Combos de Definiciones

Camila Nanini

10 de noviembre de 2025

Combo 8

Lema 1. *Supongamos que* $F : A \to B$ *es un isomorfismo. Sea* $\varphi =_d \varphi(v_1, \dots, v_n) \in F_\tau$. *Entonces:*

$$A \models \varphi[a_1, a_2, \dots, a_n] \text{ ssi } B \models \varphi[F(a_1), F(a_2), \dots, F(a_n)]$$

para cada $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$.

Demostración. Haremos la prueba por inducción en k.

También, en esta prueba se usará sin demostrar el siguiente lema:

> **Lema 5.** Si F es un homomorfismo entonces
>
> $$F(t^A[a_1, \dots, a_n]) = t^B[F(a_1), \dots, F(a_n)]$$
>
> para cada $t \in T_\tau$ y $a_1, \dots, a_n \in A$.

Caso base: $\varphi \in F_0^\tau$. Por el lema de menú para fórmulas, φ puede tener las siguientes formas:

$\varphi = (s = t)$ con $s, t \in T_\tau$, o bien $\varphi = r(t_1, \dots, t_n),\ n \geq 1,\ r \in R_n,\ t_1, \dots, t_n \in T_\tau$.

Si $\varphi = (s = t)$ entonces:

$$A \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \text{ sii } s^A[a_1, \dots, a_n] = t^A[a_1, \dots, a_n].$$

Luego, como F es un isomorfismo,

$$A \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \text{ sii } F(s^A[a_1, \dots, a_n]) = F(t^A[a_1, \dots, a_n]).$$

Por el Lema 5,

$$A \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ sii } s^B[F(a_1), \ldots, F(a_n)] = t^B[F(a_1), \ldots, F(a_n)].$$

Por definición,

$$s^B[F(a_1), \ldots, F(a_n)] = t^B[F(a_1), \ldots, F(a_n)] \text{ sii } B \vDash \varphi[F(a_1), \ldots, F(a_n)].$$

El caso $\varphi = r(t_1, \ldots, t_n)$ es similar:

$$A \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ sii } (t_1^A[a_1, \ldots, a_n], \ldots, t_n^A[a_1, \ldots, a_n]) \in r^A.$$

Como F es isomorfismo,

$$A \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ sii } (F(t_1^A[a_1, \ldots, a_n]), \ldots, F(t_n^A[a_1, \ldots, a_n])) \in r^B.$$

Por el Lema 5,

$$A \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ sii } (t_1^B[F(a_1), \ldots, F(a_n)], \ldots, t_n^B[F(a_1), \ldots, F(a_n)]) \in r^B.$$

Y por definición,

$$(t_1^B[F(a_1), \ldots, F(a_n)], \ldots, t_n^B[F(a_1), \ldots, F(a_n)]) \in r^B \text{ sii } B \vDash \varphi[F(a_1), \ldots, F(a_n)].$$

Por lo que queda probado el caso base.

Caso inductivo: $\varphi \in F_{k+1}^\tau$.

Hipótesis inductiva (HI): Si $\varphi \in F_k^\tau$ entonces

$$A \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n] \iff B \vDash \varphi[F(a_1), \ldots, F(a_n)] \quad \forall a_1, \ldots, a_n \in A.$$

Si $\varphi \in F_\tau^k$, entonces claramente se cumple la propiedad, por lo que suponemos $\varphi \in F_\tau^{k+1} - F_\tau^k$. Ahora, por el lema de menú para fórmulas, tenemos distintos casos.

Caso $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$, con $\varphi_1, \varphi_2 \in F_\tau^k$.

$$\begin{aligned}
A \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n] &\text{ sii } A \vDash \varphi_1[a_1, \ldots, a_n] \text{ o } A \vDash \varphi_2[a_1, \ldots, a_n] && \text{(def. de } \vDash\text{)}\\
&\text{ sii } B \vDash \varphi_1[F(a_1), \ldots, F(a_n)] \text{ o } B \vDash \varphi_2[F(a_1), \ldots, F(a_n)] && \text{(HI)}\\
&\text{ sii } B \vDash \varphi[F(a_1), \ldots, F(a_n)] && \text{(def. de } \vDash\text{).}
\end{aligned}$$

Los casos $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, $\varphi = (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$, $\varphi = (\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$ y $\varphi = \neg\varphi_1$ son análogos.

Caso $\varphi = \forall x_j \varphi_1$, con $\varphi_1 \in F^k_\tau$. Por definición:

$$A \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ sii } A \vDash \varphi_1[a_1, \ldots, a, \ldots, a_n] \quad \text{para todo } a \in A.$$

Por la HI:

$$A \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ sii } B \vDash \varphi_1[F(a_1), \ldots, F(a), \ldots, F(a_n)] \quad \text{para todo } a \in A.$$

Luego, como F es isomorfismo, $\mathrm{Im}(F) = B$, entonces:

$$A \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ sii } B \vDash \varphi_1[F(a_1), \ldots, b, \ldots, F(a_n)] \quad \text{para todo } b \in B.$$

Finalmente, por definición:

$$A \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n] \text{ sii } B \vDash \varphi[F(a_1), \ldots, F(a_n)].$$

El caso $\varphi = \exists x_j \varphi_1$ es análogo. $\square$

Lema 2. *Sean $(P, \leq)$ y $(P', \leq')$ posets. Supongamos que F es un isomorfismo de $(P, \leq)$ en $(P', \leq')$.*

(a) Para cada $S \subseteq P$ y cada $a \in P$, se tiene que a es cota superior (resp. inferior) de S si y sólo si $F(a)$ es cota superior (resp. inferior) de $F(S)$.

(b) Para cada $S \subseteq P$, se tiene que existe $\sup(S)$ *si y sólo si existe* $\sup(F(S))$ *y en tal caso se cumple que:*

$$F(\sup(S)) = \sup(F(S)).$$

Demostración. (a) Supongamos que a es cota superior de S. Veamos que entonces $F(a)$ es cota superior de $F(S)$. Sea $x \in F(S)$. Sea $s \in S$ tal que $x = F(s)$. Ya que $s \leq a$, tenemos que $x = F(s) \leq' F(a)$.

Supongamos ahora que $F(a)$ es cota superior de $F(S)$ y veamos que entonces a es cota superior de S. Sea $s \in S$. Ya que $F(s) \leq' F(a)$, tenemos que

$$s = F^{-1}(F(s)) \leq F^{-1}(F(a)) = a.$$

(b) Supongamos que existe $\sup(S)$. Veamos entonces que $F(\sup(S))$ es el supremo de $F(S)$. Por (e), $F(\sup(S))$ es cota superior de $F(S)$. Supongamos que b es cota superior de $F(S)$. Entonces $F^{-1}(b)$ es cota superior de S, por lo cual $\sup(S) \leq F^{-1}(b)$, produciendo $F(\sup(S)) \leq' b$.

En forma análoga, se ve que si existe $\sup(F(S))$, entonces $F^{-1}(\sup(F(S)))$ es el supremo de S. $\square$

Auxiliares de Demostraciones

1. Lema de menú de fórmulas: Supongamos $\varphi \in F_k^\tau$, con $k \geq 1$. Entonces φ es de alguna de las siguientes formas:

   a) $\varphi = (t \equiv s)$, con $t, s \in T^\tau$.
   b) $\varphi = r(t_1, \ldots, t_n)$, con $r \in R_n$, $t_1, \ldots, t_n \in T^\tau$.
   c) $\varphi = (\varphi_1 \, \eta \, \varphi_2)$, con $\eta \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in F_{k-1}^\tau$.
   d) $\varphi = \neg\varphi_1$, con $\varphi_1 \in F_{k-1}^\tau$.
   e) $\varphi = Qv\varphi_1$, con $Q \in \{\forall, \exists\}$, $v \in Var$ y $\varphi_1 \in F_{k-1}^\tau$.