Tarea 2 García Ponce José Camilo

1) Demuestra que el lenguaje $\{a^n b^m \mid m = 3 \times n\}$ no es regular

Usa el teorema del bombeo

Supongamos que lo es y $A \in DFA$ que lo reconoce

Sea k el numero de estados de A

Sea $y \in L(A)$ tal que $|y| \geq k$

ademas como $y \in L(A)$ entonces $y = a^n b^{3n}$ para algun n,

tomemos a $n = k$

entonces $y = a^k b^{3k}$, por lo tanto $|y| = \overbrace{k}^{\text{parte de as}} + \overbrace{3k}^{\text{parte de bs}} = 4k$

Por el teorema del bombeo existen u, v, w tal que $|uv| \leq k$, $|v| \geq 0$

y $y = uvw$

Entonces $uv^i w \in L(A)$ con $i \geq 0$

como $|uv| \leq k$ y $y = uvw$ entonces, podemos notar que uv

contiene puras as

entonces para algun $i > 1$, digamos 2

tendremos que $uv^2 w \in L(A)$, ademas $uv^2 w = a^{n+c} b^{3n}$, con c

un numero mayor a 1, y claramente podemos notar que

$3n \neq 3(n+c)$ por lo tanto $uv^2 w \notin L(A)$

por lo tanto A no puede existir y $\{a^n b^m \mid m = 3 \times n\}$ no es regular

2) Demuestra J con el teorema de Myhill-Nerode

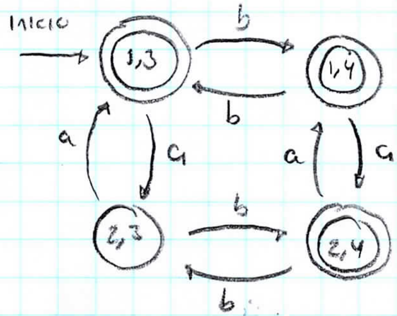
PD $L=\{a^n b^m \mid m=3\times n\}$ no es regular

Consideremos a $S=\{a^n\}$, sean a^x y a^y dos elementos de S cualquiera con $x\neq y$, entonces si tenemos b^{3x}, si lo concatenemos a a^x y a^y tenemos que $a^x b^{3x}$ si esta en L, pero $a^y b^{3x}$ no

Entonces a^x y a^y son distinguibles con respecto a L, y como fueron tomados arbitrariamente, entonces hay un conjunto infinito (S) de cadenas que son distinguibles por pares con respecto a L, entonces L no es regular, ya que tenemos que la relacion de Myhill-Nerode tendria indice infinito

3) Minimiza el automata de mi respuesta al ejercicio 4 de la tarea 1

el automata de la tarea 1 es



hacemos una tabla

Estado	(1,3)	(1,4)	(2,3)	(2,4)
(1,3)	n	n	S	n
(1,4)	n	n	S	n
(2,3)	S	S	n	S
(2,4)	n	n	S	n

	(1,3)	(1,4)	(2,3)	(2,4)
(1,3)		n	S	n
(1,4)			S	n
(2,3)				S
(2,4)				

	(1,3)	(1,4)	(2,3)	(2,4)
(1,3)		S	S	S
(1,4)			S	S
(2,3)				S
(2,4)				

ahora evaluar

$[(1,3)] = \{(1,3)\}$

$[(1,4)] = \{(1,4)\}$

$[(2,3)] = \{(2,3)\}$

$[(2,4)] = \{(2,4)\}$

ya terminamos los recorridos

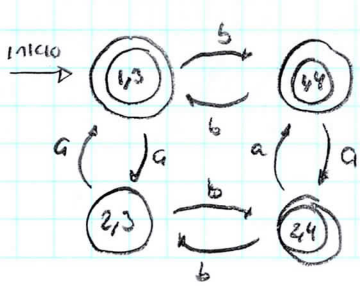
no podemos minizar más

$(\delta((1,3),a), \delta((1,4),a)) = ((2,3),(2,4))$

$(\delta((1,3),a), \delta((2,4),a)) = ((2,3),(1,4))$

$(\delta((1,4),b), \delta((2,4),b)) = ((1,3),(2,3))$

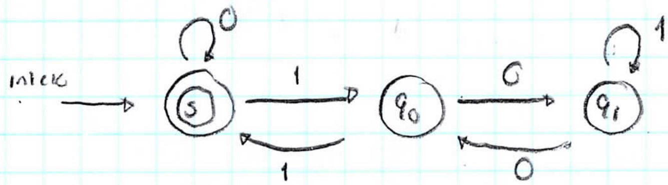
& automata



es el mismo !!

4) Minimize el automata de tu respuesta al ejercicio 6 de la tarea 1

el automata de la tarea 1 es



hacemos tablita

Estados	s	q_0	q_1
s	n	S	S
q_0	S	n	n
q_1	S	n	n

	s	q_0	q_1
s		S	S
q_0			n
q_1			

	s	q_0	q_1
s		S	S
q_0			S
q_1			

$(\delta(q_0,0), \delta(q_1,0)) = (q_1, q_0)$

$(\delta(q_0,1), \delta(q_1,1)) = (s, q_1)$

ya terminamos los recorridos

ahora evaluar

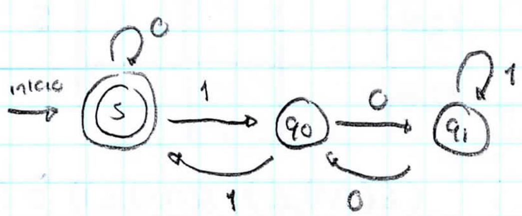
$[s] = \{s\}$

$[q_0] = \{q_0\}$

$[q_1] = \{q_1\}$

no podemos minimizar más

automata



es el mismo :c

5) Da una CFG que genere el lenguaje $\{a^i b^j c^k \mid i,j,k \in \mathbb{N}$ y además $i=j$ o $j=k\}$

reglas de producción

$S \to A \mid D$

$A \to BC$

$B \to aBb \mid \varepsilon$

$C \to cC \mid \varepsilon$

$D \to EF$

$E \to aE \mid \varepsilon$

$F \to bFc \mid \varepsilon$

$\Sigma = \{a,b,c\}$

$\Gamma = \{S, A, B, C, D, E, F\}$

S estado inicial

6) Transforma la gramática de 5 a forma normal de Chomsky

paso 1) asegurar nuevo inicial

lo ignoramos, ya que S no aparece después

paso 2) quitar ε

$S \to A \mid D$
$A \to BC \mid B \mid C$
$B \to aBb \mid ab$
$C \to cC \mid c$
$D \to EF \mid E \mid F$
$E \to aE \mid a$
$F \to bFc \mid bc$

paso 3) quitar unitarias

$S \to BC \mid aBb \mid ab \mid cC \mid c \mid EF \mid aE \mid a \mid bFc \mid bc$
$A \to BC \mid aBb \mid ab \mid cC \mid c$
$B \to aBb \mid ab$
$C \to cC \mid c$
$D \to EF \mid aE \mid a \mid bFc \mid bc$
$E \to aE \mid a$
$F \to bFc \mid bc$

paso 4) quitar $X \to Ba$ y $X \to aB$

$S \to BC \mid GBH \mid GH \mid IC \mid c \mid EF \mid GE \mid a \mid HFI \mid HI$
$A \to BC \mid GBH \mid GH \mid IC \mid c$
$B \to GBH \mid GH$
$C \to IC \mid c$
$D \to EF \mid GE \mid a \mid HFI \mid HI$
$E \to GE \mid a$
$F \to HFI \mid HI$

$G \to a$
$H \to b$
$I \to c$

paso 5) quitar $X \to ABC$

$S \to BC \mid GJ \mid GH \mid IC \mid EF \mid GE \mid HK \mid HI \mid a \mid c$
$A \to BC \mid GJ \mid GH \mid IC \mid c$
$B \to GJ \mid GH$
$C \to IC \mid c$
$D \to EF \mid GE \mid HK \mid HI \mid a$
$E \to GE \mid a$
$F \to HK \mid HI$

no se usa y los borramos

$G \to a$
$H \to b$
$I \to c$
$J \to BH$
$K \to FI$

listo

7) Transforma la gramatica de 5 a forma normal de Greibach (basta con algunas reglas de produccion representativas)

paso 1) renombrar

$S = A_1 \to A_2A_3 \mid A_4A_5 \mid A_4A_6 \mid A_7A_3 \mid A_8A_9 \mid A_4A_8 \mid A_6A_{10} \mid A_6A_7 \mid a \mid c$
$B = A_2 \to A_4A_5 \mid A_4A_6$
$C = A_3 \to A_7A_3 \mid c$
$G = A_4 \to a$
$J = A_5 \to A_2A_6$
$H = A_6 \to b$
$I = A_7 \to c$
$E = A_8 \to A_4A_8 \mid a$
$F = A_9 \to A_6A_{10} \mid A_6A_7$
$K = A_{10} \to A_9A_7$
$A = A_{11} \to \ldots$
$D = A_{12} \to \ldots$

no se usan y los borramos / ignoramos

paso 2) revisar que todas las reglas sean $A_i \to A_j X$ con $i<j$

si $i>=j$ cambiamos la prod con la prod de ese terminal

si $i=j$, es recursiva por izq, con un nuevo no terminal Z, que tiene la parte X o la parte final de la prod seguido de Z y una sin Z , luego se pone Z luego de cada prod previa de A_i

$$A_1 \to A_2 A_3 \mid A_4 A_5 \mid A_4 A_6 \mid A_7 A_3 \mid A_8 A_9 \mid A_4 A_8 \mid A_6 A_{10} \mid A_6 A_7 \mid a \mid c$$

$$A_2 \to A_4 A_5 \mid A_4 A_6$$

$$A_3 \to c A_3 \mid c$$

$$A_4 \to a$$

$$A_5 \to a A_5 A_6 \mid a A_6 A_6$$

$$A_6 \to b$$

$$A_7 \to c$$

$$A_8 \to a A_8 \mid a$$

$$A_9 \to b A_{10} \mid b A_7$$

$$A_{10} \to b A_{10} A_7 \mid b A_7 A_7$$

paso 3) reemplazar prod a la forma $A_i \to x$ o $A_i \to xX$

$$A_1 \to a A_5 A_3 \mid a A_6 A_3 \mid a A_5 \mid a A_6 \mid c A_3 \mid a A_8 A_9 \mid a A_9 \mid a A_8 \mid b A_{10} \mid b A_7 \mid a \mid c$$

$$A_2 \to a A_5 \mid a A_6$$

$$A_3 \to c A_3 \mid c$$

$$A_4 \to a$$

$$A_5 \to a A_5 A_6 \mid a A_6 A_6$$

$$A_6 \to b$$

$$A_7 \to c$$

$$A_8 \to a A_8 \mid a$$

$$A_9 \to b A_{10} \mid b A_7$$

$$A_{10} \to b A_{10} A_7 \mid b A_7 A_7$$

listo

8) Constraye un automata que acepte el lenguaje generado por la gramatica de 7 (no necesitas especificarlo por completo, basta lo necesario para las reglas de prod de la respuesta anterior)

sera $M = \langle Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \perp, q_f \rangle$

con $Q = \{q_0, q_1, q_f\}$

$\Sigma = \{a, b, c\}$

$\Gamma = \{\perp, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}\}$

q_0 estado inicial

$\perp$ inicial de pila

q_f estado final

y transicion de la siguiente forma

$\delta(q_0, \varepsilon, \perp) \to (q_1, A_1 \perp)$

$\delta(q_1, a, A_1) \to (q_1, A_5 A_3)$

$\delta(q_1, a, A_1) \to (q_1, A_6 A_3)$

$\delta(q_1, a, A_1) \to (q_1, A_5)$

$\delta(q_1, a, A_1) \to (q_1, A_6)$

$\delta(q_1, c, A_1) \to (q_1, A_3)$

$\delta(q_1, a, A_1) \to (q_1, A_8 A_9)$

$\delta(q_1, a, A_1) \to (q_1, A_9)$

$\delta(q_1, a, A_1) \to (q_1, A_8)$

$\delta(q_1, b, A_1) \to (q_1, A_{10})$

$\delta(q_1, b, A_1) \to (q_1, A_7)$

$\delta(q_1, a, A_1) \to (q_1, \varepsilon)$

$\delta(q_1, c, A_1) \to (q_1, \varepsilon)$

$\delta(q_1, a, A_2) \to (q_1, A_5)$

$\delta(q_1, a, A_2) \to (q_1, A_6)$

$\delta(q_1, c, A_3) \to (q_1, A_3)$

$\delta(q_1, c, A_3) \to (q_1, \varepsilon)$

$\delta(q_1, a, A_4) \to (q_1, \varepsilon)$

$\delta(q_1, a, A_5) \to (q_1, A_5 A_6)$

$\delta(q_1, a, A_5) \to (q_1, A_6 A_6)$

$\delta(q_1, b, A_6) \to (q_1, \varepsilon)$

$\delta(q_1, c, A_7) \to (q_1, \varepsilon)$

$\delta(q_1, a, A_8) \to (q_1, A_8)$

$\delta(q_1, a, A_8) \to (q_1, \varepsilon)$

$\delta(q_1, b, A_9) \to (q_1, A_{10})$

$\delta(q_1, b, A_9) \to (q_1, A_7)$

$\delta(q_1, b, A_{10}) \to (q_1, A_{10} A_7)$

$\delta(q_1, b, A_{10}) \to (q_1, A_7 A_7)$

$\delta(q_1, \varepsilon, \perp) \to (q_f, \perp)$

y para aceptar pila vacia

$\delta(q_1, \varepsilon, \perp) \to (q_f, \varepsilon)$

9) Describe la ejecucion del algoritmo CYK para decidir si la cadena abcc pertenece al lenguaje del ejercicio 5

la CNF es

$S \to BC \mid GJ \mid GH \mid IC \mid EF \mid GE \mid Hk \mid HI \mid a \mid c$

$B \to GJ \mid GH$

$C \to IC \mid c$

$E \to GE \mid a$

$F \to Hk \mid HI$

$G \to a$

$H \to b$

$I \to c$

$J \to BH$

$k \to FI$

cadena abcc

a se genera de S, E y G

b se genera de H

c se genera de S, C y I

entonces hacemos nuestra tablita

$T_{3,x}$				$\{S,C,I\}$
$T_{2,x}$			$\{S,C,I\}$	$\{C\}$
$T_{1,x}$		$\{H\}$	$\{S,F\}$	$\{k\}$
$T_{0,x}$	$\{S,E,G\}$	$\{S,B\}$	$\{S\}$	$\{S\}$
	a	b	c	c
	$T_{x,1}$	$T_{x,2}$	$T_{x,3}$	$T_{x,4}$

analicemos

$T_{0,2} = (T_{0,1} \wedge T_{1,2}) = \{S,E,G\} \wedge \{H\}$

$= \{SH, EH, GH\}$ y estos los generan

$\{S,B\}$

$T_{1,3} = (T_{1,2} \wedge T_{2,3}) = \{H\} \wedge \{S,C,I\}$

$= \{HS, HC, HI\}$ y estos los generan

$\{S,F\}$

$T_{2,4} = (T_{2,3} \wedge T_{3,4}) = \{S,C,I\} \wedge \{S,C,I\}$

$= \{SS, SC, SI, CS, CC, CI, IS, IC, II\}$

y estos los generan $\{C\}$

$T_{0,3} = (T_{0,1} \wedge T_{1,3}) \cup (T_{0,2} \wedge T_{2,3}) = (\{S,E,G\} \wedge \{S,F\}) \cup (\{S,B\} \wedge \{S,C,I\})$

$= \{SS, SF, ES, EF, GS, GF, SC, SI, BS, BC, BI\}$ y estos los generan

$\{S\}$

$T_{1,4} = (T_{1,2} \wedge T_{2,4}) \cup (T_{1,3} \wedge T_{3,4}) = (\{H\} \wedge \{C\}) \cup (\{S,F\} \wedge \{S,C,I\})$

$= \{HC, SS, SC, SI, FS, FC, FI\}$ y estos los generan

$\{K\}$

$T_{0,4} = (T_{0,1} \wedge T_{1,4}) \cup (T_{0,2} \wedge T_{2,4}) \cup (T_{0,3} \wedge T_{3,4})$

$= (\{S,E,G\} \wedge \{K\}) \cup (\{S,B\} \wedge \{C\}) \cup (\{S\} \wedge \{S,C,I\})$

$= \{SK, EK, GK, SC, BC, SS, SI\}$ y estos los generan

$\{S\}$

y como en $T_{0,4}$ esta S (nuestro no terminal inicial)

por lo tanto la cadena si es generada por la gramatica

10) Demuestra que el conjunto siguiente no es un CFL

$$\{a^n b^m c^k d^n \mid 2n = 3m \wedge (y)\ 5k = 7m\}$$

sea $g \geq 0$ y sea α una cadena del conjunto tal que $|\alpha| \geq g$

y $\alpha = uvwxy$, con $|vx| \geq 1$ y $|vwx| \leq g$

por el teorema de bombeo sabemos que

uv^iwx^iy pertenece al conjunto

veamos quienes pueden ser v y x

caso 1) digamos que $v = a^r$ y $x = b^p$ con r o $p \neq 0$

esto no funciona, si $r \neq 0$, al bombear v vamos a perder que el numero de a's sea igual al de d's

pero si $p \neq 0$, al bombear x ya no vamos a cumplir que $2n = 3m$, y que no vamos a estar agregando a's o d's

este caso lo podemos generalizar y incluir cuando $v = d^r$, o cuando $x = c^p$, entonces este caso cubre las posibilidades,

$v = a^r$ y $x = b^p$, $v = a^r$ y $x = c^p$, $v = d^r$ y $x = b^p$, $v = d^r$ y $x = c^p$

ademas si v y x bombean el mismo caracter entonces no se mantien lo que queremos

caso 2) digamos que $v = b^r$ y $x = c^p$ con r o $p \neq 0$

esto tampoco funciona, ya que al bombear v y x solo afectamos a m y k, pero no a n, entonces ya no mantenemos $2n = 3m$ y $5k = 7m$ (dependiendo que bombeamos v o x)

caso 3) digamos que $v = a^r$ y $x = d^p$ con r o $p \neq 0$

tampoco funciona, al bombear v y x solo afectamos a n, por lo tanto no mantenemos $2n = 3m$

caso 4) digamos que $v = a^r b^q$ y x cualquier cadena con solo un elemento del alfabeto o varios

este caso tampoco funciona, ya que al bombear v y x, podemos mantener la cantidad de caracteres, pero no el orden, por ejemplo $v^1 = a^r b^q$ y $v^2 = a^r b^q a^r b^q$, lo cual ya no esta en el conjunto

y este caso lo podemos generalizar, ya que este fallo sucede con cualquier combinacion donde v o x contiene 2 o más caracteres distintos

por lo tanto vemos que en ningun caso pudimos bombear v y x

por lo tanto $\{a^n b^m c^k d^n \mid 2n = 3m \wedge (y)\ 5k = 7m\} \notin CFL$ $\square$

11) Demuestra que el conjunto siguiente no es un CFL

$$\{a^i b^j c^k d^l \mid i=k \text{ y } j=l\}$$

Supongamos que si es un CFL, sea $g>1$ (la longitud de bombeo) y $\alpha = a^g b^g c^g d^g$, notemos que α pertenece al conjunto y ademas $|\alpha| = 4g \geq g$, entonces dividimos a α así $\alpha = uvwxy$

y por el teorema del bombeo tenemos que uv^iwx^iy, $i \in \mathbb{N}$, debe estar en el conjunto, ademas $|vx| \geq 1$ y $|vwx| \leq g$

Veamos quienes pueden ser v y x, tenemos varios casos

caso 1) $v=a^n$ y $x=c^n$, $n \geq 1$, entonces si bombeamos la cadena sigue en el conjunto, pero como $v=a^n$ y $x=c^n$ entonces w debe contener todas las $b's$, por lo tanto $|vwx| > g$, ya que $|w| \geq g$ y $|vx| \geq 1$, por lo tanto no se cumple el teorema

caso 2) $v=b^n$ y $x=d^n$, $n \geq 1$, entonces si bombeamos la cadena sigue en el conjunto, pero como $v=b^n$ y $x=d^n$, entonces w debe contener todas las $c's$, entonces $|vwx|>g$, debido a que $|w| \geq g$ y $|vx| \geq 1$, por lo tanto no se cumple el teorema caso 3) si v y x son cualquier otra combinacion de solo un simbolo del alfabeto, tenemos que al bombear v y x, ya no se va a cumplir que $i=k$ y $j=l$, ademas si $v=c^n$ y $x=a^n$ o $v=d^n$ y $x=b^n$, ya no se cumpliria la estructura de $a^i b^j c^k d^l$

caso 4) si v o x es una combinacion de dos o mas simbolos distintos del alfabeto, tenemos que al bombear perdemos la estructura de $a^i b^j c^k d^l$,

Por lo tanto concluimos que el teorema no se puede cumplir y por lo tanto no es CFL $\square$