Tarea Examen 1 García Ponce José Camilo

(1) Demuestra que, para cualesquiera dos enteros positivos r y d tales que $r \leq d \leq 2r$, existe una gráfica conexa G tal que $rad(G)=r$ y $diam(G)=d$

Dem: veamos los 3 casos posibles, y demos una gráfica que satisface lo que se pide

-caso 1) si $r=d$

Entonces G va a ser C_{2r} el ciclo de orden $2r$, y en el caso de que $r=1=d$ entonces $G=K_2$, podemos observar que la excentricidad de todos los vertices es la misma, entonces $d=r$, además los ciclos son conexos.

-caso 2) si $d=2r$

Entonces G va a ser una trayectoria P de longitud $2r$ (es decir P_{2r+1}), podemos ver que la excentricidad de los extremos es $d=2r$ y la excentricidad del vertice central es r, por lo tanto se cumple lo que buscamos, además las trayectorias son conexas

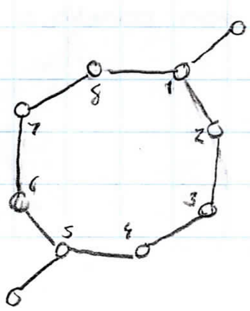
- caso 3) $d < 2r$

En esta caso construiremos a G, primero hacemos un C_{2r} ciclo, ahora sea i un entero positivo tal que $r+i=d$, i sera la cantidad de vertices que agregaremos, primero numeramos los vertices de ciclo del 1 al $2r$ $(v_1, v_2, \dots, v_{2r})$, luego agregamos un vertice w y la arista wv_1, y le restamos 1 a i, luego si $i \neq 0$. entonces agregamos otro vertice x y la arista xv_{r+1} y restamos 1 a i, luego si $i \neq 0$ agregamos un vertice y y la arista wy y resta 1 a i, y asi hasta que $i=0$, cuando terminemos este proceso vamos a tener una grafica G, tal que $rad(G)=r$ y $diam(G)=d$ ademas es conexa, ya que iniciamos con un ciclo y solo conectamos i vertices con aristas que los conectan.

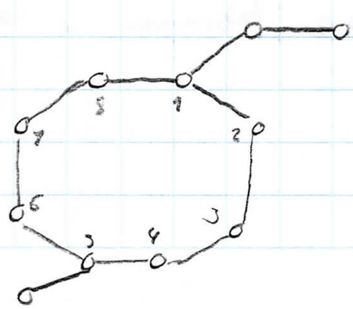
$\square$

ejemplos

$r=4$ $d=6$



$r=4$ $d=6$



(2) Para un entero $n \geq 3$, cada arista de K_n es coloreado con rojo, azul o amarillo. Las subgraficas generadas de K_n cuyas aristas son todas las rojas, todas las azules, o todas las amarillas son determinados G_r, G_b y G_y respectivamente

(a) Para $n=4$, existe una coloracion de las aristas de K_n tal que cualesquiera dos de G_r, G_b y G_y sean isomorfas?

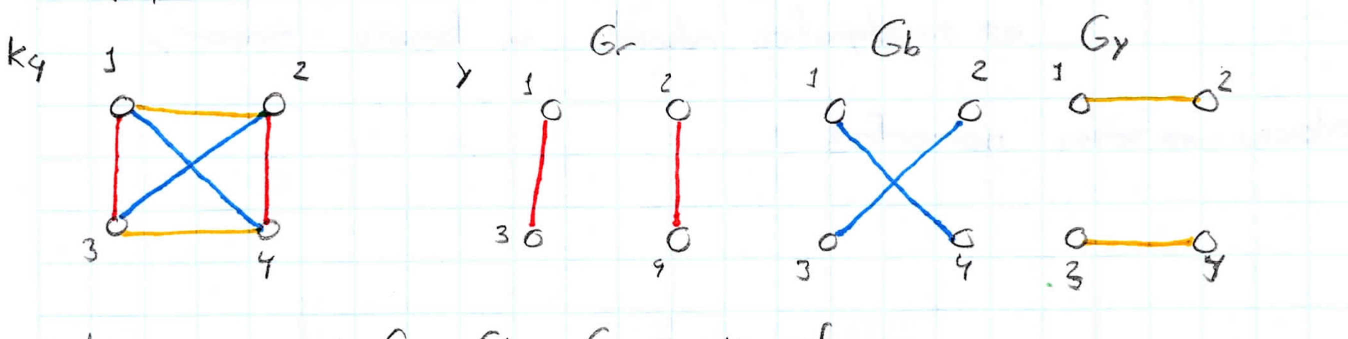
Respuesta: Si

Explicacion:

Demos una coloracion para K_4, primero numeramos los vertices de la siguiente forma (ejemplo), y para cada V_i y V_j pintamos a V_{ij} de la siguiente manera:

si $i+j=5$ sera azul, si $i+j=6$ o 4 sera rojo o si $i+j=3$ o 7 sera amarillo

ejemplo



ahora veamos si G_r, G_b y G_y son isomorfos

Primero notemos que G_r, G_b y G_y todos tienen orden 4, tienen tamaño 2 y todos sus vertices son de grado 1 por lo tanto por el teorema 3, para cualesquiera dos de

G_r, G_b y G_y son isomorfas

(b.1) para $n=5$

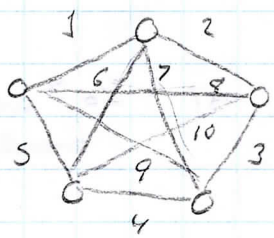
Respuesta: No

Explicación: como vimos en el teorema 3 para que sea isomorfas

necesitamos que G_r, G_b y G_y tengan el mismo tamaño, es decir

que cada color tenga la misma cantidad de aristas, pero veamos

que esto no es posible, ya que K_5 tiene tamaño 10

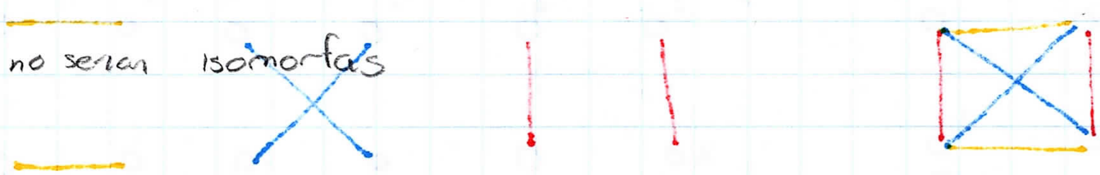


y 10 no es multiplo de 3, entonces un color

tendría una arista más que los demás colores y

así su subgráfica inducida un tamaño mayor,

entonces no serán isomorfas

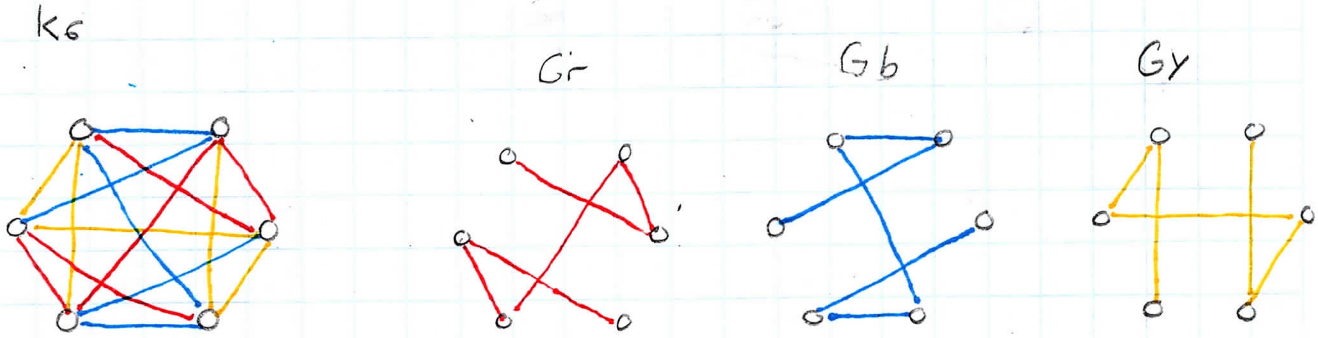


(6.2) para $n=6$

Respuesta: sí

Explicación:

Demos una coloración para K_6 de la siguiente manera (no encontré como explicarla)



ahora veamos si Gr, Gb y Gy son isomorfos

Primero notemos que tanto Gr, Gb y Gy tienen orden 6 y tienen tamaño 5, luego notemos que en Gr tiene 4 vertices con grado 2 y 2 vertices con grado 1, de manera similar Gb tiene 4 vertices de grado 2, 2 de grado 1, y por ultimo Gy tiene 4 vertices de grado 2, y 2 de grado 1, por lo tanto por el teorema 3 para cualesquiera dos de Gr, Gy y Gb son isomorfas

(3) Pruebe que si G es cualquier gráfica de orden $n \geq 3$ con $\delta(G) > n/2$, entonces contiene un triangulo

Dem Sea G una grafica cualquiera de orden $n \geq 3$ y $\delta(G) > n/2$

Sean u y v dos vertices en G tales que $uv \in E(G)$

Para ver que existe un triangulo encontremos un $w \in V(G)$ tal que

wu y $wv \in E(G)$

Tomaremos las vecindades de u $(N(u))$ y de v $(N(v))$,

por la hipotesis sabemos que $|N(u)| > n/2$ y $|N(v)| > n/2$

ahora supongamos que $N(u) \cap N(v) = \emptyset$ para generar una contradiccion

como la interseccion es vacia entonces la cardinalidad de la

union debe ser menor o igual a n, veamos si esto se cumple

Por lo visto en algebra sup I como $N(u)$ y $N(v)$ son ajenos

entonces $|N(u)| + |N(v)| = |N(u) \cup N(v)|$, pero recordemos

que $|N(u)| > n/2$ y $|N(v)| > n/2$, por lo tanto

$|N(u)| + |N(v)| > n/2 + n/2 = n$! lo cual es una contradiccion,

porque G es de orden n, entonces debe existir $w \in N(u) \cap N(v)$,

y de tal forma generamos un ciclo $C = \{u, v, w, u\}$ de longitud

3, es decir un triangulo $\square$

(4) Demuestra que toda grafica tiene una orientación acíclica

Dem Sea G una grafica cualquiera de orden n

Demos una orientacion de G para que tenga una orientacion asiclica

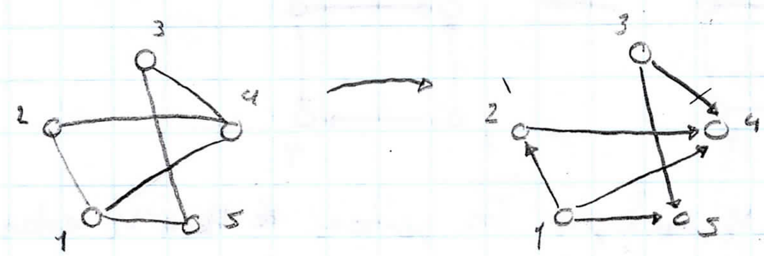
A los vertices de G los numeramos de 1 a n, entonces

$V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$, ahora para todo v_i y v_j en G

si $v_iv_j \in E(G)$ entonces esa arista la reemplazamos por

por la arista dirigida que apunte al mayor entre i y j

ejemplo



ahora veamos si esta orientacion es aciclica

y tenemos dos casos:

- caso 1) en G (original) no hay ciclos, si esto pasa entonces la orientacion es aciclica

- caso 2) en G (original) hay al menos un ciclo, si esto sucede entonces revisemos que la orientacion no tiene ciclos (dirigidos)

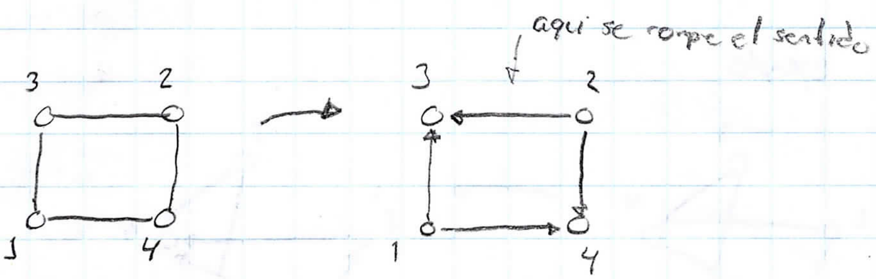
Sea C un ciclo en G entonces $C = \{v_k, \dots, v_l, v_k\}$

sabemos que por como hicimos la orientacion siempre la arista dirigida entre dos vertices apunta al mayor, entonces para que exista un ciclo dirigido los vertices en C deben estar ordenados de mayor a menor (para mantener el sentido), pero esto no puede pasar ya que, tenemos dos casos

•) caso 1) si $C = \{v_k, \dots, v_l, v_k\}$, si los vertices de v_k a v_l no estan ordenados entonces en algun punto el sentido se rompe

ejemplo

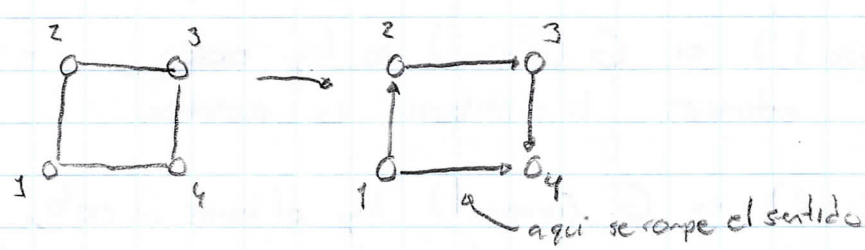
$C = \{1,3,2,4,1\}$



•) caso 2) si $C = \{v_k, \dots, v_l, v_k\}$, si los vertices de v_k a v_l estan ordenados entonces como estan ordenados $k < l$, por lo tanto el sentido del ciclo se rompe al intentar terminar el ciclo

ejemplo

$C = \{1,2,3,4,1\}$



por lo tanto la orientacion no tiene ciclos dirigidos

entonces G tiene una orientacion asiclica $\square$

(5) Prueba que si T es un torneo de orden $4r$ con $r \geq 1$, donde $2r$ vertices de T tienen exgrado $2r$ y los otros $2r$ vertices tienen exgrado $2r-1$, entonces T es fuerte.

<u>Dem</u>: Sea T un torneo de orden $4r$ con $r \geq 1$, con $2r$ vertices con exgrado $2r$ y los otros $2r$ vertices con exgrado $2r-1$. Notemos que los $2r$ vertices con exgrado $2r$ tienen ingrado $2r-1$ y los que tiene exgrado $2r-1$ tienen ingrado $2r-1$. Ahora veamos que T es fuerte.

Sean u y v vertices cualquiera de T, veamos que existe una $u-v$ y $v-u$ trayectoria

Por la definicion de torneo sabemos que para cualquier dos vertices existe una flecha que apunta a uno de los dos vertices.

- caso 1) uv es una flecha que apunta hacia v, por lo tanto existe una $u-v$ trayectoria, solo nos falta construir una $v-u$ trayectoria

+subcaso 1.1) u tiene exgrado $2r$ y v tiene exgrado $2r$, entonces vamos a buscar un exvecino de v, tal que es invecino de u, llamemoslo w, y w si existe ya que si no existiera el orden de

T sería $4r+1$ (ya que la cardinalidad de la exvecindad de v es $2r$ y la invecindad de u tiene cardinalidad $2r-1$, entonces $2r+2r-1=4r-1$ y si sumamos a u y v tenemos $4r+1$!), entonces ya tenemos la v-u trayectoria (v-w-u).

+subcaso 1.2) u tiene exgrado $2r-1$ y v tiene exgrado $2r-1$, vamos a buscar un exvecino de v, tal que es invecino de u, llamemoslo w, y w si existe ya que si no el orden de T sería $4r+1$ (ya que la cardinalidad de la exvecindad de v es $2r-1$ y la invecindad de u tiene cardinalidad $2r$, entonces $2r-1+2r=4r-1$ y si sumamos a u y v tenemos $4r+1$!), entonces ya tenemos la v-u trayectoria (v-w-u).

+subcaso 1.3) u tiene exgrado $2r-1$, v tiene exgrado $2r$, vamos a buscar un exvecino de v, tal que es invecino de u, llamemoslo w, y w si existe ya que si no el orden de T sería $4r+2$ (ya que la cardinalidad de la exvecindad de v es $2r$ y la invecindad de u tiene cardinalidad $2r$, entonces $2r+2r=4r$ y si sumamos a u y v tenemos $4r+2$!), entonces ya tenemos la v-u trayectoria

$(v-w-u)$

+subcaso 1.4) u tiene ex-grado $2r$ y v tiene ex-grado $2r-1$, vamos a buscar un exvecino de v, tal que es invecino de u, llamemoslo w, y si w existe (porque puede que no) entonces la v-u trayectoria ya esta $(v-w-u)$, en caso que no este buscamos un exvecino de v, llamemoslo x (puede ser de cualquier exgrado) ahora busquemos un exvecino de x tal que es invecino de u, llamemoslo z, y z si existe ya que si no el orden T no sería $4r$ (en el peor caso x tiene exgrado $2r-1$, entonces la cardinalidad de la exvecindad de x es $2r-1$, y la invecindad de u tiene cardinalidad $2r-1$ entonces $(2r-1)+(2r-1)=4r-2$ y si sumamos a u, v y x entonces obtenemos $4r+1$!), entonces ya tenemos la v-u trayectoria $(v-x-z-u)$

-caso 2) vu es una flecha que apunta hacia u, este caso es analogo al caso 1 (y sus subcasos) solo cambiamos v por u y u por v.

Por lo tanto T es fuerte □

* bueno intente hacer lo mejor que se me ocurrio para resolver los ejercicios *

saludos :)