Tarea 5 García Ponce José Camilo

1) Demuestra que no existen gráficas de orden 6 y tamaño 13 que tengan número cromático 3

Dem: Supongamos que G es de orden 6 y tamaño 13 y tiene número cromático 3

Veamos que una gráfica completa, su número cromático es su orden, ya que como todos los vertices son adyacentes a todos necesitamos el orden en colores (orden-1 para adyacentes y 1 para el el vertice)

Ahora veamos que K_6 tiene $\frac{6(5)}{2} = 15$ aristas

entonces G tiene 2 aristas menos que K_6, entonces tenemos dos casos de como son las aristas que falten

- caso 1) las aristas que faltan para ser K_6 son adyacentes, entonces sea v el vertice que conectaría a esas aristas y llamémoslas e y e', entonces si a G le quitamos a v tendríamos a K_5, ya que los 5 vertices restantes son adyacentes entre ellos, por lo tanto K_5 es subgráfica de G
- caso 2) las aristas que faltan no son adyacentes,

entonces sea e y e' las aristas, sea u un vertice

adyacente a e y w un vertice adyacente a e',

ahora si a G le quitamos a u y w tendriamos a K_4,

ya que los vertices que quedarian son adyacentes a todos, entonces

K_4 es subgrafica de G

Ahora sabemos que:

$\chi(K_4)=4$ y $\chi(K_5)=5$

y ahora usando el teorema 72 tenemos dos casos:

- si K_5 es subgrafica entonces $\chi(K_5) \leq \chi(G)$ por lo tanto

$5 \leq \chi(G)$

entonces no puede ser 3 cromatica !

- si K_4 es subgrafica entonces $\chi(K_4) \leq \chi(G)$ por lo tanto

$4 \leq \chi(G)$

entonces no puede ser 3 cromatica !

Por lo tanto concluimos que G no puede tener numero cromatico 3

$\square$

2) Demuestra que si G es una grafica conexa, no trivial, con bloques $B_1, B_2, \dots, B_k$, entonces $\chi(G) = \max\{\chi(B_i) : 1 \leq i \leq k\}$

Dem: Por induccion sobre el número de bloques k

- Caso base $k=1$

Si G solo tiene un bloque entonces sabemos que $G = B_1$ por lo tanto el $\max\{\chi(B_i) : 1 \leq i \leq k\}$ es $\chi(B_1)$ y como $G = B_1$ entonces $\chi(G) = \chi(B_1) = \max\{\chi(B_i)\}$

- Hip de induccion

Supongamos que G tiene k bloques y se cumple que

$\chi(G) = \max\{\chi(B_i) : 1 \leq i \leq k\}$

- Paso inductivo para $k+1$

Entonces G tiene $k+1$ bloques, ahora tomemos un bloque en un extremo de la grafica, es decir que solo este conectado a los demas bloques por un vertice, y llamemoslo W, si W no existiera tendriamos que formaria parte de un bloque mayor lo cual no puede pasar en este caso.

entonces tomemos la subgrafica de G que sea G menos ω, pero conservando el vertice que une a W con los demas bloques. y a esta subgrafica llamemosla G'. Ahora notemos que G' tiene k componentes, por lo tanto usando hip de induccion tenemos que $\chi(G')$ es el máximo de sus componentes

Ahora tenemos dos casos:

- caso 1) $\chi(\omega) \leq \chi(G')$ si esto pasa entonces con los colores de G' podemos colorear a ω y de esta forma si unimos a G', ω tendremos a G, y $\chi(G) = \chi(G')$ y como $\chi(\omega) \leq \chi(G')$ entonces tenemos que la componente con χ maximo de G esta en G' (o es ω pero son dos con el mismo χ) entonces tenemos que $\chi(G) = \max\{B_i : 1 \leq i \leq k+1\}$
- caso 2) $\chi(\omega) > \chi(G')$ si esto pasa entonces necesitamos más colores para colorear a ω que a G', por lo tanto si unimos ω y G' (obtenemos a G) y necesitamos de $\chi(\omega)$ colores para colorear (ya que no podemos usar menos) por lo tanto tendriamos que $\max\{B_i : 1 \leq i \leq k+1\} = \chi(\omega)$

por lo tanto

$$\chi(G) = \chi(\omega) = \max\{B_i : 1 \leq i \leq k+1\}$$

$\square$

3) Sea G una grafica k-cromatica tal que $\chi(G-e) = k-1$ para alguna arista $e=uv$ de G. Prueba que

$\chi(G-u) = \chi(G-v) = k-1$

Dem:

Caso para u (el caso de v es analogo), llamemos a $\chi(G-u) = z$

Notemos que

$$G-u \subseteq G-e \subseteq G$$

y por el teorema 72 tenemos

que $\chi(G-u) \leq \chi(G-e)$ entonces

$$z \leq k-1$$

ahora supongamos que $z < k-1$ para generar una contradiccion

Si $z<k-1$ entonces tenemos que $z \leq k-2$, ahora

entonces tenemos que en $G-u$ existe una $k-2$ coloracion

(podemos colorear con $k-2$ colores) ahora

a $G-u$ le agregamos otra vez a u y lo ponemos

adyacente a los vertices que eran adyacentes a el en G,

en especial a v, y a u lo coloreamos con un nuevo color, entonces tendriamos una $k-1$ coloración

para G! lo cual no puede pasar debido a que

G es k-cromatica, por lo tanto $\chi(G-u) = k-1$

Analogamente hacemos el caso para v (solo cambiamos a u por v y al revez)

y tenemos que

$$\chi(G-u) = k-1 = \chi(G-v)$$

$\square$

4) Muestra que los ciclos impares son las unicas graficas 3-criticas

Dem:

Supongamos que G es una grafica 3-critica y que no es un ciclo impar, para generar una contradiccion.

Ahora como G tiene 3 como color cromatico entonces tiene un ciclo impar, en otro caso G tendria a 2 como color cromatico, ahora llamemos a este ciclo C.

Como G es 3-critica tenemos que para toda subgrafica propia H de G, $\chi(H) < \chi(G)$, por lo tanto para todas las aristas e de G tenemos que $\chi(G-e) < \chi(G)$ es decir $\chi(G-e) < 3$, en particular $\chi(G-e) = 2$ entonces $G-e$ tiene color cromatico 2, entonces $G-e$ es una grafica bipartita y por lo tanto $G-e$ no tiene ciclos impares. Pero como e fue tomada arbitrariamente tenemos que para todas las aristas e de G tenemos que $G-e$ no tiene ciclos impares, eso quiere decir que todas esas aristas estan en C y como son todas las aristas de G entonces $G=C$! lo cual es una contradiccion ya que dijimos que G no es un ciclo impar, por lo tanto la contradiccion surge al suponer esto.

Y con esto concluimos que todas las graficas 3-criticas son ciclos impares $\square$

5) Determina todas las graficas k-criticas con $k \geq 3$ tales que $G-v$ es $(k-1)$-critica para cada vertice v de G

Las graficas son K_k, veamos que $\chi(K_k) = k$ y si quitamos un vertice a K_k tendremos a K_{k-1} entonces su numero cromatico es $k-1$

Ahora veamos que solo las graficas completas cumplen lo que queremos.

Supongamos que existe G que cumple lo que buscamos y no es completa, para genero una contradiccion

como G cumple lo que buscamos entonces $\chi(G) = k$

entonces sean v y u dos vertices de G no adyacentes

ahora como G es k-critica y cumple lo que queremos entonces $G-v$ es $(k-1)$-critica, por lo tanto $\chi(G-v-u) = k-2$, lo que significa que $G-v-u$ puede ser coloreado con $k-2$ colores, llamemos a esta coloracion W, ahora si a G le aplicamos la coloracion W solo nos quedarían por colorear a u y v, entonces

los coloreamos con un color diferente a los usados en W

y como no son adyacentes pueden tener el mismo color,

lo cual significa que encontramos una $K-1$ coloración

para G! lo cual es una contradicción, entonces G no existe

Por lo tanto las únicas gráficas que cumplen lo que queremos

son las gráficas completas (de orden mayor o igual a 3)

$\square$