Examen 4 García Ponce José Camilo

1) Determina si el polinomio $2x^4+5x^3+4x^2+x$ tiene raíces múltiples

Veamos si podemos factorizar al polinomio

$2x^4+5x^3+4x^2+x$

$\hookrightarrow x(2x^3+5x^2+4x+1)$

ahora usamos división sintética

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 4 & 1 & 1 \\ & 2 & 7 & 11 & \\ \hline 2 & 7 & 11 & 12 & \end{array} \quad \times$$

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 4 & 1 & -1 \\ & -2 & -3 & -1 & \\ \hline 2 & 3 & 1 & 0 & \end{array} \quad \checkmark \quad \to 2x^2+3x+1$$

entonces $x(2x^3+5x^2+4x+1)$

$\hookrightarrow (x)(x+1)(2x^2+3x+1)$

otra vez división sintética

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ & 2 & 5 & \\ \hline 2 & 5 & 6 & \end{array} \quad \times$$

$$\begin{array}{ccc|l} 2 & 3 & 1 & \underline{-1} \\ & -2 & -1 & \\ \hline 2 & 1 & 0 & \end{array} \rightarrow (2x+1) \quad \checkmark$$

entonces

$$(x)(x+1)(2x^2+3x+1)$$

↳

$$(x)(x+1)(x+1)(2x+1)$$

↳

$$(x)(x+1)^2(2x+1)$$

podemos notar que $(x+1)$ tiene multiplicidad 2

entonces claramente el polinomio tiene raices multiples

y es $(x+1)$ y su multiplicidad es 2

3) Sean $f(x) = g(x)h(x)$ en $k[x]$, y $\alpha \in K$. Si α es raíz de $g(x)$ de multiplicidad m_1 y es raíz de $h(x)$ de multiplicidad m_2, demuestra que α es raíz de multiplicidad $m_1 + m_2$ de $f(x)$

Dem:

como α es raíz de $g(x)$ con multiplicidad m_1 entonces podemos escribir a $g(x)$ de la forma:

$g(x) = (x-\alpha)^{m_1} p(x)$ para algún polinomio $p(x) \in k[x]$, $p(\alpha) \neq 0$

y de la misma forma podemos escribir a $h(x)$:

$h(x) = (x-\alpha)^{m_2} q(x)$ para algún polinomio $q(x) \in k[x]$ y $q(\alpha) \neq 0$

entonces tenemos que

$$g(x)h(x) = (x-\alpha)^{m_1}(x-\alpha)^{m_2} p(x)q(x)$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = (x-\alpha)^{m_1}(x-\alpha)^{m_2} p(x)q(x)$$

y por las "propiedades(?)" de productos con exponentes

tenemos que $f(x) = (x-\alpha)^{m_1+m_2} p(x)q(x)$ y claramente $p(\alpha)q(\alpha) \neq 0$

por lo tanto tenemos que α es raíz de $f(x)$ de multiplicidad $m_1 + m_2$ $\square$

esto fue usando un Teorema pero no recuerdo cual :C

4) Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polinomio con coeficientes racionales, con $a \neq 0$. Demuestre que $f(x)$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ si y solo si b^2-4ac no es el cuadrado de un numero racional

Dem:

$\Rightarrow$) Supongamos que $f(x)$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$

Ahora para generar una contradiccion supongamos que b^2-4ac es el cuadrado de un numero racional.

Como vimos en la clase de ayer como $f(x)$ es irreducible, entonces sabemos que no "lo podemos factorizar para saber sus raices" en $\mathbb{Q}[x]$ entonces $f(x)$ no tiene raices racionales, ahora como $f(x)$ es de grado 2 sabemos que para sacar sus raices podemos usar la formula general de segundo grado.

entonces sus raices son de la forma $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

y tenemos que b^2-4ac es el cuadrado de un numero racional

entonces $\sqrt{b^2-4ac} = \pm b^2-4ac$ por lo tanto $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \in \mathbb{Q}$

lo cual diria que $f(x)$ tiene raiz racional, entonces

se podria reducir lo cual contradice nuestra hipotesis

entonces b^2-4ac no debe ser el cuadrado de un numero racional

$\Leftarrow$ Sea $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de la forma ax^2+bx+c con $a \neq 0$

y b^2-4ac no es el cuadrado de un numero racional

Supongamos que $f(x)$ es reducible para generar una contradiccion.

Como $f(x)$ es reducible entonces tiene raiz en $\mathbb{Q}$ y para

saberla podemos usar la formula de segundo grado

entonces sus raices son de la forma

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \in \mathbb{Q}$$

entonces en particular $\sqrt{b^2-4ac} \in \mathbb{Q}$ pero b^2-4ac no es el

cuadrado de un racional entonces $\sqrt{b^2-4ac} \notin \mathbb{Q}$ lo cual

genera una contradiccion, por lo tanto $f(x)$ debe

ser irreducible

$\square$

5) Determina si existe un polinomio $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ de grado 2 tal que $f(0)=1$, $f(2)=1$ y $f(-3)=0$

Si existe

ya que si existiera el siguiente sistema tendría soluciones en $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} 0a + 0b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 1 \\ 9a - 3b + c = 0 \end{cases}$$

claramente podemos ver que $c = 1$, entonces nos quedamos con

$$\begin{cases} 4a + 2b + 1 = 1 \\ 9a - 3b + 1 = 0 \end{cases} \to 4a + 2b = 0 \to 2b = -4a$$

$$\to b = -2a$$

$$9a + -3(-2a) + 1 = 0 \to 9a + 6a + 1 = 0$$

$$\to 15a + 1 = 0 \to 15a = -1 \to a = \frac{-1}{15}$$

$$4\left(\frac{-1}{15}\right) + 2b + 1 = 1 \to \frac{-4}{15} + 2b = 0 \to 2b = \frac{4}{15}$$

$$\to b = \frac{2}{15}$$

entonces

$$f(x) = -\frac{1}{15}x^2 + \frac{2}{15}x + 1$$