Tarea 1 García Ponce José Camilo

1) Resuelve las ecuaciones diferenciales siguiente y en caso de ser posible escribe la solución en forma explícita

i) $(e^y+1)^2 e^{-y} dx + (e^x+1)^3 e^{-x} dy = 0$ aquí es variables separadas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(e^y+1)^2 e^{-y}}{(e^x+1)^3 e^{-x}} = \underbrace{-(e^y+1)^2 e^{-y}}_{f_2(y)} \cdot \underbrace{\frac{1}{(e^x+1)^3 e^{-x}}}_{f_1(x)}$$

Integramos

$$-\int \frac{e^y}{(e^y+1)^2} dy = \int \frac{e^x}{(e^x+1)^3} dx + C$$

Ⓐ Ⓑ

Ⓐ $-\int \frac{e^y}{(e^y+1)^2} dy$ $\quad u = e^y+1$, $du = e^y dy$ $\Rightarrow -\int \frac{1}{u^2} du = +\frac{1}{u} = \frac{1}{e^y+1}$

Ⓑ $\int \frac{e^x}{(e^x+1)^3} dx$ $\quad u = e^x+1$, $du = e^x dx$ $\Rightarrow \int \frac{1}{u^3} du = -\frac{1}{2u^2} = -\frac{1}{2(e^x+1)^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{e^y+1} = -\frac{1}{2(e^x+1)^2} + C_1 \Rightarrow e^y = \frac{1}{-\frac{1}{2(e^x+1)^2} + C_1} - 1$$

$$\ln(e^y) = \ln\left(\frac{1}{-\frac{1}{2(e^x+1)^2} + C_1} - 1\right) \Rightarrow y = \ln\left(\left|\frac{1}{-\frac{1}{2(e^x+1)^2} + C_1} - 1\right|\right)$$

ii) $\operatorname{sen}^2(y)\,dx + \cos^2(x)\,dy = 0$; $y(\pi/4) = \pi/4$ variables separadas

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\overbrace{\operatorname{sen}^2(y)}^{f_2(y)}}{\underbrace{\cos^2(x)}_{f_1(x)}} \quad , \quad -\frac{1}{\operatorname{sen}^2(y)} = N(y) \quad , \quad \frac{1}{\cos^2(x)} = M(x)$$

integramos

$$-\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(y)}\,dy = \int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx + C.$$ usamos tablas de integrales

$$-(-\cot(y)) = \tan(x) + C_1 \Rightarrow \cot(y) = \tan(x) + C_1$$

$$\Rightarrow \cot^{-1}(\cot(y)) = \cot^{-1}(\tan(x)) + C_1 \Rightarrow y = \cot^{-1}(\tan(x)) + C_1$$

$y(\pi/4) = \pi/4$ sustituimos

$$y(\pi/4) = \cot^{-1}(\tan(\pi/4)) + C_1 = \pi/4$$

$$\Rightarrow y(\pi/4) = \cot^{-1}(1) + C_1 = \pi/4$$

$$= 45^\circ + C_1 = \pi/4$$

$$= \pi/4 + C_1 = \pi/4 \Rightarrow C_1 = 0$$

sustituir

$$y = \cot^{-1}(\tan(x))$$

(iii) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x+y}{2x+y+3}$ reducir a variables separables

sustitucion $z = 2x+y$

$\Rightarrow \quad z = 2x+y \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{d}{dx}2x + \dfrac{d}{dx}y \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dz}{dx} = 2 + \dfrac{dy}{dx} \quad \dots (1)$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{z}{z+3} \quad \dots (2)$

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = 2 + \dfrac{dy}{dx} \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{z}{z+3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx} - 2 \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{z}{z+3} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} - 2 = \dfrac{z}{z+3} \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z}{z+3} + 2$$

$\Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{3z+6}{z+3} \Rightarrow \dfrac{dz}{\frac{3z+6}{z+3}} = dx$ integrando

$$\underbrace{\int \frac{z+3}{3z+6}\, dz}_{A} = \underbrace{\int dx}_{B} + C$$

(B) $\int dx = x + C$

(A) $\displaystyle\int \frac{z+3}{3z+6}\, dz = \int \frac{1}{3z+6} + \frac{1}{3}\, dz = \int \frac{1}{3(z+2)}\, dz + \frac{1}{3}\int dz = \frac{1}{3}\int \frac{1}{z+2}\, dz + \frac{1}{3}\int dz$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\left[\int \frac{1}{z+2}\, dz + \int dz\right] = \frac{1}{3}\left[\ln(z+2) + z\right] = \frac{1}{3}\ln(z+2) + \frac{1}{3}z$

$\Rightarrow \frac{1}{3}\ln(z+2) + \frac{1}{3}z = x + C$, $z = 2x+y$, $\frac{1}{3}\ln(2x+y+2) + \dfrac{2x+y}{3} = x + C$

$$\frac{1}{3}\ln(2x+y+2) + \frac{2x+y}{3} = x + C$$

(iv) $y' - e^x e^y = -1$ reducir a variables separables

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -1 + e^{x+y}$

$\Rightarrow z = x+y \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{d}{dx}x + \dfrac{d}{dx}y = 1 + \dfrac{dy}{dx} \ldots (1)$

$\dfrac{dy}{dx} = -1 + e^z \ldots (2)$

$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = 1 + \dfrac{dy}{dx} \\ \dfrac{dy}{dx} = -1 + e^z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx} - 1 \\ \dfrac{dy}{dx} = -1 + e^z \end{cases} \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} - 1 = -1 + e^z \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = e^z$

$\Rightarrow \dfrac{dz}{e^z} = dx$ integramos

$\int \dfrac{1}{e^z} dz = \int dx + c \Rightarrow -\dfrac{1}{e^z} = x + C \Rightarrow -\dfrac{1}{e^{x+y}} = x + C$

$\Rightarrow \dfrac{1}{e^{x+y}} = -x + c \Rightarrow \ln\left(e^{-(x+y)}\right) = \ln(-x+c) \Rightarrow -x - y = \ln(-x+c)$

$\Rightarrow y = -\ln(-x+c) - x$

$\int \dfrac{1}{e^z} dz = \int e^{-z} dz$ sustitución $w = -z$, $dw = -dz$ $\Rightarrow -\int e^w dw = -e^w = -e^{-z} = -\dfrac{1}{e^z}$

(v) $\frac{dy}{dx} = 1 + \sqrt{x+y}$; $y(0) = 4$ reducir a variables separables

$\Rightarrow z = x+y \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}y = 1 + \frac{dy}{dx}$ .... (1)

$\frac{dy}{dx} = 1 + \sqrt{z}$ ... (2)

$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} = 1 + \sqrt{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1 \\ \frac{dy}{dx} = 1 + \sqrt{z} \end{cases} \Rightarrow \frac{dz}{dx} - 1 = 1 + \sqrt{z} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 2 + \sqrt{z}$

$\Rightarrow \frac{dz}{2+\sqrt{z}} = dx$ integramos

$\underbrace{\int \frac{1}{2+\sqrt{z}}\, dz}_{A} = \underbrace{\int dx + C}_{B}$

(B) $\int dx + C = x + C$

(A) $\int \frac{1}{2+\sqrt{z}}$ sustitucion $u = \sqrt{z}$, $du = \frac{1}{2\sqrt{z}} dz$ $\Rightarrow 2\int \frac{u}{2+u}\, du = 2\int \left(1 - \frac{2}{2+u}\right) du$

$= 2\left[\int 1\, du - 2\int \frac{1}{2+u}\, du\right] = 2\left[u - 2\ln(2+u)\right] = 2u - 4\ln(2+u)$

$= 2\sqrt{z} - 4\ln(2+\sqrt{z})$

$\Rightarrow 2\sqrt{z} - 4\ln(2+\sqrt{z}) = x + C \Rightarrow 2\sqrt{x+y} - 4\ln(2+\sqrt{x+y}) = x + C$

ahora $y(0) = 4$ $\begin{cases} y=4 \\ x=0 \end{cases}$

$\Rightarrow 2\sqrt{4} - 4\ln(2+\sqrt{4}) = 0 + C \Rightarrow 4 - 4\ln(4) = C \Rightarrow 4 - 8\ln(2) = C$

$\Rightarrow 2\sqrt{x+y} - 4\ln(2+\sqrt{x+y}) = x + 4 - 8\ln(2)$

(vi) $\dfrac{dN}{dt} = \underbrace{N}_{f_2(y)}\underbrace{te^{t+2}}_{f_1(t)}$ variables separados

integramos

$$\int \frac{1}{N}\, dN = \int t e^{t+2}\, dt + C$$

Ⓐ Ⓑ

Ⓐ $\int \frac{1}{N}\, dN = \ln(N)$

Ⓑ $\int t e^{t+2}\, dt$ partes $u = t$ $du = dt$ $dv = e^{t+2}dx$ $v = e^{t+2}$ $\Rightarrow te^{t+2} - \int e^{t+2}\, dt$

$= te^{t+2} - e^{t+2} = e^{t+2}(t-1)$

$\Rightarrow \ln(N) = e^{t+2}(t-1) + C \Rightarrow e^{\ln(N)} = e^{e^{t+2}(t-1)+C}$

$\Rightarrow N = e^{e^{t+2}(t-1)+C}$

2) En la CDMX la temperatura ... ¿A que temperatura toma cada quien su esquimo una vez que estan reunidos los tres?

sabemos que la Temperatura es dependiente y el tiempo es independiente

entonces $\frac{dT(t)}{dt}$

usamos la ley de Enfriamiento $\frac{dT(t)}{dt} = k(T_c - T_a)$

la $T_a = 25°C$

variables separadas

$\frac{dT(t)}{dt} = k(T_c - 25) \Rightarrow \frac{dT(t)}{(T_c - 25)} = k\,dt$

integramos

$\int \frac{1}{T_c - 25}\, dT = \int k\, dt$

$\Rightarrow \ln(T_c - 25) = kt + c \Rightarrow e^{\ln(T_c - 25)} = e^{kt + c} \Rightarrow T_c - 25 = ce^{kt}$

$T_c = ce^{kt} + 25$ solucion general

usemos $T_c(t=0) = 3 \Rightarrow T_c(t=0) = ce^{k(0)} + 25 = 3$

$\Rightarrow c + 25 = 3 \Rightarrow c = -22$

$T_c = -22e^{kt} + 25$ solucion particular

pero falta k, usemos $T_c(t=6) = 5.5$

$T_c(t=6) = -22e^{k(6)} + 25 = 5.5$

$\Rightarrow -22e^{k(6)} = -19.5$

$\Rightarrow e^{k(6)} = \frac{19.5}{22} \Rightarrow \ln(e^{k(6)}) = \ln\left(\frac{19.5}{22}\right) \Rightarrow k(6) = \ln\left(\frac{19.5}{22}\right)$

$\Rightarrow k = \frac{1}{6} \ln\left(\frac{19.5}{22}\right) \approx -0.02$

entonces

$$T_c = -22e^{(-0.02)t} + 25$$

ahora veamos los tiempos de las personas

$$T_c(t=12) = -22e^{(-0.02)(12)} + 25 \simeq 7.69$$

por lo tanto

Maria	7.7 °C
Juan	5.5 °C
Ana	3 °C

3) Se encontraron hueso fosiles de un animal. Se analizaron y se detecto que cada hueso contenia una centesima (0,01) parte del ^{14}C radiactivo

Determina la antigüedad aproximada de los huesos

cantidad de sustancia radiactiva

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

tiempo

sabemos que $A(t=0) = A_0$

y $\underbrace{A(t=5730)}_{\text{años}} = \frac{A_0}{2}$ segun internet

entonces

$$\frac{dA}{dt} = kA$$

variables separadas

$$\Rightarrow \frac{dA}{kA} = dt$$

integramos

$$\int \frac{1}{kA} dA = \int dt + c \Rightarrow \frac{1}{k} \ln(A) = t + C \Rightarrow \ln(A) = kt + c$$

$$\Rightarrow e^{\ln(A)} = e^{kt+c} \Rightarrow A = ce^{kt}$$

usamos condicion inicial

$$A(t=0) = A_0 = ce^{k(0)} \Rightarrow A_0 = c$$

$$A = A_0 e^{kt}$$

la otra condicion

$$A(t=5730) = A_0 e^{k(5730)} = \frac{A_0}{2} \Rightarrow e^{k(5730)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \ln(e^{k(5730)}) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow k(5730) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{5730} \simeq -1.26 \times 10^{-4}$$

FIRST CLASS

entonces $A = A_0 e^{(-1.120\times10^{-4})t}$

pero recordemos qe tenemos 0.01 de ^{14}C

entonces

$$A(t=?) = 0.01 A_0 = A_0 e^{(-1.120\times10^{-4})t}$$

$$\Rightarrow 0.01 = e^{(-1.120\times10^{-4})t} \Rightarrow \ln(0.01) = \ln\left(e^{(-1.120\times10^{-4})t}\right)$$

$$\Rightarrow \ln(0.01) = (-1.120\times10^{-4})t \Rightarrow t = \frac{\ln(0.01)}{-1.120\times10^{-4}} = \frac{\ln(0.01)}{\frac{\ln(\frac{1}{2})}{5730}} \approx 38064.2 \text{ años}$$

los huesos tienen 38064 años

4) En un laboratorio de biologia se ha observado que el numero de bacterias en un cultivo se ha quintuplicado en 12 horas ¿Que tiempo tardo la poblacion en triplicar su numero inicial?

la Poblacion depende del tiempo, entonces

sabemos que $P(t=0) = P_0$

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

$P(t=12) = 5P(0)$

entonces

$\frac{dP}{dt} = kP$ variables separadas $\Rightarrow \frac{dP}{kP} = dt$ integramos

$$\int \frac{1}{kP} dP = \int dt + c \Rightarrow \frac{1}{k}\ln(P) = t + C \Rightarrow \ln(P) = kt + C$$

$$\Rightarrow e^{\ln(P)} = e^{kt+c} \Rightarrow P = ce^{kt}$$

entonces usemos lo que sabemos

$$ce^{k(12)} = P(t=12) = 5P(0) = 5ce^{0k} = 5C$$

$$\Rightarrow ce^{k(12)} = 5C \Rightarrow e^{k(12)} = 5 \Rightarrow \ln(e^{k(12)}) = \ln(5) \Rightarrow k(12) = \ln(5)$$

$$k = \frac{\ln(5)}{12} \simeq 0.134$$

ahora necesitamos $P(t=?) = 3P(0)$ $3P(0) = 3ce^{0k} = 3C$

$$\Rightarrow P(t=?) = ce^{\left(\frac{\ln(5)}{12}\right)t} = 3P(0) = 3C$$

$$\Rightarrow ce^{\left(\frac{\ln(5)}{12}t\right)} = 3C \Rightarrow e^{\left(\frac{\ln(5)}{12}t\right)} = 3 \Rightarrow \ln\left(e^{\left(\frac{\ln(5)}{12}t\right)}\right) = \ln(3)$$

$$\Rightarrow \frac{\ln(5)}{12}t = \ln(3) \Rightarrow t = \frac{\ln(3)}{\frac{\ln(5)}{12}} \approx 8.19 \text{ horas}$$

8 horas 11 min