Barke Gómez Alfredo
García Ponce José Camilo
Rivera Hernández Ernesto Yahir

Tarea 4

1.- Escriba la expresión que define la continuidad de una función escalar de 2 variables $z = f(x, y)$ en un punto del plano (a,b).

Una función f de dos variables se llama continua en (a,b) si

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Se dice que f es continua en su dominio si lo es para cada punto (a,b) en él,

2.- Escriba las expresiones para calcular $f_x(a,b)$ como límites

$$f_x(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h, b) - f(a,b)}{h}$$

3.- Escribe las expresiones para calcular $f_y(a,b)$ como límites

$$f_y(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a, b+h) - f(a,b)}{h}$$

4.- El Teorema de Clairaut o el Teorema de igualdad para derivadas parciales mixtas establece que en toda región abierta donde las derivadas de segundo orden, de una función de dos variables, sean continuas se tendrá que dichas derivadas serán iguales. Es decir que si las derivadas parciales mixtas son continuas en una región abierta entonces el orden de integración en que se hagan estas derivadas es irrelevante sobre esa región.

5.- Si f es una función diferenciable en un punto (a,b), el plano tangente a la superficie dada por $z=f(x,y)$ en el punto $(a,b,f(a,b))$ tiene como ecuación:

$$z=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

6.- Si una función $z=f(x,y)$ es diferenciable en un punto (a,b), entonces la función

$$L(x,y)=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

se dice que es una linealización de f en (a,b).

7) Sea $z = f(x,y)$, explique ¿qué representan las diferenciales dx, dy y dz?

dx representa un cambio de la funcion con respecto a la variable x (diferencial parcial)

dy representa un cambio de la funcion con respecto a la variable y (diferencial parcial)

dz es la diferencial total y representa el cambio de la funcion con respecto a x y y

serian las razones de como van cambiando la funcion

¿Como se calcula dz?

de la siguiente manera

$$dz = f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

8) Explica la regla de la cadena en los siguientes casos:

a) $z = f(x,y)$ y $x = g(t)$, $y = h(t)$ con x, y funciones de una variable

entonces tenemos que

$\frac{dz}{dt}$ va a ser la derivada de z con respecto a t,

entonces tenemos que

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

es la derivada parcial de f con respecto a x multiplicado por la derivada de x con respecto a t. (y esto lo podemos hacer debido a que x es una funcion de una variable entonces se deriva "normalmente", y sumado con la derivada parcial de f con respecto a y multiplicado la derivada de y con respecto a t (lo que puede pasar ya que y es una funcion de una variable)

y todo esto funciona debido a que z es indirectamente funcion de t con $z = f(g(t), h(t))$ todo depende de t

○) $z = f(x,y)$ y $x = g(s,t)$, $y = h(s,t)$, x,y son funciones de dos variable

entonces tenemos que vamos a tener dos derivadas ordinarias una respecto a t y la otra respecto a S, ya que f indirectamente depende de t y s

$\frac{\partial z}{\partial s}$ la derivada ordinaria con respecto a s $\frac{\partial z}{\partial t}$ la derivada ordinaria con respecto a t

entonces veamos primero respecto a S

tenemos que

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

es la derivada parcial de z con respecto a x (dejando fija a y) multiplicado por la derivada parcial de x con respecto a S (dejando fija a t), y sumado con la derivada parcial de z con respecto a y (dejando fija a x) multiplicado por la derivada parcial de y con respecto a s (dejando fija a t)

En esta dejamos siempre fija a t

ahora con respecto a t

tenemos que

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

es la derivada parcial de z con respecto a x (dejando fija a y) multiplicado por la derivada parcial de x con respecto a t (dejando fija a s), y sumado con la derivada parcial de z con respecto a y (dejando fija a x) multiplicado por la derivada parcial de y con respecto a t (dejando fija a s)

En esta dejamos siempre fija a s

9) Escribe una expresion como un limite para la derivada direccional de $z=f(x,y)$ en el punto (x_0,y_0) en la direccion de un vector unitario $\hat{u}=(a,b)$

tenemos que la derivada es

$$D_{\hat{u}} f(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+ha, y_0+hb)-f(x_0,y_0)}{h}$$

si es que el limite si existe

y su forma de verla sin limite es

$$D_{\hat{u}} f(x,y) = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b$$

¿Cuál es la interpretacion geometrica?

$D_{\hat{u}} f(x_0,y_0)$ es la razon de cambio de z en (x_0,y_0) en la direccion del vector u, entonces sea S una superficie con la ecuacion $z=f(x,y)$ entonces el punto $P(x_0,y_0,z_0)$ con $z_0=f(x_0,y_0)$ esta en la superficie. Ahora sea E un plano que pasa por P en la direccion de u, notemos que E intersecta a S, formando una curva C. Entonces la pendiente de la recta tangente T a C en el punto P es la razon de cambio de z en la dirección u

es decir es $D_u f(x_0, y_0)$

Por lo tanto

$D_u f(x_0, y_0)$ = la pendiente de la recta tangente T a C en el

punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

10) ¿Qué significan los enunciados siguientes?

- $z = f(x,y)$ tiene máximo local en (a,b)

  significa que $f(x,y) \leq f(a,b)$ cuando (x,y) está cerca de (a,b) (con (x,y) puntos en un disco con centro (a,b))

- $z = f(x,y)$ tiene máximo absoluto en (a,b)

  significa que para todos los puntos (x,y) del dominio f tenemos que $f(x,y) \leq f(a,b)$, es decir $f(a,b)$ es mayor que todos los $f(x,y)$

- $z = f(x,y)$ tiene mínimo local en (a,b)

  significa que $f(x,y) \geq f(a,b)$ cuando (x,y) esta cerca de (a,b) (con (x,y) punts en un disco con centro (a,b))

- $z = f(x,y)$ tiene mínimo absoluto en (a,b)

  significa que para todos los puntos (x,y) del dominio f tenemos que $f(x,y) \geq f(a,b)$, es decir $f(a,b)$ es menor que todos los $f(x,y)$

- $z = f(x,y)$ tiene un punto silla en (a,b)

  significa que la grafica de f cruza su plano tangente en (a,b)

ademas que $D<0$ con

$$D = D(a,b) = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - [f_{xy}(a,b)]^2$$

con $f_x(a,b)=0$ y $f_y(a,b)=0$

y por lo tanto podemos concluir estas cosas del punto (a,b)

- (a,b) es un punto critico de f
- (a,b) no es un maximo ni un minimo local

11) Si $z=f(x,y)$ tiene un maximo local en (a,b)

¿Qué puede decir acerca de sus derivadas parciales en (a,b)?

Por la prueba de la segunda derivada tenemos que

primo $f_{xx}(a,b)<0$ y $D>0$ con

$D=f_{xx}(a,b)\,f_{yy}(a,b)-[f_{xy}(a,b)]^2$

y ahora cerca de las derivadas parciales tenemos que

$f_x(a,b)=0$ y $f_y(a,b)=0$, entonces (a,b) es un

punto critico

¿Cual es el punto critico de $z=f(x,y)$?

tenemos que sea (a,b) un punto en el dominio de f

(a,b) es un punto critico de f si

$f_x(a,b)=0$ y $f_y(a,b)=0$, o

si una de esas derivadas parciales no existe (se indefine?)