Tarea 4 García Ponce José Camilo

1) Demuestra o da un contraejemplo para la siguiente proposición:

Sea G una gráfica bipartita con partes U y W tales que $|U| \leq |W|$. Si U puede ser apareado con un subconjunto de W entonces, para cada subconjunto no vacío S de U, el conjunto S puede ser apareado con un subconjunto de $N(S)$

Dem:

Sea S un subconjunto no vacío y cualquiera de U.

Ahora debido a que U puede ser apareado con un subconjunto de W y por el teorema 51, sabemos que la Gráfica G cumple con la condición de Hall.

Ahora formaremos una nueva gráfica bipartita inducida por los conjuntos S y $N(S)$, la llamaremos H, entonces H es una gráfica bipartita con partes S y $N(S)$ y además $|S| \leq |N(S)|$ (ya que G cumple la condición de Hall).

Ahora veamos si la condición de Hall se cumple para H, sea Z un subconjunto no vacío de S, veamos si $|Z| \leq |N(Z)|$

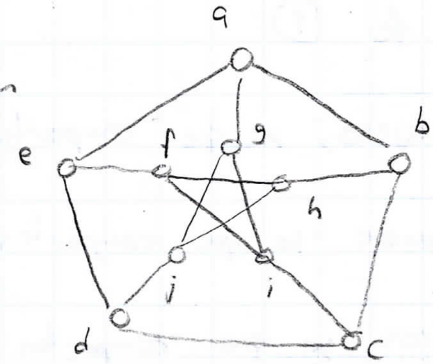
Supongamos que $|Z| > |N(Z)|$ para generar una contradicción notemos que $Z \subseteq S$ y $S \subseteq U$, por lo tanto $Z \subseteq U$, por lo tanto si $|Z| > |N(S)|$ entonces la condicion de Hall no se cumple para G (ya que Z es un subconjunto de U) lo cual contradice nuestra hipotesis, entonces no puede pasar. Por lo tanto tenemos que $|Z| \leq |N(Z)|$, por lo tanto H cumple la condicion de Hall. Luego usando el teorema 5.1 sobre H, tenemos que S puede ser apareado con un subconjunto de $N(S)$

$\square$

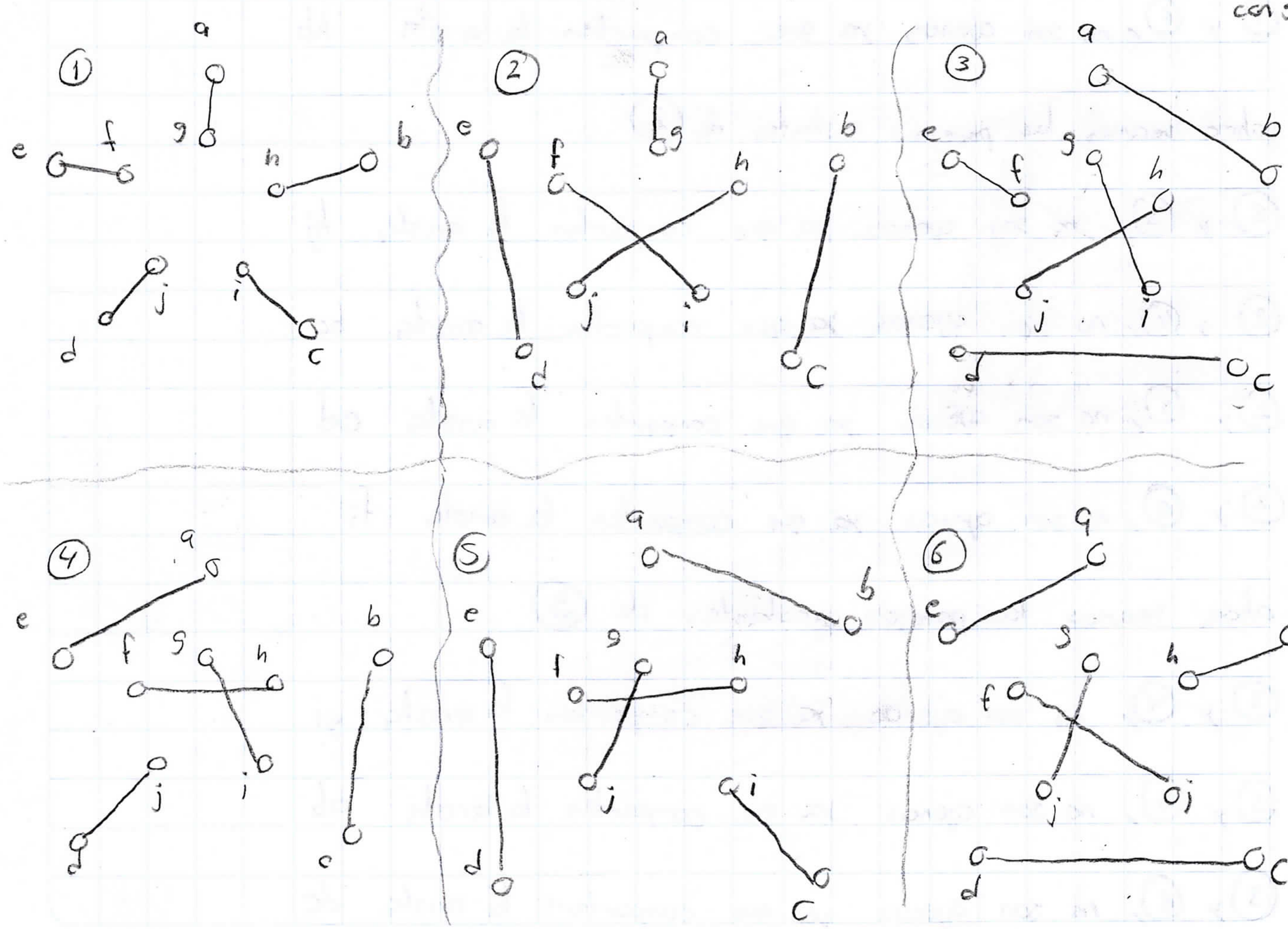
2) Prueba qe la grafica de Petersen no contiene dos apareamientos ajenos

Veamos cuales son todos los posibles apareamientos perfectos

Grafica de Petesen



posibles apareamientos perfects (una unica y las otras son rotaciones, y no hay más porque se generarian vertices con grado 2)



veamos qe existen 6 posibles apareamients, ahora revisemos si alguna pareja es ajena

Primero las parejas de 1

1 y 2, no son ajenos, ya qe comparten la arista ag

1 y 3, no son ajenos ya que comparten la arista ef

1 y 4, no son ajenos ya que comparten la arista dj

1 y 5, no son ajenos ya que comparten la arista ic

1 y 6, no son ajenos ya que comparten la arista hb

ahora veamos las parejas restantes de 2

2 y 3, no son ajenos ya que comparten la arista hj

2 y 4, no son ajenos ya que comparten la arista bc

2 y 5, no son ajenos ya que comparten la arista ed

2 y 6, no son ajenos ya que comparten la arista fi

ahora veamos las parejas restantes de 3

3 y 4, no son ajenos ya que comparten la arista gi

3 y 5, no son ajenos ya que comparten la arista ab

3 y 6, no son ajenos ya que comparten la arista dc

ahora veamos las parejas restantes de 4

4 y 5, no son ajenos ya que comparten la arista fh

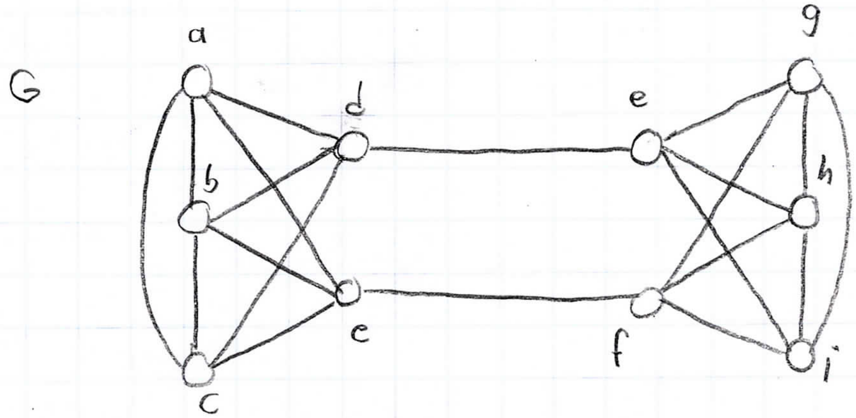
4 y 6, no son ajenos ya que comparten la arista ea

y por ultimo veamos las parejas restantes de 5

5 y 6, no son ajenos ya que comparten la arista gj

Como podemos observar ninguna de las parejas de apareamientos perfectos son ajenos, por lo tanto la grafica de Petersen no contiene dos apareamientos perfectos ajenos.

3) Brinda un ejemplo de una grafica coneta y 4-regular que no sea factorizable Hamiltonianamente



ahora para que G es factorizable necesitamos una factorizacion donde cada factor sea un ciclo Hamiltoniano, por lo tanto necesitamos una factorizacion que sea una coleccion de 2-factores que sean ciclos Hamiltonianos (y tienen que se 2-factores, ya que si fueran 1, 3 o 4-factores no se podrian formar ciclos hamiltonianos).

Ahora notemos que todo posible 2-factor de la grafica debe pasar por las aristas de y ef, por lo tanto solo tener un 2-factor que es un ciclo Hamiltoniano pero si queremos una factorizacion necesitamos a dos 2-factores por lo tanto no es factorizable Hamiltoniana

4) Para cada entero $k \geq 2$, da un ejemplo de una grafica conexa G_k de tamaño k^2 para la cual sea posible colorear cada arista de G_k con uno de los k colores, digamos $1, 2, \ldots, k$, de tal modo que haya dos factorizaciones isomorfas $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ de G_k tal que cualesquiera dos aristas de cada factor en $\mathcal{F}$ estén coloreadas igual y ningun par de aristas de cada factor en $\mathcal{F}'$ estén coloreadas igual.

La grafica G_k sera C_{k^2}, un ciclo de longitud k^2

Ahora veamos como son los colores de las aristas y las factorizaciones

Primero para los colores de las aristas los colorearemos de la siguiente manera, primero numeramos a todas las aristas de 1 a k^2, luego coloreamos de un color y cuando el numero de la arista sea impar cambiamos el color (al siguiente color) y cuando lleguemos al color k el siguiente sera el 1, entonces coloreamos de dos en dos aristas, por ejemplo aristas 1 y 2 de color 1, aristas 3 y 4 de color 2, aristas 4 y 5 de color 3, etc pero aqui tenemos dos casos:

si k^2 es par, no pasa nada y coloreamos normalmente

si k^2 es impar, entonces va a haber una arista solita (sin pareja)

entonces a esa arista la coloreamos de un color cualquier tal que no sea el mismo de sus aristas adyacentes.

Ahora veamos como seran F y F'

• caso 1) k^2 es par, entonces F sera una factorizacion de factores de la siguiente forma: seran una pareja de aristas del mismo color (que son adyacentes, por ejemplo arista 1 y 2, arista 3 y 4, etc), y para F' los factores seran similares, seran parejas de aristas (con diferente color), solo que las parejas empezaran uno despues (es decir las parejas seran arista 2 y 3, arista 4 y 5, ..., arista k^2 y 1), y asi tenemos que F y F' son isomorfas y se cumple lo que se pide de las aristas de los factores.

• caso 2) k^2 es impar, entonces F sera una factorizacion como la del caso par con algo extra, los primeros factores seran iguales que cuando k^2 es par (es decir arista 1 y 2, arista 3 y 4, etc) solo que la arista k^2 no tendra pareja, entonces la arista k^2 solita sera su propio factor. y para F' tendremos las mismas parejas que en el caso par (arista 2 y 3, arista 4 y 5, ..., arista k^2-1 y k^2) pero ahora la arista solita es la arista 1 entonces se vuelve su propio factor. Y con estas factorizaciones tendremos que F y F' son isomorfas y se cumple lo que se pide

Ejemplo para $k=3$

G_3