(1, 4, 9, 10)

Tarea - Examen 3 García Ponce José Camilo

- Ejercicios que me tocaron:

1. Prueba que si $A \sim B$ y $C \sim D$, entonces $A \times C \sim B \times D$

Como $A \sim B$, por def de equipotencia existe $f: A \to B$ biyectiva

Como $C \sim D$, por def de equipotencia existe $g: C \to D$ biyectiva

Definamos una función $h: A \times C \to B \times D$

$\forall (a,c) \in A \times C \Rightarrow (a,c) \longmapsto (f(a), g(c))$

Ahora veamos que h es biyectiva

• PD h es inyectiva

Sean $(a_1, c_1), (a_2, c_2) \in A \times C$ tales que $h(a_1, c_1) = h(a_2, c_2)$

PD $(a_1, c_1) = (a_2, c_2)$

Por definición de h tenemos que $h(a_1, c_1) = (f(a_1), g(c_1))$

y $h(a_2, c_2) = (f(a_2), g(c_2))$

Por nuestra hipótesis tenemos que $(f(a_1), g(c_1)) = (f(a_2), g(c_2))$

como f y g son biyectivas, entonces son inyectivas

por lo tanto como tenemos que $f(a_1) = f(a_2)$ por definición de inyectividad tenemos que $a_1 = a_2$ y como tenemos $g(c_1) = g(c_2)$ por definición de inyectividad tenemos

$c_1 = c_2$

Tenemos que $a_1 = a_2$ y $c_1 = c_2$, por el teorema (1.2.26) o la definicion de pareja ordenada tenemos que $(a_1, c_1) = (a_2, c_2)$, como la eleccion fue arbitraria concluimos que h es inyectiva

- PD h es suprayectiva

Sea $(b,d) \in B \times D$ cualquiera

Como f y g son biyectivos, entonces son suprayectivas, por definicion de suprayectividad tenemos que existe $a \in A$ tal que $f(a)=b$ y existe $c \in C$ tal qe $g(c)=d$

por la definicion de h entonces tenemos que $h(a,c) = (b,d)$, como la eleccion fue arbitraria concluimos que h es suprayectiva

Por la definicion de biyectividad y como h es inyectiva y suprayectiva, concluimos que h es biyectiva y por lo tanto $A \times C \sim B \times D$

$\square$

en esta la suprayectividad es algo extraña

4. Demuestra que $|A \triangle B| = |A| + |B| - (2 \cdot |A \cap B|)$

Antes demostremos algo para ayudarnos

Sean A y B conjuntos finitos cualquiera, PD $A = (A \cap B) \cup (A - B)$

$\subseteq$] Sea $x \in A$ cualquiera

ahora tenemos 2 casos:

(1) que $x \in A$ y $x \notin B$, entonces por definición de diferencia tenemos que $x \in A - B$

(2) que $x \in A$ y $x \in B$, entonces por definición de intersección tenemos que $x \in A \cap B$

con los casos vemos que $x \in A - B$ o $x \in A \cap B$, por lo tanto

por definición de unión tenemos que $x \in (A \cap B) \cup (A - B)$ y como

la elección fue arbitraria entonces $A \subseteq (A \cap B) \cup (A - B)$

$\supseteq$] Sea $x \in (A \cap B) \cup (A - B)$

Por def de unión tenemos que $x \in (A \cap B)$ o $x \in (A - B)$

ahora tenemos 2 casos

(1) $x \in A \cap B$, por definición de intersección $x \in A$ y $x \in B$

(2) $x \in A - B$, por definición de diferencia $x \in A$ y $x \notin B$

como vemos en los dos casos tenemos que $x \in A$

y como la eleccion fue arbitraria $(A\cap B)\cup(A-B)\subseteq A$

y por doble contencion $A=(A\cap B)\cup(A-B)$

Ahora por definicion de diferencia simetrica tenemos que

$A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)$, entonces $|A\triangle B|=|(A-B)\cup(B-A)|$,

por lo visto la clase 44 tenemos que $|A\triangle B|=|A-B|+|B-A|$ ya

que por el teorema 1.2.15.3 tenemos que $(A-B)\cap(B-A)=\emptyset$

Ahora veamos que $|A|+|B|-(2\cdot|A\cap B|)=|A|+|B|-|A\cap B|-|A\cap B|$

$=|A|-|A\cap B|+|B|-|A\cap B|$ y por conmutatividad de la interseccion

$=|A|-|A\cap B|+|B|-|B\cap A|$

con lo demostrado al inicio tenemos que

$|A|=|A\cap B|+|A-B|$, por lo visto en la clase 44 y por el

teorema 1.2.15.3 ya que $(A\cap B)$ y $(A-B)$ son ajenos,

si restamos lo mismo a la igualdad se mantiene entonces

$|A|-|A\cap B|=|A\cap B|+|A-B|-|A\cap B|$ y con eso tenemos que

$|A|-|A\cap B|=|A-B|$

Ahora juntando todo lo anterior haremos una cadena de

equivalencias

$$|A \triangle B| = |A-B| + |B-A|$$

$$= |A| - |A \cap B| + |B| - |B \cap A|$$

$$= |A| + |B| - |A \cap B| - |B \cap A|$$

$$= |A| + |B| - |A \cap B| - |A \cap B|$$

$$= |A| + |B| - (2 \cdot |A \cap B|)$$

por lo tanto $\quad |A \triangle B| = |A| + |B| - (2 \cdot |A \cap B|)$

$\square$

9. Prueba que si A es infinito y $E \subset A$ es finito, entonces $A - E$ es infinito

(reduccion a lo absurdo)

Demostremos por contradiccion, supongamos que A es infinito, E es fininito y $A - E$ es finito

Sea $B = A \cap E$, como E es finito y por lo visto la clase 44 tenemos que B es finito

Ahora veamos que $B \cup (A-E) = (A \cap E) \cup (A-E)$, $A \cap E$ y $A - E$ son finitos entonces por lo demostrado en el ejercicio 4 tenemos que $A = (A \cap E) \cup (A-E) = B \cup (A-E)$, ahora por lo visto la clase 44, como $A \cup E$, $A-E$ son finitos tenemos que $(A \cap E) \cup (A-E)$ es finito, es decir A es finito! lo cual genera una contradiccion ya que A es infinito, y la contradiccion surgio al suponer que $A-E$ era finito, por lo tanto concluimos que $A-E$ debe ser infinito

$\square$

10. ¿Cuántos equipos distintos de 5 personas se peden escoger de un grupo de 21 personas?

Aqui vamos a buscar las combinaciones C_n^m

$n = 21$ y $m = 5$ y se cumple que $m \leq n$

entonces $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \Rightarrow$

$$C_5^{21} = \frac{21!}{5!(21-5)!} = \frac{21!}{5!(16)!} = 20349$$

entonces hay 20349 equipos distintos

Ejercicios que elegí

2. Prueba que si $A \sim C$ y $B \sim C$, entonces $A^B \sim C^D$

Como $A \sim C$, por def de equipotencia existe $f: A \to C$ biyectiva

Como $B \sim D$, por def de equipotencia existe $g: B \to D$ biyectiva

Definamos la siguiente función

$h: A^B \to C^D$, dada por

$\forall i \in A^B \quad (i: B \to A)$, $\quad i \longmapsto h(i) \in C^D$

$\Rightarrow \quad h(i): D \to C$, dada por

$\forall d \in D$, $\quad d \longmapsto f(i(g^{-1}(d)))$ donde g^{-1} es la inversa de g
es decir $g^{-1}: D \to B$
y es posible ya que g es inyectiva

ahora veamos que h es suprayectiva

∘ PD h es suprayectiva

Sea $w \in C^D$ cualquiera $\quad (w: D \to C)$

PD $\exists z \in A^B$ tal que $h(z) = w$

Definamos a $z: B \to A$ dada por

$\forall b \in B$, $\quad b \longmapsto f^{-1}(w(g(b)))$ donde f^{-1} es la inversa de f
es decir $f^{-1}: C \to A$
y es posible ya que f es inyectiva

PD $h(z) = w$

Veamos que $h(z): D \to C$, y $w: D \to C$, entonces tienen mismo dominio y codominio, ahora veamos la regla de correspondencia

Sea $d \in D$ cualquiera, PD $(h(z))(d) = w(d)$

Veamos que $(h(z))(d)$ por definicion es $f(z(g^{-1}(d)))$

ahora veamos que es usando la definicion de z

$f(f^{-1}(w(g(g^{-1}(d)))))$, ahora recordemos que la

composicion de una funcion con su inversa "se anulan", ya que

f y g son inyectivas, visto en la ayudantia 14, por

lo tanto tenemos que $f(f^{-1}(w(g(g^{-1}(d))))) = w(g(g^{-1}(d))) =$

$w(d)$, por lo tanto $(h(z))(d) = w(d)$

y con esto concluimos que $h(z) = w$ y con esto tenemos

que h es suprayectiva

- PD h es inyectiva

Sean $x, y \in A^B$ tales que $h(x) = h(y)$

PD $x = y$

Veamos que $x : B \to A$ y $y : B \to A$, entonces tienen el mismo

dominio y codominio, ahora veamos la regla de correspondencia

Sea $b \in B$ cualquiera, PD $x(b) = y(b)$

Por hipotesis $h(x) = h(y)$, entonces, tienen la misma regla de correspondencia, ahora $b = g^{-1}(d)$ para algun $d \in D$, ya que $g^{-1}: D \to B$, entonces $(h(x))(d) = (h(y))(d)$ y por definicion tenemos que $f(x(g^{-1}(d))) = f(y(g^{-1}(d)))$, como f es biyectiva, entonces es inyectiva y por lo tanto $x(g^{-1}(d)) = y(g^{-1}(d))$ y como vimos arriba $b = g^{-1}(d)$ por lo tanto $x(b) = y(b)$

como las elecciones fueron arbitrarias tenemos que $x = y$, y como x y y fueron arbitrarios tenemos que h es inyectiva

Ahora como h es inyectiva y biyectiva concluimos que h es biyectiva, por lo tanto $A^B \sim C^D$ $\square$

5. Demostrar que si $A \subseteq B$ y $|A| = |B|$, entonces $A = B$

antes de demostrar veamos que si $A \subseteq B$, tenemos que $B = A \cup (B - A)$

$\subseteq$) Sea $x \in B$ cualquiera

Como $A \subseteq B$ y $x \in B$ entonces tenemos 2 casos

• caso 1) que $x \in B$ y $x \notin A$, entonces por definicion de diferencia tenemos que $x \in B - A$

• caso 2) que $x \in B$ y $x \in A$, entonces tenemos que $x \in A$

como vemos los casos tenemos que $x \in A$ o $x \in B - A$

por definicion de union tenemos que $x \in A \cup (B - A)$

como la eleccion fue arbitraria tenemos que $B \subseteq A \cup (B - A)$

$\supseteq$) Sea $x \in A \cup (B - A)$ cualquiera

Por definicion de union tenemos $x \in A$ o $x \in B - A$, tenemos 2 casos

caso 1) $x \in A$, como $A \subseteq B$, entonces $x \in B$

Caso 2) $x \in B - A$, por definicion de diferencia $x \in B$ y $x \notin A$

como vemos en los dos casos $x \in B$, como la eleccion fue arbitraria entonces $A \cup (B - A) \subseteq B$

y por doble contencion tenemos que $B = A \cup (B - A)$

ahora supongamos que $|A|=n$ y como $|A|=|B|$ entonces

$|B|=n=|A|$

veamos que $A\cap(B-A)=\emptyset$, por el teorema 1.2.15.3

y por lo visto la clase 44 tenemos que $|A\cup(B-A)|=|A|+|B-A|$

por lo demostrado antes tenemos que

$|B|=|A|+|B-A|$

con lo que notamos al inicio de la hoja tenemos que

$n=n+|B-A|$

por lo tanto $|B-A|$ debe ser 0, es decir $B-A=\emptyset$

y por el teorema 1.2.15.1 concluimos que

ya que $B-A=\emptyset \Rightarrow A=B$

$\square$

7. Prueba que si A es infinito y $A \subseteq B$, entonces B es infinito

(reducción a lo absurdo)

Demostración por contradicción, supongamos que A es infinito, $A \subseteq B$ y B es finito

Como B es finito entonces existe una función $f: B \to n$, con $n \in \mathbb{N}$ y f biyectiva.

Definimos una nueva función $g: A \to f(A)$ dada como $g(a) = f(a)$ $\forall a \in A$, como $f(A) \subseteq n$, tenemos que $f(A)$ es un natural

Ahora veamos que g es biyectiva

- PD g es inyectiva

Sean $a, b \in f(A)$ tales que $g(a) = g(b)$

Por definición de g tenemos que $g(a) = f(a)$ y $g(b) = f(b)$, entonces $f(a) = f(b)$ y como f es biyectiva, entonces es inyectiva y por definición de inyectividad tenemos que $a = b$, como la elección fue arbitraria entonces g es inyectiva

• PD g es supr(ayectiva

Sea $c \in f(A)$ cualquiera

Como f es biyectiva, entonces es suprayectiva y por definición

de suprayectividad tenemos que para todo $e \in n$ existe

$d \in B$ tal que $f(d) = e$

y como $f(A) \subseteq n$, entonces se cumple que existe

un $h \in A$ tal que $f(h) = c$ y por la definición

de g tenemos que existe $h \in A$ tal que $g(h) = c$

como la elección fue arbitraria tenemos que g es suprayectiva

y como g es inyectiva y suprayectiva entonces es biyectiva !

lo cual nos genera una contradicción ya que existe

una función biyectiva de A a un natural, lo cual significa

que A es finito ! y eso contradice que A es infinito

y la contradicción surge al suponer que B es finito, por lo

tanto B debe ser infinito $\square$

en este la suprayectividad tengo algo de dudas

12. ¿Cuántas contraseñas de longitud 4 se pueden construir usando un conjunto de 62 caracteres diferentes?

Aquí vamos a buscar las ordenaciones con repeticiones, OR_n^m

$n = 62$ y $m = 4$

entonces $OR_n^m = n^m$ $\Rightarrow$

$$OR_{62}^4 = 62^4 = 14776,336$$

entonces hay 14776,336 contraseñas de longitud 4 usando 62 caracteres

* siento que entendí como hacer los ejercicios, pero al probar la inyectividad o suprayectividad de algunas funciones creo que me confundí *

Saludos :)