Combos de Definiciones

Camila Nanini

10 de noviembre de 2025

Combo 1

Teorema 1 (del Filtro Primo)**.** *Sea (L, s, i) un reticulado terna distributivo y F un filtro. Supongamos $x_0 \in L - F$. Entonces hay un filtro primo P tal que*

$$x_0 \notin P \quad y \quad F \subseteq P.$$

Lema 1 (Propiedades básicas de la consistencia)**.** *Sea (Σ, τ) una teoría.*

(1) Si (Σ, τ) es inconsistente, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, para toda sentencia φ.

(2) Si (Σ, τ) es consistente y $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente.

(3) Si $(\Sigma, \tau) \nvdash \neg\varphi$, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es consistente.

Demostración. (1) Si (Σ, τ) es inconsistente, entonces por definición tenemos que $(\Sigma, \tau) \vdash \psi \wedge \neg\psi$ para alguna sentencia ψ. Dada una sentencia cualquiera φ, tenemos que φ se deduce por la regla del absurdo a partir de $\psi \wedge \neg\psi$, con lo cual (2) del Lema de propiedades básicas de $\vdash$ nos dice que $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.

(2) Supongamos (Σ, τ) es consistente y $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$. Si $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ fuera inconsistente, entonces $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi \wedge \neg\psi$, para alguna sentencia ψ, lo cual por (1) del Lema de propiedades básicas de $\vdash$ nos diría que $(\Sigma, \tau) \vdash \psi \wedge \neg\psi$, es decir, nos diría que (Σ, τ) es inconsistente.

(3) Veamos por **contradicción**. Supongamos que $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau)$ es inconsistente. Esto significa que

$$(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash (\psi \wedge \neg\psi) \quad \text{para algún } \psi.$$

Por **(3)** del **lema de propiedades básicas de** $\vdash$ tenemos

$$(\Sigma, \tau) \vdash \varphi \rightarrow (\psi \wedge \neg\psi)$$

Por **regla del absurdo** tenemos

$$(\Sigma, \tau) \vdash \neg\varphi$$

Lo cual **contradice la hipótesis**.

$\square$

Auxiliares de Demostraciones

1. Lema de propiedades básicas de $\vdash$: Sea (Σ, τ) una teoría.

   a) (**Uso de Teoremas**) Si $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ y $(\Sigma \cup \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}, \tau) \vdash \varphi$, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.

   b) Supongamos $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Si R es una regla distinta de Generalización y Elección, y φ se deduce de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ por la regla R, entonces $(\Sigma, \tau) \vdash \varphi$.

   c) $(\Sigma, \tau) \vdash (\varphi \to \psi)$ si y sólo si $(\Sigma \cup \{\varphi\}, \tau) \vdash \psi$.