

## Resumen Límite y continuidad de funciones

## • Desarrollo histórico

## - Período Clásico (S. V.A.C)

Idea intuitiva del paso al límite. Métodos:

- Exhaustión. De Euxodo, usada por Arquímedes. Se aplicaba al cálculo de áreas de figuras, volúmenes de cuerpos, longitudes y tangentes de curvas. Consiste en aproximar la figura por otras en las que se puede medir la correspondiente magnitud de manera que se aproxime a la magnitud buscada. Ejemplo, para estimar la superficie de un círculo, usando polígonos regulares de  $n$  lados.

## - Revolución científica (S. XVI - S. XVIII)

Usar métodos matemáticos para responder problemas físicos, como: obtener tangente de curva, máximos y mínimos de una función y estudio de la gravedad. Métodos:

- Infinitesimos de Kepler. resolver medidas de volúmenes o áreas. Consiste en pensar que todo cuerpo se descompone en infinitas partes, infinitamente pequeñas, de áreas o volúmenes conocidos.
- Indivisibles de Cavalieri. determinar área de figuras planas y volúmenes de cuerpos. Representa estos objetos mediante una superposición de elementos cuya dimensión era una unidad menor a la por evaluar.
- Extremos de curva de Fermat. Consiste en considerar que un cumbre o valle de la curva, cuando  $E$  es pequeño, los valores  $f(x)$  y  $f(x+\delta)$  están tan próximos que pueden ser iguales. Consiste en hacer  $f(x+\delta) = f(x)$ , dividirlo por  $E$  y tomar  $E=0$ .
- Método de tangentes. Calcular tangentes en un punto cualquiera de la curva. Usar  $f(x+\delta) - f(x)$ , se divide por  $E$  y se tomaba  $E=0$ , lo que es hallar el límite funcional en la abscisa del punto  $P$ . cálculo abstracción.
- Método de Barrow. Similar al de Fermat, pero en dos incrementos  $e$  y  $a$ , serían  $\Delta x$  y  $\Delta y$  actualmente.

- Método de flujiones de Newton. Resuelve dos problemas: determinación de la relación entre flujiones y conocidos la relación entre flujos y el recíproco, encontrar los flujos.
- Teoría sobre diferenciales de Leibnitz. La pendiente de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias de los ordenados y de las abscisas, cuando se hacen infinitamente pequeños estas diferencias.

### - Fundamentación del análisis infinitesimal (S. XVIII)

Usan infinitesimales pequeños y grandes

- Euler usa el cálculo diferencial y flujiones, para generar el Análisis y se aparta del estudio de los procesos infinitos, se introduce la función continua.
- D'Alembert crea la teoría de los límites, donde las variables son monótonas y el límite unilateral.
- Lagrange trabaja con desarrollos de funciones en series de potencias.

### - Aritmetización del Análisis (S. XIX - S. XX)

- Cauchy retoma el concepto de límite de D'Alembert, le da un carácter más constructivo pero aún impreciso.
- Bolzano da una definición de continuidad basada en la de límite. Bolzano y Cauchy dicen: "..., cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan independientemente a un valor fijo, de manera que terminan por diferir de él en lo poco como queremos, este último valor se llama el límite de todos los demás".
- Weierstrass el da esta definición: "Si, dado cualquier  $\varepsilon$ , existe un  $n_0$ , tal que para  $0 < n < n_0$ , la diferencia  $f(x_0 \pm n) - L$  es menor en valor absoluto que  $\varepsilon$ , entonces se dice que  $L$  es el límite de  $f(x)$  para  $x \rightarrow x_0$ ".



## Conceptos

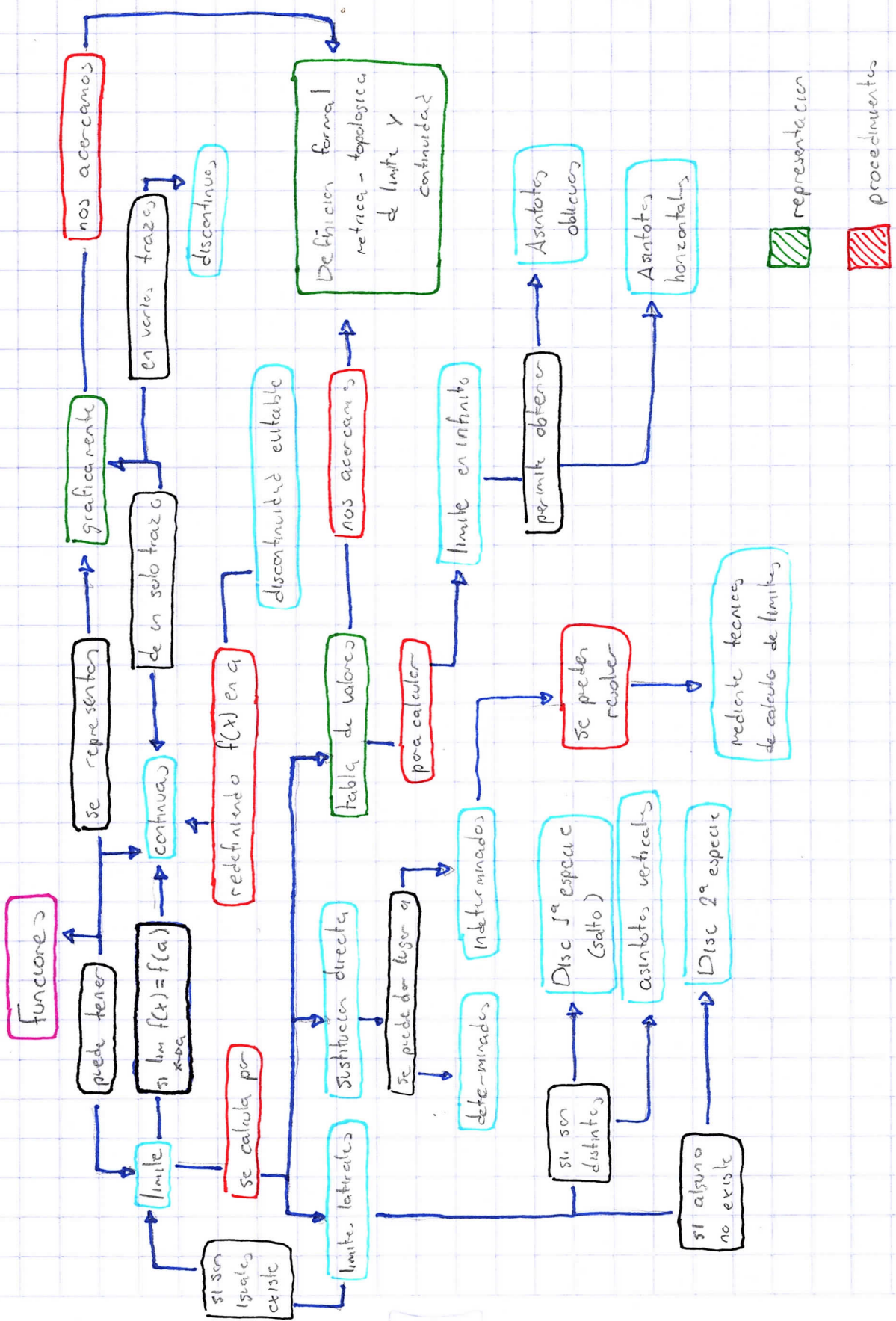
- Sucesión : es un conjunto de números los cuales están ordenados
- Función : es una relación entre elementos de dos conjuntos, donde a cada elemento del conjunto origen le toca solo uno del conjunto destino
- Límite : es a lo que se aproxima una función, cuando se acerca hacia un valor específico del dominio
- Tender a un número : irnos acercándonos a un número sin tomar su valor
- Convergente : que dos cosas en cierto punto se encuentren
- Divergente : que dos cosas se van separando
- Tender a infinito : cuando nos acercamos, tomando números muy grandes o muy pequeños, pero sin tomar infinito
- Indeterminación : que no se puede saber o concluir
- Asintota : una recta que se aproxima a la función pero nunca la encuentra
- Continuidad : cuando una función es continua y no hay secciones donde no esté definida
- Discontinuidad : las secciones donde una recta no está definida
- Sucesión  $(a_n)$  : una sucesión, donde cada elemento tiene una posición (?)
- Límite de sucesión  $\lim(a_n)$  : los valores a los que tiende una sucesión
- Límite de función en un punto  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  : el valor que tiende a regresar la función cuando nos acercamos al punto
- Límite de función en más o menos infinito  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$  : el valor que tiende a dar la función al acercarnos a los extremos
- Límite lateral por der  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  : el valor que tiende a dar la función cuando nos acercamos al punto usando valores mayores al punto
- Tipos de indeterminantes : operaciones de los cuales no tenemos su valor, no podemos saber cuánto vale

## Conceptos

- Sucesión de números reales: una serie de números reales ordenados
- Función polinómica: una función con un polinomio
- Función racional: una función que es la división de polinomios
- Función circular: una función que usa Seno, Coseno y tangente, son periódicas
- Función radical: una función donde la variable se encuentra en una raíz
- Límite de una sucesión: lo que tiende a dar una sucesión
- Sucesión nula: una sucesión con un límite de 0 (?)
- Dominio: el conjunto de valores de una función
- Rango: la resta de correspondencias que sigue la función para asignar valores
- Límite de función en un punto: lo que tiende a dar una función al acercarse al punto
- Límite de función en infinito: lo que tiende a dar una función cuando damos valores muy grandes o muy pequeños
- Límites laterales: los límites de una función hacia un punto por izquierda y derecha
- Asíntota vertical: línea vertical que se acerca y nunca toca la función
- Asíntota horizontal: línea horizontal que se acerca y nunca toca la función
- Asíntota oblicua: pendiente que se acerca y nunca toca la función
- Función continua: una función sin discontinuidades
- Continuidad en un punto: cuando la función es continua en cierto punto de ella
- Discontinuidad en un punto: cuando la función no es continua en un punto de ella
- Discontinuidad de salto: cuando los límites laterales de una función en un punto no son iguales y hay una discontinuidad en ese punto
- Discontinuidad evitable: cuando los límites laterales de una función en un punto son iguales y hay una discontinuidad en ese punto
- Discontinuidad esencial: cuando uno de los límites laterales de una función en un punto no existe y hay una discontinuidad en ese punto



# Mapita



## • Representaciones

Las 3 representaciones más útiles para mi son:

### (1) Representación gráfico-dinámica

Usando un recurso tecnológico para interactuar con el concepto abstracto

• Porque?

Esta representación se me hace la más útil para mí, principalmente porque es gráfica, y yo prefiero ver las cosas gráficamente que solo teóricamente, se me hace más fácil entenderlo así, porque puedo ver con la gráfica y así ver su límite de una manera más fácil, y al ser tecnológico, se pueden ver varias funciones fácilmente y son exactas.

### (2) Representación gráfica

Usando una graficación a mano (?) para interactuar con el concepto

• Porque?

Siento que esta representación es similar a la gráfico-dinámica.

Y como dije anteriormente prefiero ver las cosas gráficamente que abstractamente. Pero esta la elegí como segunda por varias razones, esta representación a diferencia de la anterior, pues es un poco más tardada, además al hacerlo a mano existe más posibilidad de error que si es a computadora, además no es dinámico (no podemos hacer la gráfica, cambiarla fácilmente, etc.)

### (3) Representación figurativa

Usar dibujos como diagramas de Venn

• Porque?

Como ya dije es algo gráfico y esto me facilita entender, pero lo diferente es que como usamos diagramas de Venn pues se me puede complicar algo, porque es algo nuevo, además puede ser algo abstracto, pero en sí se me hace útil, pero solo un poco más útil que la representación numérica.

scribes