{y} \quad \text{ínf}\{x, y\} = x\, i\, y$$

   cualesquiera sean $x, y \in L$.

2. Unicidad del complemento: Sea $(L, s, i, 0, 1)$ un reticulado acotado. Si $(L, s, i, 0, 1)$ es distributivo, entonces todo elemento tiene a lo sumo un complemento. Es decir, si

   $$x\, s\, u = x\, s\, v = 1 \quad \text{y} \quad x\, i\, u = x\, i\, v = 0,$$

   entonces $u = v$, cualesquiera sean $x, u, v \in L$.

3. "Lema anterior": Sea $(B, s, i, c, 0, 1)$ un álgebra de Boole. Cualesquiera sean $x, y \in B$, se tiene que

   $$y = (y\, i\, x)\, s\, (y\, i\, x^c).$$