Tarea Examen 2 García Ponce José Camilo

(1) Sea T un árbol de orden k. Probar que si G es una grafica con $\delta(G) \geq k-1$, entonces T es isomorfo a alguna subgrafica de G.

<u>Dem</u> por inducción sobre k

- Caso base sea $k=1$

Entonces T un árbol de orden 1 es la grafica completa de orden 1 (K_1) es decir solo un vertice, ahora sea G cualquier grafica orden $n \geq 1$ y T va a ser isomorfa a una subgrafica de G, la cual la generamos al quitar todos los vertices menos 1, entonces la subgrafica tienen orden 1, tamaño 0 y su vertice grado 0, entonces por el teorema 3 son isomorfos

- Hip de induccion

Supongamos que para cualquier arbol T' de orden k y cualquier grafica G' con $\delta(G') \geq k-1$, que T' es isomorfo a una subgrafica de G'

- Paso inductivo PD para $k+1$

Sea T'' un arbol de orden $k+1$ y sea G'' una grafica con $\delta(G'') \geq k$, Chequemos si T'' es isomorfo a una subgrafica de G''

Sea u un vertice terminal o hoja de T'', llamemos al vertice adyacente a u como v. Veamos que la grafica obtenida de $T''-u$ es un arbol, pero de orden k, llamemos a este arbol T''', ahora notemos que G'' tiene $\delta(G'') \geq k$ y que $k > k-1$ entonces $\delta(G'') > k-1$, por lo tanto usando la hip de induccion tenemos que T''' es isomorfa a una subgrafica de G'', llamemos a esta subgrafica H. Ahora como T''' y H son isomorfos entonces ubiquemos al vertice en H que "corresponde" a v y llamemoslo w, notemos que $\deg_{G''}(w) \geq k$ y que H es de orden k, entonces tiene $k-1$ vertices diferentes a w, por lo tanto existe un vertice x en G'' que es adyacente a w (en G'') y no esta en H. Con todo esto ya somos capaces de encontrar una subgrafica isomorfa a T'' y esta subgrafica es H pero le agregamos el vertice x y la arista xv entonces T'' es isomorfa a $H+x+xv$ (una subgrafica de G'')

$\square$

(2) Sea T un árbol de orden n con sucesión de grados $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$

Demuestre que $d_i \leq \left\lceil \frac{n-1}{i} \right\rceil$ para cada entero i con $1 \leq i \leq n$

<u>Dem</u> Supongamos que $d_i > \left\lceil \frac{n-1}{i} \right\rceil$ para generar una contradicción

notemos entonces que $d_i \geq \left\lceil \frac{n-1}{i} \right\rceil + 1$

ahora veamos si esto se mantiene en los casos extremos

Sea v un hoja de T entonces veamos que su grado va a estar

al final de la sucesión de grados es decir $d(v) = d_n$

entonces veamos que $\left\lceil \frac{n-1}{n} \right\rceil = 1$ y como es una hoja entonces

$d(v) = 1$, veamos si lo que suposimos se cumple,

$d_n \geq \left\lceil \frac{n-1}{n} \right\rceil + 1 \Rightarrow 1 \geq 1 + 1 = 2$! podemos ver que no se cumple

Ahora chequemos el otro caso externo

Sea u el vertice con mayor grado en T, por lo tanto $d(u) = d_1$

entonces $\left\lceil \frac{n-1}{1} \right\rceil = n-1$ y $d(u) \leq n-1$ por lo tanto veamos

si se cumple $d_1 \geq \left\lceil \frac{n-1}{1} \right\rceil + 1 \Rightarrow d_1 \geq n \Rightarrow n-1 \geq n$! podemos

ver que no se cumple

Ahora chequemos para w el segundo vertice de mayor grado en T

por lo tanto $d(w) = d_2$

ahora tenemos dos casos

-caso 1) si $d(u)=d(w)$, si esto pasa entonces

el orden de T es $n \geq 2c$ con $c=d(u)$, por lo tanto

$\lceil \frac{n-1}{2} \rceil \geq \lceil \frac{2c-1}{2} \rceil \geq c-1$, veamos que si se cumple lo que suposimos

$d_2 \geq c-1+1 = c$, se cumple pero revisemos si el de d_1 se

cumple, $\lceil \frac{n-1}{1} \rceil \geq \lceil \frac{2c-1}{1} \rceil = 2c-1$ y $d_1 \geq 2c-$ pero $d_1 = c$!

por lo tanto no se puede cumplir.

-caso 2) si $d(w) < d(u)$, supongamos que u no es una hoja,

ya que si no ese caso ya lo hicimos, en el caso extremo

veamos que si $d(w) = d(u)-1$, y $d(u)=c$ entonces

el orden de T es $n \geq 2c-1$ con $c=d(u)$, por lo tanto

$\lceil \frac{n-1}{2} \rceil \geq \lceil \frac{2c-2}{2} \rceil = c-2$, entonces $d_2 = c-1 \geq c-2+1 = c-1$ se cumple

lo que suposimos, pero chequemos si se mantiene para d_1,

$\lceil \frac{n-1}{1} \rceil \geq \lceil \frac{2c-2}{1} \rceil = 2c-2$ y $d_1 \geq 2c-1$ pero $d_1 = c$!

y así podemos hacer más cosas iterativamente (?) y ver que lo que suposimos

no se cumple, por lo tanto $d_i \leq \lceil \frac{n-1}{i} \rceil$ para cada i, $1 \leq i \leq n$ $\square$

*en esto no me salió por inducción entonces lo hize como sugiere la tarea,
y no se si lo que hice esta muy bien intente algo como inducción con contracción pero
no sé eso es posible :(*

intento de generalizar la ultima parte

Ahora chequemos para cualquier vertice v tal que tiene grado d_i con $1 < i < n$.

entonces sabemos que $d_i \leq d_{i-1}$, ahora sabemos que

$d_i \geq \lceil \frac{n-1}{i-1} \rceil + 1$ observemos que $\lceil \frac{n-1}{i-1} \rceil + 1 \geq \lceil \frac{n-1}{i} \rceil + 1$

por lo tanto tenemos que $d_{i-1} \geq \lceil \frac{n-1}{i-1} \rceil + 1 \geq \lceil \frac{n-1}{i} \rceil + 1$

ahora hay dos casos

-caso 1 $d_i = d_{i-1}$ entonces se mantiene que

$d_i \geq \lceil \frac{n-1}{i} \rceil + 1$:(*este caso no se muy bien como arreglar*

-caso 2 $d_i < d_{i-1}$ entonces tenemos que

$d_i < d_{i-1} \geq \lceil \frac{n-1}{i} \rceil + 1$, lo cual nos genera una contradiccion (creo?)

ya que tenemos que $d_i \geq \lceil \frac{n-1}{i} \rceil + 1$ por hip pero llegamos a

que $\lceil \frac{n-1}{i} \rceil + 1 > d_i$!

*este fue un intento que hice para intentar generalizar lo ultimo

pero no estoy muy seguro de que si esta bien*

(a)

(3) Sea G una grafica de orden par $n \geq 6$, tal que cada uno de sus vertices tiene grado 3 o 4. Si G contiene dos arboles de expansion T_1 y T_2 tales que $\{E(T_1), E(T_2)\}$ es una particion de $E(G)$, cuantos vertices de grado 4 debe tener G?

Primero recordemos algunas cosas:

un arbol de orden n tiene tamaño $n-1$, y por lo tanto la suma de los grados de sus vertices es $2(n-1) = 2n-2$,

ahora, como G contiene dos arboles de expansion (tal que forman la particion) entonces su tamaño debe ser $2n-2$ (dos veces el tamaño de un arbol de orden n) y por lo tanto la suma de los grados de sus vertices es $2(2n-2) = 4n-4$

y como solo tenemos vertices de grado 3 y 4 entonces podemos generar una ecuacion:

$3x + 4y = 4n-4$ con $x+y=n$ y veamos cuales son las soluciones para algunas n

- $n=6$

$3x+4y = 20$ con $x+y=6$ $\quad$ $x=4$, $y=2$

• $n=8$

$3x+4y=28$ con $x+y=8$ $\quad x=4$, $y=4$

• $n=10$

$3x+4y=36$ con $x+y=10$ $\quad x=4$, $y=6$

• $n=34$

$3x+4y=132$ con $x+y=34$ $\quad x=4$, $y=30$

• $n=124$

$3x+4y=492$ con $x+y=124$ $\quad x=4$, $y=120$

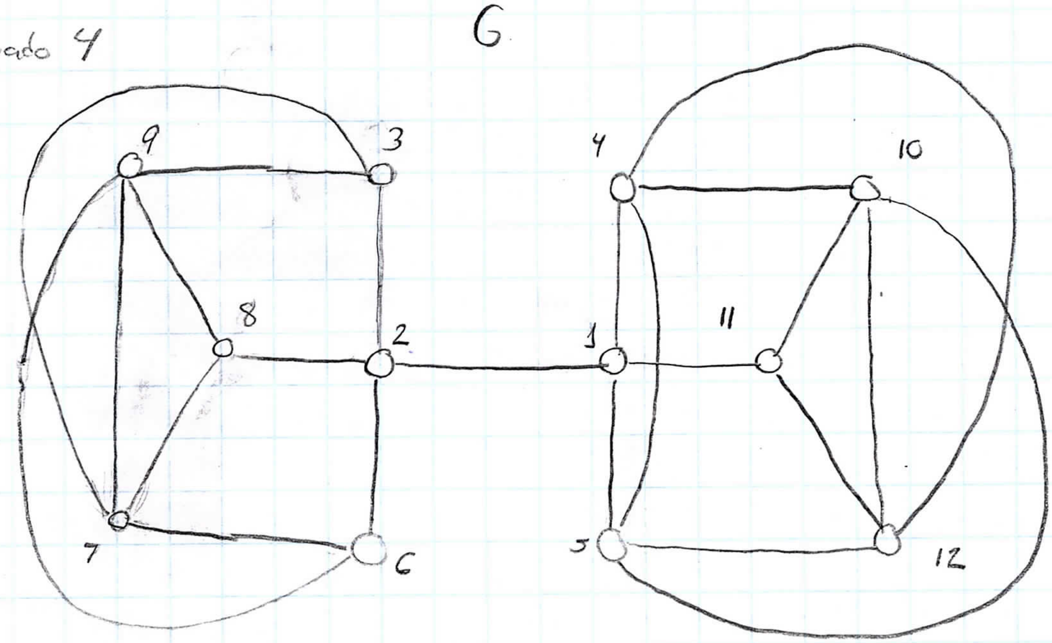
podemos observar que x siempre es 4 y que $y=n-4$

por lo tanto el número de vertices de grado 4 debe ser $n-4$.

(b) Muestre que existe un número par $n\geq 6$ y una grafica conexa G de orden n tales que: cada vertice de G tiene grado 3 o 4, G contiene el número de vertices de grado 4 determinado en (a) y G no contiene dos árboles de expansion T_1 y T_2 para los cuales $\{E(T_1), E(T_2)\}$ sea una partición de $E(G)$

la n es 12 , ahora veamos quien es G

G tiene orden 12 , tiene 4 vertices de grado 3 y 8 vertices de grado 4



$des(1) = 4$ $des(4) = 4$ $des(7) = 4$ $des(10) = 4$

$des(2) = 4$ $des(5) = 4$ $des(8) = 3$ $des(11) = 3$

$des(3) = 3$ $des(6) = 3$ $des(9) = 4$ $des(12) = 4$

notemos que G tiene un puente , la arista que une 1 y 2 , llamemosla e,
notemos que todo posible arbol de expansion de G debe tener a e , ya que si no la tiene no puede ser conexo
por lo tanto $G - E(T_1)$ para todo arbol de expansion en G es inconexa por lo tanto no puede existir dos arboles de expansion tales que sus aristas sean una particion de las de G

$\square$

(4) Demuestra que si G es una grafica conexa diametro 2, entonces

$\lambda(G) = \delta(G)$

Dem

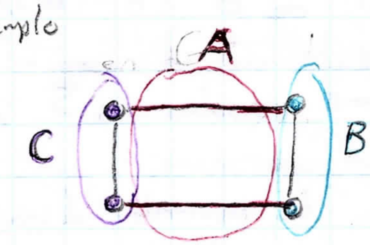
Sabemos que $\lambda(G) \leq \delta(G)$ (clase 24/3/22)

entonces solo necesitamos demostrar que $\lambda(G) \geq \delta(G)$

supongamos que $\lambda(G) < \delta(G)$ para llegar a una contradiccion

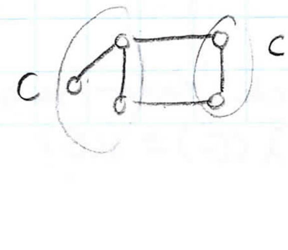
Sea A un corte por aristas de G (un conjunto de aristas) de cardinalidad $\lambda(G)$, ahora sea B un conjunto con los vertices que estan en la primera componente de $G - A$ y sea C un conjunto con los vertices que estan en la segunda componente de $G - A$.

ejemplo



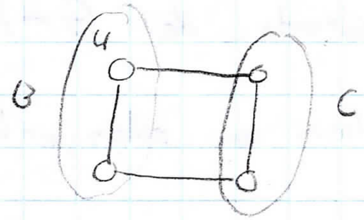
Ahora veamos que todos los vertices de B y C son incidentes con una arista de A, ya que si esto pasa entonces el diametro sera mayor estricto a 2

ejemplo



Supongamos que no existe el vertice que acabamos de mencionar en B (este proceso es analogo en C). Ahora sea u un vertice de B y sea e el numero de aristas en A las cuales inciden en G, notemos que $e \geq 1$ ya que suposimos que todos los vertices de B (y C) son incidentes con algun arista en A, veamos que la cantidad de vertices en la vecindad de u debe $\deg_G(u)$ pero veamos que la cantidad de esos vertices que se encuentran en B es $\deg_G(u) - e$

ejemplo



$\deg_G(u) = 2$

y en A solo esta $1 = 2 - 1$

notemos que los demas vertices de B $(B - \{u\})$ son incidentes con al menos uno de $|A| - e$ aristas en S, que no son incidentes con u, entonces obtenemos ~~la siguiente~~ desigualdad

$$\lambda(G) - e = |A| - e \geq |B - \{u\}| \geq \deg_G(u) - e \geq \delta(G) - e$$

y por la cadena de desigualdades tenemos $\lambda(G) - e > \delta(G) - e$

es decir $\lambda(G) > \delta(G)$!

y esto no puede suceder ya que $\lambda(G) \leq \delta(G)$, por lo tanto $\lambda(G) \geq \delta(G)$ entonces $\lambda(G) = \delta(G)$ $\square$

(5) ¿Cuál es el tamaño mínimo de una gráfica k-conexa de orden n?

Sea G una gráfica k-conexa de orden n

Ahora veamos que la cardinalidad de los vertices de G debe ser mayor igual al orden de G por $\delta(G)$ y todo esos sobre 2, ya que si no contaríamos a cada arista 2 veces (por cada incidencia),

ahora recordemos el teorema 29 que dice (para cualquier gráfica) $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$ y por ultimo recordemos que para que una grafica H sea k-conexa (por aristas) necesitamos que $k \geq 1$ y $\kappa(G) \geq k$. Juntando todo obtenemos la siguiente desigualdad

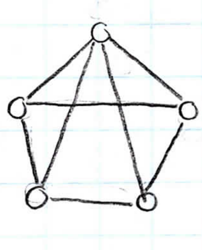
$$|E(G)| \geq \frac{n\,\delta(G)}{2} \geq \frac{n\,\lambda(G)}{2} \geq \frac{n\,\kappa(G)}{2} \geq \frac{nk}{2}$$

(si sale decimal sera el proximo entero)

entonces el tamaño minimo de G es $\frac{nk}{2}$ □

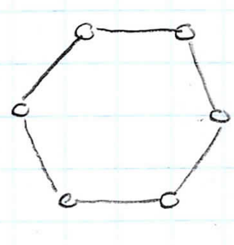
veamos unos ejemplos

$n=5$ $k=3$



$\frac{5\cdot 3}{2} = 8$
(7.5)

$n=6$ $k=2$



$\frac{6\cdot 2}{2} = 6$

(6) Prueba que si G es una gráfica 2-conexa de orden 4 o mayor tal que cada vertice de G está coloreado con uno de los cuatro colores rojo, azul, verde y amarillo, y cada color es asignado al menos a un vertice de G, entonces existe una trayectoria que contiene al menos un vertice de cada uno de los cuatro colores.

Dem

Observemos que como G es 2-conexa entonces es un bloque, ya que un bloque no tiene vertices de corte y si es 2-conexa no tiene puentes y ademas como G tiene orden mayor igual a 4 entonces podemos aplicar el teorema de la clase 25/04/22 sobre G.

Sean u, v, w y x vertices de G tal que cada uno es de un color diferente y uv sea una arista en G (y esta arista si existe ya que si no G solo tendria un solo color)

ahora vamos a buscar una trayectoria que contenga a los 4 vertices u, v, w y x

Sea P una trayectoria de v a x qe pasa por w, esta trayectoria la obtenemos usando el inciso 6 del teorema del 25 abril. Ahora tenemos dos casos:

-caso 1) la arista uv se encuentra en P, si esto pasa entonces P se ve algo así $\{v, u, \ldots, w, \ldots, x\}$ por lo tanto contiene a los 4 vertices y ya tenemos la trayectoria qe queremos

-caso 2) la arista uv no se encuentra en P, entonces P se ve algo así $\{v, \ldots, w, \ldots, x\}$ por lo tanto $P+uv$ es una trayectoria qe inicia en u y termina en x, y contiene a v y w, $P+uv$ se ve algo así $\{u, v, \ldots, w, \ldots, x\}$, entonces $P+uv$ es una trayectoria qe contiene a los 4 vertices y ya tenemos la trayectoria qe queremos

$\square$

(7) Demuestra que si G es una grafica k-conexa, $k \geq 2$, entonces $G-e$ es una grafica $(k-1)$-conexa para cada arista e de G

Dem Supongamos que $G-e$ no es $(k-1)$-conexa para generar una contradiccion. Entonces notemos que si a $G-e$ le quitamos a lo más $k-2$ vertices la desconectamos, entonces sea S un conjunto de vertices de $G-e$ tal que $G-e-S$ es disconexa

Ahora tenemos dos casos:

-caso 1

e es incidente a un vertice de S en G, llamemoslo u, ahora notemos que $G-u$ no tiene a e en sus aristas, por lo tanto las graficas $G-e-S$ y $G-S$ son la misma, y como la cardinalidad de S es $k-2$ entonces tendriamos que $G-S$ es inconexa y G es $k-2$ conexa ! lo cual es una contradiccion

-caso 2

e no es incidente a un vertice de S en G, notemos que $G-S$ es conexa, recordemos que supusimos que $G-e-V$ no es conexa, entonces e debe ser un puente de $G-V$, y por la tarea 7 sabemos que $G-V$ contiene un vertice de corte llamemoslo ω, ahora al conjunto $S+\omega$ llamemoslo S' y tiene cardinalidad $k-1$, entonces notemos que $G-S'$ es inconexa ! lo cual es una contradicción ya que G es k-conexa y S' tiene cardinalidad $k-1$

Y como vemos en ambos casos tenemos contradicción por suponer que $G-e$ no es $(k-1)$-conexa, entonces concluimos que $G-e$ es $(k-1)$-conexa para cada arista de G $\square$

*en esta tarea creo que los problemas que se me dificultaron (mucho) fueron el 2 y 3, así que intente hacerlos como entendí :(saludos :) *