Tarea 6

García Ponce José Camilo

1) Dado que $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$ es una familia a dos parametros de soluciones de $y'' - y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$, determina un miembro de la familia que satisfaga las condiciones iniciales $y(0)=0$, $y'(0)=1$

tenemos que $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$

entonces

$$y(0) = C_1 e^{0} + C_2 e^{-0} = C_1 (1) + C_2 (1) = C_1 + C_2$$

$y(0)=0$ entonces $C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2$

ahora $y' = C_1 e^{x} - C_2 e^{-x}$

$$y'(0) = C_1 e^{0} - C_2 e^{-0} = C_1 (1) - C_2 (1) = C_1 - C_2 = -C_2 - C_2 = -2C_2$$

$y'(0) = 1$ entonces $1 = -2C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{2}$

y $C_1 = \frac{1}{2}$

entonces el miembro es

$$y = \frac{1}{2} e^{x} - \frac{1}{2} e^{-x}$$

2) Define un intervalo para el cual el problema de valor inicial

$(x-2)y'' + 3y = x$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$ que abarque $x=0$, tenga

solucion unica

$x_0 = 0$ $a_2(x) = x-2$, $a_1(x) = 0$, $a_0(x) = 3$ $g(x) = x$

por el teorema de existencia de solucion unica

tenemos que $a_2(x) \neq 0$ por lo tanto $x \neq 2$

y un intervalo que contenga a $x=0$ pero a $x=2$ no

seria $x \in (-\infty, 2)$

3) Comprueba si la funcion $f_1(x)=x$, $f_2(x)=x^2$, $f_3(x)=4x-3x^2$ es linealmente independiente o dependiente en $(-\infty,\infty)$

- Son linealmente dependiente , debido a que

$$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_1 x + a_2 x^2 + a_3(4x-3x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 x + a_2 x^2 + a_3 4x - a_3 3x^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (a_1 + a_3 4)x + (a_2 - a_3 3)x^2 = 0$$

$a_1 + 4a_3 = 0$ digamos que $a_3 = 1$

$a_2 - 3a_3 = 0$

$a_1 + 4 = 0$ entonces $a_1 = -4$

$a_2 - 3 = 0$ $a_2 = 3$

entonces

$$-4x + 3x^2 + 4x - 3x^2 = 0$$

por lo tanto $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$

entonces son linealmente dependientes

4) Comprueba que la función $x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$; x^3, x^4, $(0, \infty)$ forma un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial en el intervalo indicado. Escribe la solución general

$$x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$$

primero veamos si son soluciones

$y_1 = x^3$ $\quad y_1' = 3x^2 \quad y_1'' = 6x$

sustituimos $\quad x^2(6x) - 6x(3x^2) + 12(x^3)$

$\Rightarrow \quad 6x^3 - 18x^3 + 12x^3 \quad \Rightarrow \quad 18x^3 - 18x^3 = 0$ - si es solución

$y_2 = x^4$ $\quad y_2' = 4x^3 \quad y_2'' = 12x^2$

sustitumos $\quad x^2(12x^2) - 6x(4x^3) + 12(x^4)$

$\Rightarrow \quad 12x^4 - 24x^4 + 12x^4 \quad \Rightarrow \quad 24x^4 - 24x^4 = 0$ si es solución

entonces $\quad y_1(x) = x^3 \quad$ y $\quad y_2(x) = x^4 \quad$ son soluciones

veamos que son linealmente independientes

$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = \frac{x^3}{x^4} = \frac{1}{x}$ es variable en el intervalo

$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} = \frac{x^4}{x^3} = x$ es variable en el intervalo entonces son lineal indp.

por lo tanto por la def de conjunto fundamental de soluciones, x^3 y x^4 forman un conjunto fundamental de soluciones, y la solución general es $y = C_1x^3 + C_2x^4$

5) Comprueba que la familia biparametrica de funciones dadas en los siguient, problema, sea la solucion de la ecuacion diferencial no homogenea en el intervalo indicado

a) $y''-7y'+10y=24e^{x}$ con $y=c_1e^{2x}+c_2e^{5x}+6e^{x}$ $(-\infty,\infty)$

primero $y''-7y'+10y=0$ $\Rightarrow$ $r^2-7r+10=0$ $r_1=2$, $r_2=5$

entonces $y_h=c_1e^{2x}+c_2e^{5x}$

ahora $y_p=uy_1+vy_2$ $y_1=e^{2x}$, $y_2=e^{5x}$ $X=24e^{x}$

Wronskiano

$$W=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{2x} & e^{5x} \\ 2e^{2x} & 5e^{5x} \end{bmatrix}=(e^{2x}\,5e^{5x})-(e^{5x}\,2e^{2x})=5e^{7x}-2e^{7x}$$

$$=3e^{7x}$$

$$u=-\int\frac{y_2X}{W}=-\int\frac{e^{5x}\,24e^{x}}{3e^{7x}}dx=-\int\frac{24e^{6x}}{3e^{7x}}dx=-\frac{24}{3}\int\frac{e^{6x}}{e^{7x}}dx$$

$$=-\frac{24}{3}\int\frac{1}{e^{x}}dx=-8\int e^{-x}dx=8e^{-x}$$

$$v=\int\frac{y_1X}{W}=\int\frac{e^{2x}\,24e^{x}}{3e^{7x}}dx=\int\frac{24e^{3x}}{3e^{7x}}dx=\frac{24}{3}\int\frac{e^{3x}}{e^{7x}}dx$$

$$=8\int\frac{1}{e^{4x}}dx=8\int e^{-4x}dx=8/_{-4}\,e^{-4x}=-2e^{-4x}$$

$$y_p=8e^{-x}e^{2x}+-2e^{-4x}e^{5x}=8e^{x}-2e^{x}=6e^{x}$$

entonces $y_g=c_1e^{2x}+c_2e^{5x}+6e^{x}$ si cumple

b) $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + 4x - 12$ con $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + x^2 e^{2x} + x - 2$

$(-\infty, \infty)$

primero $y'' - 4y' + 4y = 0 \Rightarrow r^2 - 4r + 4 = 0$ $r_{1,2} = 2$

entonces $y_h = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$

ahora variacion de la constante arbitraria

$$y_1(x) \frac{d}{dx} C_1(x) + y_2(x) \frac{d}{dx} C_2(x) = 0$$

$$\frac{d}{dx} C_1(x) \frac{d}{dx} y_1(x) + \frac{d}{dx} C_2(x) \frac{d}{dx} y_2(x) = f(x)$$

con $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = xe^{2x}$, $f(x) = 2e^{2x} + 4x - 12$

entonces $xe^{2x} \frac{d}{dx} C_2(x) + e^{2x} \frac{d}{dx} C_1(x) = 0$

y $\frac{d}{dx} xe^{2x} \frac{d}{dx} C_2(x) + \frac{d}{dx} C_1(x) \frac{d}{dx} e^{2x} = 2e^{2x} + 4x - 12$

$(2xe^{2x} + e^{2x}) \frac{d}{dx} C_2(x) + (2e^{2x}) \frac{d}{dx} C_1(x) = 2e^{2x} + 4x - 12$

ahora

$\frac{d}{dx} C_1(x) = -2x(2x + e^{2x} - 6)e^{-2x} \Rightarrow dC_1(x) = -2(2e^{-2x}x^2 - 6e^{-2x}x + x)dx$

integramos $\int dC_1(x) = -2\int (2e^{-2x}x^2 - 6e^{-2x}x + x)dx$

$\Rightarrow C_1(x) = -x^2 - \frac{6x+3}{e^{2x}} + \frac{2x^2+2x+1}{e^{2x}} + C_3 = -x^2 + (2x^2 - 4x - 2)e^{-2x} + C_3$

y $\frac{d}{dx} C_2(x) = 2(2x + e^{2x} - 6)e^{-2x} \Rightarrow dC_2 = 2(2e^{-2x}x + 1 - 6e^{-2x})dx$

integramos $\int dC_2 = 2\int (2e^{-2x}x + 1 - 6e^{-2x})dx$

$\Rightarrow C_2(x) = 2x - \frac{2x+1}{e^{2x}} + \frac{6}{e^{2x}} + C_4 = 2x + (-2x + 5)e^{-2x} + C_4$

entonces, $y_g = C_1(x)\, e^{2x} + C_2(x)\, xe^{2x}$

$$y_g = \left(-x^2 + (2x^2-4x-2)e^{-2x} + C_3\right)e^{2x} + \left(2x + (-2x+5)e^{-2x} + C_4\right)xe^{2x}$$

$$y_g = C_3 e^{2x} + 2x^2 - 4x - 2 - x^2e^{2x} + 2x^2e^{2x} - 2x^2 + 5x + C_4\, xe^{2x}$$

$$y_g = C_3 e^{2x} + C_4\, xe^{2x} + x^2e^{2x} + x - 2$$

$$y_g = C_1 e^{2x} + C_2\, xe^{2x} + x^2e^{2x} + x - 2$$

si cumple

6) Determina una segunda solución en la ecuación diferencial $y'' + 5y' = 0$

$y_1 = 1$

Usa la fórmula $y_2 = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2(x)} dx$

suponiendo un intervalo adecuado de validez

$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0$ $\quad 5 = P_1(x)$

entonces $y_2 = 1 \int \frac{e^{-\int 5dx}}{1^2} dx$

$y_2 = \int e^{-\int 5dx} dx$ $\quad -\int 5\,dx = -5x$

$y_2 = \int e^{-5x} dx = \frac{1}{-5} e^{-5x}$

$y_2 = -\frac{1}{5} e^{-5x}$

7) Aplica el método de reducción para determinar una solución de la ecuación no homogénea $y'' - 4y = 2$, $y_1 = e^{-2x}$ una solución homogénea asociada

primero $y'' - 4y = 0$ $\quad y_2 = y_1 \int \frac{e^{\int P(x)}}{y_1^2} dx = e^{-2x} \int \frac{e^0}{(e^{-2x})^2} dx = e^{-2x} \int e^{4x} dx = e^{-2x} \frac{e^{4x}}{4} = \frac{e^{2x}}{4}$

$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$

ahora $y_p = u y_1 + v y_2$ $\quad y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^{2x}$, $X = 2$

wronskiano

$$w = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2x} & e^{2x} \\ -2e^{-2x} & 2e^{2x} \end{bmatrix} = (e^{-2x} 2e^{2x}) - (-e^{2x} 2e^{-2x}) = 2 - -2 = 4$$

$$u = -\int \frac{y_2 X}{w} = -\int \frac{2e^{2x}}{4} dx = -\frac{1}{2} \int e^{2x} dx = -\frac{1}{2} \frac{e^{2x}}{2} = -\frac{e^{2x}}{4}$$

$$v = \int \frac{y_1 X}{w} = \int \frac{2e^{-2x}}{4} dx = \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx = \left(\frac{1}{2}\right) -\frac{1}{2} e^{-2x} = -\frac{e^{-2x}}{4}$$

$$y_p = -\frac{e^{2x}}{4} e^{-2x} + -\frac{e^{-2x}}{4} e^{2x} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

entonces $y_g = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{2}$

8) Determina la solución general de cada ecuación diferencial

a) $y'' + 3y' - 5y = 0$

$r^2 + 3r - 5 = 0$ $\qquad r = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 20}}{2}$

$r_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2}$, $r_2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2}$

entonces

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} = C_1 e^{\left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2}\right)x} + C_2 e^{\left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2}\right)x}$$

b) $3y'' + 2y' + y = 0$

$\Rightarrow \quad y'' + \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}y = 0$

$r^2 + \frac{2}{3}r + \frac{1}{3} = 0$ $\qquad r = \frac{-\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{12}{9}}}{2} = \frac{-\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{8}{9}(-1)}}{2}$

$r_{1,2} = -\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3} i$ $\qquad = \frac{-\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{8}{9}}\, i}{2}$

entonces

$$y = c_1 e^{-\frac{1}{3}x} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x\right) + c_2 e^{-\frac{1}{3}x} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}x\right)$$