Combo 5

Camila Nanini

1 de diciembre de 2025

Combo 5

Teorema 1 (Teorema de Completitud)**.** *Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría de primer orden. Si $T \models \varphi$, entonces $T \vdash \varphi$.*

Haga solo el caso en que τ tiene una cantidad infinita de nombres de constantes que no ocurren en las sentencias de Σ. En la exposición de la prueba no es necesario que demuestre los ítems: (1) y (5).

Demostración. Primero probaremos completitud para el caso en que τ tiene una cantidad infinita de nombres de constante que no ocurren en las sentencias de Σ. Lo probaremos por el absurdo: supongamos que hay una sentencia φ_0 tal que $T \models \varphi_0$ y $T \not\vdash \varphi_0$.

Nótese que, ya que $T \not\vdash \varphi_0$, tenemos que $[\varphi_0]_T \neq 1^T = \{\varphi \in S^\tau : T \vdash \varphi\}$ O sea que $[\neg\varphi_0]_T \neq 0^T$.

Por el Lema de enumeracion hay una infinitupla $(\gamma_1, \gamma_2, \dots) \in F^{\tau\mathbb{N}}$ tal que:

- $|Li(\gamma_j)| \leq 1$ para cada $j = 1, 2, \dots$
- Si $|Li(\gamma)| \leq 1$, entonces $\gamma = \gamma_j$ para algún $j \in \mathbb{N}$.

Para cada $j \in \mathbb{N}$, sea $w_j \in Var$ tal que $Li(\gamma_j) \subseteq \{w_j\}$. Para cada j, declaremos $\gamma_j :=_d \gamma_j(w_j)$.

Nótese que por el Lema del Infimo tenemos que

$$\inf\big(\{[\gamma_j(t)]_T : t \in T_c^\tau\}\big) = [\forall w_j\, \gamma_j(w_j)]_T, \qquad j = 1, 2, \dots$$

Por el Teorema de Rasiowa–Sikorski, existe un filtro primo U de A_T tal que:

(a) $[\neg\varphi_0]_T \in U$,

(b) Para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$\{[\gamma_j(t)]_T : t \in T_c^\tau\} \subseteq U \quad \Longrightarrow \quad [\forall w_j \, \gamma_j(w_j)]_T \in U.$$

Dado que la infinitupla $(\gamma_1, \gamma_2, \dots)$ cubre todas las fórmulas con a lo sumo una variable libre, podemos reescribir la propiedad (b) como:

(b′) Para cada $\varphi :=_d \varphi(v) \in F^\tau$, si

$$\{[\varphi(t)]_T : t \in T_c^\tau\} \subseteq U,$$

entonces

$$[\forall v \, \varphi(v)]_T \in U.$$

Definimos sobre T_c^τ la siguiente relación:

$$t \bowtie s \quad \text{si y sólo si} \quad [(t \equiv s)]_T \in U.$$

Definamos ahora un modelo A_U de tipo τ de la siguiente manera:

- Universo de $A_U = T_c^\tau / \bowtie$.
- $c^{A_U} = c/\bowtie$, para cada $c \in C$.
- $f^{A_U}(t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie) = f(t_1, \dots, t_n)/\bowtie$, para cada $f \in F_n$ y $t_1, \dots, t_n \in T_c^\tau$.
- $r^{A_U} = \{(t_1/\bowtie, \dots, t_n/\bowtie) : [\, r(t_1, \dots, t_n)\,]_T \in U\}, \quad$ para cada $r \in R_n$.

Entonces se verifica que:

1. $\bowtie$ es una relación de equivalencia.
2. Para cada $\varphi :=_d \varphi(v_1, \dots, v_n) \in F_\tau$ y $t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_n \in T_c^\tau$, si

$$t_1 \bowtie s_1, \; t_2 \bowtie s_2, \; \dots, \; t_n \bowtie s_n,$$

entonces

$$[\varphi(t_1, \dots, t_n)]_T \in U \quad \Longleftrightarrow \quad [\varphi(s_1, \dots, s_n)]_T \in U.$$

3. Para cada $f \in F_n$ y $t_1, \dots, t_n, s_1, \dots, s_n \in T_c^\tau$,

$$t_1 \bowtie s_1, \; t_2 \bowtie s_2, \; \dots, \; t_n \bowtie s_n \quad \Longrightarrow \quad f(t_1, \dots, t_n) \bowtie f(s_1, \dots, s_n).$$

4. Para cada $t{:=}_d t(v_1, \ldots, v_n) \in T^\tau$ y $t_1, \ldots, t_n \in T_c^\tau$, tenemos que

$$t^{A_U}[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] = t(t_1, \ldots, t_n)/\bowtie .$$

5. Para cada $\varphi{:=}_d \varphi(v_1, \ldots, v_n) \in F_\tau$ y $t_1, \ldots, t_n \in T_c^\tau$, tenemos que

$$A_U \models \varphi[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] \quad \text{si y sólo si} \quad [\varphi(t_1, \ldots, t_n)]_T \in U.$$

Probaremos (2). Nótese que

$$T \;\vdash\; \big((t_1 \equiv s_1) \wedge (t_2 \equiv s_2) \wedge \cdots \wedge (t_n \equiv s_n) \wedge \varphi(t_1, \ldots, t_n)\big) \;\rightarrow\; \varphi(s_1, \ldots, s_n),$$

lo cual nos dice que

$$[(t_1 \equiv s_1)]_T \; i^T \; [(t_2 \equiv s_2)]_T \; i^T \;\cdots\; i^T \; [(t_n \equiv s_n)]_T \; i^T \; [\varphi(t_1, \ldots, t_n)]_T \;\leq^T\; [\varphi(s_1, \ldots, s_n)]_T.$$

De esto se desprende que

$$[\varphi(t_1, \ldots, t_n)]_T \in U \quad\Longrightarrow\quad [\varphi(s_1, \ldots, s_n)]_T \in U,$$

ya que U es un filtro. La otra implicación es análoga.

Para probar (3) podemos tomar

$$\varphi \;=\; \big(f(v_1, \ldots, v_n) \equiv f(s_1, \ldots, s_n)\big)$$

y aplicar (2).

Prueba del ítem (4).

Afirmación. Para todo término $t =_d t(v_1, \ldots, v_n) \in T^\tau$ y para todo $t_1, \ldots, t_n \in T_c^\tau$ se tiene

$$t^{A_U}[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] = t(t_1, \ldots, t_n)/\bowtie .$$

Por inducción sobre la formación del término t.

Caso base.

- Si t es la variable v_i, entonces por definición de la evaluación en A_U

$$t^{A_U}[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] \text{ (Carácter recursivo de la notación } t^A[a_1, ..., a_n])$$

$$= t_i/\bowtie \;\text{ (Def } A_U)$$

$$= t(t_1, \ldots, t_n)/\bowtie \;\text{ (Notacion Declaratoria)}$$

- Si t es una constante c

$$t^{A_U}[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] = c^{A_U} \text{ (Carácter recursivo de la notación } t^A[a_1, ..., a_n])$$

$$= c/\bowtie, \text{ (Def } A_U)$$

$$= t(t_1, \ldots, t_n)/\bowtie \text{ (Notacion Declaratoria)}$$

Paso inductivo. Supongamos que la afirmación vale para todos los subtérminos de complejidad menor que t. Sea t de la forma $f(s_1, \ldots, s_m)$, donde f es un símbolo de función m-ario y $s_1, \ldots, s_m$ son términos más simples. Entonces, por la definición de evaluación en la estructura A_U,

$$t^{A_U}[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] = f^{A_U}\big(s_1^{A_U}[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie], \ldots, s_m^{A_U}[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie]\big).$$

Aplicando la hipótesis inductiva a cada s_j obtenemos

$$s_j^{A_U}[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] = s_j(t_1, \ldots, t_n)/\bowtie, \qquad j = 1, \ldots, m.$$

Por definición de la interpretación f^{A_U} en A_U (la cual toma clases de términos y devuelve la clase del término formado por f),

$$f^{A_U}\big(s_1(t_1, \ldots, t_n)/\bowtie, \ldots, s_m(t_1, \ldots, t_n)/\bowtie\big) = f(s_1(t_1, \ldots, t_n), \ldots, s_m(t_1, \ldots, t_n))/\bowtie .$$

Pero el miembro derecho es exactamente $t(t_1, \ldots, t_n)/\bowtie$, puesto que $t = f(s_1, \ldots, s_m)$. De esta forma concluimos

$$t^{A_U}[t_1/\bowtie, \ldots, t_n/\bowtie] = t(t_1, \ldots, t_n)/\bowtie,$$

y la inductiva queda probada.
□

□

Auxiliares de Demostraciones

1. **(Lema de enumeración).** Sea τ un tipo. Hay una infinitupla $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots) \in F^{\tau^{\mathbb{N}}}$ tal que:

   a) $|L_i(\gamma_j)| \leq 1$, para cada $j = 1, 2, \ldots$

   b) Si $|L_i(\gamma)| \leq 1$, entonces $\gamma = \gamma_j$ para algún $j \in \mathbb{N}$.

2. **(Lema del Ínfimo).** Sea $T = (\Sigma, \tau)$ una teoría y supongamos que τ tiene una cantidad infinita de nombres de constante que no ocurren en las sentencias de Σ. Entonces, para cada fórmula $\varphi =_d \varphi(v)$, se tiene que en el álgebra de Lindenbaum A_T:

$$[\forall v\, \varphi(v)]_T = \text{ínf}\big(\{\, [\varphi(t)]_T : t \in T_c^\tau \,\}\big).$$

3. **(Teorema de Rasiowa y Sikorski).** Sea $(B, s, i, c, 0, 1)$ un álgebra de Boole. Sea $a \in B$, $a \neq 0$. Supongamos que $(A_1, A_2, \ldots)$ es una infinitupla de subconjuntos de B tal que existe $\text{ínf}(A_j)$ para cada $j = 1, 2, \ldots$. Entonces existe un filtro primo P que cumple:

   (a) $a \in P$,

   (b) Si $P \supseteq A_j$, entonces $\text{ínf}(A_j) \in P$, para cada $j = 1, 2, \ldots$.