

Barke Gómez Alfredo

Rivera Hernandez Ernesto Yahir

García Ponce José Camilo

Sem:2022-2

Tarea 5

# Tarea 5

Fecha asignación: Viernes 20 de mayo de 2022.  
Fecha entrega: Viernes 3 de junio de 2022.

## 1 Problemas

- Si  $z = f(x, t) = \sin(x + \sin t)$ .

demuestre que

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} = \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad \text{en hojalas}$$

- Proporcione las ecuaciones de los planos tangentes a las siguientes funciones en el punto indicado:

$$z = 8x + 4y + 1$$

- $z = 3x^2 - y^2 + 2x$ , en el punto  $(1, -2, 1)$
- $z = e^x \cos y$ , en el punto  $(0, 0, 1)$

$$z = x + 1$$

Adjunte una imagen de geogebra donde se vea la función y el plano tangente.

- Calcule la aproximación lineal de la función  $f(x, y, z) = x^3 \sqrt{y^2 + z^2}$  y con ella calcule  $f(1.98, 3.01, 3.97)$ .

- Los dos catetos de un triángulo rectángulo miden 5m y 12 m, y el error posible en la medición es de mucho 0.2 cm en cada uno. Utilice diferenciales para estimar el error máximo en el valor calculado de: (a) el área del triángulo, (b) la longitud de la hipotenusa.

- Dada la siguiente función implícita de 3 variables,

$\cos(xyz) = 1 + x^2y^2 + z^2$ , utilice derivación implícita para calcular: a)  $\frac{\partial z}{\partial x}$ , b)  $\frac{\partial z}{\partial y}$

- Determine la razón de cambio máxima de  $z = f(x, y) = x^2y + \sqrt{y}$ , en el punto  $(2, 1)$ . ¿Cuál es la dirección de dicho cambio máximo?

- Demuestre que el determinante de la Matriz Hessiana de la función  $z = f(x, y) = 3xy - x^2y - xy^2$  es

$$D = -4xy - 4x^2 - 4y^2 + 12x + 12y - 9.$$

Haga el desarrollo correspondiente para encontrar los puntos críticos de la función, y determine si son: máximos, mínimos o puntos de silla.

- Si  $z = f(x, y) = xy + xe^{\frac{y}{x}}$ , demuestre que

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z. \quad \text{en hojalas}$$

9. Con el método de **multiplicadores de Lagrange**, determine los valores máximos y mínimos de  $f(x, y)$  sujeta a las restricciones dadas:

- $f(x, y) = x^2y$ , sujeto a la condición  $x^2 + y^2 = 1$ .

$$\text{max} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$\text{min} = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$1) \text{ Si } z = f(x, t) = \sin(x + \sin t)$$

Demostremos que  $\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} = \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

Primero veamos que es

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sin(x + \sin t)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \sin(u) \frac{\partial}{\partial x} u \quad \text{usando regla de la cadena con } u = x + \sin t$$

$$= \cos(x + \sin t) \frac{\partial}{\partial x} x + \sin t$$

$$= \cos(x + \sin t) \left( \frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial x} \sin t \right) = \cos(x + \sin t)(1 + 0)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(x + \sin(t))$$

y ahora

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \cos(x + \sin(t))$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \cos(u) \frac{\partial}{\partial x} u \quad \text{usando regla de la cadena con } u = x + \sin(t)$$

$$= -\sin(x + \sin(t)) \frac{\partial}{\partial x} x + \sin(t)$$

$$= -\sin(x + \sin(t)) \left( \frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial x} \sin t \right) = -\sin(x + \sin(t))(1 + 0)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin(x + \sin(t))$$

ahora

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \sin(x + \sin(t))$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \sin(u) \cdot \frac{\partial}{\partial t} u \quad \text{usando resta de la cadena } \cos u = x + \sin(t)$$

$$= \cos(x + \sin(t)) \cdot \frac{\partial}{\partial t} x + \sin(t)$$

$$= \cos(x + \sin(t)) \left( \frac{\partial}{\partial t} x + \frac{\partial}{\partial t} \sin(t) \right) = \cos(x + \sin(t)) (0 + \cos(t))$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \cos(x + \sin(t)) \cos(t)$$

y por ultimo

$$f_{tx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \cos(x + \sin(t)) \cos(t)$$

$$= \cos(t) \left( \frac{\partial}{\partial x} \cos(x + \sin(t)) \right) \quad \text{y recordemos que esa derivada parcial ya la calculamos}$$

$$= \cos(t) (-\sin(x + \sin(t)))$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} = -\cos(t) \sin(x + \sin(t))$$

ahora  $\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} = \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

$$\Rightarrow [\cos(x + \sin(t))] \cdot [-\cos(t) \sin(x + \sin(t))] = [\cos(x + \sin(t)) \cos(t)] \cdot [-\sin(x + \sin(t))]$$

$$\Rightarrow -\cos(t) \cos(x + \sin(t)) \sin(x + \sin(t)) = -\cos(t) \cos(x + \sin(t)) \sin(x + \sin(t))$$

□

2) Proporciona las ecuaciones de los planos tangentes a las funciones en el punto

$$\bullet z = 3x^2 - y^2 + 2x \quad \text{en el punto } (1, -2, 1)$$

la formula del plano tangente es  $z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$

entonces buscamos  $f_x$  y  $f_y$

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x} 3x^2 - y^2 + 2x = \frac{\partial}{\partial x} 3x^2 - \frac{\partial}{\partial x} y^2 + \frac{\partial}{\partial x} 2x \\ = 6x - 0 + 2 = 6x + 2 = f_x$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y} 3x^2 - y^2 + 2x = \frac{\partial}{\partial y} 3x^2 - \frac{\partial}{\partial y} y^2 + \frac{\partial}{\partial y} 2x \\ = 0 - 2y + 0 = -2y = f_y$$

ahora tenemos que

$$z - 1 = f_x(1, -2)(x - 1) + f_y(1, -2)(y + 2)$$

$$z - 1 = 8(x - 1) + 4(y + 2) = 8x - 8 + 4y + 8 = 8x + 4y$$

$$(z = 8x + 4y + 1)$$

$$\bullet z = e^x \cos(y) \quad \text{en} \quad (0, 0, 1)$$

busquemos  $f_x$  y  $f_y$

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x} e^x \cos(y) = \cos(y) \frac{\partial}{\partial x} e^x$$

$$= \cos(y) e^x = e^x \cos(y) = f_x$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y} e^x \cos(y) = e^x \frac{\partial}{\partial y} \cos(y)$$

$$= e^x - \sin(y) = -e^x \sin(y) = f_y$$

ahora

$$z - 1 = f_x(0, 0)(x - 0) + f_y(0, 0)(y - 0)$$

$$z - 1 = (1 \cdot 1)(x) + - (1 \cdot 0)(y)$$

$$z - 1 = x - 0y$$

$$z = x + 1$$

graficas al final

3 La aproximación lineal de una función de varias variables,  $f(x, y, z)$ , alrededor del punto  $(x_0, y_0, z_0)$  está dada por,

$$f(x, y, z) \approx f(x_0, y_0, z_0) + f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) \quad (1)$$

Aproximamos el punto  $(1.98, 3.01, 3.97)$  a  $(2, 3, 4) \Rightarrow$

$$f(2, 3, 4) = (2)^3 \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = 8\sqrt{9+16} = 8\sqrt{25} = 40 \quad (2)$$

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x} x^3 \sqrt{y^2+z^2} = 3x^2 \sqrt{y^2+z^2} \Rightarrow \quad (3)$$

$$f_x(2, 3, 4) = 3(2)^2 \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = 12\sqrt{9+16} = 12(5) = 60$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y} x^3 (y^2+z^2)^{1/2} = x^3 \cdot \frac{1}{2}(y^2+z^2)^{-1/2}(2y) = \frac{x^3 y}{\sqrt{y^2+z^2}}$$

$$f_y(2, 3, 4) = \frac{(2)^3(3)}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} = \frac{(8)(3)}{\sqrt{9+16}} = \frac{24}{5} \quad (4)$$

$$f_z = \frac{\partial}{\partial z} x^3 (y^2+z^2)^{1/2} = x^3 \cdot \frac{1}{2}(y^2+z^2)^{-1/2}(2z) = \frac{x^3 z}{\sqrt{y^2+z^2}}$$

$$f_z(2, 3, 4) = \frac{(2)^3(4)}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} = \frac{32}{5} \quad (5)$$

Sustituyendo (2), (3), (4) y (5) en (1) obtenemos:

$$f(x, y, z) \approx 40 + 60(x-2) + \frac{24}{5}(y-3) + \frac{32}{5}(z-4) \quad (6)$$

Ahora calcularemos  $f(1.98, 3.01, 3.97) \approx$  partir de (6):

$$\begin{aligned}f(1.98, 3.01, 3.97) &\approx 40 + 60(1.98-2) + \frac{24}{5}(3.01-3) + \frac{32}{5}(3.97-4) \\&= 40 - 1.2 + 0.048 - 0.192 = \underline{\underline{38.656}}\end{aligned}$$

4) a) El área del triángulo está dada por,

$$A = \frac{xy}{2} \quad \text{con } x \text{ y } y \text{ como las longitudes de los catetos} \Rightarrow$$

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x} dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy = \frac{y}{2} dx + \frac{x}{2} dy$$

sustituyendo  $x=5m, y=12m, dx=dy=0.002m$

$$\begin{aligned}dA &= \frac{12m}{2} (0.002m) + \frac{5m}{2} (0.002m) \\&= 0.012 m^2 + 0.005 m^2 = \underline{\underline{0.017 m^2}}\end{aligned}$$

b) La longitud de la hipotenusa está dada por el Teorema de Pitágoras como:

$$l = \sqrt{x^2 + y^2} = (x^2 + y^2)^{1/2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}dl &= \frac{\partial l}{\partial x} dx + \frac{\partial l}{\partial y} dy \\&= \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2)^{1/2} dx + \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2)^{1/2} dy\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d\lambda &= \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-1/2} (2x) dx + \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-1/2} (2y) dy \\
 &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy \\
 &= \frac{x}{l} dx + \frac{y}{l} dy
 \end{aligned}$$

Sustituyendo los datos:

$$\begin{aligned}
 l &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(5m)^2 + (12m)^2} = \sqrt{25m^2 + 144m^2} \\
 &= \sqrt{169m^2} = 13m \quad \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d\lambda &= \frac{5m}{13m} (0.002m) + \frac{12m}{13m} (0.002m) \\
 &= \underline{\frac{1}{1300} m + \frac{3}{1625} m} = \underline{\frac{17}{6500} m \approx 0.0026 m}
 \end{aligned}$$

$$5) \text{ a) } \cos(xyz) = 1 + x^2y^2 + z^2$$

Derivando implícitamente con respecto a  $x$

$$\frac{\partial}{\partial x} \cos(xyz) = \frac{\partial}{\partial x} (1 + x^2y^2 + z^2)$$

$$-\operatorname{sen}(xyz) \frac{\partial}{\partial x} (xyz) = \frac{\partial}{\partial x} (1) + \frac{\partial}{\partial x} (x^2y^2) + \frac{\partial}{\partial x} z^2$$

$$-\operatorname{sen}(xyz) \cdot y \frac{\partial}{\partial x} (xz) = 0 + y^2 \frac{\partial}{\partial x} (x^2) + 2z \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$-\operatorname{sen}(xyz) \cdot y \left( x \frac{\partial z}{\partial x} + z(1) \right) = y^2(2x) + 2z \frac{\partial z}{\partial x} \Rightarrow$$

$$-xy\operatorname{sen}(xyz) \frac{\partial z}{\partial x} - yz\operatorname{sen}(xyz) = 2xy^2 + 2z \frac{\partial z}{\partial x} \Rightarrow$$

$$-(xy\operatorname{sen}(xyz) + 2z) \frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2 + yz\operatorname{sen}(xyz) \Rightarrow$$

$$\underline{\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{2xy^2 + yz\operatorname{sen}(xyz)}{2z + xy\operatorname{sen}(xyz)}}$$

b) Analogamente al caso anterior,

$$\frac{\partial}{\partial y} \cos(xyz) = \frac{\partial}{\partial y} (1 + x^2y^2 + z^2)$$

$$-\operatorname{sen}(xyz) \frac{\partial}{\partial y} (xyz) = \frac{\partial}{\partial y} (1) + \frac{\partial}{\partial y} (x^2y^2) + \frac{\partial}{\partial y} (z^2)$$

$$-\operatorname{sen}(xyz) \cdot x \frac{\partial}{\partial y} (yz) = 0 + x^2(2y) + 2z \frac{\partial z}{\partial y} \Rightarrow$$

$$-\operatorname{sen}(xyz) \cdot x \left( y \frac{\partial z}{\partial y} + z(1) \right) = 2x^2y + 2z \frac{\partial z}{\partial y} \Rightarrow$$

$$-xy \operatorname{sen}(xyz) \frac{\partial z}{\partial y} - xz \operatorname{sen}(xyz) = 2x^2y + 2z \frac{\partial z}{\partial y} \Rightarrow$$

$$-(2z + xy \operatorname{sen}(xyz)) \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y + xz \operatorname{sen}(xyz) \Rightarrow$$

$$\underline{\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{2x^2y + xz \operatorname{sen}(xyz)}{2z + xy \operatorname{sen}(xyz)}}$$

✓

6.- Determine la razón de cambio máxima de  $z = f(x, y) = x^2 y + \sqrt{y}$  en el punto  $(2, 1)$ . ¿Cuál es la dirección de dicho cambio?

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2yx$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} = x^2 + \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$\nabla f(2, 1) = \left( 2(2)(1), 2^2 + \frac{1}{2(1)^{\frac{1}{2}}} \right) = \left( 4, 4 + \frac{1}{2} \right)$$

$$= \left( 4, \frac{9}{2} \right) \quad \|\nabla f(2, 1)\| = \sqrt{16 + \frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{64 + 81}{4}} = \sqrt{\frac{145}{4}}$$

7.- Demuestre que el determinante de la Matriz Hessiana de la función  $z = f(x, y) = 3xy - x^2y - xy^2$  es  $D = -4xy - 4x^2 - 4y^2 + 12x + 2y + 6$ . Haga el desarrollo correspondiente para encontrar los puntos críticos de la función y determine si son máximos, mínimos o puntos de silla.

$$f_x = 3y - 2xy - y^2$$

$$f_y = 3x - x^2 - 2xy$$

$$f_{xx} = -2y$$

$$f_{yy} = -2x$$

$$f_{xy} = 3 - 2x - 2y$$

$$f_{yx} = 3 - 2x - 2y$$

$$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$

$$= -2y(-2x) - (3 - 2x - 2y)^2 = +4xy - [9 + 4x^2 + 4y^2 + (-12x) - 12y + 18xy]$$

$$= 4xy - 9 - 4x^2 - 4y^2 + 12x + 12y - 8xy = -4x^2 - 4y^2 + 12x + 12y - 9 - 4xy$$

$$= -4xy - 4x^2 - 4y^2 + 12x + 12y - 9$$

Igualamos las derivadas parciales a 0

$$\begin{aligned} f_x &= 3y - 2xy - y^2 \\ &= y(3 - 2x - y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y &= 3x - x^2 - 2xy \\ &= x(3 - x - 2y) \end{aligned}$$

De la primera ecuación si  $y=0$  entonces la segunda ecuación queda como

$$x(3-x)=0$$

por lo que  $x=0$  o  $x=3$  así obtenemos los puntos  $(0,0)$   
 $\gamma$  ~~(0,3)~~  $(3,0)$

Si  $3-2x-y=0$  entonces  $y=3-2x$ , sustituimos en la segunda ecuación y tenemos que

$$x(3-x-2(3-2x))=0$$

$$x(3-x-6+4x)=0$$

$$x(-3+3x)=0$$

por lo que  $x=0$  o  $x=1$

$$\gamma \quad y=3 \quad o \quad y=1$$

así obtenemos los puntos  $(0,0)$   $(3,0)$   $(0,3)$   $\gamma$   $(1,1)$

Prueba de la segunda derivada

$$D = -4y - 4x^2 - 4y^2 + 12x + 12y - 9$$

$$D(0,0) = -9 \text{ punto silla}$$

$$D(3,0) = -4(3)^2 + 12(3) - 9 = -36 + 36 - 9 = -9 \text{ punto silla}$$

$$D(0,3) = -4(3)^2 + 12(3) - 9 = -36 + 36 - 9 = -9 \text{ punto silla}$$

$$D(1,1) = -4 - 4 - 4 + 12 + 12 - 9 = 3$$

como  $f_{xx}(1,1) = -2 < 0$   $(1,1)$  es máximo local

8.- Si  $z = f(x, y) = xy + xe^{\frac{y}{x}}$  demuestre que

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x} \cdot y + \frac{\partial}{\partial x} xe^{\frac{y}{x}}$$

$$= y + \frac{\partial x}{\partial x} e^{\frac{y}{x}} + x \frac{\partial e^{\frac{y}{x}}}{\partial x}$$

$$= y + e^{\frac{y}{x}} + x e^{\frac{y}{x}} \cdot \frac{d}{dx} \frac{y}{x}$$

$$= y + e^{\frac{y}{x}} + x e^{\frac{y}{x}} \frac{x \cdot \frac{dy}{dx} + 1 \cdot y}{x^2}$$

$$= y + e^{\frac{y}{x}} + x e^{\frac{y}{x}} \frac{-y}{x^2}$$

$$= y + e^{\frac{y}{x}} + \left( -\frac{y e^{\frac{y}{x}}}{x} \right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + \frac{d(xe^{\frac{y}{x}})}{dy}$$

$$= x + x \frac{de^{\frac{y}{x}}}{dy}$$

$$= x + x e^{\frac{y}{x}} \cdot \frac{d}{dy} \frac{y}{x}$$

$$= x + x e^{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1x - 0y}{x^2} = x + x e^{\frac{y}{x}} \frac{1}{x} = x + e^{\frac{y}{x}}$$

as,

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = x(y + e^{yx} + \frac{-ye^{yx}}{x}) + y(e^{yx} + x)$$

$$= xy + xe^{yx} - ye^{yx} + ye^{yx} + xy$$

$$= 2 + xy$$

9) con multiplicador de Lagrange, determina los valores máximos y

mínimos de  $f(x,y)$  sujetos a la restricción

$$f(x,y) = x^2y \quad \text{con restricción} \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$f(x,y) = x^2y \quad , \quad g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x} x^2y = 2xy \quad g_x = \frac{\partial}{\partial x} x^2 + \frac{\partial}{\partial x} y^2 - \frac{\partial}{\partial x} 1 = 2x$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y} x^2y = x^2 \quad g_y = \frac{\partial}{\partial y} x^2 + \frac{\partial}{\partial y} y^2 - \frac{\partial}{\partial y} 1 = 2y$$

entonces

$$f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y) \Rightarrow 2xy = \lambda(2x)$$

$$f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y) \Rightarrow x^2 = \lambda(2y)$$

$$g(x,y) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$$

resolver

$$2xy = \lambda(2x) \Rightarrow \lambda = \frac{2xy}{2x} = y$$

$$x^2 = \lambda(2y) \Rightarrow \lambda = \frac{x^2}{2y}$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^2}{2y} \Rightarrow 2y^2 = x^2 \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{2}$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow 2y^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow 3y^2 - 1 = 0 \Rightarrow 3y^2 = 1$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow y_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow y_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$\rightarrow x^2 + \frac{1}{3} - 1 = 0 \rightarrow x^2 - \frac{2}{3} = 0 \rightarrow x^2 = \frac{2}{3}$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

entonces los puntos son

$$P_1\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), P_2\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), P_3\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\text{y } P_4\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

ahora evaluar en esos pts

$$f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9} \approx 0.384$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9} \approx -0.384$$

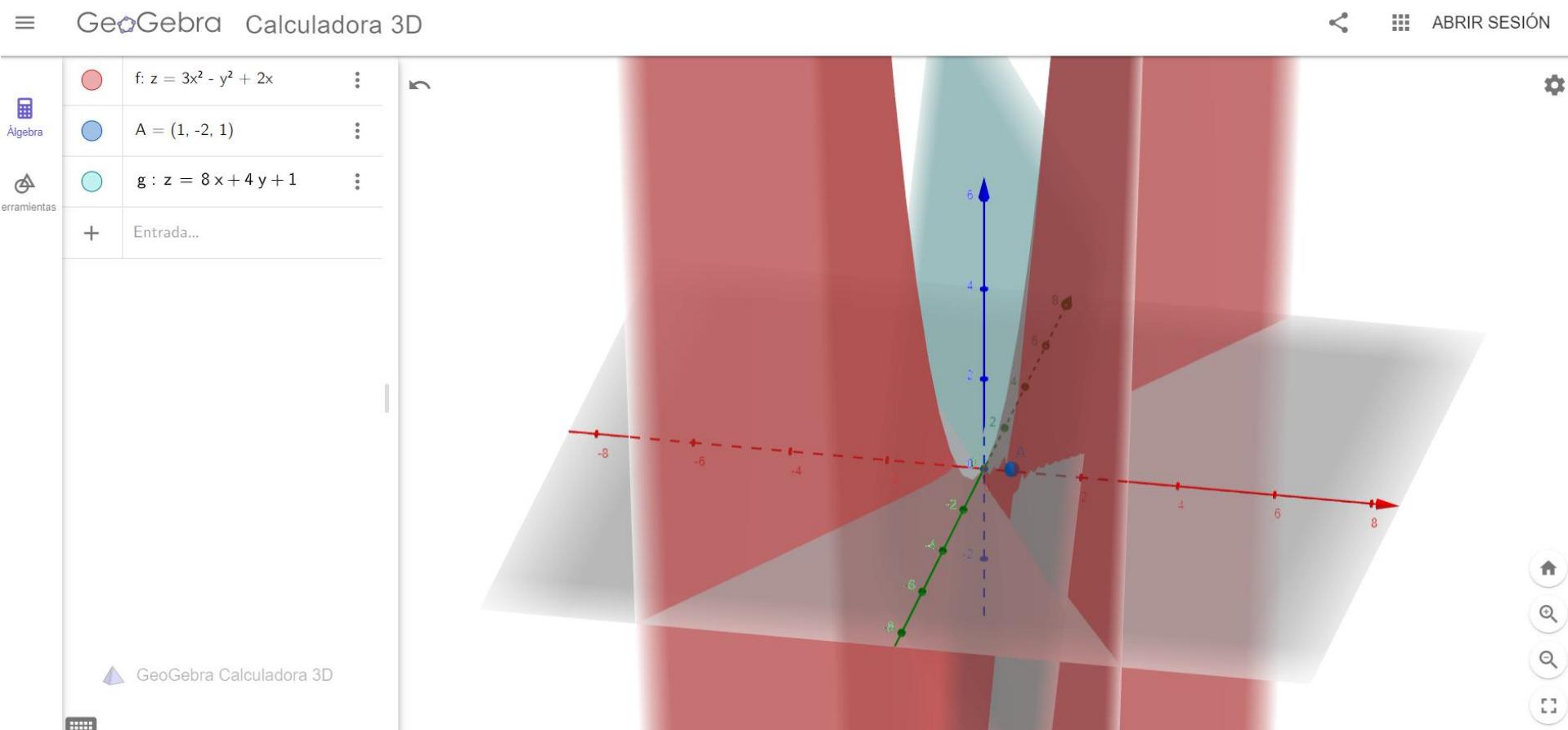
$$f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{9} \approx -0.384$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9} \approx 0.384$$

entonces el valor maximo es  $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

y el valor minimo es  $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$

2.



2.

