Práctica 1 - Métodos de Integración Numérica en Simulación

Duración: 2 Sesiones

Objetivos:

· Saber simular un fenómeno físico derivando sus ecuaciones y aplicando métodos de integración numérica.

· Realizar un análisis del comportamiento de los siguientes métodos de integración: Euler explícito, Euler semi-implícito (llamado a veces Euler simpléctico), Heun, Runge-Kutta de orden 2 (RK2) y Runge-Kutta de orden 4 (RK4).

· Obtener empíricamente sus zonas de estabilidad para un sistema físico concreto y observar inestabilidades inherentes al método.

Entrega: 1 semana después de finalizar la práctica. Se debe entregar el código y una memoria/documento de análisis, donde se detallen los resultados obtenidos y se analicen e interpreten estos resultados, contestando razonadamente a las cuestiones planteadas en el enunciado.

Evaluación: a través de un examen y de la entrega del código y del documento de análisis.

Problema 1 – El Plano Inclinado con Doble Muelle

Considera una partícula de masa m, situada sobre un plano inclinado, cuya inclinación es de θ grados, y cuya longitud es L. La partícula está sujetada de los dos extremos del plano inclinado (que llamaremos $\overrightarrow{C_1}$ y $\overrightarrow{C_2}$ respectivamente) por sendos muelles. Cada uno de los dos muelles tiene una constante elástica y una elongación de reposo diferentes, a las que llamaremos K_e^1, l_0^1 (para el muelle 1) y K_e^2, l_0^2 (para el muelle 2). Supondremos que el muelle 1 es el de abajo, y el muelle 2 es el de arriba.

En un muelle, cuando su elongación es menor que la elongación de reposo, el muelle se expande por acción de la fuerza elástica; cuando es mayor, el muelle se comprime. La partícula estará inicialmente situada en el punto medio del plano inclinado, y debido a las fuerzas elásticas $\overrightarrow{F_e^1}$ y $\overrightarrow{F_e^2}$ y a la fuerza peso ($\overrightarrow{F_w}$) causada por la gravedad ($\vec{g}$) comenzará a acelerar con aceleración $\vec{a}$ y a moverse con velocidad $\vec{v}$, modificando su posición $\vec{s}$. Existirá también una fuerza normal ($\overrightarrow{F_n}$), que contrarrestará el efecto de la fuerza peso en dirección perpendicular al plano y que evitará que la partícula atraviese el mismo.

Además, la partícula se frenará por fricción con el aire, lo que provocará que vaya perdiendo energía. Supondremos que la magnitud de la fuerza de fricción $\overrightarrow{F_d}$ será proporcional al cuadrado de la velocidad, con un factor de proporcionalidad que llamaremos K_d. También existirá un rozamiento $\overrightarrow{F_f}$ entre la partícula y el plano, cuya magnitud será linealmente proporcional a la fuerza normal, con un factor de proporcionalidad que llamaremos μ.

La Figura 1 muestra un diagrama de las posiciones de los elementos del problema y alguno de sus parámetros. Se recomienda situar el origen de coordenadas en el ángulo recto del plano inclinado, aunque esto es completamente arbitrario.

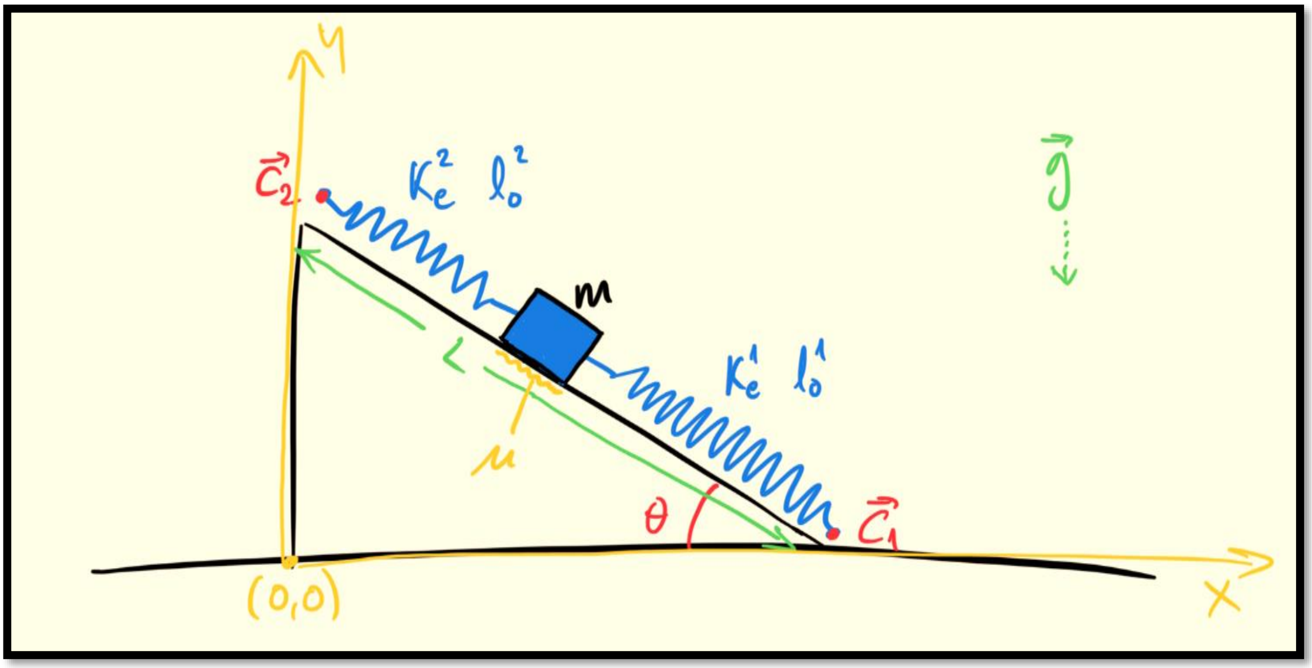

Figura 1 – Diagrama del problema 1.

Parámetros del problema:

m: masa de la partícula (kg).
θ: ángulo de inclinación del plano (grados).
L: longitud del plano (m).
K_e^1: constante elástica del muelle 1 (N/m).
K_e^2: constante elástica del muelle 2 (N/m).
l_0^1: elongación de reposo del muelle 1 (m).
l_0^2: elongación de reposo del muelle 2 (m).
K_d: constante de fricción con el aire (kg/m).
μ: constante de rozamiento con el plano (sin dimensiones).
$\vec{g}$: aceleración de la gravedad (m/s²).

Realiza las siguientes tareas:

1- Escribe las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de la partícula, de modo que podamos conocer las expresiones para calcular $\vec{s}$, $\vec{v}$, y $\vec{a}$.

2- Simula (y dibuja) el sistema anteriormente descrito mediante integración numérica de las ecuaciones diferenciales, de manera que se pueda elegir (con teclas) el paso de simulación (teclas + y -) y se pueda también escoger el integrador utilizado de entre estas opciones: Euler explícito (tecla *E*), Euler semi-implícito (tecla *S*), Heun (tecla *H*), RK2 (tecla *2*) y RK4 (tecla *4*). Para implementar esta simulación podéis basaros en el esqueleto de aplicación en Processing que se proporciona como material adicional.

3- Añade la posibilidad (tecla *P*) de eliminar/restaurar el plano (pero no los puntos de anclaje $\overrightarrow{C_1}$, $\overrightarrow{C_2}$ ni los muelles que serán permanentes). Al eliminar el plano, la fuerza normal y la fuerza de rozamiento entre el plano y la partícula desaparecerán y ésta caerá hasta que sea sujetada por los muelles. ¿Es más estable ahora el sistema? ¿Por qué?

4- Añade la posibilidad de resetear la escena (tecla *R*) a su estado inicial y de resituar/mover la posición de la partícula pinchando o arrastrando el ratón.

5- Analiza, a través de gráficas, la estabilidad del sistema, **para el caso en el que el plano se ha eliminado**. Para ello, debes generar (para cada ejecución) un fichero donde almacenarás, para cada paso de simulación, la posición de la partícula, su velocidad y su energía, que viene dada por la siguiente expresión:

$$E = E_k + E_p + E_e^1 + E_e^2$$

donde:

E_k es la energía cinética
E_p es la energía potencial
E_e^i es la energía elástica del muelle i

Recordemos que:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$
$$E_p = mgh$$
$$E_e^i = \frac{1}{2}K_e^i(l_i - l_0^i)^2$$

donde:

v es el módulo de la velocidad ($\vec{v}$) de la partícula en ese instante
g es el módulo del vector gravedad ($\vec{g}$)

h es la altura de la partícula en ese instante
l_i es la elongación de cada muelle en ese instante

Si fijamos las constantes de fricción y rozamiento a cero $K_d = \mu = 0$, el sistema no debe perder energía. Sin embargo, debido a los comportamientos de cada integrador, los resultados variarán con respecto a lo esperable en teoría.

Estudia el comportamiento del sistema, comprobando si la energía se mantiene constante para diferentes integradores y diferentes pasos de simulación, en el caso en que no debe haber pérdida de energía. Escoge valores para los parámetros del sistema que sirvan para mostrar las diferencias entre los diferentes integradores según cambia el paso de simulación. Obviamente, cada comparación que se haga entre integradores diferentes debe hacerse con los mismos valores para los parámetros del problema y el mismo paso de simulación. ¿Se mantiene la energía siempre constante como se esperaba? ¿Por qué?

6- Repite el estudio para el caso en que sí haya fricción y/o rozamiento. Escoge valores para los parámetros del sistema (incluyendo K_d y μ) que sirvan para mostrar las diferencias entre los diferentes integradores según cambia el paso de simulación. ¿Qué diferencias observas con el caso anterior en términos de estabilidad? ¿Por qué? ¿Cuál de los dos tipos de fuerza (fricción o rozamiento) contribuye más a la estabilidad del sistema? ¿Por qué?

Nota de implementación en Processing:

En Processing es fácil definir un fichero de texto y escribir en él. Para ello, declara una variable de tipo *PrintWriter*. Por ejemplo:

```
PrintWriter _output;
```

Abre el fichero en la función *setup*(). Por ejemplo:

```
_output = createWriter("data.txt");
```

Guarda los datos en la función de simulación:

```
_output.println(data);
```

Cierra el fichero cuando cierres la aplicación o al pulsar alguna tecla:

```
_output.flush();
_output.close();
```

Problema 2 – El Cañón de Artillería Costera

Considera un cañón de artillería situado en un fuerte costero. El cañón lanza un proyectil balístico de masa m, que se lanza desde una posición elevada fija con el objetivo de alcanzar un barco a una distancia D, aunque también puede caer en el mar. El proyectil se dispara con velocidad v_0 y con un ángulo θ respecto de la horizontal. Además de la gravedad $\vec{g}$, existirá una fricción con el aire que supondremos que es linealmente proporcional a la velocidad (aunque esto es una simplificación de lo que sucede en la realidad), con un factor de proporcionalidad que llamaremos K_d^a. Si el proyectil cae al agua, también existirá fricción (mayor que con el aire) y la constante de fricción será K_d^w.

El proyectil estará inicialmente situado en la posición $\vec{s_0}$. Debido a su velocidad inicial (v_0) y a la gravedad, comenzará a moverse. La posición inicial $\vec{s_0}$ vendrá fijada por la altura del punto de lanzamiento sobre el agua, que llamaremos h_w. Supondremos que el agua está a una altura 0, y también que el proyectil se sitúa inicialmente sobre el eje Y, como se puede observar en la Figura 2.

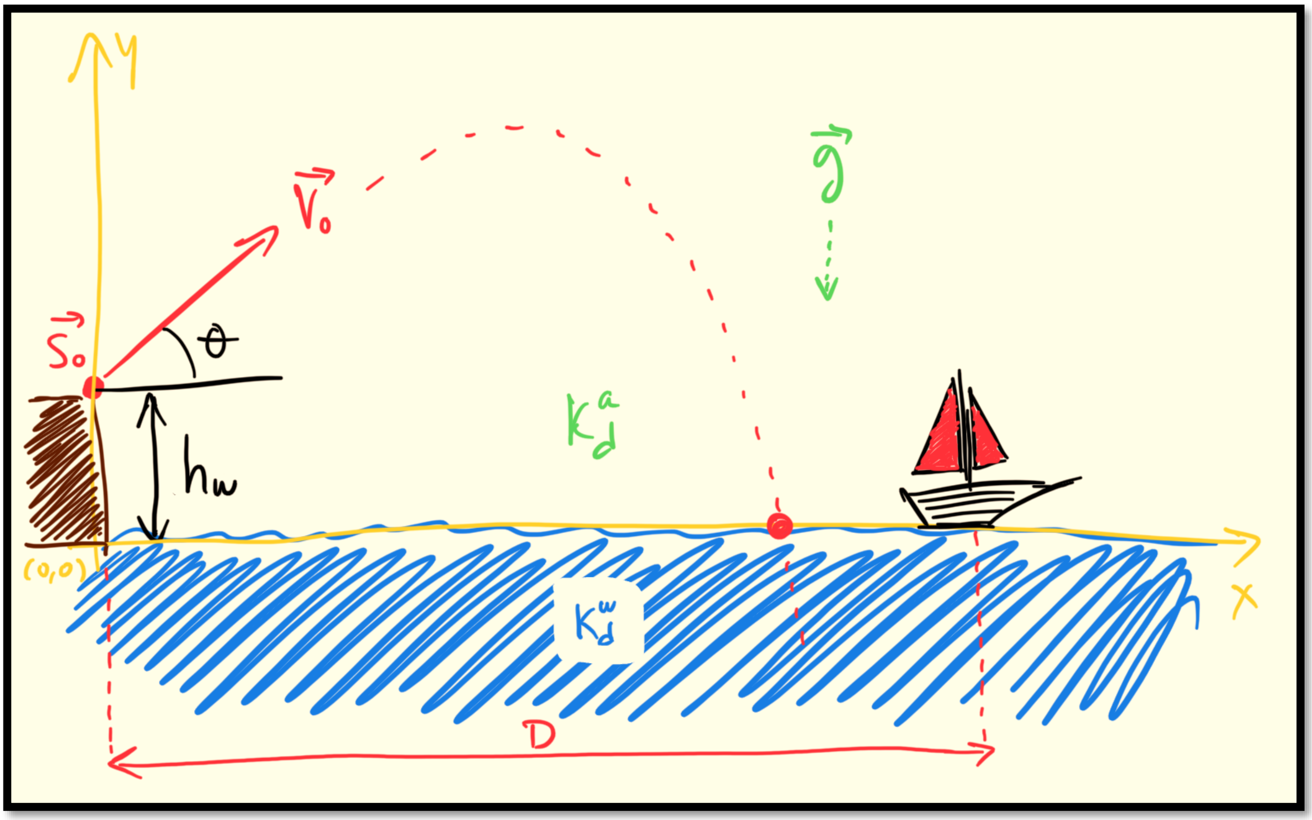

Figura 2 – Diagrama del problema 2.

Parámetros del problema:

m: masa del proyectil (kg).
θ: ángulo de tiro (°).
D: distancia al objetivo (m).
v_0: módulo de la velocidad inicial del proyectil (m/s).
h_w: altura del cañón sobre el mar (m).
$\vec{g}$: aceleración de la gravedad (m/s²).
K_d^a: constante de fricción lineal con el aire (kg/s).
K_d^w: constante de fricción lineal con el agua (kg/s).

Si la fricción con el aire es nula ($K_d^a = 0$), el movimiento del proyectil tendrá forma de parábola. Pero si no, el movimiento realizará una curva diferente.

Realiza las siguientes tareas:

1- Escribe las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento del proyectil en el aire, de modo que podamos conocer las expresiones para calcular $\vec{s}$, $\vec{v}$, y $\vec{a}$.

2- Simula (y dibuja) el sistema anteriormente descrito mediante integración numérica de las ecuaciones diferenciales, de manera que se pueda elegir el paso de simulación y se pueda también escoger (con teclas, como en el apartado anterior) el integrador utilizado de entre estas opciones: Euler explícito, Euler semi-implícito, Heun, RK2 y RK4. Ignora, de momento, el choque con el agua o con el barco objetivo.

3- Comprueba si el proyectil alcanza o no el objetivo. Añade la posibilidad de resetear la escena a su estado inicial (tecla *R*), para volver a simular el tiro.

4- Analiza, a través de gráficas, las diferentes trayectorias que experimenta un mismo proyectil lanzado desde una misma posición, con misma masa, mismo ángulo de lanzamiento, misma velocidad y mismo coeficiente de fricción, pero con diferentes métodos de integración y pasos de simulación. La trayectoria debe finalizar cuando se alcance la altura del mar. ¿Observas diferencias significativas entre las trayectorias? ¿Por qué?

5- Analiza, a través de gráficas, las diferentes trayectorias que experimenta un mismo proyectil lanzado desde una misma posición y con misma masa, pero con diferentes ángulos de lanzamiento, velocidades y coeficientes de fricción, con un método de integración y un paso de simulación que sea suficientemente estable. La trayectoria debe finalizar cuando se alcance la altura del mar. Para este análisis se deben comparar gráficamente las soluciones obtenidas con la solución analítica, que viene dada por las siguientes ecuaciones:

$$\vec{s}(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{v_0 v_t cos(\theta)}{g}\left(1 - e^{\frac{-gt}{v_t}}\right) \\ \dfrac{v_t}{g}(v_0 sen(\theta) + v_t)\left(1 - e^{\frac{-gt}{v_t}}\right) - v_t t + h_w \end{bmatrix}$$

$$\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} v_0\, cos(\theta)\, e^{\frac{-gt}{v_t}} \\ v_0 sen(\theta) e^{\frac{-gt}{v_t}} - v_t\left(1 - e^{\frac{-gt}{v_t}}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \begin{bmatrix} -g\dfrac{v_x}{v_t} \\ -g\left(1 + \dfrac{v_y}{v_t}\right) \end{bmatrix}$$

donde $\vec{s}(t)$, $\vec{v}(t)$ y $\vec{a}(t)$ denotan respectivamente la posición, velocidad y aceleración del proyectil (respectivamente) en función del tiempo, y v_t denota la magnitud de la velocidad terminal, que con fricción lineal es:

$$v_t = \frac{mg}{K_d^a}$$

6- Una vez el sistema funcione correctamente, añade a la simulación el efecto de entrar en el agua, en caso de que el proyectil no impacte con el objetivo. Ignora el posible empuje y el efecto de la presión del agua sobre el proyectil. Sólo es necesario simular la fricción.

Nota 1: es importante realizar todos los cálculos vectorialmente para ambos problemas.

Nota 2: si se añaden teclas adicionales con más funcionalidades, debe indicarse en la aplicación cuáles son estas teclas (y qué hacen) con un texto descriptivo en pantalla.

Nota 3: se valorará especialmente la claridad de la entrega y la correcta justificación de las respuestas.