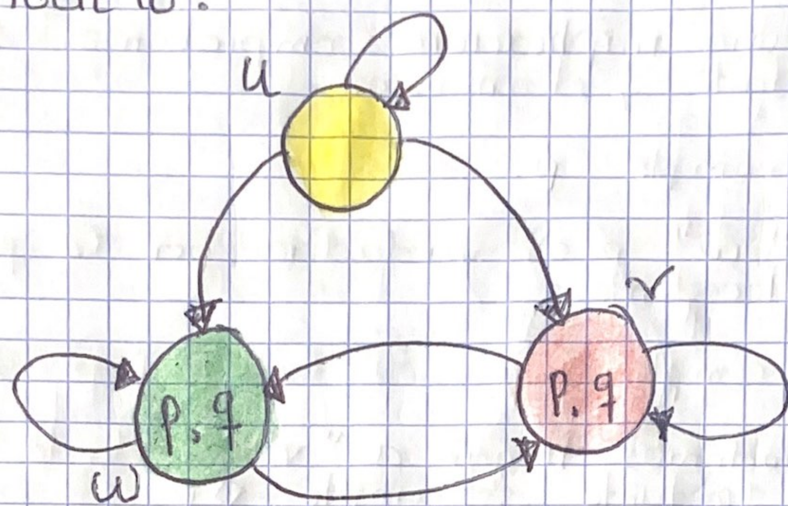
1. Di si las siguentes afirmaciones son verdaderas en el modelo:



(a) $\mathcal{F}, \ell, w \models p \Rightarrow \Box p$.

Para comprobar la siguente afirmación veamos que tenemos una implicación y para que esta sea verdadera el antecedente y consecuente deben ser verdaderos

Veamos si se cumple p (antecedente)

Veamos que en el mundo "w" p es verdadera por lo que se cumple el antecedente.

Veamos si se cumple $\Box$ p

Veamos que desde el mundo "w" podemos llegar a "v" y a "w". En ambos casos p es verdadera por lo que se cumple $\Box$ p

$\therefore$ La afirmación $\mathcal{F}, \ell, w \models p \Rightarrow \Box p$ es verdadero

(b) $\mathfrak{F}, \ell, w \models p \Rightarrow \Diamond p$.

Como tenemos una implicación comprobemos si se cumple el antecedente y el consecuente.

Veamos si se cumple p.

En el mundo "w" p es verdadero por lo que si se cumple el antecedente.

Veamos si se cumple $\Diamond p$

Desde "w" podemos llegar a "v" en donde p es verdadera, por lo tanto se cumple $\Diamond p$

∴ la afirmación $\mathfrak{F}, \ell, w \models p \Rightarrow \Diamond p$ es verdadero

(c) $\mathfrak{F}, \ell \models p \Leftrightarrow \Diamond p$

Como tenemos un bicondicional, tenemos que comprobar que el antecedente y consecuente sean verdaderos.

Para $p \Rightarrow \Diamond p$ probemos lo siguiente

1.- $\mathfrak{F}, \ell, u \models \Diamond p$: Existe un camino desde "u" al mundo "w" donde p es verdadero. ∴ Si cumple.

2.- $\mathfrak{F}, \ell, w \models \Diamond p$: Existe un camino desde "w" al mundo "v" donde p es verdadero. ∴ Si cumple.

3.- $\mathfrak{F}, \ell, v \models \Diamond p$: Existe un camino desde "v" al mundo "w" donde p es verdadero. ∴ Si cumple

∴ $\Diamond$ es verdadera

- Ahora veamos si p es verdadera para todos los mundos. Como en "u" p es falso no se cumple el antecedente p

∴ p es falsa

Como el antecedente es falso y el consecuente verdadero entonces se cumple $p \Rightarrow \Diamond p$ por la tabla de verdad de $\Rightarrow$

Veamos si se cumple $\Diamond p \Rightarrow p$

Por lo anterior como $\Diamond p$ es verdadero y p es falso, entonces $\Diamond p \Rightarrow p$ es falso por la tabla de verdad de $\Rightarrow$

$\therefore$ la afirmación $\mathfrak{F}, e \models p \Leftrightarrow \Diamond p$ es falso.

(d) $\mathfrak{F} \models \Diamond p \Rightarrow \Box \Diamond p$

Veamos si se cumple la implicación para todos los mundos y las evaluaciones.

Veamos primero que el antecedente se cumple. $\Diamond p$ para todos los mundos

$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{F}, e, u \models \Diamond p \\ \mathfrak{F}, e, v \models \Diamond p \\ \mathfrak{F}, e, w \models \Diamond p \end{array}\right\}$ En los tres casos se cumple que existe un camino donde p es verdadera

Para la evaluación q

$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{F}, e, u \models \Diamond q \\ \mathfrak{F}, e, v \models \Diamond q \\ \mathfrak{F}, e, w \models \Diamond q \end{array}\right\}$ Es los tres casos se cumple que existe un camino donde q es verdadero

$\therefore$ $\Diamond p$ y $\Diamond q$ es verdadera

Veamos si se cumple el consecuente $\Box \Diamond p$ y $\Box \Diamond q$
Por lo anterior ya vimos que se cumple $\Diamond p$ y $\Diamond q$
Resta probar $\Box p$ y $\Box q$

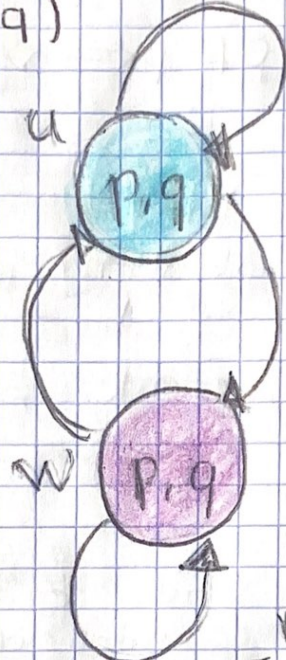
Veamos que para $\mathfrak{F}, e, u \models \Box p$ no se cumple ya que en u p es falso

$\therefore$ Como el antecedente es verdadero y el consecuente falso la afirmación $\mathfrak{F} \models \Diamond p \Rightarrow \Box \Diamond p$ es falso

2. Diseña marcos de kripke y evaluaciones que satisfagan las siguientes formulas el algún mundo posible:

(a) $\Box p \vee \Diamond q$;

(b) $\Box (p \Rightarrow q)$



Para u

$\mathcal{F}, \ell, u \models \Box p \vee \Diamond q$

se cumple $\Box p$ ya que para todos los mundos a los que podemos llegar desde u p es verdadero. Si cumple

Para w

$\mathcal{F}, \ell, w \models \Box (p \Rightarrow q)$

Revisemos primero $p \Rightarrow q$
En w p y q son verdaderas
En todos los caminos a los que podemos llegar desde w p y q son verdaderas. Si cumple

3. Diseña marcos de kripke y evaluaciones que hagan verdaderas las formulas del ejercicio 2.

Con el mismo marco del ejercicio anterior se cumplen las formulas $\Box p \vee \Diamond$ y $\Box (p \Rightarrow q)$

4) Demuestra que $\mathcal{F} \vDash \Box\alpha \Rightarrow \alpha$ sii la relacion de accesibilidad en el marco cumple con reflexividad $\forall u.\ u \to u$

Dem]

$\Rightarrow$] Sea $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$, R reflexiva

Por definicion de reflexiva tenemos que para cada mundo es accesible desde el mismo

Sea un mundo u cualquiera, como una evaluacion e cualquiera,

caso 1: $\mathcal{F}, e, u \vDash \Box\alpha$, por definicion, todos los posibles mundos a los que tiene acceso u cumplen α, pero el marco cumple con reflexividad, entonces $u \to u$ por lo tanto u debe cumplir α y se cumple $\mathcal{F}, e, u \vDash \Box\alpha \Rightarrow \alpha$

caso 2: $\mathcal{F}, e, u \nvDash \Box\alpha$, entonces no importa lo que pase se cumplira $\mathcal{F}, e, u \vDash \Box\alpha \Rightarrow \alpha$

Como tomamos un mundo y una evaluacion cualquiera entonces concluimos que se cumple $\mathcal{F} \vDash \Box\alpha \Rightarrow \alpha$

$\Leftarrow$) Sea $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$, $\mathcal{F} \models \Box\alpha \Rightarrow \alpha$ se cumple

Supongamos que R no es reflexiva , por definicion existe un mundo $u \in W$ tal que $u \not\to u$, sea la evaluacion e tal que para todos los mundos se cumple α excepto para u , entonces se cumple $\mathcal{F}, e, u \models \Box\alpha$ pero no $\mathcal{F}, e, u \models \alpha$

por lo tanto $\mathcal{F}, e, u \not\models \Box\alpha \Rightarrow \alpha$ por lo tanto $\mathcal{F} \not\models \Box\alpha \Rightarrow \alpha$!

una contradiccion , por lo tanto $u \to u$ debe estar

por lo tanto R debe ser reflexiva

$\Box$

def

$\Box\alpha \equiv \neg\Diamond\neg\alpha$

$\Diamond\alpha \equiv \neg\Box\neg\alpha$

5) Demuestra que S_4, definido por $\Box\alpha \Rightarrow \Box\Box\alpha$ es equivalente a $\Diamond\Diamond\beta \Rightarrow \Diamond\beta$ para α y β apropiadas

Para que sean equivalentes tomaremos que α es $\neg\beta$

por lo tanto probaremos $\vdash (\Box\alpha \Rightarrow \Box\Box\alpha) \Leftrightarrow (\Diamond\Diamond\beta \Rightarrow \Diamond\beta)$

pero α es $\neg\beta$, entonces sera $\vdash (\Box\neg\beta \Rightarrow \Box\Box\neg\beta) \Leftrightarrow (\Diamond\Diamond\beta \Rightarrow \Diamond\beta)$

1	$\Box\neg\beta \Rightarrow \Box\Box\neg\beta$	hip
2	$\neg\Diamond\neg\neg\beta \Rightarrow \neg\Diamond\neg\neg\Diamond\neg\neg\beta$	def $\Box$
3	$\neg\Diamond\beta \Rightarrow \neg\Diamond\Diamond\beta$	TDD 2
4	$\Diamond\Diamond\beta \Rightarrow \Diamond\beta$	Teorema Aux 3
5	$(\Box\neg\beta \Rightarrow \Box\Box\neg\beta) \Rightarrow (\Diamond\Diamond\beta \Rightarrow \Diamond\beta)$	I$\Rightarrow$ 1-4
6	$\Diamond\Diamond\beta \Rightarrow \Diamond\beta$	hip
7	$\neg\Box\neg\neg\Box\neg\beta \Rightarrow \neg\Box\neg\beta$	def $\Diamond$
8	$\neg\Box\Box\neg\beta \Rightarrow \neg\Box\neg\beta$	TDD 7
9	$\Box\neg\beta \Rightarrow \Box\Box\neg\beta$	Teorema Aux 8
10	$(\Diamond\Diamond\beta \Rightarrow \Diamond\beta) \Rightarrow (\Box\neg\beta \Rightarrow \Box\Box\neg\beta)$	I$\Rightarrow$ 6-9
11	$(\Box\neg\beta \Rightarrow \Box\Box\neg\beta) \Leftrightarrow (\Diamond\Diamond\beta \Rightarrow \Diamond\beta)$	I$\Leftrightarrow$ 5,10

Teorema Aux $(\alpha \Rightarrow \beta) \Longleftrightarrow (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$

1	$\alpha \Rightarrow \beta$	hip
2	$\neg\beta$	hip
3	$\neg\alpha$	MT. 1, 2
4	$\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$	I⇒ 2-3
5	$(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$	I⇒ 1-4
6	$\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha$	hip
7	α	hip
8	$\neg\neg\alpha$	TDD 7
9	$\neg\neg\beta$	MT 6, 8
10	β	TDD 9
11	$\alpha \Rightarrow \beta$	I⇒ 7-10
12	$(\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)$	I⇒ 6-11
13	$(\alpha \Rightarrow \beta) \Longleftrightarrow (\neg\beta \Rightarrow \neg\alpha)$	I⟺ 5, 12