Tarea 2 García Ponce José Camilo

1) Define las conectivas $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ y $\wedge$ apartir de $\vee$ y $\neg$

primero $\Rightarrow$, podemos ver a $p \Rightarrow q$ como $\neg p \vee q$

luego $\Leftrightarrow$, podemos ver a $p \Leftrightarrow q$ como

$$\neg(\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p))$$

y por ultimo $\wedge$, podemos ver a $p \wedge q$ como

$$\neg(\neg p \vee \neg q)$$

2) Transforma las siguientes formulas a formas normales conjuntivas

(a) $(p \Rightarrow q) \wedge (r \vee \neg q)$

$(\neg p \vee q) \wedge (r \vee \neg q)$ listo, ya esta en CNF

(b) $\neg(p \vee q) \vee \neg(r \wedge q)$

$(\neg p \wedge \neg q) \vee \neg(r \wedge q)$

$(\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg r \vee \neg q)$

$((\neg r \vee \neg q) \vee \neg p) \wedge ((\neg r \vee \neg q) \vee \neg q)$

$(\neg r \vee \neg q \vee \neg p) \wedge (\neg r \vee \neg q \vee \neg q)$

$(\neg r \vee \neg q \vee \neg p) \wedge (\neg r \vee \neg q)$ aqui ya tenemos CNF

notemos que $(\neg r \vee \neg q)$ "cubre" el caso $(\neg r \vee \neg q \vee \neg p)$

$(\neg r \vee \neg q)$ listo, ya esta en CNF y en DNF

3) Di si las siguientes formulas son tautologias, contradicciones o contingencias

(a) $p \Longleftrightarrow (p \vee q)$;

usemos tabla de verdad

p	q	$p \vee q$	$p \Leftrightarrow (p \vee q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	V	F	V

↑

entonces es contingencia

(b) $p \Rightarrow (p \vee q)$

usemos tabla de verdad

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow (p \vee q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

↑

entonces es tautologia

(c) $\neg((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge r \Rightarrow q \wedge r))$

usemos tabla de verdad

p	q	r	A: $p \Rightarrow q$	B: $p \wedge r$	C: $q \wedge r$	D: $B \Rightarrow C$	E: $A \Rightarrow D$	$\neg E$
V	V	V	V	V	V	V	V	F
V	V	F	V	F	F	V	V	F
V	F	V	F	V	F	F	V	F
V	F	F	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	F	V	V	V	F
F	V	F	V	F	F	V	V	F
F	F	V	V	F	F	V	V	F
F	F	F	V	F	F	V	V	F

entonces es una contradiccion

(d) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

usaremos tablas de verdad

p	q	r	A: $q \vee r$	B: $p \wedge A$	C: $p \wedge q$	D: $p \wedge r$	E: $C \vee D$	$B \Leftrightarrow E$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

entonces es tautologia

4) Señala si los siguientes argumentos son lógicamente correctos

(a) $p \Rightarrow q \vDash q \Rightarrow p$;

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	
V	V	V	V	✓
V	F	F	V	
F	V	V	F	✗
F	F	V	V	✓

no es lógicamente correcto

(b) $p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow r \vDash p \Rightarrow r$;

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$	
V	V	V	V	V	V	✓
V	V	F	V	F	F	
V	F	V	F	V	V	
V	F	F	F	V	F	
F	V	V	V	V	V	✓
F	V	F	V	F	V	
F	F	V	V	V	V	✓
F	F	F	V	V	V	✓

sí es lógicamente correcto

(c) $p \Leftrightarrow q$, $\neg p \wedge q \models \neg q \wedge q$

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$\neg q$	$\neg q \wedge q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	V	F
F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	V	F	V	F

si el logicamente correcto

(d) $p \vee q$, $q \vee r \models p \vee r$

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$p \vee r$	
V	V	V	V	V	V	✓
V	V	F	V	V	V	✓
V	F	V	V	V	V	✓
V	F	F	V	F	V	
F	V	V	V	V	V	✓
F	V	F	V	V	F	✗
F	F	V	F	V	V	
F	F	F	F	F	F	

no es logicamente correcto

4) Demuestra los siguientes teoremas de deduccion natural

(a) $\vdash_N (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

1	$p \Rightarrow q$	hipotesis
2	$\neg q$	hipotesis
3	$\neg p$	MT 1, 2
4	$\neg q \Rightarrow \neg p$	I $\Rightarrow$
5	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$	I $\Rightarrow$
6	$\neg q \Rightarrow \neg p$	hipotesis
7	p	hipotesis
8	$\neg\neg p$	TDN 7
9	$\neg\neg q$	MT 6, 8
10	q	TDN 9
11	$p \Rightarrow q$	I $\Rightarrow$
12	$(\neg q \Rightarrow \neg p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$	I $\Rightarrow$
13	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$	I $\Leftrightarrow$ 5, 12

(b) $\vdash_N (p \vee q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r))$

1	$p \vee q \Rightarrow r$	hipotesis
2	p	hipotesis
3	$p \vee q$	$I_\vee$ 2
4	r	$E_\Rightarrow$ 1,3
5	$p \Rightarrow r$	$I_\Rightarrow$
6	$(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$	$I_\vee$ 5
7	$(p \vee q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r))$	$I_\Rightarrow$

(c) $p \vee q \Rightarrow r \quad , \neg r \quad , \neg p \vee t \Rightarrow s \quad \vdash s$

1	$p \vee q \Rightarrow r$	premisa
2	$\neg r$	premisa
3	$\neg p \vee t \Rightarrow s$	premisa
4	$\neg s$	hipotesis
5	$\neg(p \vee q)$	MT 1,2
6	$\neg p \wedge \neg q$	Demostracion auxiliar 5
7	$\neg p$	E$\wedge$ 6
8	$\neg p \vee t$	I$\vee$ 7
9	s	E$\Rightarrow$ 3,8
10	$\perp$	I$\perp$ 9,4
11	s	E$\neg$ 4

Demostracion auxiliar $\vdash_N \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

1	$\neg(p \vee q)$	hipotesis
2	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$	hipotesis
3	p	hipotesis
4	$p \vee q$	I$\vee$ 3
5	$\perp$	I$\perp$ 4,1
6	$\neg p$	I$\neg$ 3
7	q	hipotesis
8	$p \vee q$	I$\vee$ 7

9	$\bot$	$I\bot$ 8, 1
10	$\neg q$	$I\neg$ 7
11	$\neg p \wedge \neg q$	$I\wedge$ 6, 10
12	$\bot$	$I\bot$ 2, 11
13	$\neg p \wedge \neg q$	$E\neg$ 2
14	$\neg(p \vee q) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$	$I \Rightarrow$
15	$\neg p \wedge \neg q$	hipotesis
16	$p \vee q$	hipotesis
17	p	hipotesis
18	$\neg p$	$E\wedge$ 15
19	$\bot$	$I\bot$ 17, 18
20	q	hipotesis
21	$\neg q$	$E\wedge$ 15
22	$\bot$	$I\bot$
23	$\bot$	$E\vee$ 16
24	$\neg(p \vee q)$	$I\neg$ 16
25	$(\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg(p \vee q)$	$I \Rightarrow$
26	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$	$I \Leftrightarrow$ 14, 25