García Ponce José Carrillo

Fecha: Lunes 13 de diciembre de 2021.

3^{er} examen parcial

1. Sea

$$g(x) = f(x)sen(x)$$

y

$$h(x) = \frac{cos(x)}{f(x)}$$

Proporcione el resultado de:

- $g'(\frac{\pi}{3}) = 2-\sqrt{3}$
- $h'(\frac{\pi}{3}) = \frac{1-2\sqrt{3}}{16}$

dado que, $f(\frac{\pi}{3}) = 4$ y $f'(\frac{\pi}{3}) = -2$.

2. Proporcione la ecuación de una parábola, en su forma $y = ax^2 + bx + c$, tal que cumpla lo siguiente:

$y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{14}{3}x$

- $y(1) = 4$,
- $y'(-1) = 6$
- $y'(5) = -2$.

3. Cada lado de un cuadrado se incrementa a razón de $8\frac{cm}{s}$.¿En qué proporción se incrementa el área del cuadrado $[\frac{cm^2}{s}]$, cuando el área del mismo es de 25 cm^2 $80\ \frac{cm^2}{s}$

4. Obtenga los valores de la constante α, para la cual la función

$$y = e^{\alpha x}$$

$\alpha = 1, -6$

satisface la siguiente ecuación

$$y'' + 5y' - 6y = 0$$

5. Dada la siguiente ecuación

$$xe^y = y - 1$$

- Derive ambos lados de la igualdad (implícitamente), indicando cada paso del desarrollo para obtener y'. Por ejemplo, para empezar, al obtener la derivada del lado izquierdo, deberá indicar que el primer paso es derivar un producto... $y' = -\frac{e^y}{xe^y-1}$
- Una vez que haya obtenido y', proporcione las ecuaciones de la recta tangente (en su forma $y = mx+b$), en los puntos: $A(-1,0)$ y $B(0,1)$. $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$
- Presente una gráfica donde se muestre la ecuación ($xe^y = y - 1$).y las rectas tangentes solicitadas. $y = e^1 x + 1$

$f(\frac{\pi}{3})=4$ y $f'(\frac{\pi}{3})=-2$

(1) $g(x)=f(x)\,\text{sen}(x)$ $\quad h(x) = \frac{\cos(x)}{f(x)}$

(1.1) $g'(\frac{\pi}{3})$?

$y=uv$

primero usamos la regla de la derivacion de un producto $y'=u'v+uv'$

$g(x)=f(x)\,\text{sen}(x)$

$g'(x)=\left(f'(x)\cdot\text{sen}(x)\right)+\left(f(x)\cdot\cos(x)\right)$ porque la derivada de $\text{sen}(x)$ es $\cos(x)$

ahora veamos cuanto vale $g'(\frac{\pi}{3})$

$g'(\frac{\pi}{3})=\left(f'(\frac{\pi}{3})\cdot\text{sen}(\frac{\pi}{3})\right)+\left(f(\frac{\pi}{3})\cdot\cos(\frac{\pi}{3})\right)$

$=\left(-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(4\cdot\frac{1}{2}\right)$

$=\left(-\sqrt{3}\right)+\left(2\right)$

$=2-\sqrt{3}$

$g'(\frac{\pi}{3})=2-\sqrt{3}$

(1.2) $h'(\frac{\pi}{3})$?

$y=\frac{u}{v}$

primero usamos la regla de la derivacion de cociente $y'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$h(x)=\frac{\cos(x)}{f(x)}$

$h'(x)=\frac{\left(-\text{sen}(x)\cdot f(x)\right)-\left(\cos(x)\cdot f'(x)\right)}{\left(f(x)\right)^2}$ porque la derivada de $\cos(x)$ es $-\text{sen}(x)$

ahora veamos cuánto vale $h'(\frac{\pi}{3})$

$$h'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) - \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}{\left(f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^2}$$

$$= \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot -2\right)}{4^2} = \frac{-2\sqrt{3} - -1}{16} = \frac{1 - 2\sqrt{3}}{16}$$

$$h'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1 - 2\sqrt{3}}{16}$$

(2) parabola $y = ax^2 + bx + c$ tal que:

$y(1)=4$

$y'(-1)=6$

$y'(5)=-2$

primero derivamos y

usamos la derivación de suma

$$y' = \frac{d}{dy} a x^2 + \frac{d}{dy} bx + \frac{d}{dy} c$$

$$= a \frac{d}{dy} x^2 + b \frac{d}{dy} x + 0$$

$$y' = a2x + b$$

ahora tenemos que

$a2(-1) + b = 6 \rightarrow -2a + b = 6$

$a2(5) + b = -2 \rightarrow 10a + b = -2$

veamos que $-2a + b = 6$

$$b = 2a + 6$$

reemplazamos b en la otra ecuación

$$10a + 2a + 6 = -2$$

$$12a = -8$$

$$a = \frac{-8}{12} = -\frac{2}{3}$$

$$a = -\frac{2}{3}$$

sustituimos a en la primera ecuación

$$b = 2\left(-\frac{2}{3}\right) + 6$$

$$b = -\frac{4}{3} + 6$$

$$b = \frac{14}{3}$$

entonces tenemos que y

$$y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{14}{3}x + C$$

ahora $y(1) = 4$

$$4 = -\frac{2}{3}1^2 + \frac{14}{3}1 + C$$

$$4 = -\frac{2}{3} + \frac{14}{3} + C$$

$$4 = 4 + C$$

$$C = 4 - 4$$

$$C = 0$$

entonces tenemos que $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{14}{3}X$

(3) $\frac{dl}{dt} = 8\frac{cm}{s}$ $\frac{da}{dt} = ?$ cuando $a = 25\,cm^2$

sabemos que el area de un cuadrado es $a = l^2$ l = lado

entonces hacemos derivacion implicita

$$a = l^2$$

$$\frac{da}{dt} = 2l\frac{dl}{dt}$$ por la derivada de exponente y y la derivada implicita

entonces el unico valor que nos falta es l

$$a = l^2$$

$$25 = l^2 \rightarrow l = 5$$

$$\rightarrow l = -5$$ pero el lado no puede ser negativo

entonces $l = 5$ y ahora solo reemplazamos

$$\frac{da}{dt} = 2l\frac{dl}{dt}$$

$$= 2(5)(8)$$

$$= 10(8) = 80$$

$$\frac{da}{dt} = 80\frac{cm^2}{s}$$

(4) $y = e^{ax}$ $a = ?$

si $y'' + 5y' - 6y = 0$

primero saquemos la primera y segunda derivada de y

$y = e^{ax}$

usamos regla de la cadena

$e^{x} = h(x)$ $y = h(g(x))$

$ax = g(x)$ $y' = h'(g(x)) \cdot g'(x)$

$h'(x) = e^{x}$ por derivacion de exponentes

$g'(x) = a$ porque la constante se queda por derivacion de potencias

$y' = e^{ax} \cdot a$

$y' = ae^{ax}$

ahora veamos la segunda derivada

$y' = ae^{ax}$

$y'' = (0 \cdot e^{ax}) + (a \cdot ae^{ax})$

$y'' = a^{2}e^{ax}$

usamos la derivacion de un producto $y = uv$

$y' = u'v + uv'$

la derivada de una constante es 0

y la derivada de e^{ax} ya la tenemos arriba

entonces tenemos que

$$a^{2}e^{ax} + 5ae^{ax} - 6e^{ax} = 0$$

1	5	-6	$\underline{\lvert -6}$
	-6	6	
1	-1	0	

$x = -6$

$x - 1 = 0$

$x = 1$

veamos si $a = 1$ tenemos que

$$1^{2}e^{1x} + 5(1)e^{1x} - 6e^{1x} = e^{x} + 5e^{x} - 6e^{x} = 0$$

entonces $a = 1$

veamos si $\alpha = -6$ tenemos que

$$(-6)^2 e^{-6x} + 5(-6) e^{-6x} - 6 e^{-6x} =$$

$$36 e^{-6x} - 30 e^{-6x} - 6 e^{-6x} = 0$$

entonces $\alpha = -6$

por lo tanto $\alpha = 1, -6$

(5) $xe^y = y-1$

usamos derivación para obtener $y' = \frac{dy}{dx}$

derivamos ambos lados

$$\frac{dy}{dx} xe^y = \frac{dx}{dy} y - 1$$

$$(1 \cdot e^y) + (x \cdot e^y y') = \frac{dx}{dy} y - \frac{dx}{dy} 1$$

usamos la derivación del producto y de la resta

$$e^y + xe^y y' = y' - 0$$

ahora despejamos a y'

$$xe^y y' - y' = -e^y$$

$$y'(xe^y - 1) = -e^y$$

$$y' = -\frac{e^y}{xe^y - 1}$$

recta tangente al puntos $A(-1,0)$ y $B(0,1)$

$$y - 0 = f'(-1)(x+1)$$

$$-\frac{e^0}{-1e^0 - 1} = -\frac{1}{-1-1} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x+1)$$

$$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$$

Segunda tangente

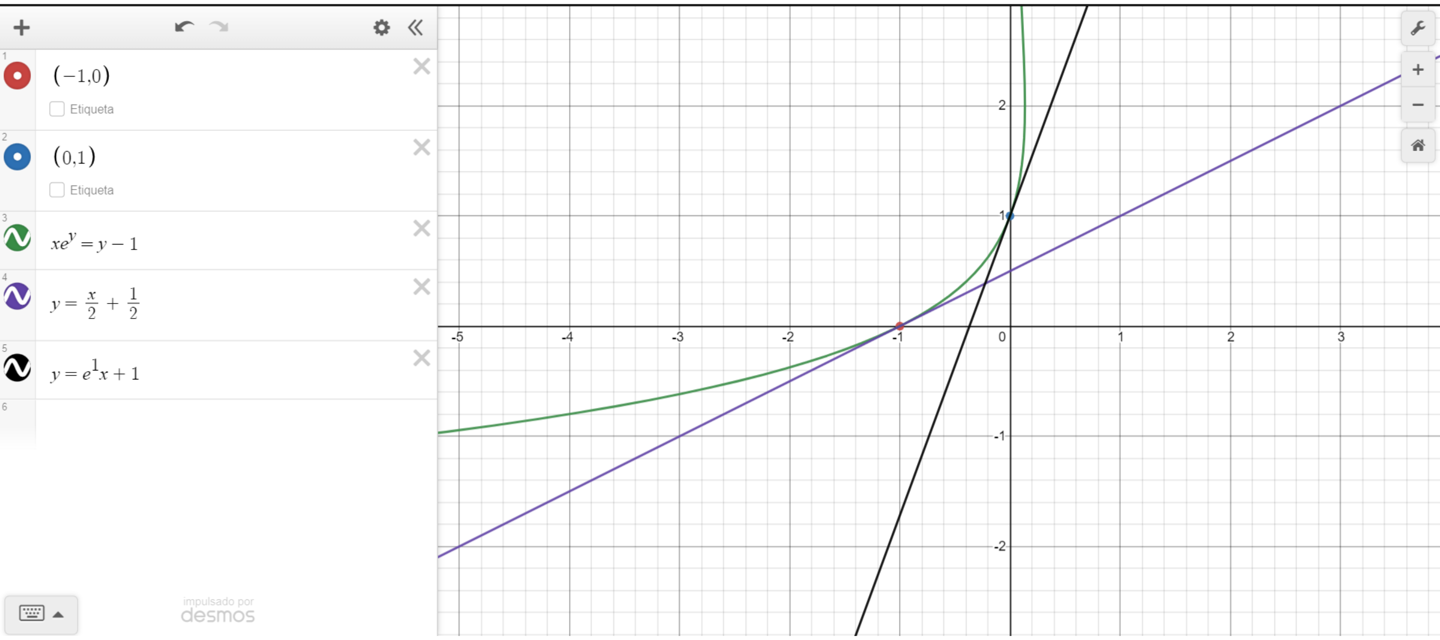
$$-\frac{e^1}{0e^1 - 1} = -\frac{e^1}{-1} = e^1$$

$$y - 1 = f'(0)\,(x)$$

$$y - 1 = e^1(x)$$

$$y = e^1 x + 1$$

5.



$(-1,0)$
Etiqueta
$(0,1)$
Etiqueta
$xe^{y} = y - 1$
$y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$
$y = e^{1}x + 1$
impulsado por desmos