Tarea 1 García Ponce José Camilo

1) Sea $<$ el orden estandar en $\mathbb{N}$. Di si existen (y en ese caso, describelos) los siguientes elementos:

- Minimo de $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) - \{(0,0)\}$ con el orden $<_L$

el minimo seria $(0,1)$, esto ya que el unico elemento menor seria $(0,0)$, pero no esta

- Minimo de $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) - \{(0,0)\}$ con el orden $<_C$

aqui no hay minimo, debido a que no podemos comparar todos los elementos y asi obtener un minimo

- Maximales y minimales de $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) - \{0,0\}$ con orden $<_L$

aqui no hay maximales, ya que siempre podemos encontrar un elemento mayor, por ejemplo $a,b \in \mathbb{N}$, $(a,b) <_L (a+1,b)$
pero si existe un minimal, que es $(0,1)$, esto ya que este elemento es el minimo, entonces siempre esta abajo de los otros elementos

- Maximales y minimales de $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) - \{0,0\}$ con orden $<_C$

aqui tampoco hay maximales, ya que siempre podemos encontrar un elemento superior, por ejemplo, $a,b \in \mathbb{N}$, $(a,b) <_C (a+1, b+1)$
pero si existen varios minimales, los cuales son de la forma $\{(a,b) \mid a \in \mathbb{N} - \{0\}, b \in \mathbb{N}\} \cup \{(1,1)\}$ y asi ningun elemento (que se pueda comparar) estaria abajo de ellos

2) Considera estas funciones para arboles ternarios de naturales

($A_3(a,b,c)$ es un arbol con ramas a, b y c)

$$card(n) = 1 \quad n \in \mathbb{N}$$

$$card(A_3(a,b,c)) = card(a) + card(b) + card(c)$$

$$prof(n) = 0 \quad n \in \mathbb{N}$$

$$prof(A_3(a,b,c)) = maximo\{prof(a), prof(b), prof(c)\} + 1$$

Demuestra por induccion bien fundada que $card(a) \leq 3^{prof(a)}$

Dem/

• Caso Base

Sea n, $n \in \mathbb{N}$, un arbol trivial (sin ramas), veamos que se cumple

$card(n) \leq 3^{prof(n)}$, por definicion $card(n) = 1$ y $prof(n) = 0$

entonces $card(n) = 1 \leq 1 = 3^0 = 3^{prof(n)}$, entonces se cumple

• Hipotesis de induccion

Sea f un arbol, $f = A_3(c,d,e)$, supongamos que para los

arboles c, d y e se cumple $card(c) \leq 3^{prof(c)}$, $card(d) \leq 3^{prof(d)}$

y $card(e) \leq 3^{prof(e)}$, pues $c \lneq f$, $d \lneq f$ y $e \lneq f$

• Paso inductivo

Demostremos para el arbol $f = A_3(c,d,e)$ (el de la hipotesis)

PD $card(f) \leq 3^{prof(f)}$

Primero tenemos $card(f) = card(c) + card(d) + card(e)$ por definicion

$card(f) \leq 3^{prof(c)} + 3^{prof(d)} + 3^{prof(e)}$ por hipotesis de induccion

$card(f) \leq 3 \cdot maximo(3^{prof(c)}, 3^{prof(d)}, 3^{prof(e)})$ debido a que la suma

de 3 terminos es a lo más 3 veces el más grande

$\text{card}(f) \leq 3 \cdot 3^{\text{maximo}(\text{prof}(c), \text{prof}(d), \text{prof}(e))}$, ya que $\text{maximo}(3^x, 3^y, 3^z) = 3^{\text{maximo}(x,y,z)}$

$\text{card}(f) \leq 3^{\text{maximo}(\text{prof}(c), \text{prof}(d), \text{prof}(e))+1}$

$\text{card}(f) \leq 3^{\text{prof}(f)}$ por definicion

por lo tanto concluimos que $\text{card}(a) \leq 3^{\text{prof}(a)}$ se cumple $\square$

3) Considera la siguiente definicion del lenguaje de la logica modal proposicional

(a) Proposiciones atomicas : $p, q, r, p_1, \ldots$

(b) Formulas creadas por medio de conectivas logicas : $\neg\alpha$, $(\alpha \vee \beta), \ldots$

(c) Formulas creadas por medio de operadores modales : $\Box\alpha$, $\Diamond\alpha$

Transforma la definicion anterior en una definicion de un conjunto generado inductivamente

Sea P el conjunto del lenguaje de la logica modal proposicional

- las proposiciones atomicas $p, q, r, p_1, \ldots$ pertenecen a P
- si α y β son elementos de P, entonces $\neg\alpha$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \wedge \beta, \ldots$ pertenecen a P, donde $\neg, \vee, \wedge, \ldots$ son conectivos logicos
- si α es un elemento de P, entonces $\Box\alpha$, $\Diamond\alpha$ pertenecen a P, donde $\Box, \Diamond$ son operadores modales
- solo las proposiciones atomicas y las formulas creadas por las reglas de arriba pertenecen a P