3, 4, 9, 12

Tarea-Examen 2 García Ponce José Camilo

-Ejercicios que me tocaron:

3. Prueba que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $n \subset \mathbb{N}$

Sea S un conjunto tal que $S = \{n \in \mathbb{N} \mid n \subset \mathbb{N}\}$ y $S \subseteq \mathbb{N}$, ahora provemos que S es inductivo

Primero veamos que 0 esta en S, porque $0 = \emptyset$ y sabemos que $\emptyset$ es subconjunto propio de cada conjunto no vacio, porque cada conjunto contiene a $\emptyset$ pero al ser el conjunto no vacio entonces no es igual a $\emptyset$, por lo tanto $0 \in S$.

Ahora supongamos que algun $n \in S$, ahora veamos si $n^+ \in S$

por lo que suposimos sabemos que $n \in \mathbb{N}$, por def de subconjunto tenemos $\{n\} \subseteq \mathbb{N}$ y por la hipotesis sabems que $n \subseteq \mathbb{N}$. Ahora probemos algo:

Sea a, b, C conjuntos y $a, b \subseteq C$,

PD $a \cup b \subseteq T$

Sea $x \in a \cup b$ cualquiera, por def de union $x \in a$ o $x \in b$, por nuestra hipotesis $(a \subseteq C, b \subseteq C)$ entonces tenemos 2 casos

- caso 1 : que $x \in a$, entonces por def de subconjunto $x \in C$

- caso 2 : que $x \in b$, entonces por def de subconjunto $x \in C$.

por lo tanto podemos concluir que $x \in C$ y como la eleccion fue arbitraria $a \cup b \subseteq C$

entonces usando lo qe demostramos tenemos que

$n \cup \{n\} \subseteq \mathbb{N}$ y por def de sucesor sabemos que $n \cup \{n\} = n^+$

por lo tanto $n^+ \subseteq \mathbb{N}$, entonces por lo visto $n^+ \in \mathbb{N}$, (def de $\mathbb{N}$?) (clase 30?) (clase 33?)

ahora para que $n^+ \subset \mathbb{N}$ necesitamos encontrar un $y \in \mathbb{N}$ tal que $y \neq n^+$ (def subconjunto propio) ahora ya sabemos que $n^+ \in \mathbb{N}$ por lo tanto $n^+ \subseteq \mathbb{N}$ y $\{n^+\} \subseteq \mathbb{N}$, por lo tanto $n^+ \cup \{n^+\} \subseteq \mathbb{N}$ (lo qe probamos antes) y por def de sucesor

$n^+ \cup \{n^+\} = (n^+)^+$ por lo tanto $(n^+)^+ \in \mathbb{N}$ y por lo visto la clase 33 (ningun numero natural es subconjunto de sus elementos)

entonces concluimos que $(n^+)^+ \neq n^+$, por lo tanto por def de subconjunto propio $n^+ \subset \mathbb{N}$ y por def de S, $n^+ \in S$

por lo tanto S es inductivo y usando el principio de induccion matematica conclumos que $S = \mathbb{N}$ $\square$

no estoy muy seguro de esta

4.- Demuestra que $m \cdot n = n \cdot m$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$

Sean $m, n \in \mathbb{N}$ PD $m \cdot n = n \cdot m$ y usamos inducción matemática sobre n

Antes de empezar veamos que estas propiedades se cumplen;

4.A $0 \cdot n = 0 = P_0(n) = 0$

Demostración usando inducción sobre n

- Caso base sea $n=0$ entonces $0 \cdot 0 = P_0(0) = 0$ por la definición de producto y se cumple
- hipotesis de inducción
  Supongamos que se cumple para n
  $$0 \cdot n = 0 = P_0(n)$$
- Paso inductivo
  PD para n^+ PD $0 \cdot n^+ = 0$

$0 \cdot n^+ = P_0(n^+) = P_0(n) + 0$ por definición de producto

$0 \cdot n^+ = P_0(n)$ por definición de suma

$0 \cdot n^+ = 0$ por hipotesis

y por lo tanto 4.A se cumple (principio de inducción matemática)

4.B $P_{m^+}(n) = P_m(n) + n$ $\quad m^+ \cdot n = (m \cdot n) + n$

usamos inducción sobre n

- Caso base sea $n=0$ entonces

veamos que $P_{m^+}(0) = 0$ por def de producto ahora notemos que $P_m(0)+0 = 0+0$ por definicion de producto y $=0$ por def de suma por lo tanto se cumple

- Hipotesis de induccion

Supongamos que se cumple para n

entonces $P_{m^+}(n) = P_m(n)+n$

- Paso inductivo PD para n^+ PD $P_{m^+}(n^+) = P_m(n^+)+n^+$

tenemos que $P_{m^+}(n^+) = P_{m^+}(n) + m^+$ por def de producto

$= P_{m^+}(n)+m+1$ por def de sucesor o suma? (clase 34)

$= P_m(n)+n+m+1$ por hipotesis

$= P_m(n)+n^+ + m$ por def de suma y su asociatividad (clase 35)

$= P_m(n^+)+n^+$ por def de producto

y por lo tanto 4.B se cumple

(principio de induccion matematica)

Y con esas propiedades demostramos esto:

PD $m \cdot n = P_m(n) = P_n(m) = n \cdot m$ por inducción sobre n

- Caso base sea $m=0$

entonces $P_0(n) = 0 \cdot n = 0$ por lo demostrado en 4.A

y veamos que $n \cdot 0 = P_n(0) = 0$ por def de producto

entonces se cumple $0=0$

- hipotesis de inducción

Supongamos que para m se cumple:

$m \cdot n = P_m(n) = P_n(m) = n \cdot m$

- Paso inductivo PD para m^+

PD $m^+ \cdot n = P_{m^+}(n) = P_n(m^+) = n \cdot m^+$

$P_{m^+}(n) = P_m(n) + n$ por lo demostrado en 4.B

$= P_n(m) + n$ por hipotesis

$= P_n(m^+)$ por def de producto

entonces $P_{m^+}(n) = m^+ \cdot n = n \cdot m^+ = P_n(m^+)$

entonces se cumple por el principio de inducción matematica $\square$

9.- Para cada $(a,b), (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definimos $(a,b) \sqsubseteq (x,y)$ si y solo si $a \leq x$ y $b \leq y$. Demuestra que $\sqsubseteq$ es un orden parcial en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Sean $(a,b), (x,y), (c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cualesquiera

ahora veamos que $\sqsubseteq$ cumpla que sea reflexiva, antisimetrica y transitiva

1) reflexiva PD $(a,b) \sqsubseteq (a,b)$, Sea $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cualquiera,

observemos que por def de $\sqsubseteq$ tendremos que $a \leq a$ y $b \leq b$ y esto se cumple ya que sabemos que $\leq$ (es reflexiva) es un orden total en los $\mathbb{N}$, por lo tanto $\sqsubseteq$ es reflexiva

2) antisimetrica PD $(a,b) \sqsubseteq (x,y)$ y $(x,y) \sqsubseteq (a,b) \Rightarrow (a,b) = (x,y)$

Supongamos que $(a,b) \sqsubseteq (x,y)$ y $(x,y) \sqsubseteq (a,b)$

ahora por def de $\sqsubseteq$ tenemos que $a \leq x$ y $b \leq y$ y $x \leq a$ y $y \leq b$, reacomodemos un poco y tenemos que

$a \leq x$ y $x \leq a$ y $b \leq y$ y $y \leq b$, ahora como $\leq$ (es antisimetrica) es un orden total en $\mathbb{N}$ tenemos que

$a = x$ y $b = y$, entonces tenemos que $(a,b) = (x,y)$ por teorema (1.2.26), y por lo tanto $\sqsubseteq$ es antisimetrica

3) transitiva PD $(a,b) \sqsubseteq (x,y)$ y $(x,y) \sqsubseteq (c,d) \Rightarrow (a,b) \sqsubseteq (c,d)$

Supongamos que $(a,b) \sqsubseteq (x,y)$ y $(x,y) \sqsubseteq (c,d)$

por def de $\sqsubseteq$ tenemos que $a \leq x$ y $b \leq y$ y $x \leq c$ y $y \leq d$

reacomodas y tenemos $a \leq x$ y $x \leq c$ y $b \leq y$ y $y \leq d$

ahora como sabemos que $\leq$ (es transitiva) es un orden total en $\mathbb{N}$ podemos ver que $a \leq c$ y $b \leq d$ y por la def de $\sqsubseteq$ tenemos que $(a,b) \sqsubseteq (c,d)$ por lo tanto $\sqsubseteq$ es transitiva

y con las 3 propiedades conclumos que $\sqsubseteq$ es un orden parcial por la definicion de orden parcial $\square$

12. Demuestra que la funcion $f: P(X) \to P(X)$ definida como $f(P) = P - E$ para algún $E \subseteq X$ no vacio es monotona

Sean $a, b \in P(X)$ cualquiera y $E \subseteq X$ cualquiera y no vacio

PD si $a \subseteq b \Rightarrow f(a) \subseteq f(b)$

Supongamos que $a \subseteq b$, veamos que $f(a) = a - E$ y $f(b) = b - E$ PD $a - E \subseteq b - E$

sea $x \in a - E$ cualquiera, por def de diferencia $x \in a$ y $x \notin E$, ahora por nuestra hipotesis sabemos que $a \subseteq b$ y por lo visto la clase 8 tenemos $x \in b$ y $x \notin E$ y por def de diferencia $x \in b - E$, como la eleccion fue arbitraria tenemos que $a - E \subseteq b - E$

por lo tanto $f(a) \subseteq f(b)$ y con esto concluimos que f es monotona ya que mantiene el orden

$\square$

- Ejercicios que elegí:

2. Prueba que para todo $n \in \mathbb{N}$, si $n \neq 0$, entonces $n = m^+$ para algún $m \in \mathbb{N}$

Sea X un conjunto tal que $X = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 0 \text{ o } n = m^+ \text{ para algun } m \in \mathbb{N}\}$

y $X \subseteq \mathbb{N}$, ahora veamos que X es inductivo

Primero veamos que $0 \in X$ porque por nuestra definicion de X tenemos que $0 = 0$ por lo tanto se cumple

Supongamos que algun $n \in X$, esto significa que $n \in \mathbb{N}$

Ahora veamos si $n^+ \in X$

Ahora tenemos 2 casos:

- caso i $n^+ = 0$, pero este caso no puede suceder porque 0 es el sucesor de nadie ya que por def de sucesor tendriamos que $y^+ = y \cup \{y\}$, pero $0 = \emptyset$ entonces no se puede, el vacio no tiene elementos

- caso ii $n^+ \neq 0$, ahora veamos si $n^+ \in X$, notemos que por nuestra suposicion de que $n \in X$, entonces $n \in \mathbb{N}$ y por def de subconjunto tenemos que $\{n\} \subseteq \mathbb{N}$ y $n \subseteq \mathbb{N}$, por lo demostrado en 3 y por def de sucesor $n^+ = n \cup \{n\} \subseteq \mathbb{N}$, y por (def de $\mathbb{N}$? o clase 30? clase 33?) $n^+ \in \mathbb{N}$, ahora veamos la def de X

$(n=0$ o $n=m^+$, para algun $m\in\mathbb{N}\}$ y como vimos al inicio del caso $n^+\neq 0$ entonces debe existir un $m\in\mathbb{N}$ tal que $n^+=m^+$ y esto es algo "sencillo" como vimos en nuestra suposicion $n\in\mathbb{N}$ y n^+ es el sucesor de n por def de sucesor por lo tanto se cumple el requerimiento de X ya que $m=n$ para que $n^+=m^+$ y con esto vemos que $n^+\in X$

y por lo tanto X es inductivo

y por el principio de induccion matematica

$$X=\mathbb{N}$$

$\square$

*en esta tambien no estoy muy seguro o *

5.- Demuestra que $(k\cdot m)\cdot n = k\cdot(m\cdot n)$ para todo $k,m,n \in \mathbb{N}$

Sean $k,m,n\in\mathbb{N}$ PD $(k\cdot m)\cdot n = k\cdot(m\cdot n)$ usando induccion sobre n

Antes de empezar veamos que esta propiedad se cumple:

5.1 $(k+m)\cdot n = (k\cdot n)+(m\cdot n)$

Demostracion usando induccion sobre n

- Caso base sea $n=0$ entonces

$(k+m)\cdot 0 = 0$ por def de producto

y $(k\cdot 0)+(m\cdot 0) = (0)+(0)$ por def de producto

$=0$ por def de suma, por lo tanto se cumple

- hipotesis de induccion

Supongamos que para n se cumple

$(k+m)\cdot n = (k\cdot n)+(m\cdot n)$

- Paso inductivo PD para n^+ PD $(k+m)\cdot n^+ = (k\cdot n^+)+(m\cdot n^+)$

$(k+m)\cdot n^+ = ((k+m)\cdot n)+(k+m)$ por def de producto

$=(k\cdot n)+(m\cdot n)+(k+m)$ por hipotesis

$=(k\cdot n)+(m\cdot n)+k+m$ por asociatividad? de suma?

$=(k\cdot n)+k+(m\cdot n)+m$ por conmutatividad de suma

$= ((k\cdot n)+k) + ((m\cdot n)+m)$ por asociatividad de suma

$= (k\cdot n^+) + (m\cdot n^+)$ por def de producto

y por lo tanto se cumple 5.A (principio de induccion matematica)

Ahora con esta propiedad demostremos

PD $(k\cdot m)\cdot n = k\cdot(m\cdot n)$ usando induccion sobre n

- Caso base

Sea $n=0$ entonces tenemos que

$(k\cdot m)\cdot 0 = 0$ por def de producto

y $k\cdot(m\cdot 0) = k(0)$ por def de producto,

$k(0) = 0$ por def de producto, por lo tanto se cumple $0=0$

- hipotesis de induccion

Supongamos que se cumple para n, entonces

$(k\cdot m)\cdot n = k\cdot(m\cdot n)$

- Paso inductivo PD para n^+ PD $(k\cdot m)\cdot n^+ = k\cdot(m\cdot n^+)$

tenemos que:

$(k \cdot m) \cdot n^+ = ((k \cdot m) \cdot n) + (k \cdot m)$ por def de producto

$= (k \cdot (m \cdot n)) + (k \cdot m)$ por hipotesis

$= (k \cdot m) + (k \cdot (m \cdot n))$ por conmutatividad de suma (clase 35)

$= k \cdot (m + (m \cdot n))$ por 5.A y conmutatividad de producto (esta en 4)

$= k \cdot ((m \cdot n) + m)$ por conmutatividad de suma

$= k \cdot (m \cdot n^+)$ por def de producto

entonces $(k \cdot m) \cdot n^+ = k \cdot (m \cdot n^+)$

y entonces lo que demostramos se cumple por el principio de induccion matematica

$\square$

8. Para cada $(a,b),(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ definimos $(a,b) \sqsubseteq (x,y)$ si y

solo si (i) $a \leq x$ y $a \neq x$, o (ii) $a = x$ y $b \leq y$

Demuestra que $\sqsubseteq$ es un orden parcial en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

Sean $(a,b), (x,y), (c,d) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ cualesquiera

veamos que $\sqsubseteq$ cumpla que sea reflexiva, antisimetrica y transitiva

1) reflexiva PD $(a,b) \sqsubseteq (a,b)$, Sea $(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ cualquiera,

observemos que por def de $\sqsubseteq$ tenemos dos casos para que

se cumpla (se debe cumplir almenos 1)

caso (1) tendriamos que $a \leq a$ y $a \neq a$, aqui podemos

ver que $a \leq a$ se cumple ($\leq$ es simetrica) pero $a \neq a$ no se

cumple, porque sabemos que $a = a$ (son el mismo), entonces (i) no se cumple

caso (2) tendriamos que $a = a$ y $b \leq b$, podemos

observar que $a = a$ se cumple (son el mismo) y $b \leq b$ tambien

se cumple por $\leq$ (es simestrica) es un orden total en $\mathbb{N}$, por lo tanto

podemos ver que se cumple (ii)

entonces podemos concluir que $(a,b) \sqsubseteq (a,b)$ porque se cumplio (2)

por lo tanto $\sqsubseteq$ es reflexiva

2) antisimetrica PD $(a,b) \sqsubseteq (x,y)$ y $(x,y) \sqsubseteq (a,b) \Rightarrow (a,b)=(x,y)$

Supongamos que $(a,b) \sqsubseteq (x,y)$ y $(x,y) \sqsubseteq (a,b)$

Veamos que tenemos 4 casos por def de $\sqsubseteq$:

- caso (1) tenemos que $a \leq x$ y $a \neq x$ y $x \leq a$ y $x \neq a$
  entonces porque $\leq$ (es simetrica) tendriamos que $a \neq x$ y $a = x$
  por lo tanto este caso no se puede genera una contradiccion
- caso (2) tenemos que $a \leq x$ y $a \neq x$ y $x \neq a$ y $b \leq y$
  entonces tenemos que $a \leq x$ y $a \neq x$ y $b \leq y$.
- caso (3) tenemos que $a = x$ y $b \leq y$ y $x \leq a$ y $x \neq a$
  aquí podemos observar como el caso (i) se genera una contradiccion con $a = x$ y $a \neq x$, por lo tanto no se puede
- caso (4) tenemos que $a = x$ y $b \leq y$ y $x = a$ y $y \leq b$
  como sabemos que $\leq$ (es antisimetrica) un orden parcial en $\mathbb{N}$
  tenemos que $a = x$ y $b = x$ y por el teorema (1.2.26)
  tenemos que $(a,b) = (x,y)$

viendo que se cumplio al menos un caso podemos concluir que $\sqsubseteq$ es antisimetrica (?)

3) transitiva PD $(a,b) \sqsubseteq (x,y)$ y $(x,y) \sqsubseteq (c,d) \Rightarrow (a,b) \sqsubseteq (c,d)$

Supongamos que $(a,b) \sqsubseteq (x,y)$ y $(x,y) \sqsubseteq (c,d)$ PD $(a,b) \sqsubseteq (c,d)$

veamos que tenemos 4 casos por la def de $\sqsubseteq$:

- caso (1) tenemos que $a \leq x$ y $a \neq x$ y $x \leq c$ y $x \neq c$

como $\leq$ es transitiva tenemos que $a \leq c$ y veamos que $a \neq x$ y $x \neq c$, por lo tanto tenemos 2 subcasos:

caso (1.1) tenemos que $a = c$ y ahora 2 casos más:

caso (1.1.1) que $b \leq d$ si esto pasa por def de $\sqsubseteq$ (ii) tenemos que $(a,b) \sqsubseteq (c,d)$

caso (1.1.2) que $d \leq b$ si esto paso no podemos hacer nada más

caso (1.2) tenemos que $a \neq c$ y por def de $\sqsubseteq$ (i) tenemos que $(a,b) \sqsubseteq (c,d)$

- caso (2) tenemos que $a \leq x$ y $a \neq x$ y $x \neq c$ y $y \leq d$

tenemos 2 subcasos:

caso (2.1) tenemos que $a = c$ y ahora 2 casos más:

caso (2.1.1) que $b \leq d$ si esto pasa por def de $\sqsubseteq$ (i) tenemos que $(a,b) \sqsubseteq (c,d)$

caso (2.1.2) que $d \leq b$ si esto pasa no podemos hacer nada más.

caso (2.2) tenemos que $a \neq c$ entonces tenemos 2 casos

caso (2.2.1) que $a \leq c$ si esto pasa por def de $\sqsubseteq$ (i) tenemos que $(a,b) \sqsubseteq (c,d)$

caso (2.2.2) que $c \leq a$ si esto pasa no podemos hacer nada más

- caso (3) tenemos que $a = x$ y $b \leq y$ y $x \leq c$ y $x \neq c$

aqui podemos observar que como $a = x$ y $x \neq c$ entonces tenemos que $a \neq c$, ademas como $a = x$ y $x \leq c$ tenemos que $a \leq c$ y por def de $\sqsubseteq$ (i) tenemos $(a,b) \sqsubseteq (c,d)$

- caso (4) tenemos que $a = x$ y $b \leq y$ y $x = c$ y $y \leq d$

ahora veamos que $a = x$ y $x = c$ entonces $a = c$ y como $\leq$ es transitiva tenemos que $b \leq d$ y por def de $\sqsubseteq$ (ii) tenemos que $(a,b) \sqsubseteq (c,d)$

observemos que se cumplio al menos un caso, entonces podemos decir que $\sqsubseteq$ es transitiva y con estas 3 propiedades concluimos que $\sqsubseteq$ es un orden parcial por la definicion de orden parcial

$\square$

11. Demuestra que la funcion $f: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ definida como

$f(P) = P \cap E$ para algún $E \subseteq X$ no vació es monotona

Sean $a, b \in \mathcal{P}(X)$ cualquiera y $E \subseteq X$ cualquiera y no vacio

PD si $a \subseteq b \Rightarrow f(a) \subseteq f(b)$

Supongamos que $a \subseteq b$, veamos que $f(a) = a \cap E$ y

$f(b) = b \cap E$ PD $a \cap E \subseteq b \cap E$

Sea $x \in a \cap E$ cualquiera, por def de interseccion

$x \in a$ y $x \in E$, ahora por nuestra hipotesis sabemos

que $a \subseteq b$ y por lo visto la clase 8? y tenemos qué

$x \in b$ y $x \in E$, por def de Interseccion $x \in b \cap E$,

como la eleccion fue arbitraria tenemos que

$a \cap E \subseteq b \cap E$

por lo tanto $f(a) \subseteq f(b)$ y con esto concluimos

que f es monotona ya que mantiene el orden

$\square$

* creo que si entendi como hacer cada ejercicio, pero no estoy muy seguro de la manera que los desarrolle y/o escribi *

:) Saludos