Tarea 3 García Ponce José Camilo

i) La conectividad de pares de vertices en una gráfica G es una relación de equivalencia en V.

Sea $\sim$ la relacion de conectividad donde dos vertices estan relacionados si estan conectados

PD que $\sim$ es de equivalencia

- $\sim$ es reflexiva PD $\forall v \in V(G)$, $v \sim v$

Sea $v \in V(G)$ un vertice cualquiera, sabemos que existe un camino trivial que solo contiene al vertice v, por lo tanto existe un v-v camino, y por el corolario 5 tenemos que existe v-v trayectoria, y con esto podemos decir que el vertice v esta conectado con el vertice v, cumpliendo la definicion de $\sim$; teniendo $v \sim v$. Como la eleccion fue arbitraria, concluimos que $\sim$ es reflexiva.

- $\sim$ es simetrica PD si $u \sim v \Rightarrow v \sim u$

Sean $u, v \in V(G)$ vertices cualesquiera tales que $u \sim v$

Por la definicion de $\sim$ sabemos que u esta conectado con v por lo tanto existe u-v trayectoria el cual llamaremos A

y $A = (u = u_0, u_1, \dots, u_k = v)$. Ahora veamos que la trayectoria

$A^{-1} = (v = u_k, u_{k-1}, \dots, u_1, u_0 = u)$, la cual es la "inversa" de A es decir tiene los mismos nodos solo en orden inverso , ahora notemos que A^{-1} es una v-u trayectoria por lo tanto v esta conectado con u , y esto cumple la definicion de ~ , entonces v~u . Como la eleccion fue arbitraria , concluimos que ~ es simetrica.

- ~ es transitiva PD si $v \sim u$ y $u \sim w \Rightarrow v \sim w$

Sean $v, u, w \in V(G)$ vertices cualesquiera tales que $v \sim u$ y $u \sim w$

Por definicion de ~ tenemos que v esta conectado con u y u esta conectado con w , por lo tanto existen v-u trayectoria, la llamaremos $B = (v = u_0, u_1, \dots, u_k = u)$, y la u-w trayectoria, la llamaremos $C = (u = u_k, u_{k+1}, \dots, u_j = w)$.

Ahora veamos un nuevo camino que llamaremos D el cual sera la union de las trayectorias B y C es decir $B + C = D$,

$D = (u_0, u_1, \dots, u_k, u_k, u_{k+1}, \dots, u_j)$, notemos que D es un v-w camino y no v-w trayectoria ya que el vertice u_k (u) se repite. Ahora por el corolario 5, tenemos que existe un $v-w$ camino, por lo tanto v esta conectado con w, y esto cumple la definicion de $\sim$, entonces $v \sim w$.

Como la eleccion fue arbitraria, concluimos que $\sim$ es transitiva

Y con las 3 propiedades anteriores podemos concluir que $\sim$ es de equivalencia.

$\square$

ii) Cada clase de equivalencia determinada por la relacion de conectividad es una componente de G

Veamos que para cada $v \in V(G)$ tenemos que

$[v]_{\sim} = \{u \in V(G) \mid v \sim u\}$

Recordemos que en un componente para cualquier dos vertices existe un camino entre esos vertices.

Ahora veamos que la clase de equivalencia de un nodo v, va a contener a todos los nodos, los cuales estan conectados con v.

Ahora veamos que una clase de equivalencia es un componente ya que al la clase contener todos los vertices conectados a V, por lo tanto existen caminos entre todos los vertices de la clase de equivalencia, por que podemos tener 2 casos que exista un trayectoria entre V y el otro vertice (lo llameremos u), si esto pasa ya estan conectados. Y el otro caso es que si dos vertices (w y z), como estan en la clase de equivalencia entonces existen las trayectorias u-w y u-v y si estas trayectorias las juntamos podemos formar un w-v camino, por lo tanto para cualquier dos vertices de la clase tenemos que existe un camino entre ellos, por lo tanto cumple con la definicion de complemento.

Ademas si un vertice no tuviera un camino con algun otro vertice entonces, significaria que no hay un trayecto con el vertice de la clase de equivalencia, por lo tanto no formaria parte de la clase de equivalencia. Y con todo esto concluimos que para cada clase de equivalencia determinada por la relacion de conectividad es un componente de G $\square$