Barke Gómez Alfredo
Rivera Hernandez Ernesto Yahir
García Ponce José Camilo

Tarea 2.

Fecha asignación: miércoles 23 de marzo 2022.
Fecha entrega: domingo 3 de abril 2022.

1. Proporcione el dominio de la función vectorial
   $r(\vec{t}) = \frac{t-2}{t+2}\hat{i} + +\sin t\hat{j} + ln(9-t^2)\hat{k}$ $(-3,-2)\cup(-2,3)$

2. Sea
   $r(\vec{t}) = \frac{t^2-t}{t-1}\hat{i} + +\sqrt{t+8}\hat{j} + \frac{\sin \pi t}{\ln t}\hat{k}$. no existe
   Calcule $\lim_{t\to 0} r(\vec{t})$.

3. Realice a mano la gráfica de las siguientes funciones vectoriales, indicando el sentido en que se traza la curva:
   - $r(\vec{t}) = t^2\hat{i} + t\hat{j} + 2\hat{k}$ en hojitas
   - $r(\vec{t}) = \cos t\hat{i} - \cos t\hat{j} + \sin t\hat{k}$

4. Proporcione las coordenadas del punto donde se intersecta la hélice
   $r(\vec{t}) = \sin t\hat{i} + \cos t\hat{j} + t\hat{k}$. y la esfera $A(\sin(2), \cos(2), 2)$
   $x^2 + y^2 + z^2 = 5$. $B(\sin(-2), \cos(-2), -2)$.

5. Dibuje las proyecciones de la curva
   $r(\vec{t}) = t\hat{i} + t\hat{j} + t^2\hat{k}$
   sobre los planos XY, XZ, YZ. Utilice dichas proyecciones para hacer un esbozo de la curva. en hojitas

6. Las trayectorias de dos partículas están dadas por las siguientes funciones vectoriales:
   - $\vec{r_1(t)} = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$
   - $\vec{r_2(t)} = (1+2t, 1+6t, 1+14t)$.

   ¿Chocarán las partículas? ¿En qué punto? ¿Se cortaran las trayectorias? en hojitas

7. Proporcione las coordenadas del punto sobre la curva
   $r(\vec{t}) = (2\cos t, 2\sin t, e^t)$, con $t \in [0,\pi]$, donde la **recta tangente** a la curva es paralela al plano
   $\sqrt{3}x + y = 1$ $(\sqrt{3}, 1, e^{\frac{\pi}{6}})$

8. Proporcione las coordenadas del punto donde se intersectan las curvas:
   - $\vec{r_1(t)} = (t, 1-t, 3+t^2)$ $(1,0,4)$
   - $\vec{r_2(s)} = (3-s, s-2, s^2)$.

   Además proporcione el ángulo de intersección de ambas trayectorias. 54.73°

9. Determine la **longitud de curva** para las siguientes curvas:
   - $r(\vec{t}) = (2t, t^2, \frac{t^3}{3})$, para $t \in [0,1]$ $\frac{7}{3}$ unidades
   - $r(\vec{t}) = (\cos t, \sin t, \ln \cos t)$, para $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ $\ln(\sqrt{2}+1)$ unidades

10. Reparametrice la siguiente curva (respecto a la longitud de arco medida desde el punto donde $t = 0$), en la dirección en que t se incrementa.
    $r(\vec{t}) = (2t)\hat{\imath} + (1 - 3t)\hat{\jmath} + (5 + 4t)\hat{k}$

$$\hat{r}(s) = \left(2\frac{s}{\sqrt{29}}\right)\hat{\imath} + \left(1 - 3\frac{s}{\sqrt{29}}\right)\hat{\jmath} + \left(5 + 4\frac{s}{\sqrt{29}}\right)\hat{k}$$

1) Da el dominio de la funcion vectorial

$$\vec{r}(t) = \frac{t-2}{t+2}\,\hat{\imath} + \sin(t)\,\hat{\jmath} + \ln(9-t^2)\,\hat{k}$$

$x(t) = \dfrac{t-2}{t+2}$

$\operatorname{dom} x(t) = (-\infty,-2) \cup (-2,\infty)$

$t+2=0$

$t=-2$

$y(t) = \sin(t)$

$\operatorname{dom} y(t) = (-\infty,\infty)$

$z(t) = \ln(9-t^2)$

$\operatorname{dom} z(t) = (-3,3)$

$9-t^2>0$

$9>t^2$

$3>t>-3$

$\operatorname{Dom} \vec{r}(t) = (-3,-2) \cup (-2,3)$

2. $\vec{r}(t) = \frac{t^2 - t}{t-1}\,\hat{i} + \sqrt{t+8}\,\hat{j} + \frac{\sin \pi t}{\ln t}\,\hat{k}$

Si $\vec{r}(t) = X(t)\,\hat{i} + Y(t)\,\hat{j} + Z(t)\,\hat{k}$ entonces

* $\lim_{t \to 0} X(t) = \lim_{t \to 0} \frac{t^2 - t}{t - 1} = \frac{0^2 - 0}{0 - 1} = \frac{0}{-1} = 0$

* $\lim_{t \to 0} Y(t) = \lim_{t \to 0} \sqrt{t+8} = \sqrt{0+8} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

* $\lim_{t \to 0} Z(t) = \lim_{t \to 0} \frac{\sin \pi t}{\ln t}$ no existe ya que

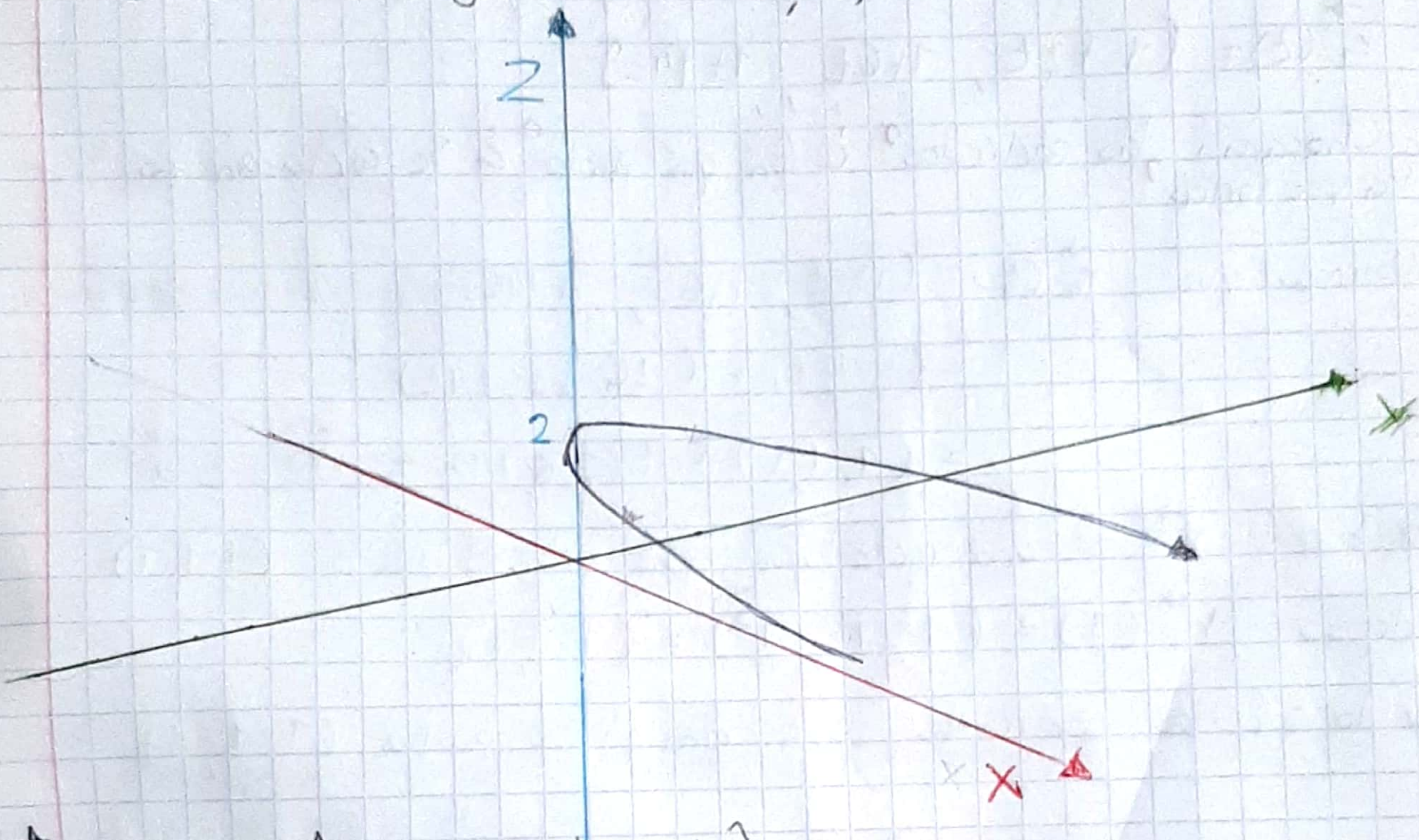
$\lim_{t \to 0^-} \frac{\sin \pi t}{\ln t}$ no está bien definida pues

$y = \ln t$ sólo está definida para $t \geq 0$

Por tanto $\lim_{t \to 0} \vec{r}(t)$ no existe

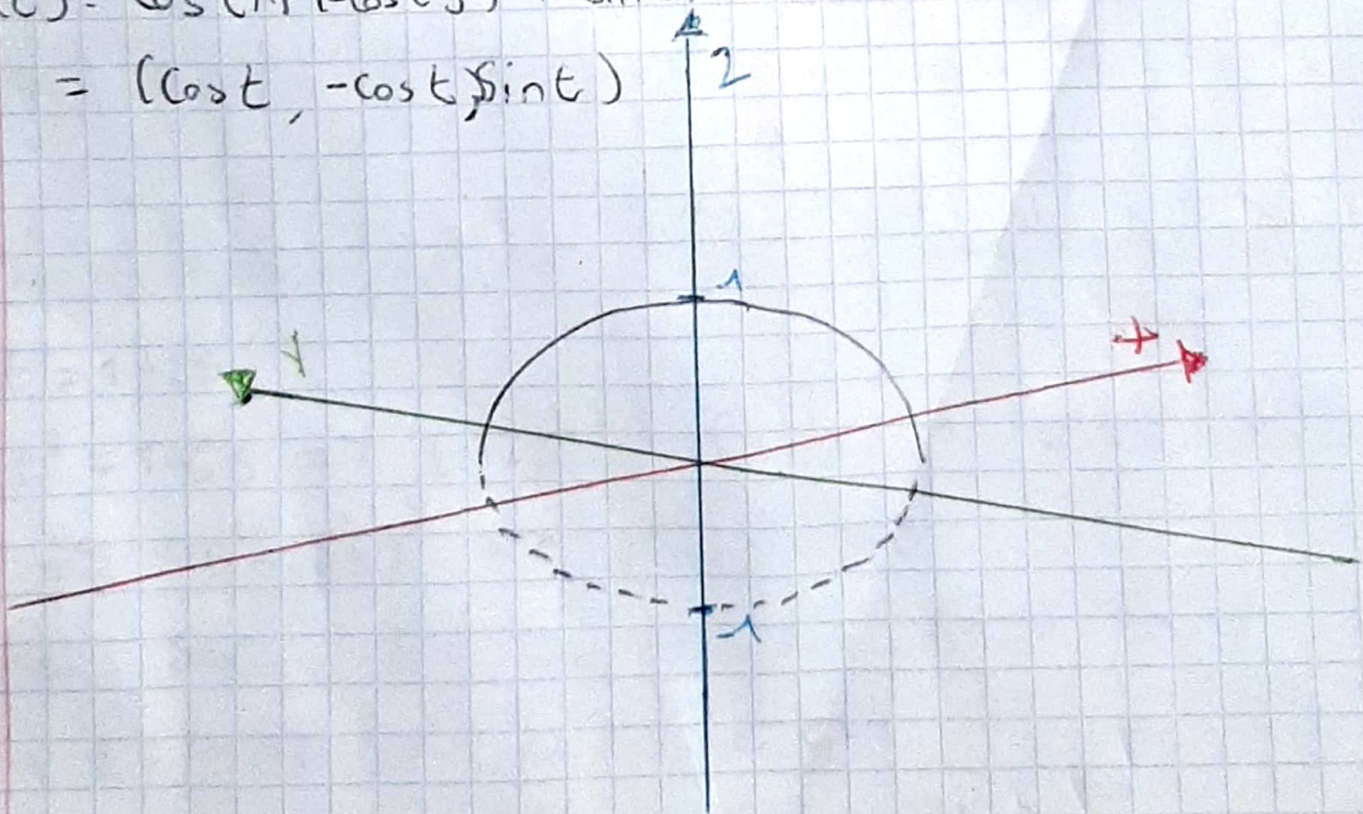
3.- Realice a mano la gráfica de las siguientes funciones vectoriales indicando el sentido en que se traza la curva

•) $\vec{r}(t) = t^2\hat{i} + t\hat{j} + 2\hat{k} = (t^2, t, 2)$



$\vec{r}(t) = \cos t\hat{i} + (-\cos t\hat{j}) + \sin t\hat{k}$

$= (\cos t, -\cos t, \sin t)$



4) Da las coordenadas del punto donde se intersecta la helice

$\vec{r}(t) = \sin(t)\,\hat{\imath} + \cos(t)\,\hat{\jmath} + t\,\hat{k}$ y la esfera $x^2+y^2+z^2=5$

$x(t) = \sin(t)$

$y(t) = \cos(t)$

$z(t) = t$

ahora sustitumos estos valores en la ecuacion de la esfera

$$(\sin(t))^2 + (\cos(t))^2 + t^2 = 5$$

por la propiedad trigonometrica $(\sin t)^2 + (\cos t)^2 = 1$

tenemos

$$1 + t^2 = 5 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t_1 = -2$$

$$t_2 = 2$$

por lo tanto los puntos donde se intersectan son

$A(\sin(2), \cos(2), 2)$

y

$B(\sin(-2), \cos(-2), -2)$

5. $\vec{r}(t) = t\hat{i} + t\hat{j} + t^2\hat{k}$

Si $\vec{r}(t) = X(t)\hat{i} + Y(t)\hat{j} + Z(t)\hat{k}$ entonces

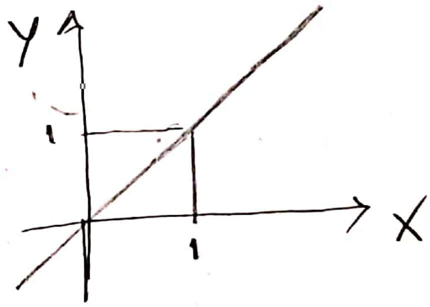
$X = X(t) = t$

$Y = Y(t) = t$

$Z = Z(t) = t^2$

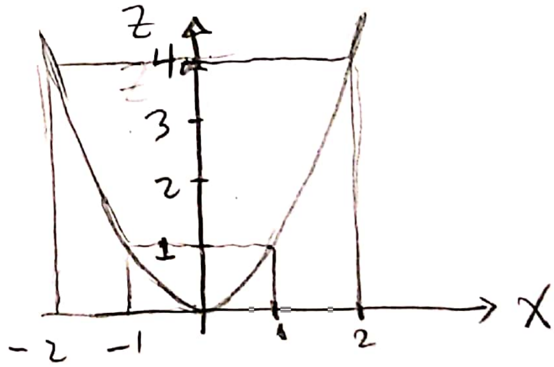
Proyección sobre el plano XY

$\begin{cases} X = t \\ Y = t \end{cases} \Rightarrow Y = X$



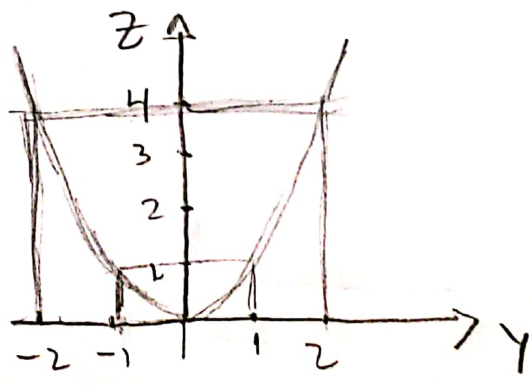
Proyección sobre el plano XZ

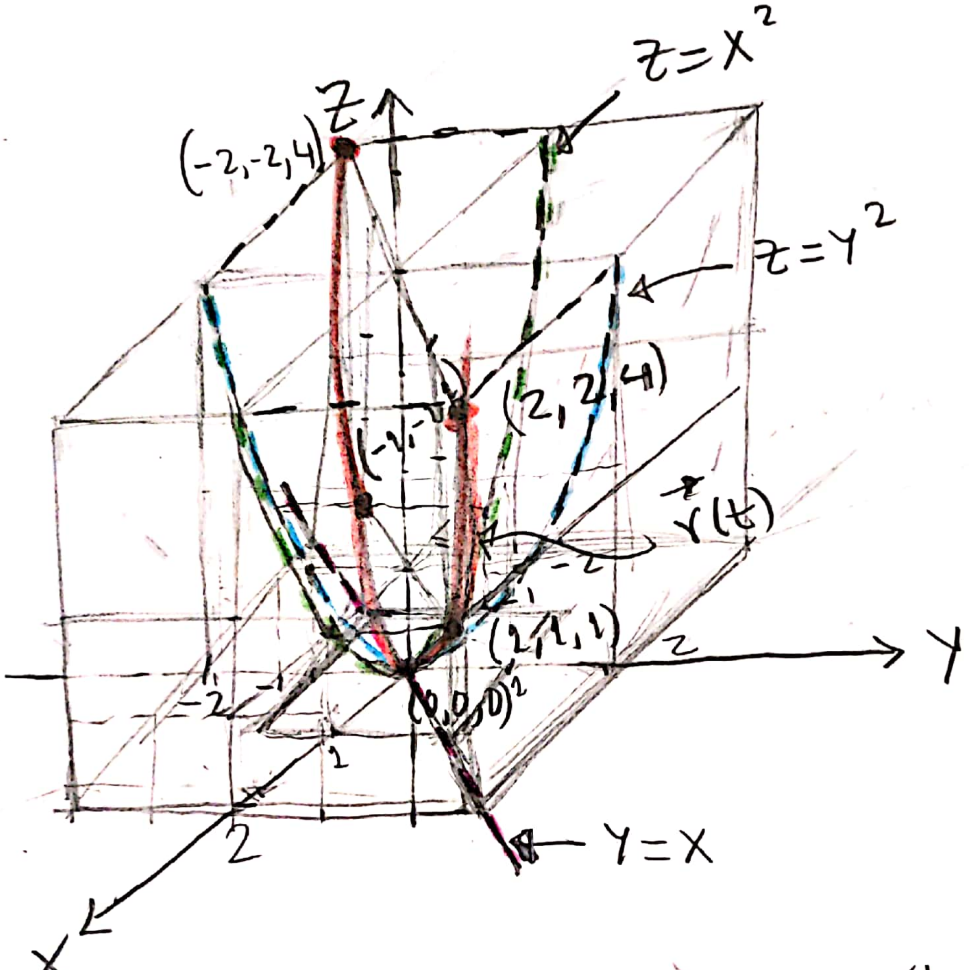
$\begin{cases} X = t \\ Z = t^2 \end{cases} \Rightarrow Z = X^2$



Proyección sobre el plano YZ

$\begin{cases} Y = t \\ Z = t^2 \end{cases} \Rightarrow Z = Y^2$





t	X	Y	Z
-2	-2	-2	4
-1	-1	-1	1
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	4

$\vec{r}(t)$ es una parábola en el plano $Y=X$

6.- Las trayectorias de dos partículas están dadas por las sig. funciones vectoriales

$\vec{r}_1(t) = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k} = (t, t^2, t^3)$

$\vec{r}_2(t) = (1+2t, 1+6t, 1+14t)$

$= (1+1+1) + t(2, 6, 14)$

¿Chocarán las partículas? ¿En que punto?

Veamos si hay un tiempo t en el que choquen. tomemos las dos primeras componentes e igualamos

$t = 1+2t \Rightarrow t-2t = 1 \Rightarrow -t = 1 \Rightarrow t = -1$

Si sustituimos este valor en las funciones vectoriales tenemos que

$\vec{r}_1(-1) = (-1, 1, -1) \qquad \vec{r}_2(-1) = (-1, -5, -13)$

Como $\vec{r}_1(-1) \neq \vec{r}_2(-1)$ las partículas no chocan

Ahora veamos si coinciden en tiempos diferentes t y s

$\vec{r}_1(t) = (t, t^2, t^3)$

$\vec{r}_2(s) = (1+2s, 1+6s, 1+14s)$ De donde tenemos que

$t = 1+2s$

$t^2 = 1+6s \Rightarrow (1+2s)^2 = 1+6s \Rightarrow 1+4s+4s^2 = 1+6s$

$\Rightarrow 4s^2 - 2s = 0 \Rightarrow 2s(2s-1) = 0$

Así $s = 0$ y $s = 1/2$ por lo que $t = 1+2\,1/2 = 2$

y $t = 1+2(0) = 1$ así tenemos que

$\vec{r}_1(1) = (1, 1, 1) \qquad \vec{r}_1(2) = (2, 4, 8)$

$\vec{r}_2(0) = (1, 1, 1) \qquad \vec{r}_2(1/2) = (2, 4, 8)$

Por lo que las curvas se intersectan en esos puntos

7) Da las coordenadas del punto sobre la curva $\vec{r}(t) = (2\cos(t), 2\sin(t), e^t)$, con $t \in [0, \pi]$, donde la recta tangente a la curva es paralela al plano $\sqrt{3}\,x + y = 1$

veamos el vector normal del plano $\sqrt{3}\,x + y - 1 = 0$

entons $\vec{n} = (\sqrt{3}, 1, 0)$

la tangente es $r'(t) = (-2\sin(t), 2\cos(t), e^t)$ entonces

$(-2\sin(t), 2\cos(t), e^t) \cdot (\sqrt{3}, 1, 0) = 0$

$x(t) = 2\cos(t)$

$x'(t) = -2\sin(t)$

$y(t) = 2\sin(t)$

$y'(t) = 2\cos t$

$z(t) = e^t$

$z'(t) = e^t$

$\Rightarrow -2\sqrt{3}\sin(t) + 2\cos(t) = 0$

$\sqrt{3}\sin(t) - \cos(t) = 0$ dividimos sobre -2

$\sqrt{3}\sin(t) = \cos(t)$

$\sqrt{3}\tan(t) = 1$ dividimos sobre $\cos(x)$

$\tan(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$t = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$t = \frac{\pi}{6}$, $t = \frac{\pi}{6} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

ahora para el punto $\vec{r}\left(\frac{\pi}{6}\right) = (\sqrt{3}, 1, e^{\frac{\pi}{6}})$

entonces el punto es $(\sqrt{3}, 1, e^{\frac{\pi}{6}})$

8. $\vec{r}_1(t) = (t, 1-t, 3+t^2)$

$\vec{r}_2(s) = (3-s, s-2, s^2)$

Punto de intersección de $\vec{r}_1(t)$ y $\vec{r}_2(t)$

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(s) \Rightarrow \begin{cases} t = 3-s \\ 1-t = s-2 \\ 3+t^2 = s^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t+s = 3 \\ t+s = 3 \\ -t^2+s^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} s^2-t^2 = 3 \\ s+t = 3 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (s+t)(s-t) = 3 \\ (s+t) = 3 \end{cases} \Rightarrow 3(s-t) = 3$$

$$\Rightarrow s-t = 1 \Rightarrow \begin{cases} t+s = 3 \\ -t+s = 1 \end{cases}$$

$$2s = 4 \Rightarrow \boxed{s = 2}$$

$$\Rightarrow \boxed{t = 1}$$

Punto de intersección $\vec{r}_1(1) = (1, 0, 4) = \vec{r}_2(2)$

$*\quad \vec{r}_1'(t) = (1, -1, 2t) \Rightarrow \vec{d}_1 = \vec{r}'(1) = (1, -1, 2\cdot 1) = (1, -1, 2)$

$\vec{r}_2'(s) = (-1, 1, 2s) \Rightarrow \vec{d}_2 = \vec{r}'(2) = (-1, 1, 2\cdot 2) = (-1, 1, 4)$

$*\quad \vec{d}_1 \circ \vec{d}_2 = (1, -1, 2) \circ (-1, 1, 4) = 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 + 2\cdot 4 = 6$

$\|\vec{d}_1\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$

$\|\vec{d}_2\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Ángulo de intersección:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{d}_1 \circ \vec{d}_2}{\|\vec{d}_1\|\|\vec{d}_2\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{6}{\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{12}}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 54.7356^{\circ}$$

9.- Determine la longitud de arco para las sig. curvas

- $\vec{r}(t) = (2t, t^2, \frac{t^3}{3})$ para $t \in [0, 1]$

$\vec{r}' = (2, 2t, t^2)$

$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{2^2 + (2t)^2 + (t^2)^2} = \sqrt{4 + 4t^2 + t^4} = \sqrt{(2+t^2)^2} = 2 + t^2$

$$\int_0^1 2 + t^2 \, dt = 2t + \frac{1}{3}t^3 \Big|_0^1 = \left[\frac{1}{3}(1)^3 + 2(1)\right] - \left[\frac{1}{3}(0)^3 + 2(0)\right]$$

$$= \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$$

- $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, \ln \cos t)$ para $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$

$\vec{r}(t)' = (-\operatorname{Sen} t, \cos t, \frac{-\operatorname{Sen} t}{\cos t})$

$\vec{r}(t)' = (-\operatorname{Sen} t, \cos t, -\tan t)$

$f(x) = \ln \cos t$

$f(x)' = \frac{1}{\cos t} \cdot -\operatorname{Sen} t = \frac{-\operatorname{Sen} t}{\cos t}$

$\|\vec{r}(t)'\| = \sqrt{(-\operatorname{Sen} t)^2 + (\cos t)^2 + (-\tan t)^2} = \sqrt{\operatorname{Sen}^2 t + \cos^2 t + \tan^2 t}$

$= \sqrt{1 + \tan^2 t} = \sqrt{\sec^2 t}$

$$\int_0^{\pi/4} \sec t \, dt = \ln|\sec t + \tan t| \Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \left[\ln|\sec(\pi/4) + \tan(\pi/4)|\right] - \left[\ln|\sec(0) + \tan(0)|\right]$$

$$= \ln(\sqrt{2}+1) - \ln 1 = \ln(\sqrt{2}+1)$$

$$L = \int_a^b |r'(t)|\, dt$$

10) Reparametrize la siguiente curva (respecto a la longitud de arco desde el punto $t=0$), en la direccion en que t se incrementa

$$\vec{r}(t) = (2t)\hat{\imath} + (1-3t)\hat{\jmath} + (5+4t)\hat{k} = (2t, 1-3t, 5+4t)$$

$$\vec{r}\,'(t) = (2, -3, 4)$$

$x(t) = 2t$	$x'(t) = 2$
$y(t) = 1-3t$	$y'(t) = -3$
$z(t) = 5+4t$	$z'(t) = 4$

$$|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$$

$$L = \int_0^t \sqrt{29}\, du$$

$$\int \sqrt{29}\, du = \sqrt{29} \int du = \sqrt{29}\, u + C$$

$$\int_0^t \sqrt{29}\, du = \sqrt{29}\, u \Big|_0^t = \left[\sqrt{29}\, t\right] - \left[\sqrt{29}\, 0\right]$$

$$= \sqrt{29}\, t - 0 = \sqrt{29}\, t \quad \Rightarrow \quad L = \sqrt{29}\, t$$

$$s = \sqrt{29}\, t \qquad t = \frac{s}{\sqrt{29}}$$

entonces

$$\hat{r}(s) = \left(2\frac{s}{\sqrt{29}}\right)\hat{\imath} + \left(1 - 3\frac{s}{\sqrt{29}}\right)\hat{\jmath} + \left(5 + 4\frac{s}{\sqrt{29}}\right)\hat{k}$$