García Ponce José Camilo

Tercer parcial

Fecha asignación: Lunes 13 de junio de2022.
Resuelva **(de manera lo más explícita posible)** 4 ejercicios de 5.

1. Aplique la prueba de la segunda derivada

> **3 Prueba de la segunda derivada** Supongamos que las segundas derivadas parciales de f son continuas sobre un disco de centro (a, b), y supongamos que $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$, es decir, (a, b) es un punto crítico de f. Sea
>
> $$D = D(a, b) = f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2$$
>
> a) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces $f(a, b)$ es un mínimo local.
>
> b) Si $D > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces $f(a, b)$ es un máximo local.
>
> c) Si $D < 0$, entonces $f(a, b)$ no es un máximo local ni un mínimo local.

, a la función: $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy + 6x + 3y$, a fin de demostrar que los puntos $A(1, \frac{3}{2})$ y $B(5, \frac{27}{2})$ *son puntos críticos*. Establezca la naturaleza de dichos puntos críticos: máximo local, mínimo local, punto silla. A punto silla B mínimo local

2. Proporcione la ecuación del **plano tangente** a $z = f(x, y) = x \cos x \cos y$ en el punto $(0, \pi)$. Adjunte imagen de *geogebra 3D* donde se vea el plano y el punto $(0, \pi, f(\pi))$. $z = -x$

3. Calcule $\nabla f(1, 0, 1)$, para $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$. $(1, 0, 1)$

4. Demuestre que la derivada direccional de $w = f(x, y, z) = z^2 x + y^3$, en el punto $(1, 1, 2)$, en la dirección de $\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0)$, es $2\sqrt{5}$. en hojitas

5. Utilizando el críterio de máximos o mínimos de funciones escalares (o el método de Multiplicadores de Lagrange). Escribir el número 120 como la suma de tres números $s_n = a + b + c = 120$, de modo que la suma de los productos tomados de dos en dos (así: $s_p(a, b, c) = ab + bc + ac$) , sea máximo.

1) Usa la prueba de la segunda derivada a $f(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy + 6x + 3y$ para ver que $A(1, \frac{3}{2})$ y $B(5, \frac{27}{2})$ son puntos criticos y su naturaleza

Primero veamos las parciales

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x} x^3 + y^2 - 6xy + 6x + 3y = \frac{\partial}{\partial x} x^3 + \frac{\partial}{\partial x} y^2 - \frac{\partial}{\partial x} 6xy + \frac{\partial}{\partial x} 6x + \frac{\partial}{\partial x} 3y$$

$$= 3x^2 + 0 - 6y + 6 + 0 = 3x^2 - 6y + 6$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y} x^3 + y^2 - 6xy + 6x + 3y = \frac{\partial}{\partial y} x^3 + \frac{\partial}{\partial y} y^2 - \frac{\partial}{\partial y} 6xy + \frac{\partial}{\partial y} 6x + \frac{\partial}{\partial y} 3y$$

$$= 0 + 2y - 6x + 0 + 3 = 2y - 6x + 3$$

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} 3x^2 - 6y + 6 = \frac{\partial}{\partial x} 3x^2 - \frac{\partial}{\partial x} 6y + \frac{\partial}{\partial x} 6 =$$

$$= 6x - 0 + 0 = 6x$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} 2y - 6x + 3 = \frac{\partial}{\partial y} 2y - \frac{\partial}{\partial y} 6x + \frac{\partial}{\partial y} 3 =$$

$$= 2 - 0 + 0 = 2$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} 3x^2 - 6y + 6 = \frac{\partial}{\partial y} 3x^2 - \frac{\partial}{\partial y} 6y + \frac{\partial}{\partial y} 6 =$$

$$= 0 - 6 + 0 = -6$$

Ahora veamos si A y B son puntos criticos, es decir f_x y f_y sean 0

$A(1, \frac{3}{2})$ $\rightarrow$ $f_x(1, \frac{3}{2}) = 3(1)^2 - 6(\frac{3}{2}) + 6 = 0$ ✓

$\rightarrow$ $f_y(1, \frac{3}{2}) = 2(\frac{3}{2}) - 6(1) + 3 = 0$ ✓

$B(5, \frac{27}{2}) \rightarrow f_x(5, \frac{27}{2}) = 3(5)^2 - 6(\frac{27}{2}) + 6 = 0$ ✓

$\rightarrow f_y(5, \frac{27}{2}) = 2(\frac{27}{2}) - 6(5) + 3 = 0$ ✓

ahora veamos cuanto vale D $\quad D = D(a,b) = f_{xx}(a,b)\, f_{yy}(a,b) - [f_{xy}(a,b)]^2$

$D(1, \frac{3}{2}) = [6(1) \cdot 2] - [-6]^2 = -24$

entonces $D < 0$ por lo tanto A es un punto silla

$D(5, \frac{27}{2}) = [6(5) \cdot 2] - [-6]^2 = 24$

ahora $f_{xx}(5, \frac{27}{2}) = 6(5) = 30$ entonces B es un minimo local

entonces $A(1, \frac{3}{2})$ es punto silla

y $B(5, \frac{27}{2})$ es minimo local

2) Da la ecuacion al plano tangente a $z=f(x,y)=x\cos(x)\cos(y)$

en el punto $(0,\pi)$ y una imagen del plano y el punto

formula del plano tangente:

$$z-z_0 = f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

veamos quien es $z_0 = f(0,\pi) = 0\cos(0)\cos(\pi) = 0(1)(-1) = 0$

ahora veamos quien es f_x y f_y

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x} x\cos(x)\cos(y) = \cos(y)\frac{\partial}{\partial x} x\cos(x)$$

$$= \cos(y)\left[x\frac{\partial}{\partial x}\cos(x) + \cos(x)\frac{\partial}{\partial x}x\right]$$ usando regla del product.

$$= \cos(y)\left[x(-\operatorname{sen}(x)) + \cos(x)(1)\right]$$

$$= \cos(y)\left[\cos(x) - x\operatorname{sen}(x)\right]$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y} x\cos(x)\cos(y) = x\cos(x)\frac{\partial}{\partial y}\cos(y)$$

$$= x\cos(x)\left[-\operatorname{sen}(y)\right] = -x\cos(x)\operatorname{sen}(y)$$

ahora evaluemos

$$f_x(0,\pi) = \cos(\pi)\left[\cos(0) - 0\operatorname{sen}(0)\right] = -1[1-0] = -1$$

$$f_y(0,\pi) = -0\cos(0)\operatorname{sen}(\pi) = -0(1)(0) = 0$$

entonces

$$z - 0 = -1(x-0) + 0(y-\pi)$$

$$z = -x$$

por lo el plano tangent es $z = -x$

imagen al final

3) Calcula $\nabla f(1,0,1)$ para $f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$

recordemos que $\nabla f(x,y,z) = (f_x, f_y, f_z) = f_x \hat{i} + f_y \hat{j} + f_z \hat{k}$

entonces veamos quienes son f_x, f_y y f_z

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x} \ln(x^2+y^2+z^2) = \frac{\partial}{\partial u} \ln(u) \cdot \frac{\partial}{\partial x} u$$

con $u = x^2+y^2+z^2$

por regla de la cadena

$$= \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial}{\partial x} u = \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} x^2 + \frac{\partial}{\partial x} y^2 + \frac{\partial}{\partial x} z^2\right)$$

$$= \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \cdot (2x+0+0) = \frac{2x}{x^2+y^2+z^2}$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y} \ln(x^2+y^2+z^2) = \frac{\partial}{\partial u} \ln(u) \cdot \frac{\partial}{\partial y} u$$

con $u = x^2+y^2+z^2$

por regla del producto

$$= \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial}{\partial y} u = \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y} x^2 + \frac{\partial}{\partial y} y^2 + \frac{\partial}{\partial y} z^2\right)$$

$$= \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \cdot (0+2y+0) = \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}$$

$$f_z = \frac{\partial}{\partial z} \ln(x^2+y^2+z^2) = \frac{\partial}{\partial u} \ln(u) \cdot \frac{\partial}{\partial z} u$$

con $u = x^2+y^2+z^2$

por regla de la cadena

$$= \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial}{\partial z} u = \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial z} x^2 + \frac{\partial}{\partial z} y^2 + \frac{\partial}{\partial z} z^2\right)$$

$$= \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \cdot (0+0+2z) = \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}$$

entonces

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

entonces $\nabla f(1,0,1) = \left(\frac{2(1)}{(1)^2+(0)^2+(1)^2}, \frac{2(0)}{1^2+0^2+1^2}, \frac{2(1)}{1^2+0^2+1^2}\right)$

$$= \left(\frac{2}{2}, \frac{0}{2}, \frac{2}{2}\right)$$

$$= (1, 0, 1)$$

$$\nabla f(1,0,1) = (1,0,1)$$

4) Demuestre que la derivada direccional de $w = f(x,y,z) = z^2x+y^3$

en $(1,1,2)$ y la direccion $\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0)$ es $2\sqrt{5}$

recordemos que $D_u f = \nabla f \cdot u$

entonces primero veamos quien es $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$

$f_x = \frac{\partial}{\partial x} z^2x+y^3 = \frac{\partial}{\partial x} z^2x + \frac{\partial}{\partial x} y^3 = z^2 \frac{\partial}{\partial x} x + 0 = z^2(1) = z^2$

$f_y = \frac{\partial}{\partial y} z^2x+y^3 = \frac{\partial}{\partial y} z^2x + \frac{\partial}{\partial y} y^3 = 0 + 3y^2 = 3y^2$

$f_z = \frac{\partial}{\partial z} z^2x+y^3 = \frac{\partial}{\partial z} z^2x + \frac{\partial}{\partial z} y^3 = x\frac{\partial}{\partial z} z^2 + 0 = 2xz + 0 = 2xz$

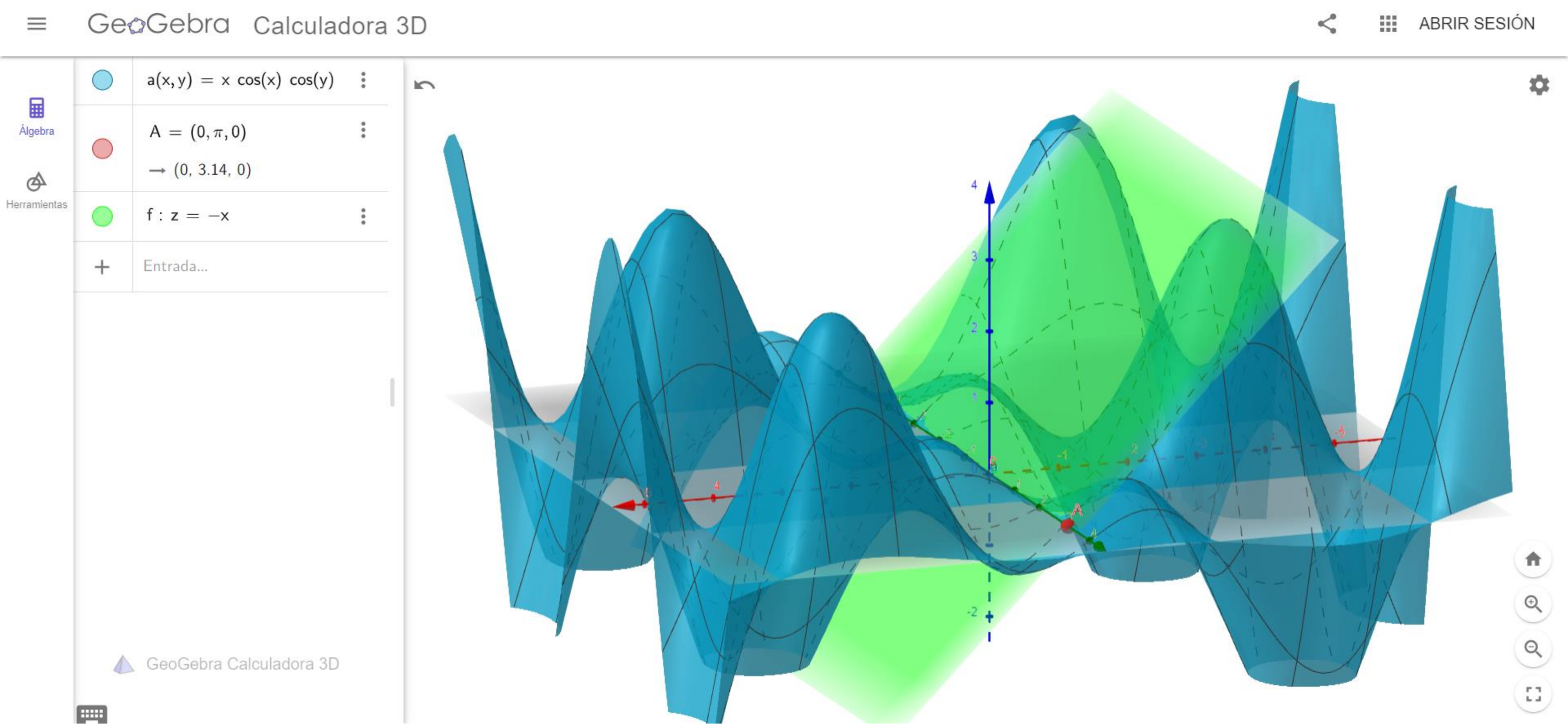
entonces $\nabla f = (z^2, 3y^2, 2xz)$

ahora como $\vec{u}$ ya es unitario solo hacemos $\nabla f \cdot \vec{u}$

$$D_u f = (z^2, 3y^2, 2xz) \cdot (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0)$$

$$= \left(\frac{z^2}{\sqrt{5}}, \frac{6y^2}{\sqrt{5}}, 0\right)$$

y ahora $D_u f(1,1,2) = \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{6}{\sqrt{5}} + 0 = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$


GeoGebra Calculadora 3D
ABRIR SESIÓN
Álgebra
Herramientas
a(x, y) = x cos(x) cos(y)
A = (0, π, 0)
→ (0, 3.14, 0)
f : z = −x
Entrada...
GeoGebra Calculadora 3D