

Combo 4

Camila Nanini

27 de noviembre de 2025

Combo 4

Lema 1 (Propiedades básicas de la deducción). *Sea (Σ, τ) una teoría.*

- (1) *(Uso de teoremas) Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \dots, \varphi_n$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.*
- (2) *Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \dots, \varphi_n$. Si R es una regla distinta de GENERALIZACIÓN y ELECCIÓN y φ se deduce de $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ por la regla R , entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.*
- (3) *$(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$ si y sólo si $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$.*

Demostración. (1) Nótese que basta con hacer el caso $n = 1$. El caso con $n \geq 2$ se obtiene aplicando n veces el caso $n = 1$. Supongamos entonces que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1\}, \tau) \vdash \varphi$. Sea $(\alpha_1 \dots \alpha_h, I_1 \dots I_h)$ una prueba formal de φ_1 en (Σ, τ) . Sea $(\psi_1 \dots \psi_m, J_1 \dots J_m)$ una prueba formal de φ en $(\Sigma \cup \{\varphi_1\}, \tau)$.

Nótese que, por los Lemas Cambio de índice de hipótesis y Cambio de nombres de constante auxiliares, podemos suponer que estas dos pruebas no comparten ningún nombre de constante auxiliar y que tampoco comparten números asociados a hipótesis o tesis.

Para cada $i = 1, \dots, m$, definamos \tilde{J}_i de la siguiente manera:

- Si $J_i = \alpha$ AXIOMAPROPIO, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$ y $\psi_i = \varphi_1$, entonces $\tilde{J}_i = \alpha$ EVOCACIÓN(\bar{h}).
- Si $J_i = \alpha$ AXIOMAPROPIO, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$ y $\psi_i \notin \{\varphi_1\}$, entonces $\tilde{J}_i = \alpha$ AXIOMAPROPIO.
- Si $J_i = \alpha$ AXIOMALÓGICO, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$, entonces $\tilde{J}_i = \alpha$ AXIOMALÓGICO.

- Si $J_i = \alpha \text{CONCLUSIÓN}$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$, entonces $\tilde{J}_i = \alpha \text{CONCLUSIÓN}$.
- Si $J_i = \text{HIPÓTESIS}\bar{k}$, entonces $\tilde{J}_i = \text{HIPÓTESIS}\bar{k}$.
- Si $J_i = \alpha R(\bar{l}_1, \dots, \bar{l}_k)$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$, entonces

$$\tilde{J}_i = \alpha R(\overline{\bar{l}_1 + h}, \dots, \overline{\bar{l}_k + h}).$$

Es fácil chequear que

$$(\alpha_1 \dots \alpha_h \psi_1 \dots \psi_m, I_1 \dots I_h \tilde{J}_1 \dots \tilde{J}_m)$$

es una prueba formal de φ en (Σ, τ) .

(2) Nótese que:

1. φ_1 AXIOMAPROPIO
2. φ_2 AXIOMAPROPIO
- \vdots
- n . φ_n AXIOMAPROPIO
- $n+1$. φ $R(\bar{1}, \dots, \bar{n})$

es una prueba formal de φ en $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}, \tau)$, lo cual por (1) nos dice que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.

(3) Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$. Entonces tenemos que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash (\varphi \rightarrow \psi), \varphi$, lo cual por (2) nos dice que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$.

Supongamos ahora que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$. Sea $(\varphi_1 \dots \varphi_n, J_1 \dots J_n)$ una prueba formal de ψ en $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$.

Para cada $i = 1, \dots, n$, definamos \tilde{J}_i como sigue:

- Si $\varphi_i = \varphi$ y $J_i = \alpha \text{AXIOMAPROPIO}$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$, entonces $\tilde{J}_i = \alpha \text{EVOCACIÓN}(1)$.
- Si $\varphi_i \neq \varphi$ y $J_i = \alpha \text{AXIOMAPROPIO}$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$, entonces $\tilde{J}_i = \alpha \text{AXIOMAPROPIO}$.
- Si $J_i = \alpha \text{AXIOMALÓGICO}$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$, entonces $\tilde{J}_i = \alpha \text{AXIOMALÓGICO}$.
- Si $J_i = \alpha \text{CONCLUSIÓN}$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$, entonces $\tilde{J}_i = \alpha \text{CONCLUSIÓN}$.

- Si $J_i = \text{HIPÓTESIS}\bar{k}$, entonces $\tilde{J}_i = \text{HIPÓTESIS}\bar{k}$.
- Si $J_i = \alpha R(\bar{l}_1, \dots, \bar{l}_k)$, con $\alpha \in \{\varepsilon\} \cup \{\text{TESIS}\bar{k} : k \in \mathbb{N}\}$, entonces

$$\tilde{J}_i = \alpha R(\overline{\bar{l}_1 + 1}, \dots, \overline{\bar{l}_k + 1}).$$

Sea m tal que ninguna J_i es igual a $\text{HIPÓTESIS}\bar{m}$. Nótese que \tilde{J}_n no es de la forma $\text{TESIS}\bar{k}\beta$ ni de la forma $\text{HIPÓTESIS}\bar{k}$, por lo cual $\text{TESIS}\bar{m}\tilde{J}_n$ es una justificación.

Es fácil chequear que:

$$(\varphi\varphi_1 \dots \varphi_n(\varphi \rightarrow \psi), \text{HIPÓTESIS}\bar{m}\tilde{J}_1 \dots \tilde{J}_{n-1}\text{TESIS}\bar{m}\tilde{J}_n \text{CONCLUSIÓN})$$

es una prueba formal de $(\varphi \rightarrow \psi)$ en (Σ, τ) . □

Teorema 1. Sea $(L, s, i, c, 0, 1)$ un álgebra de Boole y sean $a, b \in B$. Se tiene que:

$$(1) \quad (aib)^c = a^c s b^c$$

$$(2) \quad aib = 0 \text{ si y sólo si } b \leq a^c$$

Demostración. (1)

$$(aib)^c = a^c s b^c.$$

Sea $(L, s, i, c, 0, 1)$ un álgebra de Boole, es decir, un reticulado complementado distributivo. En un álgebra de Boole vale la distributividad:

$$x s (y i z) = (x s y) i (x s z), \quad x i (y s z) = (x i y) s (x i z).$$

Queremos probar que $(aib)^c$ cumple las propiedades de complemento de $a^c s b^c$. Para ello verificamos:

$$(aib) s (a^c s b^c) = 1 \quad \text{y} \quad (aib) i (a^c s b^c) = 0.$$

Primero, la unión da 1:

$$\begin{aligned} (aib) s (a^c s b^c) &= ((a s a^c) s (b s b^c)) \quad (\text{por distributividad}) \\ &= (1 s 1) = 1. \end{aligned}$$

Luego, la intersección da 0:

$$\begin{aligned} (aib) i (a^c s b^c) &= ((a i a^c) s (b i b^c)) \quad (\text{por distributividad}) \\ &= (0 s 0) = 0. \end{aligned}$$

Por unicidad del complemento, se tiene entonces:

$$(a \, i \, b)^c = a^c \, s \, b^c.$$

(2) Queremos probar que $a \, i \, b = 0 \iff b \leq a^c$.

(\Rightarrow) Supongamos $a \, i \, b = 0$. Se tiene

$$\begin{aligned} b &= (b \, i \, a) \, s \, (b \, i \, a^c) \quad (\text{por lema anterior}) \\ &= (a \, i \, b) \, s \, (b \, i \, a^c) \\ &= 0 \, s \, (b \, i \, a^c) \\ &= (b \, i \, a^c) \leq a^c, \end{aligned}$$

por lo cual $b \leq a^c$.

(\Leftarrow) Supongamos ahora $b \leq a^c$. Entonces como $a \, i \, b \leq b$ por transitividad $a \, i \, b \leq a^c$. Ahora $a \leq a$, por lo que $a \, i \, b \leq a \, i \, a^c$. Ya que $a \, i \, a^c = 0$, obtenemos que $a \, i \, b \leq 0$ y por axioma $0 \leq a \, i \, b$, entonces $a \, i \, b = 0$.

Pequeña demo del paso $a \, i \, b \leq a \, i \, a^c$ Supongamos $a \, i \, b \leq a^c$. Por definición de \leq ,

$$(a \, i \, b) \, i \, a^c = a \, i \, b. \tag{1}$$

Queremos probar $a \, i \, b \leq a \, i \, a^c$, es decir demostrar

$$(a \, i \, b) \, i \, (a \, i \, a^c) = a \, i \, b.$$

$$\begin{aligned} (a \, i \, b) \, i \, (a \, i \, a^c) &= a \, i \, (b \, i \, (a \, i \, a^c)) \quad (\text{asociatividad / conmutatividad}) \\ &= a \, i \, ((b \, i \, a) \, i \, a^c) \quad (\text{asociatividad}) \\ &= a \, i \, ((a \, i \, b) \, i \, a^c) \quad (\text{conmutatividad } b \, i \, a = a \, i \, b) \\ &= a \, i \, (a \, i \, b) \quad (\text{por (1), sustituyendo } (a \, i \, b) \, i \, a^c = a \, i \, b) \\ &= (a \, i \, a) \, i \, b \quad (\text{asociatividad}) \\ &= a \, i \, b \quad (\text{idempotencia } a \, i \, a = a). \end{aligned}$$

Hemos obtenido

$$(a \, i \, b) \, i \, (a \, i \, a^c) = a \, i \, b,$$

que por la definición de \leq es precisamente $a \, i \, b \leq a \, i \, a^c$.

□

Lema 2. Sean (L, s, i) y (L', s', i') reticulados terna y sean (L, \leq) y (L', \leq') los posets asociados. Sea $F : L \rightarrow L'$ una función. Entonces F es un isomorfismo de (L, s, i) en (L', s', i') si y sólo si F es un isomorfismo de (L, \leq) en (L', \leq') .

Demostración. (\Leftarrow); Sea $F : L \rightarrow L'$ un isomorfismo de posets, es decir:

a F es biyectiva,

b para todo $x, y \in L$, se cumple que $x \leq y \iff F(x) \leq' F(y)$

Queremos probar que F es un isomorfismo de reticulados terna, es decir, que preserva las operaciones:

$$F(xsy) = F(x)s'F(y), \quad F(xiy) = F(x)i'F(y),$$

para todo $x, y \in L$.

Por el teorema de Dedekind sabemos que $asb = \sup\{a, b\}$ en (L, \leq) . Entonces $a \leq asb$ y $b \leq asb$.

Sean $x, y \in L$ y definamos $z := xsy$ en L . Queremos probar que

$$F(z) = F(x)s'F(y).$$

1. $F(z)$ es cota superior de $\{F(x), F(y)\}$

Puesto que z es cota superior de $\{x, y\}$ en L , se tiene $x \leq z$ y $y \leq z$. Por la hipótesis de isomorfismo, $F(x) \leq' F(z)$ y $F(y) \leq' F(z)$. Por tanto, $F(z)$ es cota superior de $\{F(x), F(y)\}$ en L' .

2. $F(z)$ es la menor cota superior

Sea $w' \in L'$ cualquier cota superior de $\{F(x), F(y)\}$; es decir, $F(x) \leq' w'$ y $F(y) \leq' w'$. Como F es biyectiva, existe $w \in L$ tal que $F(w) = w'$.

Usando la reflexión del orden (isomorfismo), obtenemos $x \leq w$ y $y \leq w$. Entonces $z = \sup\{x, y\} \leq w$. Aplicando F y usando que F preserva el orden, se tiene

$$F(z) \leq' F(w) = w'.$$

Esto muestra que cualquier cota superior w' de $\{F(x), F(y)\}$ domina a $F(z)$.

(\Rightarrow); Supongamos que F es un isomorfismo de (L, s, i) en (L', s', i') . Sean $x, y \in L$ tales que $x \leq y$. Tenemos que $y = xsy$, por lo cual $F(y) = F(xsy) = F(x)s'F(y)$, ocurriendo que $F(x) \leq' F(y)$. De forma similar se puede ver que F^{-1} es también un homomorfismo de (L', \leq') en (L, \leq) .

La prueba para el ínfimo es dual. □

Auxiliares de Demostraciones

1. Teorema de Dedekind: Sea (L, s, i) un reticulado terna. La relación binaria definida por

$$x \leq y \text{ si y sólo si } x s y = y$$

es un orden parcial sobre L , para el cual se cumple que:

$$\sup\{x, y\} = x s y \quad \text{y} \quad \inf\{x, y\} = x i y$$

cualesquiera sean $x, y \in L$.

2. Unicidad del complemento: Sea $(L, s, i, 0, 1)$ un reticulado acotado. Si $(L, s, i, 0, 1)$ es distributivo, entonces todo elemento tiene a lo sumo un complemento. Es decir, si

$$x s u = x s v = 1 \quad \text{y} \quad x i u = x i v = 0,$$

entonces $u = v$, cualesquiera sean $x, u, v \in L$.

3. "Lema anterior": Sea $(B, s, i, c, 0, 1)$ un álgebra de Boole. Cualesquiera sean $x, y \in B$, se tiene que

$$y = (y i x) s (y i x^c).$$

4. Cambio de índice de hipótesis: Sea (φ, J) una prueba formal de φ en (Σ, τ) . Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $J_i \neq \text{HIPÓTESIS}\bar{m}$, para cada $i = 1, \dots, n(\varphi)$. Supongamos que $J_i = \text{HIPÓTESIS}\bar{k}$ y que $J_j = \text{TESIS}\bar{k}\alpha$, con $[\alpha]_1 \notin \text{Num}$. Sea \tilde{J} el resultado de reemplazar en J la justificación J_i por $\text{HIPÓTESIS}\bar{m}$ y reemplazar la justificación J_j por $\text{TESIS}\bar{m}\alpha$. Entonces (φ, \tilde{J}) es una prueba formal de φ en (Σ, τ) .
5. Cambio de nombres de constantes auxiliares: Sea (φ, J) una prueba formal de φ en (Σ, τ) . Sea C_1 el conjunto de nombres de constantes auxiliares de (φ, J) . Sea $e \in C_1$. Sea $\tilde{e} \notin C \cup C_1$ tal que

$$(C \cup (C_1 - \{e\}) \cup \{\tilde{e}\}, F, R, a)$$

es un tipo.

Sea $\tilde{\varphi}_i$ el resultado de reemplazar en φ_i cada ocurrencia de e por \tilde{e} .

Entonces

$$(\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_{n(\varphi)}, J)$$

es una prueba formal de φ en (Σ, τ) .

Axiomas elementales de reticulados ternarios:

1. $\forall x (x \ s \ x = x)$
2. $\forall x (x \ i \ x = x)$
3. $\forall x \forall y (x \ s \ y = y \ s \ x)$
4. $\forall x \forall y (x \ i \ y = y \ i \ x)$
5. $\forall x \forall y \forall z ((x \ s \ y) \ s \ z = x \ s (y \ s \ z))$
6. $\forall x \forall y \forall z ((x \ i \ y) \ i \ z = x \ i (y \ i \ z))$
7. $\forall x \forall y (x \ s (x \ i \ y) = x)$
8. $\forall x \forall y (x \ i (x \ s \ y) = x)$