Combos de Definiciones

Camila Nanini

10 de noviembre de 2025

Combo 2

Teorema 1 (de Dedekind)**.** *Sea* (L, s, i) *un reticulado terna. La relación binaria definida por:*

$$x \leq y \quad \textit{si y sólo si} \quad xsy = y$$

es un orden parcial sobre L para el cual se cumple que:

$$\sup(\{x, y\}) = xsy, \quad \inf(\{x, y\}) = xiy$$

cualesquiera sean $x, y \in L$.

Demostración. Primero probaremos la reflexividad de $\leq$. Para todo $x \in L$ debemos mostrar $x \leq x$, es decir

$$x \; s \; x = x.$$

Ésta es precisamente la identidad de idempotencia para s (una de las igualdades axiomáticas del reticulado), por lo que $x \leq x$ para todo $x \in L$. Entonces $\leq$ es reflexiva.

Ahora probaremos la antisimetría. Sean $x, y \in L$ tales que $x \leq y$ y $y \leq x$. Por la definición de $\leq$ esto equivale a

$$x \; s \; y = y \qquad \text{y} \qquad y \; s \; x = x.$$

Pero s es conmutativa, luego $x \; s \; y = y \; s \; x$. Combinando las igualdades anteriores obtenemos

$$y = x \; s \; y = y \; s \; x = x,$$

es decir $x = y$. Por tanto $\leq$ es antisimétrica. $\square$

Demostración. Veamos que $\leq$ es transitiva con respecto a L. Supongamos que $x \leq y$ e $y \leq z$. Es decir, que por definición de $\leq$ tenemos que

$$x \ s \ y = y \qquad \text{y} \qquad y \ s \ z = z.$$

Entonces

$$x \ s \ z = x \ s \ (y \ s \ z) = (x \ s \ y) \ s \ z = y \ s \ z = z,$$

por lo cual $x \leq z$. O sea que ya sabemos que $(L, \leq)$ es un poset.

Veamos ahora que $\sup(\{x, y\}) = x \ s \ y$. Primero debemos ver que $x \ s \ y$ es una cota superior del conjunto $\{x, y\}$, es decir:

$$x \leq x \ s \ y \qquad \text{y} \qquad y \leq x \ s \ y.$$

Por la definición de $\leq$, debemos probar que

$$x \ s \ (x \ s \ y) = x \ s \ y \qquad \text{y} \qquad y \ s \ (x \ s \ y) = x \ s \ y.$$

Estas igualdades se pueden probar usando las propiedades (I1), (I2) y (I4).

Nos falta ver entonces que $x \ s \ y$ es menor o igual que cualquier cota superior de $\{x, y\}$. Supongamos $x, y \leq z$. Es decir que, por definición de $\leq$, tenemos que

$$x \ s \ z = z \qquad \text{y} \qquad y \ s \ z = z.$$

Pero entonces

$$(x \ s \ y) \ s \ z = x \ s \ (y \ s \ z) = x \ s \ z = z,$$

por lo que $x \ s \ y \leq z$. Es decir que $x \ s \ y$ es la menor cota superior.

Para probar que $\inf(\{x, y\}) = x \ i \ y$, probaremos que para todo $u, v \in L$,

$$u \leq v \quad \text{si y sólo si} \quad u \ i \ v = u,$$

lo cual le permitirá al lector aplicar un razonamiento similar al usado en la prueba de que $\sup(\{x, y\}) = x \ s \ y$.

Supongamos que $u \leq v$. Por definición tenemos que $u \ s \ v = v$. Entonces

$$u \ i \ v = u \ i \ (u \ s \ v).$$

Pero por (I7) tenemos que $u \ i \ (u \ s \ v) = u$, lo cual implica $u \ i \ v = u$.

Recíprocamente, si $u \ i \ v = u$, entonces

$$u \ s \ v = (u \ i \ v) \ s \ v = v \ s \ (u \ i \ v) \quad (\text{por (I2)}) = v \ s \ (v \ i \ u) \quad (\text{por (I3)}) = v \quad (\text{por (I6)}).$$

Lo cual nos dice que $u \leq v$. $\square$

Lema 1. *Supongamos que $\vec{a}, \vec{b}$ son asignaciones tales que si $x_i \in Li(\varphi)$, entonces $a_i = b_i$. Entonces:*

$$A \vDash \varphi[\vec{a}] \text{ si y sólo si } A \vDash \varphi[\vec{b}].$$

Demostración. Sea $A = (A, i)$ una estructura de tipo τ. Queremos probar el caso base, hay dos subcasos:

Caso 1: φ es una igualdad atómica $t \equiv s$.

Supongamos que $\vec{a}, \vec{b}$ coinciden en todas las variables que ocurren en φ. En particular, todas las variables que ocurren en t y en s son variables de $Li(\varphi)$. Así que tenemos

$$t^A[\vec{a}] = t^A[\vec{b}] \quad \text{y} \quad s^A[\vec{a}] = s^A[\vec{b}].$$

Esto por lema auxiliar 1. Entonces

$$\begin{aligned}
A \models (t \equiv s)[\vec{a}] &\iff t^A[\vec{a}] = s^A[\vec{a}] && \text{(definición de satisfacción para igualdad)}\\
&\iff t^A[\vec{b}] = s^A[\vec{b}] && \text{(por las igualdades anteriores)}\\
&\iff A \models (t \equiv s)[\vec{b}].
\end{aligned}$$

Caso 2: φ es una fórmula atómica de predicado $r(t_1, \ldots, t_m)$.

Nuevamente por lema auxiliar 1 se da que en cada t_j:

$$t_j^A[\vec{a}] = t_j^A[\vec{b}] \qquad \text{para } j = 1, \ldots, m.$$

Entonces las m-uplas de valores de los términos coinciden:

$$\big(t_1^A[\vec{a}], \ldots, t_m^A[\vec{a}]\big) = \big(t_1^A[\vec{b}], \ldots, t_m^A[\vec{b}]\big).$$

Por la definición $\models$

$$\begin{aligned}
A \models r(t_1, \ldots, t_m)[\vec{a}] &\iff \big(t_1^A[\vec{a}], \ldots, t_m^A[\vec{a}]\big) \in i(r)\\
&\iff \big(t_1^A[\vec{b}], \ldots, t_m^A[\vec{b}]\big) \in i(r)\\
&\iff A \models r(t_1, \ldots, t_m)[\vec{b}].
\end{aligned}$$

Veamos que Teo_k implica Teo_{k+1}. Sea $\varphi \in F_\tau^{k+1} - F_\tau^k$. Hay varios casos:

Caso $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$.

Ya que $L_i(\varphi_i) \subseteq L_i(\varphi)$, $i = 1, 2$, Teo_k nos dice que $A \vDash \varphi_i[\vec{a}]$ sii $A \vDash \varphi_i[\vec{b}]$, para $i = 1, 2$. Se tiene entonces que:

$$A \vDash \varphi[\vec{a}] \iff \text{(por (3) en la def. de } A \vDash \varphi[\vec{a}]) A \vDash \varphi_1[\vec{a}] \text{ y } A \vDash \varphi_2[\vec{a}]$$

$$\iff \text{(por Teo}_k)A \vDash \varphi_1[\vec{b}] \text{ y } A \vDash \varphi_2[\vec{b}]$$

$$\iff \text{(por (3) en la def. de } A \vDash \varphi[\vec{a}])A \vDash \varphi[\vec{b}]$$

Caso $\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2)$.
Es completamente similar al anterior.

Caso $\varphi = (\varphi_1 \to \varphi_2)$.
Es completamente similar al anterior.

Caso $\varphi = (\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$.
Es completamente similar al anterior.

Caso $\varphi = \neg\varphi_1$.
Es completamente similar al anterior.

Caso $\varphi = \forall x_j \varphi_1$.
Supongamos $A \vDash \varphi[\vec{a}]$. Entonces, por (8) en la definición de $A \vDash \varphi[\vec{a}]$, se tiene que $A \vDash \varphi_1[\downarrow a_j(\vec{a})]$, para todo $a \in A$. Nótese que $\downarrow a_j(\vec{a})$ y $\downarrow a_j(\vec{b})$ coinciden en toda $x_i \in L_i(\varphi_1)$, ya que $L_i(\varphi_1) \subseteq L_i(\varphi) \cup \{x_j\}$. O sea, por Teo$_k$ se tiene que $A \vDash \varphi_1[\downarrow a_j(\vec{b})]$ para todo $a \in A$, lo cual, por (8) en la definición de $A \vDash \varphi[\vec{a}]$, nos dice que $A \vDash \varphi[\vec{b}]$. La prueba de que $A \vDash \varphi[\vec{b}]$ implica que $A \vDash \varphi[\vec{a}]$ es similar.

Caso $\varphi = \exists x_j \varphi_1$.
Es similar al anterior. □

Auxiliares de Demostraciones

1. Lema auxiliar 1: Sea A una estructura de tipo τ y sea $t \in T_\tau$. Supongamos que $\vec{a}, \vec{b}$ son asignaciones tales que $a_i = b_i$ cada vez que x_i ocurra en t. Entonces
$$t^A[\vec{a}] = t^A[\vec{b}].$$