García Ponce José Camilo

Examen parcial 2.

INSTRUCCIONES:
Resuelva UNICAMENTE 3 ejercicios.
Tiempo del que dispone para subir su examen resuelto en formato PDF a la plataforma de GOOGLE CLASSROOM: 75 minutos.

1. Proporcione las *ecuaciones paramétricas* de la **recta tangente** a la curva cuyas ecuaciones paramétricas son:
   $x(t) = \sqrt{t^2+3}$
   $y(t) = ln(t^2+3)$
   $z(t) = t$
   en el punto donde $t = 1$.

   $$\begin{cases} x(t) = 2 + t\frac{1}{2} \\ y(t) = \ln(4) + t\frac{1}{2} \\ z(t) = 1 + t \end{cases}$$

2. Dada la función vectorial

   $$r(\vec{t}) = (t\sin t, t\cos t, \sqrt{3}t)$$

   ,

   proporcione:

   - $v(\vec{t})$ en $t = 0$. $(0, 1, \sqrt{3})$
   - $a(\vec{t})$ en $t = 0$. $(2, 0, 0)$
   - La ecuación vectorial de la recta tangente a $r(\vec{t})$ en $t = 0$. $(0,0,0) + \lambda(0, 1, \sqrt{3})$

   NOTA: La función vectorial $r(\vec{t})$ indica la *posición* de una partícula al tiempo t.

3. Calcule la *longitud de la curva* $r(\vec{t}) = (\sin 3t, \cos 3t, 2t^{\frac{3}{2}})$, cuando el parámetro $t \in [0, 3]$.

4. Calcule la longitud de la curva $r(\vec{t}) = (2t, t^2, \frac{t^3}{3})$, cuando $t \in [0, 2]$ $\frac{20}{3}$

García Ponce José Camilo

1) proporciona las ecuaciones parametricas de la recta tangente a la curva

$x(t) = \sqrt{t^2+3}$

$y(t) = \ln(t^2+3)$ en el punto $t=1$

$z(t) = t$

veamos el punto

$x(1) = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$y(1) = \ln(1+3) = \ln(4)$ entonces el punto es $(2, \ln(4), 1)$

$z(1) = 1$

sea $\vec{r}(t) = \left(\sqrt{t^2+3}, \ln(t^2+3), t\right)$

veamos quien es $\vec{r}\,'(t)$

recordemos que

a) $y = \sqrt[m]{u}$

$$y' = \frac{u'}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}$$

es decir la regla de la cadena y potencia

b) $y = \ln(u)$

$$y' = \frac{u'}{u}$$

por regla de cadena y potencia

$$x'(t) = \frac{2t}{2\sqrt{(t^2+3)}} = \frac{t}{\sqrt{(t^2+3)}}$$

$$y'(t) = \frac{2t}{t^2+3}$$

$$z'(t) = 1$$

entonces $\vec{r}\,'(t) = \left(\frac{t}{\sqrt{(t^2+3)}}, \frac{2t}{t^2+3}, 1\right)$

ahora veamos

$$\vec{r}\,'(1) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+3}}, \frac{2}{1+3}, 1\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

entonces la recta tangente es $(2, \ln(4), 1) + \lambda\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$

y en su forma paramétrica es

recta tangente
$$\begin{cases} x(t) = 2 + t\frac{1}{2} \\ y(t) = \ln(4) + t\frac{1}{2} \\ z(t) = 1 + t \end{cases}$$

$x(t) \quad y(t) \quad z(t)$

2) $\vec{r}(t) = (t\sin(t), t\cos(t), \sqrt{3}\, t)$

$\vec{v}(t)$ con $t=0$

recordemos qe

∘) $y = uv$
$y' = u'v + uv'$
regla del producto

∘) $y = \sin(x)$
$y' = \cos(x)$

∘) $y = \cos(x)$
$y' = -\sin(x)$

∘) $y = ku$
$y' = ku'$

∘) $y = u \pm v$
$y' = u' \pm v'$

veamos quen es $\vec{r}'(t)$

$x'(t) = 1 \cdot \sin(t) + t \cdot \cos(t)$

$= \sin(t) + t\cos(t)$

$y'(t) = 1 \cdot \cos(t) + t \cdot -\sin(t)$

$= \cos(t) - t\sin(t)$

$z'(t) = \sqrt{3} \cdot 1 = \sqrt{3}$

$\vec{v}(t) = r'(t) = (\sin(t) + t\cos(t), \cos(t) - t\sin(t), \sqrt{3})$

entons $\vec{v}(0) = (0 + 0 \cdot 1, 1 - 0 \cdot 0, \sqrt{3})$

$\vec{v}(0) = (0, 1, \sqrt{3})$

ahora veams quen es $\vec{r}''(t)$

$x''(t) = \cos(t) + (\cos(t) - t\sin(t)) = 2\cos(t) - t\sin(t)$

$y''(t) = -\sin(t) - (\sin(t) + t\cos(t)) = -2\sin(t) - t\cos(t)$

$z''(t) = 0$

entonces

$$\vec{a}(t) = \vec{r}''(t) = (2\cos(t) - t\sin(t), -2\sin(t) - t\cos(t), 0)$$

entonces $\vec{a}(0) = (2\cdot 1 - 0\cdot 0, -2\cdot 0 - 0\cdot 1, 0)$

$= (2, 0, 0)$

$\vec{a}(0) = (2,0,0)$

•) la recta tangente a $\vec{r}(t)$ en $t=0$

veamos el punto

$\vec{r}(0) = (0\cdot 0, 0\cdot 1, \sqrt{3}\cdot 0) = (0,0,0)$

entonces

la tangente es $\vec{r}(0) + \lambda\, \vec{v}(0)$

$= (0,0,0) + \lambda\,(0,1,\sqrt{3})$

la recta tangente es $(0,0,0) + \lambda\,(0,1,\sqrt{3})$

4) Longitud de curva de $\vec{r}(t) = (2t, t^2, \frac{t^3}{3})$ con $t \in [0,2]$

veamos quien es $\vec{r}'(t)$

$x'(t) = 2$

$y'(t) = 2t^1 \cdot 1 = 2t$

$z'(t) = \frac{1}{3} \cdot 3t^2 \cdot 1 = t^2$

recordemos que

- $L = \int_a^b \|\vec{r}'(t)\| \, dt$
- $y = ku$
  $y = ku'$
- $y = u^m$
  $y' = m u^{m-1} u'$
- $y = \frac{u}{v}$
- $\int f(x) \pm g(x) \, dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
- $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
- $\int dt = t + C$

vamos quien es $\|\vec{r}'(t)\|$

$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{2^2 + (2t)^2 + (t^2)^2}$

$= \sqrt{4 + 4t^2 + t^4}$

$= \sqrt{(2+t^2)^2} = 2 + t^2$

entons $L = \int_0^2 2 + t^2 \, dt$ primero veamos

quien es $\int 2 + t^2 dt = \int 2 dt + \int t^2 dt = 2 \int dt + \int t^2 dt$

$= 2t + \frac{t^3}{3} \quad (+C)$

entonces $\int_0^2 2 + t^2 \, dt = 2t + \frac{t^3}{3} \Big|_0^2$

$=$

$$\left[\frac{(2)^3}{3} + 2(2)\right] - \left[\frac{0^3}{3} + 2(0)\right] = \left[\frac{8}{3} + 4\right] - 0$$

$$= \frac{8}{3} + 4 = \frac{20}{3} = 6.\overline{6666}$$

entonces $L = \frac{20}{3} = 6.\overline{66}$