García Ponce José Camilo

Matemáticas 1.
Segundo examen parcial: límites, continuidad y derivadas.
Fecha: Viernes 19 de noviembre 2021.

1. Dada la siguiente gráfica,

a) Escriba los límites laterales de la función en :
x= -4
x=-2

$\lim_{x \to -4^-} f(x) = \infty$ $\lim_{x \to -2^-} f(x) = 1$

$\lim_{x \to -4^+} f(x) = -2$ $\lim_{x \to -2^+} f(x) = 1$

b) Escriba la ecuación de la recta que define una Asíntota vertical (recuerde la definición de Asíntota vertical en términos de límites…). $x=-4$

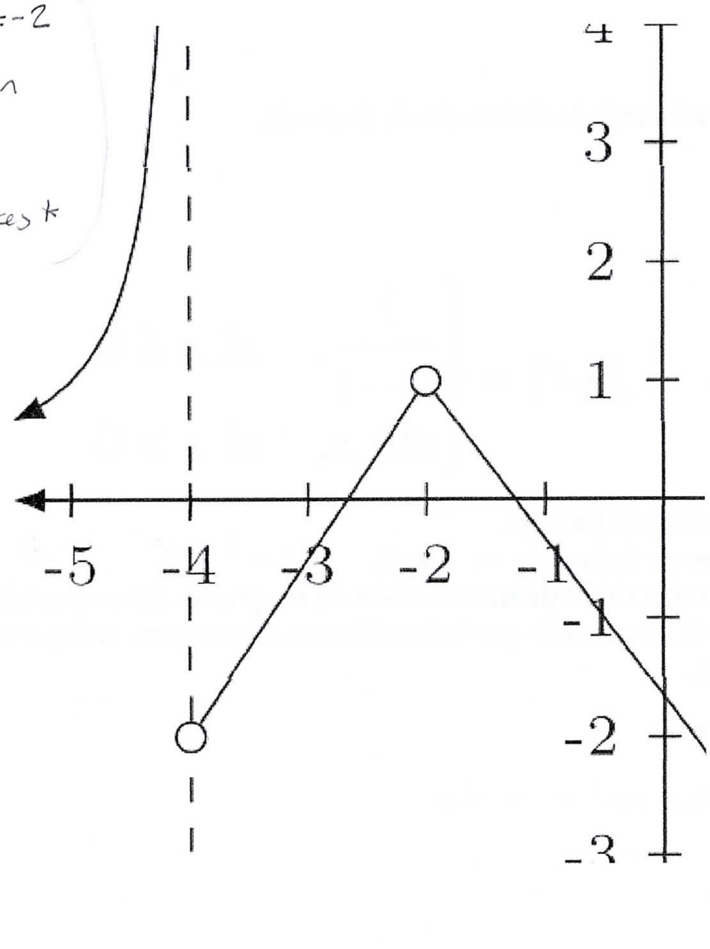
c) ¿Cuánto vale f(-2)? no esta definido

d) Para qué valores de x es discontinua la función de la gráfica? $x=-4$ y $x=-2$

e) ¿De qué tipo son las discontinuidades del inciso (d)? en $x=-4$ es infinita
en $x=-2$ es removible

f) Explique en cuáles puntos de la gráfica NO ES POSIBLE determinar una recta tangente a la gráfica. ¿Es derrivable la función en dichos puntos?

en $x=-4$ y $x=-2$
y no es derivable en esos puntos,
explicacion en limites



2. Calcule el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}} \quad = 8$$

3. Utilice la **definición de derivada** de una función,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

a fin de **proporcionar la ecuación de la recta tangente** a la función:

$$f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 8$$

$y = 19x + 19$

$y - 0 = 19(x+1)$

en el punto donde x= -1.

Hint: Derive la función f(x) utilizando la definición de derivada.

4. Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & \text{si } x \leq 0 \\ \sin x, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Haga un esbozo de la gráfica de la función. grafica

b) Calcule los **límites laterales** de la función en **x=0**. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$

c) Aplique la **definición de continuidad de una función en un punto**, para determinar si la función es continua o discontinua en x=0. En caso de que la función sea discontinua, indique el tipo de discontinuidad del que se trata.

es discontinua en x=0

y el tipo de discontinuidad es de salto

Punto Extra.

5. Utilice el hecho de que:

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$$

para proporcionar las coordenadas (x,y) de los puntos donde la **pendiente de la recta tangente** a

$$f(x) = 2x^3 - 5x$$

es igual a 1

(-1, 3)

(1, -3)

García Ponce José Camilo

(1) grafica

(a) limites laterales en $x=-4$ y $x=-2$

$\lim_{x\to -4^-} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to -4^+} f(x) = -2$

$\lim_{x\to -4} f(x) =$ no existe

$\lim_{x\to -2^-} f(x) = 1$

$\lim_{x\to -2^+} f(x) = 1$

$\lim_{x\to -2} f(x) = 1$

(b) asintota vertical

$\lim_{x\to -4^-} f(x) = \infty$ por lo tanto en $x=-4$ tenemos la asintota

y esto pasa porque para saber si hay asintota vertical vemos el lim en cierto punto y si en el limite o en los laterales nos da infinito, tenemos una asintota en este caso $\lim_{x\to -4^-} f(x) = \infty$

(c) ¿Cuanto vale $f(-2)$?

Como podemos ver en la grafica no esta definida en el punto $x=-2$ por lo tanto $f(-2) =$ no esta definido

(d) valores de x donde es discontinua la grafica

sabemos que una grafica es continua en un punto a, si ; $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

por lo tanto los valores donde es discontinua es:

$x=-4$

porque el $\lim_{x\to -4} f(x)$ no existe ya que sus limites laterales son diferentes (a)

$x=-2$

porque $\lim_{x\to -2} f(x) \neq f(-2)$

porque el limite si existe pero $f(-2)$ no esta definido

(e) tipo de discontinuidades

en $x=-4$ como vimos en (a) un limite lateral se va a infinito por lo tanto la discontinuidad es infinita

en $x=-2$ como vimos tambien en (a), el limite $\lim_{x\to -2} f(x)$ si existe por lo tanto la discontinuidad es removible

(f.)

para poder determinar una recta tangente necesitamos derivar la funcion en ese punto por lo tanto si no podemos derivar en ese punto no podemos sacar la recta tangente,

y para derivar en un punto necesitamos que sea continua en ese punto y que las derivadas laterales sean iguales (que no sea pico la grafica)

por lo tanto no podemos derivar a la grafica en los puntos $x=-4$ y $x=-2$ y por lo tanto no podemos sacar la recta tangente a esos puntos

(2) calcula limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}} = 8$$

$2\cdot 2x$

racionalizamos

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x}{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}} \cdot \frac{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}}{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}} = \lim_{x\to 0} \frac{4x\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}{4+x-(4-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2x}(2)\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}{\cancel{2x}} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}{1} = \lim_{x\to 0} 2\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)$$ ahora evaluamos

$$= 2\left(\sqrt{4+0}+\sqrt{4-0}\right) = 2\left(\sqrt{4}+\sqrt{4}\right) = 2(2+2) = 2(4) = 8$$

(3) recta tangente a la funcion $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 8$ en $x = -1$

primero vemos la derivada en $x = -1$

$$f(-1) = 3(-1)^3 - 5(-1)^2 + 8$$
$$= -3 - 5 + 8 = 0$$

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(-1+h)^3 - 5(-1+h)^2 + 8 - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3(-1+3h-3h^2+h^3) - 5(1-2h+h^2) + 8}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-3+9h-9h^2+3h^3-5+10h-5h^2+8}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3h^3-14h^2+19h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(3h^2-14h+19)}{h} = \lim_{h\to 0} 3h^2-14h+19$$ ahora evaluamos

$$3(0)^2 - 14(0) + 19 = 0 - 0 + 19 = 19$$

y tenemos que la ecuación de la recta tangente es

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

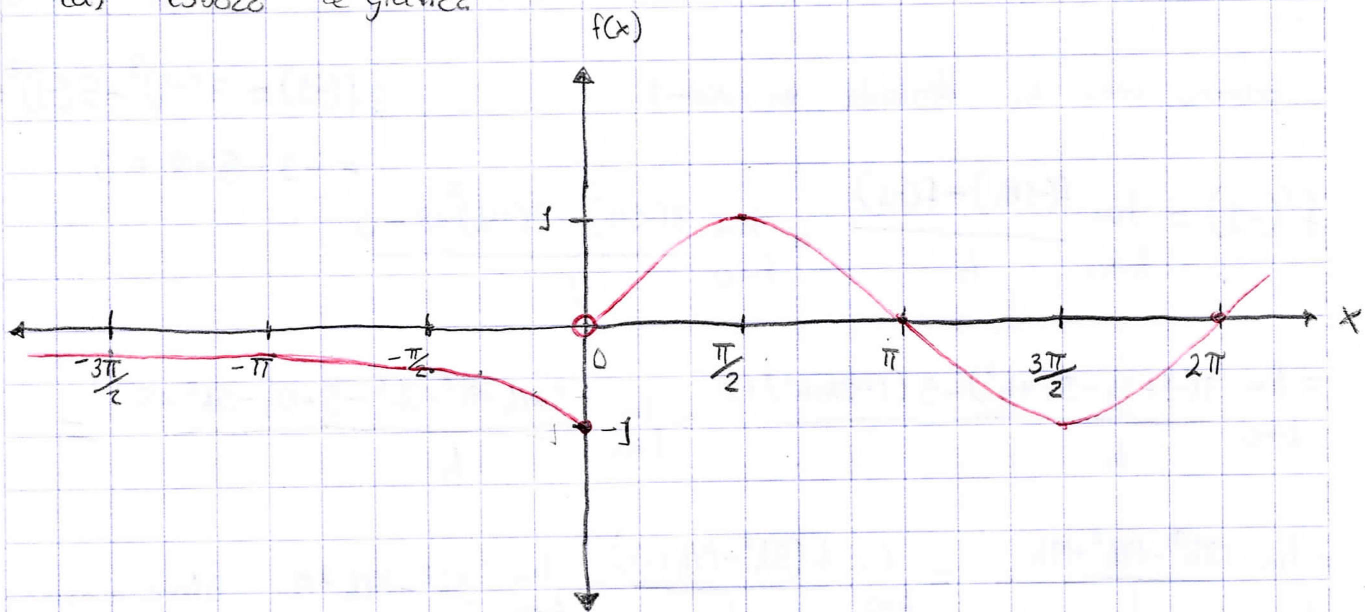
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \qquad x_0 = -1$$

$$y - 0 = 19(x + 1)$$

$$y = 19x + 19$$

(4) $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ \sin x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(a) esbozo de grafica



(b) Limites laterales en x=0

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} \sin x = \sin 0 = 0$$

(c) una funcion es continua en un punto a, si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

en el punto $x=0$ no es continua porque el $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe, ya que los limites laterales son diferentes $(-1 \neq 0)$, por lo tanto

$f(0) = -1 \neq \lim_{x\to 0} f(x)$

y el tipo de discontinuidad es de salto, porque los limites laterales existen y son diferentes, pero ninguno es infinito

(5) $f(x) = \underbrace{2x^3}_{g(x)} - \underbrace{5x}_{h(x)}$

$f(x) = g(x) \pm h(x)$

$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$

$f'(x) = g'(x) - h'(x)$

$g(x) = 2x^3 \rightarrow g'(x) = 3(2x^{3-1}) = 3(2x^2) = 6x^2$

$h(x) = 5x \rightarrow h'(x) = 1(5x^{1-1}) = 1(5x^0) = 5$

$f'(x) = 6x^2 - 5$

ya tenemos la derivada que es la pendiente de la recta tangente, queremos ver donde es 1

$6x^2-5=1$

$6x^2=6$

$x^2=\frac{6}{6}=1$

$x=\pm 1$ por lo tanto en las rectas tangentes que pasan por los puntos $x=-1$ y $x=1$ tendran pendiente 1

ahora vemos las ys

$f(-1)=2(-1)^3-5(-1)=2(-1)+5=3$

entonces la coordenada seria $(-1,3)$

$f(1)=2(1)^3-5(1)=2(1)-5=-3$

entonces la coordenada seria $(1,-3)$