Tarea 3

García Ponce José Camilo
Rivera Hernández Ernesto Yahir
Barke Gómez Alfredo

8 de Mayo 2022

1. 14.1

-Definicio de funcion de 2 variables:
Una funcion f de dos variables es una regla que asigna a cada par ordenado de números reales (x, y) de un conjunto D, un único número real que se donota con $f(x, y)$. El conjunto D es el dominio de f y su rango es el conjunto de valores que toma f, es decir, $\{f(x, y)|(x, y) \in D\}$.

-Definicion de funcion de 3 variables:
Una función de tres variable, f, es una regla que asigna a cada terna ordenada (x, y, z) en un dominio $D \subset \mathbb{R}^3$ un único número real denotado por $f(x, y, t)$. Por ejemplo, la temperatura T en un punto sobre la superficie de la Tierra depende de la longitud x, latitud y del punto y del tiempo t, de modo que puede escribir $T = f(x, y, t)$

-Definicion de curvas de nivel:
Las curvas de nivel de una función f de dos variables son las curvas cuyas ecuaciones son $f(x, y) = k$, donde k es una constante (en el rango de f).

-Definicion de superficie de nivel:
Son las superficies cuyas ecuaciones son $f(x, y, z) = k$, donde k es una constante. Si el punto (x, y, z) se desplaza por una superficie de nivel, el valor de $f(x, y, z)$ sigue estando fijo.

-Diferencia entre superficie y curvas de nivel:
La superficie es un paraboloide abierto hacia abajo y las curvas de nivel de la función son círculos.

• 14.2

- ¿Cómo se define el "límite" de una función de 2 y 3 variables?

Función de dos variables

Se dice que la función de dos variables $f(x, y)$ tiene límite L (número real fijo) cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0) si para todos los puntos de coordenadas (x, y) suficientemente cercanos a (x_0, y_0) los valores $f(x, y)$ son arbitrariamente próximos al número L

Se dice que una función $f(x, y)$ tiene límite L cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0) que se escribe

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

Si para cada número $\epsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que si (x, y) tiende a $(x_0, y_0) \in Dom(f)$ entonces

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \leq \delta \text{ implica } |f(x,y)-L| < \epsilon$$

Funciones de tres variables

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z) = f(x_0,y_0,z_0)$$

Significa que los valores $f(x, y, z)$ tiendan al número L cuando el punto (x_0, y_0, z_0) por cualquier camino dentro del dominio de f

- Explique con un ejemplo el caso en que "No existe" el límite de una función de dos variables

límite de $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ cuando $(x,y) \to (0,0)$

Si nos acercamos por la recta que pasa por el origen $y = mx$ tenemos que

$$f(x, xm) = \frac{x(mx)^2}{x^2+(mx)^4} = \frac{m^2 x}{1+m^4 x^2}$$

Si x tiende a 0 esta función tiende a 0

Si probamos con otro camino que pase por el origen $y = \sqrt{x}$ con $x > 0$ tenemos

$$f(y^2, y) = \frac{y^2 y^2}{(y^2)^2 + y^4} = \frac{y^4}{y^4+y^2} = \frac{1}{2}$$

Como la función tiende a 0 por la recta $y = mx$ y tiende a $1/2$ por la media parábola $y^2 = x$ el límite no existe

- Cómo se define la continuidad para una función de dos variables

Una función real de dos variables $f(x, y)$ es continua en (x_0, y_0) si:

a) existe $f(x_0, y_0)$:

b) existe $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$

c) se verifica que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$

Decimos que f es continua en una región plana D, si es continua en todo punto $(x_0, y_0) \in D$

14.3 Derivadas parciales

- Definición de f_x y f_y para funciones $f(x,y)$

Si f es una función de dos variables, suponemos que se permite que solo x varíe mientras y se mantiene fija, $y=b$, con b una constante. Entonces se está considerando una función de una variable x, $g(x)=f(x,b)$. Ahora si g tiene derivada en a, la llamamos "derivada parcial de f con respecto a x en (a,b)" y se denota con $f_x(a,b)$.

Así $f_x(a,b)=g'(a)$ con, $g(x)=f(x,b)$

y por def de derivada tenemos

$$f_x(a,b)=g'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

De manera analoga, se define la "derivada parcial de f con respecto a y en (a,b)", denotada como $f_y(a,b)$, y se obtiene manteniendo fija a x $(x=a)$ y sacando la derivada ordinaria en b de la funcion $G(y)=f(a,y)$

Así $$f_y(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$$

La notacion de las derivads parciales son

$$f_x(x,y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x,y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

- Para calcularlas es hacer lo siguente

Si $z = f(x,y)$

- Para determinar f_x, consideramos a y como una constante y derivamos $f(x,y)$ con respecto a x (como derivamos una funcion de 1 variable)
- Para determinar f_y, consideramos a x como una constante y derivamos $f(x,y)$ con respecto a y (como derivamos una funcion de 1 variable)

- Interpretación de las derivadas parciales

Sabemos que la ecuación $z = f(x,y)$ representa una superficie S

Si $f(a,b) = c$, por lo tanto en S esta el punto $(a,b,c) = P$

Cuando fijamos $y = b$, tenemos una curva C_1 en la cual el plano vertical $y = b$ interseca S (es decir, C_1 es la traza de S en el plano $y = b$). De manera similar, el plano vetical $x = a$

interseca S en una curva C_2. Veamos que ambas curvas

C_1 y C_2 pasan por el punto P

Veamos que la curva C_1 es la grafica de la funcion $g(x)=f(x,b)$,

por lo tanto la pendiente de su tangente T_1 en P es $g'(a)=f_x(a,b)$

y la curva C_2 es la gráfica de la funcion $G(y)=f(a,y)$,

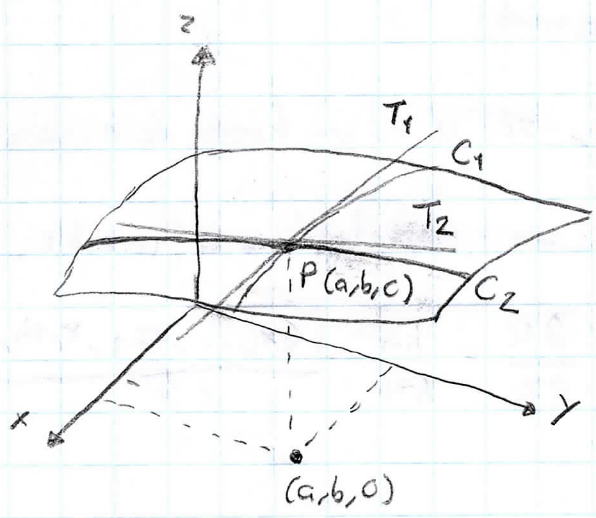
por lo tanto la pendiente de su tangente T_2 en P es $G'(b)=f_y(a,b)$

Entonces, las derivadas parciales $f_x(a,b)$ y $f_y(a,b)$ se peden

interpretar geometricamente como las pendientes de las rectas

tangentes en $P(a,b,c)$ a las trazas C_1 y C_2 en los planos

$y=b$ y $x=a$



Funciones de más de dos variables

Las derivadas parciales también pueden definirse para funciones de 3 o más variables. Para 3 variables, si f es una función de 3 variables x, y, z, entonces su derivada parcial respecto a x se define:

$$f_x(x,y,z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y,z) - f(x,y,z)}{h}$$

y se determina considerando a y y a z como constantes y derivando f(x,y,z) con respecto a x. Y si $w = f(x,y,z)$ entonces $f_x = \partial w / \partial x$ se puede interpretar como la razón de cambio de w con respecto a x cuando y y z se mantienen fijos, pero no podemos interpretar geométricamente.

Ahora en general, si u es una función de n variables, $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ su derivada parcial con respecto a la variable de i-esima x_i es

$$f_i = f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}$$

Derivadas de orden superior

Si f es una funcion de dos variables, sus derivadas parciales f_x y f_y tambien son funciones de dos variables, por lo tanto se pueden considerar sus derivadas parciales $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$ y $(f_y)_y$ llamadas segundas derivadas parciales" de f. Su notacion es

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$f(y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

por lo tanto para determinarlas solo consideramos a una variable como constante y derivamos a la primera derivada parcial con respecto a la otra variable (la que no consideramos constante)

Una cosa interesante es que las derivadas parciales mixtas f_{xy} f_{yx} son iguales para la mayoria de las funciones que podemos encontrar en la practica

El teorema de Clairaut nos da condiciones bajo las cuales puede afirmarse que $f_{xy} = f_{yx}$

⊙ Teorema de Clairaut dice lo siguiente

Supongamos que f es definida en un disco D que contiene el punto (a,b)

Si las funciones f_{xy} y f_{yx} son ambas continuas en D, entonces

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

⊙ $z = f(x,y) = x^3y^5 + 2x^4y$ veamos quienes son $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$

primero veamos quienes son f_x y f_y

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x} x^3y^5 + \frac{\partial}{\partial x} 2x^4y = 3x^2y^5 + 8x^3y$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y} x^3y^5 + \frac{\partial}{\partial y} 2x^4y = 5x^3y^4 + 2x^4$$

ahora veamos quienes son f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} y f_{yy}

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} 3x^2y^5 + \frac{\partial}{\partial x} 8x^3y = 6xy^5 + 24x^2y$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} 3x^2y^5 + \frac{\partial}{\partial y} 8x^3y = 15x^2y^4 + 8x^3$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} 5x^3y^4 + \frac{\partial}{\partial x} 2x^4 = 15x^2y^4 + 8x^3$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} 5x^3y^4 + \frac{\partial}{\partial y} 2x^4 = 20x^3y^3 + 0$$

Podemos ver que se cumple el teorema de Clairaut

ya que $f_{xy} = 15x^2y^4 + 8x^3 = f_{yx}$

Ecuaciones diferenciales parciales

Las derivadas parciales ocurren en ecuaciones diferenciales parciales que expresan ciertas leyes físicas. Ejemplos

- Ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Las soluciones de esta ecuación se llaman "funciones armónicas"

- Ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Describe el movimiento en forma de onda

- Ecuación tridimensional de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Función de producción de Cobb-Douglas

Si la función de producción se denota con $P = P(L, K)$, la derivada parcial $\partial P/\partial L$ es la razón en la que cambia la producción con respecto a la cantidad de mano de obra (productividad marginal del trabajo)

Y la derivada parcial $\partial P/\partial K$ es la razón de cambio de la producción con respecto al capital (productividad marginal del capital)