García Ponce José Camilo

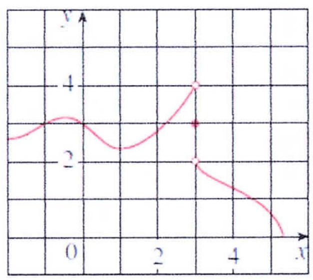


# Tarea #2

1. Calcule los valores que a continuación se le piden. En caso de que el límite pedido NO Exista, explicar por qué.

(a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$

(c) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$ (d) $\lim_{x \to 3} f(x)$ (e) $f(3)$




(a) = 3

(b) = 4

(c) = 2

(d) = no existe (en hojitas explico)

(e) = 3

2. Utilice un programa graficador (por ejemplo Desmos), para hacer la gráfica de

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

.

Con ayuda de dicha gráfica calule los siguientes límites:

(a) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ (c) $\lim_{x \to 0} f(x)$

(a) = 1

(b) = 0

(c) = no existe

3. Trace la siguiente gráfica de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Utilizando la gráfica calcule los límites laterales de la función, en $x = -1$, $x = 1$.

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = 3$

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -1$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$

4. Indique las ecuaciones de las asintotas verticales de las siguientes funciones:
   - $f(x) = \frac{5x-1}{3x-6}$ $x=2$ $3x-6=0$
   - $g(x) = \frac{1}{x^2-9}$ $x=-3, 3$ $x^2-9=0$

5. Dado que se conocen los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 25 \qquad \lim_{x\to 2} g(x) = -3 \qquad \lim_{x\to 2} h(x) = 0$$

encuentre los límites que existan. Si el límite no existe, explique por qué.

(a) $\lim_{x\to 2} [f(x) + 5g(x)]$ (b) $\lim_{x\to 2} [g(x)]^3$

(c) $\lim_{x\to 2} \sqrt{f(x)}$ (d) $\lim_{x\to 2} \frac{3f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x\to 2} \frac{g(x)}{h(x)}$ (f) $\lim_{x\to 2} \frac{g(x)h(x)}{f(x)}$

(a) = 10

(b) = −27

(c) = 5

(d) = −25

(e) = no existe

(f) = 0

6. Utilice la siguiente gráfica para estimar el valor de $f'$ en los puntos indicados:

(a) $f'(0) \approx -3$

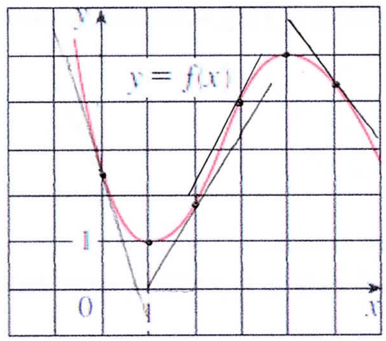
(b) $f'(1) = 0$

(c) $f'(2) \approx 1.9$

(d) $f'(3) \approx 2$

(e) $f'(4) = 0$

(f) $f'(5) \approx -1.4$




(los valores son aproximados)

7. Dada
$f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-1}$:

- ¿En cuántos puntos es discontinua la función? en dos puntos
- Indique los valores de $x$, donde la función $f$ es discontinua. $x=1$ y $x=-1$
- Indique los tipos de discontinuidad que tiene en dichos puntos.
- Para el valor de $x$ donde se presenta la **discontinuidad removible**, re-defina $f$ de manera que sea continua.

en $x=1$ es removible
en $x=-1$ es infinita

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x=1 \\ \frac{x^2-x}{x^2-1} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$$

8. Calcule el valor de los siguientes límites:

(a) $\lim_{t \to 0} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2+t} \right) = 1$

(b) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2-4x}{x^2-3x-4} =$ no existe

(c) $\lim_{x \to -4} \frac{\sqrt{x^2+9}-5}{x+4} = -\frac{4}{5}$

(d) $\lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^3-8}{h} = 12$

(e) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2-4x}{x^2-3x-4} = \frac{4}{5}$

9. Proporcione una ecuación de la recta tangente a
$y = f(x) = \frac{2x}{(x+1)^2}$,
en el punto donde $x = 0$.

$y = 2x$

10. Dada una función $y = f(x)$, se definen las **derivadas izquierda** y **derecha**, de $f$ en $x = a$,

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

y

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si estos límites existen.

Entonces, $f'(a)$ **existe**, si y sólo si, estas derivadas laterales existen y son iguales.

(a) Halle $f'_-(4)$ y $f'_+(4)$ para la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 5 - x & \text{si } 0 < x < 4 \\ \dfrac{1}{5 - x} & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

$f'_-(4) = -1$

$f'_+(4) = 1$

(b) Dibuje la gráfica de $f$. en hojitas

(c) ¿Dónde es $f$ discontinua? $\longrightarrow$ en $x=5$ y $x=0$

(d) ¿Dónde $f$ no es derivable?

en $x=5$, $x=0$ y $x=4$

porque en $x=5$ y $x=0$ no es continua

y en $x=4$ las derivadas laterales no son iguales

*para las derivadas use la tabla que envio el profesor*

García Ponce José Camilo

Tarea 2

• (1) (a) $\lim_{x\to 0} f(x) = 3$ (b) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 4$

(c) $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 2$ (d) $\lim_{x\to 3} f(x) =$ no existe

(e) $f(3) = 3$

porque $\lim_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim_{x\to 3^+}$, sus límites laterales no son iguales

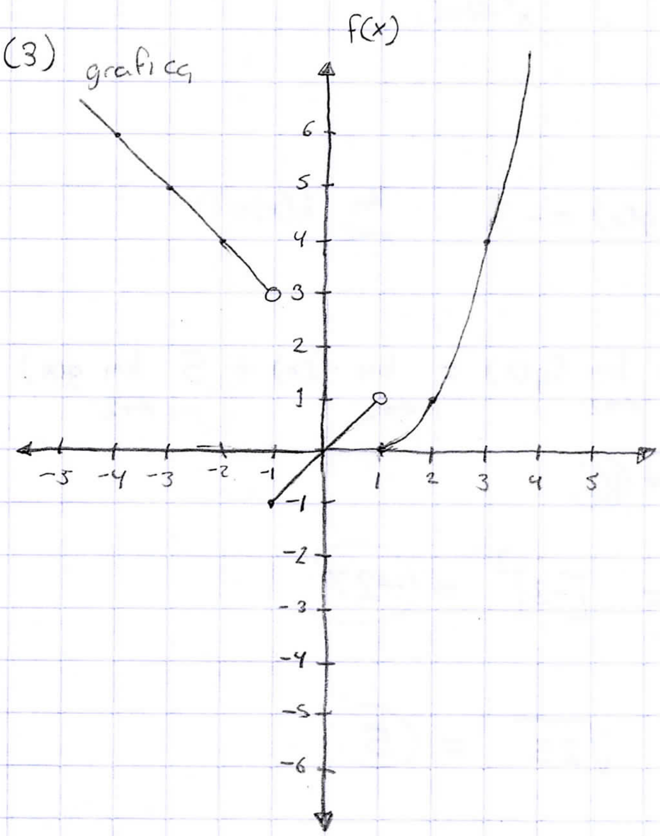
• (2) *gráfica al final

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$ (b) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$

(c) $\lim_{x\to 0} f(x) =$ no existe, porque los límites laterales no son iguales

• (3) gráfica




$$f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \le x < 1 \\ (x-1)^2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

límites

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = 3$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -1$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$

• (4) $f(x) = \dfrac{5x-1}{3x-6}$

• asintotas verticales de $f(x)$

Igualamos denominador a 0, para asintota vertical

$3x-6=0$

$3x=6$

$x=\frac{6}{3}=2$

entonces tenemos una asintota vertical en

$x=2$ o $3x-6=0$

$g(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$

• asintotas verticales de $g(x)$

Igualamos denominador a 0

$x^2-9=0$

$x^2=9$

$x_1=3$

$x_2=-3$

entonces tenemos asintotas verticales en

$x=-3, 3$ o $x^2-9=0$

• (5) $\lim_{x\to 2} f(x) = 25$ $\quad \lim_{x\to 2} g(x) = -3$ $\quad \lim_{x\to 2} h(x) = 0$

(a) $\lim_{x\to 2}[f(x)+5g(x)] = \lim_{x\to 2} f(x) + \lim_{x\to 2} 5g(x) = \lim_{x\to 2} f(x) + 5 \lim_{x\to 2} g(x)$

$= 25+5(-3) = 25-15 = 10$

(b) $\lim_{x\to 2}[g(x)]^3 = [\lim_{x\to 2} g(x)]^3 = [-3]^3 = -27$

(c) $\lim_{x\to 2}\sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x\to 2} f(x)} = \sqrt{25} = 5$

(d) $\lim_{x\to 2} \frac{3f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to 2} 3f(x)}{\lim_{x\to 2} g(x)} = \frac{3\lim_{x\to 2} f(x)}{\lim_{x\to 2} g(x)} = \frac{3(25)}{-3}$

$= \frac{75}{-3} = -25$

(e) $\lim_{x\to 2} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\lim_{x\to 2} g(x)}{\lim_{x\to 2} h(x)} = \frac{-3}{0} =$ no existe  porque no podemos dividir sobre 0

(f) $\lim_{x\to 2} \frac{g(x)h(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x\to 2} [g(x)\,h(x)]}{\lim_{x\to 2} f(x)} = \frac{\lim_{x\to 2} g(x) \cdot \lim_{x\to 2} h(x)}{\lim_{x\to 2} f(x)}$

$= \frac{-3(0)}{25} = \frac{0}{25} = 0$

• (6) estimo valores de $f'$

(a) hacemos una recta y estemamos su pendiente

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-.5 - 2.5}{1 - 0} = \frac{-3}{1} = -3$   entonces $f'(0) \approx -3$

pero debe ser negativa siempre

(b) es una recta paralela a X, entonces la pendiente es 0   $f'(1) = 0$

(c) hacemos lo mismo que en (a)

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1.9 - 0}{2 - 1} = \frac{1.9}{1} = 1.9$   entonces $f'(2) \approx 1.9$

pero siempre sera positiva

(d) hacemos lo mismo que en (a)

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 4}{3.5 - 3} = \frac{1}{0.5} = 2$   entonces $f'(3) \approx 2$

pero siempre sera positiva

(e) es igual a la (b), donde la recta es paralela a X entonces la pendiente es 0

$f'(4) = 0$

(f) hacemos lo mismo que (a)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4.3 - 5.7}{5 - 4} = \frac{-1.4}{1} = -1.4$$

entonces $f'(5) \approx -1.4$

pero siempre sera negativa

• (7) $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$

• ¿Cuantos puntos es discontinua?

Sabemos que el dom f $= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1, 1\}$ por lo qe en 2 puntos

$x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1 \rightarrow x_1 = -1, \; x_2 = 1$

• Valores de x, donde f es discontinua

por el dominio vemos que son $x = -1$ y $x = 1$

• Indicar tipo de discontinuidad

para eso vemos limite,

factorizamos $\frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x\cancel{(x-1)}}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x+1}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x}{x+1} \longrightarrow \text{evaluamos } \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

entonces como el limite existe es removible en $x = 1$

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -1^-} \frac{x}{x+1} = \infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -1^+} \frac{x}{x+1} = -\infty$$

como podemos ver los limites laterales son diferentes e infinitos, entonces tenemos que es infinita la discontinuidad en $x = -1$

• Redifinir $f$ para que sea continua en donde la discon. es removible

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$$

• (8) calcular limites

(a) $\lim_{t \to 0} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2 + t} \right) = 1$

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2+t} = \frac{t^2 + t - t}{t(t^2+t)} = \frac{t^2}{t^3+t^2} = \frac{t^2}{t^2(t+1)} = \frac{1}{t+1}$$

ahora evaluamos $\frac{1}{0+1} = 1$

(b) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4} =$ no existe

dom $= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1, 4\}$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$x_1 = 4$

$x_2 = -1$

• Factoriza

$$\frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4} = \frac{x\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}(x+1)} = \frac{x}{x+1}$$

no podemos evaluar, vemos limites laterales

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x}{x+1} = \infty \qquad \lim_{x \to -1^+} \frac{x}{x+1} = -\infty$$

por lo tanto el limite no existe

(c) $\lim_{x \to -4} \frac{\sqrt{x^2+9} - 5}{x+4} = \frac{-4}{5}$

dom $=$
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -4\}$

$x + 4 = 0$

$x = -4$

• Racionaliza

$$\frac{\sqrt{x^2+9} - 5}{x+4} = \frac{\sqrt{x^2+9} - 5}{x+4} \cdot \frac{\sqrt{x^2+9} + 5}{\sqrt{x^2+9} + 5} = \frac{(\sqrt{x^2+9} - 5)(\sqrt{x^2+9} + 5)}{(x+4)(\sqrt{x^2+9} + 5)}$$

$$= \frac{x^2 + 9 - 25}{(x+4)(\sqrt{x^2+9} + 5)} = \frac{x^2 - 16}{(x+4)(\sqrt{x^2+9} + 5)} = \frac{(x-4)\cancel{(x+4)}}{\cancel{(x+4)}(\sqrt{x^2+9} + 5)} = \frac{x-4}{\sqrt{x^2+9} + 5}$$

ahora evaluamos $\frac{-4-4}{\sqrt{-4^2+9} + 5} = \frac{-8}{\sqrt{16+9} + 5} = \frac{-8}{\sqrt{25} + 5} = \frac{-8}{5+5} = \frac{-8}{10} = \frac{-4}{5}$

(d) $\lim_{h \to 0} \dfrac{(2+h)^3 - 8}{h} = 12$

dom= $\{h \in \mathbb{R} \mid h \neq 0\}$

• factorizo

$$\frac{(2+h)^3-8}{h} = \frac{h^3+6h^2+12h}{h} = \frac{h(h^2+6h+12)}{h} = \frac{h^2+6h+12}{1} = h^2+6h+12$$

ahora evaluamos $0^2+6(0)+12 = 12$

(e) $\lim_{x \to 4} \dfrac{x^2-4x}{x^2-3x-4} = \dfrac{4}{5}$

dom= $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1, 4\}$

$x^2-3x-4=0$

$x_1 = -1$

$x_2 = 4$

• Factorizo

$$\frac{x^2-4x}{x^2-3x-4} = \frac{x(x-4)}{(x-4)(x+1)} = \frac{x}{x+1}$$

y ahora evaluamos $\dfrac{4}{4+1} = \dfrac{4}{5}$

• (9) ecuación recta tangente

primero derivamos f $\quad f(x) = \dfrac{2x}{(x+1)^2} = \dfrac{h(x)}{g(x)}$

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$$

$$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)} \to f'(x) = \frac{g(x) \cdot h'(x) - h(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

$h(x) = 2x \quad h'(x) = 2$

$g(x) = (x+1)^2 \quad g'(x) = 2(x+1)$

$$f'(x) = \frac{[(x+1)^2 \cdot 2] - [2x \cdot 2(x+1)]}{((x+1)^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{[2x^2+4x+4] - [4x^2+4x]}{(x+1)^4} = \frac{2x^2-4x^2+4x-4x+2}{(x+1)^4} = \frac{-2x^2+2}{(x+1)^4} = \frac{-2(x^2+1)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{(-2)(x-1)\cancel{(x+1)}}{(x+1)(x+1)(x+1)\cancel{(x+1)}} = \frac{-2(x-1)}{(x+1)^3}$$

y ahora evaluamos

$$f'(0) = \frac{-2(0-1)}{(0+1)^3} = \frac{2}{1} = 2$$

con la pendiente 2, vemos la ecuacion de la recta:

$$y-y_0 = m(x-x_0) \longrightarrow y-f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

y sustituimos $y-0 = 2(x-0)$

$$y = 2x$$

• (10)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 5-x & \text{si } 0<x<4 \\ \frac{1}{5-x} & \text{si } x \geq 4 \end{cases} \quad \begin{aligned} &= g(x) \text{ si } x\leq 0 \\ &= m(x) \text{ si } 0<x<4 \\ &= n(x) \text{ si } x \geq 4 \end{aligned}$$

(a) hallo $f'_-(4)$, $f'_+(4)$

* todo esto lo vi en un video *

vemos que f es continua en 4 porque

$$m(4) = 1 = \lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = n(4) = 1$$

por def

y como f es continua en 4

$$f'_-(4) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{m(4+h)-n(4)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{m(4+h)-n(4)}{h} = m'(4)$$

$$f'_+(4) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{n(4+h)-n(4)}{h} = n'(4)$$

ahora derivamos $f(x)$

$$-1(5-x)^0 = -1$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 = g'(x) \\ -1 & \text{si } 0<x<4 = m'(x) \\ \frac{1}{(5-x)^2} & \text{si } x>4 = n'(x) \end{cases}$$

$$\frac{(-1\cdot 0) - 1\cdot(-1)}{(5-x)^2} = \frac{1}{(5-x)^2}$$

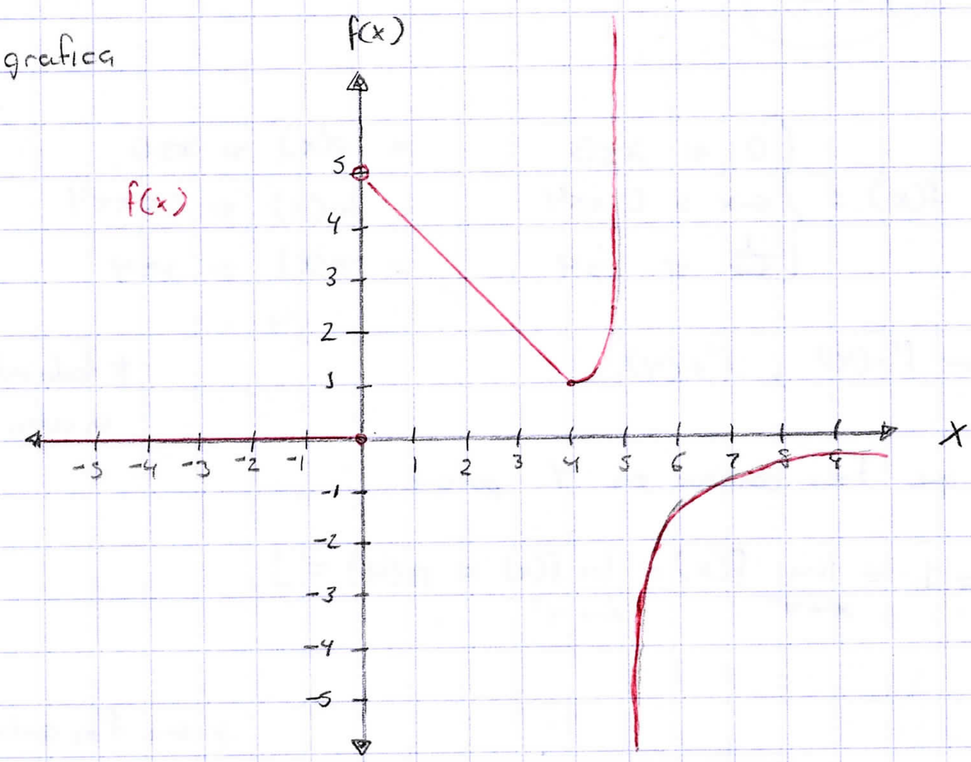
$$\boxed{\begin{aligned} &* \ f(x) = x^n \\ &\quad f'(x) = n x^{n-1} \\ &* \ f(x) = \frac{h(x)}{g(x)} \\ &\quad f'(x) = \frac{g(x)\cdot h'(x) - h(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2} \end{aligned}}$$

y ahora solo evaluams

$m'(4) = -1 \longrightarrow f'_-(4) = -1$

$n'(4) = \frac{1}{(5-4)^2} = \frac{1}{1} = 1 \longrightarrow f'_+(4) = 1$

(b) grafica




(c) ¿Donde f es discontinua?

en $x=5$ porque tenemos una asintota, porque $\lim_{x \to 5^-} \frac{1}{5-x} = \infty$

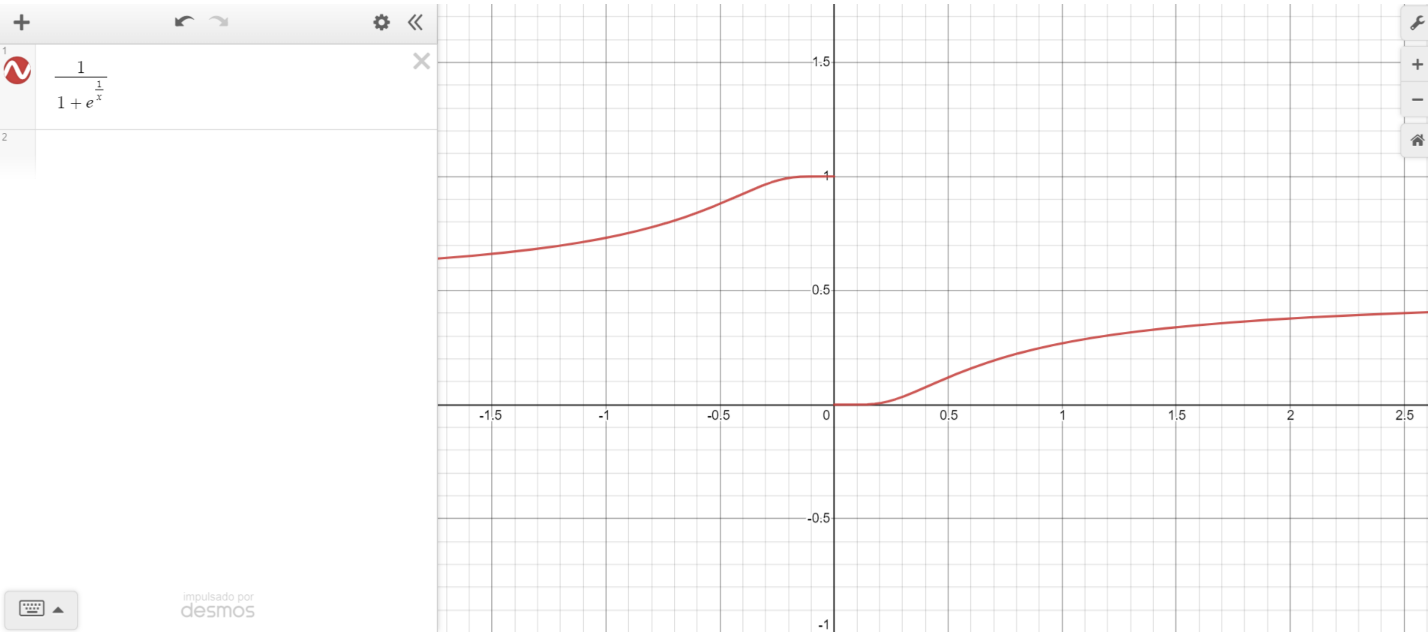
$\lim_{x \to 5^+} \frac{1}{5-x} = -\infty$

y en $x=0$ porque hay una discontinuidad de salto

$0 \neq 5-0 = 5$ entonces no es continua en $x=0$ y $x=5$

(d) ¿Donde f es no derivable?

sabemos que una funcion no es derivable donde no es continua, entonces f no es derivable en $x=0$ y $x=5$, ademas las derivadas laterales deben ser iguales, por lo tanto en $x=4$ tampoco (es una puntita la grafica)



$\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$
1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
impulsado por
desmos

• Derivadas con limites

(9) $f(x) = \frac{2x}{(x+1)^2}$ $\qquad f(0) = \frac{2(0)}{(0+1)^2} = \frac{0}{1} = 0$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2(0+h)}{(0+h+1)^2} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2h}{(h+1)^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2h}{h^2+2h+1}}{\frac{h}{1}} = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h(h^2+2h+1)} =$$

evaluamos

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2}{h^2+2h+1} = \frac{2}{0^2+2(0)+1} = \frac{2}{1} = 2$$

$f'(0) = 2$

(10) $g(x) = 0 \qquad m(x) = 5-x \qquad n(x) = \frac{1}{5-x}$

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$g'(x) = 0$

$$m'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{m(x+h) - m(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(5-(x+h))-(5-x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{5-x-h-5+x}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{-\cancel{h}}{h} = \lim_{h\to 0} -1 = -1$$

$m'(x) = -1$

$$n'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{n(x+h) - n(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{5-(x+h)} - \frac{1}{5-x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{5-x-(5-x-h)}{(5-x-h)(5-x)}}{h} =$$

evaluamos

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{(5-x-h)(5-x)}}{\frac{h}{1}} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}}{h(5-x-h)(5-x)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{(5-x-h)(5-x)} = \frac{1}{(5-x-0)(5-x)}$$

$$= \frac{1}{(5-x)(5-x)} = \frac{1}{(5-x)^2}$$

$$n'(x) = \frac{1}{(5-x)^2}$$

ahora evaluamos

$$n'(4) = -1$$

$$n'(4) = \frac{1}{(5-4)^2} = \frac{1}{1} = 1$$