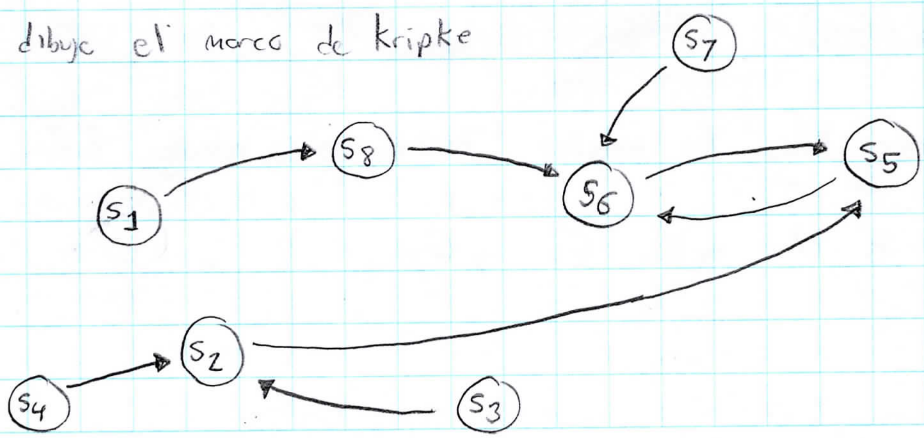
Tarea 6

1) Considera una red genetica con la siguiente tabla de interacciones:

Estado	G_1	G_2	G_3	$G_1' = G_1 \wedge \neg G_2$	$G_2' = \neg G_1 \vee \neg G_2 \vee \neg G_3$	$G_3' = G_2 \wedge \neg G_3$
S_1	1	1	1	0	0	0
S_2	1	1	0	0	1	1
S_3	1	0	1	1	1	0
S_4	1	0	0	1	1	0
S_5	0	1	1	0	1	0
S_6	0	1	0	0	1	1
S_7	0	0	1	0	1	0
S_8	0	0	0	0	1	0

(a) completa las tres ultimas columnas

(b) dibuje el marco de kripke



(c) Verifica si las siguientes afirmaciones de LTL son verdaderas en este marco

i) $\pi_1 \models G_3 \Rightarrow XG_1$

no es verdadera, ya que en S_1 esta activo G_3, pero $\pi_1^2 \not\models G_1$ dedibo a que en S_8 no esta activo G_1

ii) $\pi_2^3 \models G(G_1 \vee G_2)$

es verdadero, ya que en todos los futuros estados de S_6 (que son S_6 y S_5) se cumple $G_1 \vee G_2$, ya que en S_5 y S_6 esta activo G_2

iii) $\pi_6 \models (G_2 \cup G_3)$

es verdadero, ya que $\pi_6 \models G_2$ (en S_6 esta activo G_2) y en $\pi_6^2 \models G_3$ (en S_5 esta activo G_3)

iv) $\mathcal{I}, e \models F(G_2 \wedge G_3)$

es verdadero, ya que todos los estados tienen como estado futuro a S_5, y en S_5 esta activo G_2 y G_3

2. Verifica cuales de las siguientes afirmaciones son satisfechas por el programa P_1:

$P_1 \equiv_{def} ((\alpha!n.nil) \| (\beta!n.nil)) + ((\gamma?m.nil) \| (\gamma?m.nil))$

$\Phi \equiv_{def} [\alpha!n][\gamma?m][\cdot]V$

$\Gamma \equiv_{def} \mu X.\langle\cdot\rangle[\gamma?m]V \vee [\cdot]X$

Solución:

Veamos si $P \models \Phi$

$P \models [\lambda]D$ sii $\forall p'.p \xrightarrow{\lambda} p' \Rightarrow p' \models D$

$\lambda = \alpha!n$, entonces

$P \models [\alpha!n][\gamma?m][\cdot]V$ sii $\forall p'.p \xrightarrow{\alpha!n} p' \Rightarrow p' \models [\gamma?m][\cdot]V$

Además

$P \models [\lambda]D$ sii $\forall p'.p \xrightarrow{\lambda} p' \Rightarrow p' \models D$

$\lambda = \gamma?m$ entonces

$P \models [\alpha!n][\gamma?m][\cdot]V$ sii $\forall p'.p \xrightarrow{\alpha!n} p' \Rightarrow p' \models [\gamma?m][\cdot]V$

sii $\forall p'.p \xrightarrow{\alpha!n} p' \Rightarrow \forall p''\ p' \xrightarrow{\gamma?m} p'' \Rightarrow p'' \models [\cdot]V$

Luego veamos que

$((\alpha!n.nil) \| (\beta!n.nil)) + ((\gamma?m.nil) \| (\gamma?m.nil)) \xrightarrow{\alpha!n}$

$(nil \| (\beta!n.nil))$

Observación

Se consideraron todas las $\alpha!n$ posibles

De este modo podemos notar que claramente

$(nil \| (\beta!n.nil)) \not\models [\gamma?m][\cdot]V$

ya que no se puede haber $\gamma?m$ $\therefore$ NO ES SATISFECHA

Ahora veamos si $P \models \Gamma$ si y sólo si:

$$P \models (\langle\cdot\rangle[\gamma?m]V \vee [\cdot]X)_{[X:=\Gamma]}$$ lo que

se reduce a

$$P \models \langle\cdot\rangle[\gamma?m]V \quad \vee \quad P \models [\cdot]X$$

Veamos que:

$$((\alpha!n.nil) \| (\beta!n.nil)) + ((\gamma?m.nil) \| (\gamma?m.nil)) \xrightarrow{\gamma?m}$$

$$(nil \| (\gamma?m.nil)) \xrightarrow{\gamma?m} (nil \| nil)$$

Puesto que tenemos $[\gamma?m]$ (se consideran todas las transiciones a $\gamma?m$)

Observación
Como tenemos $\langle\cdot\rangle$ podemos usar alguna transición, ya sea $\alpha!n$, $\beta!n$, o $\gamma?m$ convino usar $\gamma?m$

Así $nil \| nil \models V$ por lo visto en clase (Ejemplo 1)

$\therefore$ es Satisfecho

3) Demuestra que $0 \leq n \Rightarrow [\pi] X = 2^n$, donde π es el siguiente programa:

```
X := 1;
Y := 0;
while Y < n do
    ( X := X x 2 ;
      Y := Y + 1);
```

usamos regla asign y nos da

$1 = 1 \wedge 0 = 0 \wedge 0 \leq n \Rightarrow [X := 1] X = 1 \wedge 0 = 0 \wedge 0 \leq n$

$X = 1 \wedge 0 = 0 \wedge 0 \leq n \Rightarrow [Y := 0] X = 1 \wedge Y = 0 \wedge 0 \leq n$

con la regla sec tenemos

$1 = 1 \wedge 0 = 0 \wedge 0 \leq n \Rightarrow [X := 1, Y := 0] X = 1 \wedge Y = 0 \wedge 0 \leq n$

si adaptamos la convencia general de que, para cualquer termino t, se tiene $t = t \Leftrightarrow V$, concluimos

$(1 = 1 \wedge 0 = 0 \wedge 0 \leq n) \Leftrightarrow (V \wedge V \wedge 0 \leq n) \Leftrightarrow (0 \leq n)$

la ultima doble implicacion y la regla cons dan

$0 \leq n \Rightarrow [X := 1, Y := 0] X = 1 \wedge Y = 0 \wedge 0 \leq n$ (1)

si podemos demostrar que $X = 1 \wedge Y = 0 \wedge 0 \leq n \Rightarrow [\omega] X = 2^n$, con ω el resto del programa, podemos deducir la meta original aplicando sec para lograr esto usaremos la regla ciclo con un invariante I adecuado que cumpla con

1.) $I \wedge Y < n \Rightarrow [X := X \times 2 ; Y := Y + 1] I$

2.) $X = 1 \wedge Y = 0 \wedge 0 \leq n \Rightarrow I$

3.) $I \wedge Y \not< n \Rightarrow X = 2^n$

el invariante que usaremos sera

$$I \equiv_{def} X = 2^Y \wedge Y \leq n \wedge 0 \leq n$$

verifiquemos si I cumple 1-3

requisito 1.) tenemos que asign nos permite deducir las formulas

$$X \times 2 = 2^{Y+1} \wedge Y + 1 \leq n \wedge 0 \leq n \Rightarrow$$

$$[X := X \times 2] \, X = 2^{Y+1} \wedge Y + 1 \leq n \wedge 0 \leq n$$

$$X = 2^{Y+1} \wedge Y + 1 \leq n \wedge 0 \leq n \Rightarrow [Y := Y + 1] I$$

la regla sec nos permite concluir

$$X \times 2 = 2^{Y+1} \wedge Y + 1 \leq n \wedge 0 \leq n \Rightarrow [X := X \times 2 ; Y := Y + 1] I$$

y podemos observar que

$$I \wedge Y < n \Rightarrow X \times 2 = 2^{Y+1} \wedge Y + 1 \leq n \wedge 0 \leq n$$

aplicando la resta ccns obtenemos

$$I \wedge Y < n \Rightarrow [X := X \times 2 ; Y := Y + 1] I$$

por lo tanto solo falta demostrar que I cumple 1

aplicando la regla de ciclo podemos afirmar

$$I \Rightarrow [\omega] I \wedge Y \not< n \qquad (2)$$

el requisito 2: se cumple I por def de potencia $X = 1 = 2^0 = 2^Y$

el requisito 3: se cumple debido a que $Y \leq n \wedge Y \not< n \Rightarrow Y = n$

2 y 3 se refieren a las afirmaciones:

$$X = 1 \wedge Y = 0 \wedge 0 \leq n \Rightarrow I$$

$$I \wedge Y \not< n \Rightarrow X = 2^n$$

estas dos formulas y (2) nos permite obtener

$$X = 1 \wedge Y = 0 \wedge 0 \leq n \Rightarrow [\omega] X = 2^n$$

usandolo en conjunto con (1) tenemos

$$0 \leq n \Rightarrow [\pi] X = 2^n$$