Tarea Examen 3 García Ponce José Camilo

(1) Prueba que una grafica euleriana G tiene tamaño par si y solo si G tiene un número par de vertices v tales que $deg(v) \equiv 2 \mod 4$

Dem:

$\Rightarrow$) Supongamos que G es una grafica euleriana de tamaño par, por el teorema 38 sabemos que todos los vertices de G tienen grado par, ahora por el teorema 1 sabemos que $2m = \sum_{v \in V(G)} deg(v)$, pero con un poco de aritmetica podemos verlo asi $m = \sum_{v \in V(G)} \frac{deg(v)}{2}$, ahora sabemos que m es par, y como cada vertice en G debe ser par entonces tenemos dos opciones $deg(v) \equiv 0 \mod 4$ ó $deg(v) \equiv 2 \mod 4$

- si $deg(v) \equiv 0 \mod 4$ entonces $\frac{deg(v)}{2}$ sigue siendo par, por lo tanto no nos causa problemas en la suma de grados.
- si $deg(v) \equiv 2 \mod 4$ entonces $\frac{deg(v)}{2}$ es impar por lo tanto si tenemos un numero impar entonces m seria impar (ya que sumar un numero impar de numeros impares es otro numero impar) y m no puede ser impar, por lo tanto debe haber un numero par de vertices con grado $deg(v) \equiv 2 \mod 4$ ya que

sumar un número par de numeros impares es un numero par

y así logrando que m sea par

$\Leftarrow$ Supongamos que G es una grafica euleriana y tiene un número par de vertices v tales que $\deg(v) \equiv 2 \mod 4$

Recordemos que por el teorema 1 el tamaño de G es

$2m = \sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ y con aritmetica (/) tenemos que $m = \sum_{v \in V(G)} \frac{\deg(v)}{2}$,

ahora como G es euleriana entonces por el teorema 38, todos los vertices de G tienen grado par, entonces tenemos dos casos de que cada vertice sea $\deg(v) \equiv 0 \mod 4$ o $\deg(v) \equiv 2 \mod 4$, ahora notemos que si $\deg(v) \equiv 0 \mod 4$ entonces $\frac{\deg(v)}{2}$ es par, pero si $\deg(v) \equiv 2 \mod 4$ tenemos que $\frac{\deg(v)}{2}$ es impar, ahora sabemos que tenemos un numero par de vertices con $\deg(v) \equiv 2 \mod 4$ por lo tanto la suma de $\frac{\deg(v)}{2}$ de los vertices con $\deg(v) \equiv 2 \mod 4$ es un numero par (sumar un numero par de numeros impares es par) y la suma $\frac{\deg(v)}{2}$ de los otros vertices tambien es par y por lo tanto m debe ser par, ya que sumar una cantidad par de numeros pares es par $\square$

(2) Sea G una gráfica euleriana de orden $n \geq 4$. Prueba que G contiene al menos tres vértices tales que todos ellos tienen el mismo grado.

Dem

Sea G una gráfica euleriana de orden $n \geq 4$, por el teorema 38 sabemos que todos los vértices de G tienen grado par.

Supongamos que G solo tiene 2 vértice con mismo grado para cada posible grado.

-caso 1) n es par, entonces notamos que los grados que pueden tener los vértices son $2, 4, 6, \ldots, n-2$, los cuales son $\frac{n-2}{2}$ números. Ahora como G solo tiene 2 vértices con mismo grado (para cada grado) y tenemos $\frac{n-2}{2}$ posibles grados podemos ver que entonces $2\left(\frac{n-2}{2}\right) = n-2$, entonces el orden de G sería $n-2$! lo cual es una contradicción

-caso 2) n es impar, entonces notamos que los grados que pueden tener los vértices son $2, 4, 6, \ldots, n-1$, los cuales son $\frac{n-1}{2}$ números. Ahora como G solo tiene 2 vértices con mismo grado (para cada grado) y tenemos $\frac{n-1}{2}$ posibles grados podemos observar que $2\left(\frac{n-1}{2}\right) = n-1$, por lo tanto el orden de G debería ser $n-1$! una contradicción

Observemos que en ambos casos llegamos a una contradicción al suponer que solo había 2 vertices que compartían grado para cada posible grado, por lo tanto G debe tener al menos 3 vertices que compartan mismo grado

$\square$

(3) Suponga que es posible asignar a cada vértice de una gráfica G de orden impar $n \geq 3$ o bien el color rojo, o bien el color azul, de tal manera cada vértice rojo es adyacente solo a vértices azules y cada vértice azul es adyacente solo a vértices rojos, Demuestra que G no es hamiltoniana.

<u>Dem:</u> Primero recordemos la contrapositiva (creo?) del Corolario 4.3. "Si H es una gráfica de orden $n \geq 3$, tal que no es Hamiltoniana, entonces $deg(v) < n/2$ para algún vértice v de H"

Por lo tanto basta demostrar que algún vértice de G que su grado sea menor que $n/2$

Ahora sea A el conjunto de los vértices de color azul en G y sea R el conjunto de los vértices de color rojo en G. Ahora veamos que si la cardinalidad de A es igual a la de R entonces tendríamos orden n par lo cual no puede pasar

Entonces tenemos 2 casos:

-caso 1) $|A| > |R|$, la cardinalidad de A es mayor a la de R, notemos que $|A| > n/2$ y $|R| < n/2$ ya que no pueden ser iguales y $|A|$ debe ser mayor, ahora sea u un vertice cualquiera de A, veamos que u a lo máximo puede ser adyacente a cada vertice de R, entonces tenemos que $\deg(u) \leq |R| < n/2$ por lo tanto $\deg(u) < n/2$, ya encontramos al vertice que buscabamos

-caso 2) $|A| < |R|$, la cardinalidad de R es mayor a la de A, notemos que $|R| > n/2$ y $|A| < n/2$ ya que no pueden ser iguales y $|R|$ debe ser mayor, ahora sea w un vertice cualquiera de R, veamos que w a lo máximo puede ser adyacente a cada vertice de A, entonces tenemos que $\deg(w) \leq |A| < n/2$ por lo tanto $\deg(w) < n/2$, ya encontramos al vertice que buscamos.

Como podemos observar en ambos casos encontramos un vertice x de G tal que $\deg(x) < n/2$ por lo tanto usando la contrapositiva (?) del corolario 43 podemos llegar a que G no es hamiltoniana

$\square$

(4) a) Prueba que si G es una grafica de orden 101 y $\delta(G) = 51$ entonces cada vertice de G pertenece a un ciclo de longitud 27

Dem

Observemos que cada vertice cumple que su grado es mayor o igual a $\frac{101}{2}$, por lo tanto usando el corolario 43 tenemos que G es Hamiltoniana, entonces sea C un ciclo Hamiltoniano de G.

Ahora sea v un vertice cualquiera de G, luego numeremos los vertices de C de tal manera que queden de la siguiente manera

$C = \{v = 101, v_1, v_2, \ldots, v_{99}, v_{100}, v_{101} = v\}$, ahora

a los vertices de $V(G) - v_{101}$ los dividimos en conjuntos de cardinalidad 4 de la siguiente manera (son $27-2=25$ conjuntos)

$$S_m = \{v_{25-m}, v_{50-m}, v_{75-m}, v_{100-m}\} \quad \text{con} \quad 0 \leq m \leq 24$$

Ahora notemos que existe un conjunto S_m tal que v_{101} es adyacente a almenos 3 de los vertices de ese conjunto, ya que si no pasa esto tendriamos que v_{101} solo es adyacente a 2 vertices en cada conjunto, entonces como son 25 conjuntos tenemos que $2 \times 25 = 50$, lo cual no puede pasar ya que $\delta(G) = 51$, entonces llamemos al conjunto que tiene al menos 3 vertices adyacentes a v_{101} como Z, ahora notemos que como v_{101} es adyacente a al menos 3 de los vertices entonces notemos que entre cada dos vertices de Z hay 24 vertices (ejemplo v_1 y v_{26} estan en Z entonces entre ellos estan $v_2, v_3, \ldots, v_{24}, v_{25}$) por lo tanto tenemos 2 vertices "adyacentes" (que esten separados por 24 vertices) de Z y que sean adyacentes a v_{101}, llamemoslos c y d y los 24 vertices entre ellos S' ahora unamos todo formando un ciclo C' de la siguiente manera $\{v_{101}, c, S', d, v_{101}\}$ notemos que C' tiene 27 vertices por lo tanto la longitud de C' es 27, entonces ya encontramos lo que queriamos y como v fue arbitrario se cumple para todo vertice de G

$\square$

b) Establece una generalización del inciso anterior

Si G es una grafica de orden k y $\delta(G)=m$, entonces

cada vertice de G pertenece a un ciclo de longitud p

con $3 \leq p$, $m=2p-3$ y $k=2m-1$

y con estos requerimientos la demostración anterior sirve

solo tendriamos que buscar un ciclo de longitud p y para

es dividimos a los vertices de G menos uno, en $p-2$ conjuntos

de cardinalidad 4 (con $p-3$ vertices entre cada elemento del conjunto) y buscamos

que a sea adyacente a tres vertices de uno de los conjuntos que

hicimos y esto pasa si no solo es adyacente a $2 \times (2p-2)$

$= 2p-4$ pero $\delta(G) = 2p-3$, y asi tenemos

el ciclo para cada uno de los vertices

(5) Demuestra que toda gráfica Hamiltoniana-conexa de orden 4 o superior es 3-conexa

Dem

Sea G una gráfica Hamiltoniana-conexa de orden n, con $n \geq 4$

Supongamos que G no es 3-conexa para generar una contradicción

Entonces G es 2-conexa, entonces sea S un conjunto de vertices de G, de cardinalidad 2, tal que $G-S$ es inconexa, sea x y z los vertices de S,

ahora como $G-S$ es inconexa entonces tiene dos componentes llamemoslas G_1 y G_2, ahora sea y un vertice de la componente G_1 y sea w un vertice de la componente

Ahora como G es Hamiltoniana-conexa tenemos que para cualquier par de vertices u, v de G, existe una u-v trayectoria Hamiltoniana en G

Por lo tanto sea P una x-z trayectoria Hamiltoniana en G

notemos que P contiene a y y w, ahora sea P' la subtrayectoria de P tal que inicia en y y termina en w, es decir una y-w trayectoria, observemos que P' no contiene ni a x, ni a z , y tampoco a ningun arista incidente

con x o z

$P = \{x, \ldots, \underbrace{y, \ldots, w}_{P'}, \ldots, z\}$ o $P = \{x, \ldots, \underbrace{w, \ldots, y}_{P'}, \ldots z\}$

por lo tanto P' esta en $G-S$, lo cual es una

contradiccion ! ya que $G-S$ es inconexa pero P "conecta"

a dos vertices (w, y) de diferentes componentes

Por lo tanto G debe ser 3-conexa

$\square$

* en esta tarea creo que no se me dificulto
tanto, a excepcion del 4, el cual estaba
muy dificil :(* saludos :)