Examen 1 García Ponce José Camilo

1) A) Demuestre que si n, m y k son numeros naturales tales que

$n+k < m+k$, entonces $n<m$

Por induccion sobre k

- Caso base

Sea $k=1$, supongamos que $n+1 < m+1$ PD $n<m$

Por def de $<$ tenemos que $\exists a \in \mathbb{N}$ tal que $n+1+a = m+1$

por lo visto en la clase de eliminacion (creo) y por la def de $+$

tenemos que $n+a=m$ ya que $1=1$, por lo tanto por def de $<$

tenemos que $n<m$

- Hip de induccion

Supongamos que si tenemos $n+k < m+k$, entonces se cumple $n<m$

- Paso inductivo PD para $s(k)$ o $k+1$

Supongamos que $n+s(k) < m+s(k)$ PD $n<m$

Por def de $+$ tenemos que $n+k+1 < m+k+1$

por la conmutatividad de $+$ y def de sucesor tenemos que

$s(n)+k < s(m)+k$ y por hip de induccion $s(n) < s(m)$

y por def de sucesor $n+1 < m+1$ y por el caso base $n<m$ $\square$

2) Sea R un anillo conmutativo con uno. Demuestre qe si u y v son unidades de R, entonces uv es tambien una unidad

Supongamos que u y v son unidades en R PD uv es una unidad

Por def de unidad tenemos que $\exists\, x, y \in R$ tal que

$$ux = 1 \quad y \quad xy = 1$$

Ahora demostremos qe existe un $z \in R$ tal que $uvz = 1$

recordemos que $1 \cdot 1 = 1$ por la definicion de producto

por lo tanto $(ux) \cdot (vy) = 1$

ahora

$$\begin{aligned}
(ux) \cdot (vy) &= u \cdot (x \cdot vy) && \text{por asociatividad} \\
&= u \cdot (x \cdot yv) && \text{por conmutatividad} \\
&= u \cdot (xy) \cdot v && \text{por asociatividad} \\
&= (uv) \cdot (xy) && \text{por comutatividad}
\end{aligned}$$

y por lo visto arriba $(ux) \cdot (vy) = 1 = (uv) \cdot (xy)$

y por la def de producto tenemos que $xy \in R$ por lo tanto

$uv \cdot xy = 1$ entonces cumple la definicion de unidad

por lo tanto uv es una unidad en R, ya qe $\exists z \in R$

y $z = xy$ $\square$

3) Demuestre que si m, n y p números enteros con $m<n$ y $p<0$

entonces $mp > np$ o $np < mp$

Sean m, n y $p \in \mathbb{Z}$ tales que $m<n$ y $p<0$

def de $<$ tenemos que $\exists c \in \mathbb{Z}$ tal que $m+c=n$ y

si multiplicamos ambos lados de la igualdad por p tenemos

$(m+c)*p = n*p$

$m*p + c*p = n*p$ por distributividad

entonces $m*p = n*p + -(c*p)$ (pasar del otro lado, esto no estoy seguro)

$m*p = n*p + (c*-p)$ por lo visto la clase 28 de feb

y como $p<0$ entonces $-p>0$ y $c \in \mathbb{N}$,

como la multiplicacion de naturales esta cerrada en los naturales

$c*-p \in \mathbb{N}$ por lo tanto tenemos que

$np + (c*-p) = mp$ y $c*-p \in \mathbb{N}$

se cumple la definicion de $<$

entonces $np < mp$ o $mp > np$ $\square$

6) Demuestra que la ecuación $5x+3=2$ no tiene solución en los enteros

Supongamos que si tiene solución para generar una contradicción

Por lo tanto existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $5x+3=2$

multiplicamos ambos lados la igualdad por -1 entonces

tenemos $(-1)\,5x+3=(-1)\,2$ y por la distributividad y

por lo visto la clase 28 feb tenemos que

$$-5x-3=-2$$

ahora sumamos 3 a ambos lados de la igualdad

$$-5x-3+3=-2+3 \Rightarrow -5x=1$$

notemos que $-5x=1$ entonces -5 debe ser una unidad en $\mathbb{Z}$

pero esto no puede pasar ya que 1 y -1 son las únicas unidades

de $\mathbb{Z}$, ahora demostraremos esto (un intento xd)

Proposición sean $a,b \in \mathbb{Z}$ tales que $a\underline{b}=1>0$ y $a,b \neq 0$

(por como esta definido el producto)

caso I) $a,b>0$

Supongamos que $a\neq 1$ entonces $a>1$ y $b>0$

entonces tenemos que $1=ab>b>0$! lo cual es una contradiccion ya que no hay naturales (ni enteros porque la demostracion es la misma creo) entre el 0 y 1 (visto la clase 17 feb) y por el principio del Buen orden, y la contradiccion surgio al suponer que $a \neq 1$, por lo tanto $a = 1$

caso 2) $a, b < 0$

Supongamos que $a \neq -1$ entonces $a < -1$ y $b < 0$, entonces $1 = ab > 0 > b > -1 > a$! lo cual no se puede ya que no hay $\mathbb{Z}$ entre 0 y -1 (un breve intento de demostrar esto adelante)

parentesis

PD no hay $x \in \mathbb{Z}$ tal que $0 > x > -1$

Supongamos que si lo hay, es decir $\exists x \in \mathbb{Z}$ tal que $0 > x > -1$ ahora multipliquemos por x a la desigualdad entonces $0 < x^2 < -x$ (por el ejercicio 3 de la tarea) y esto no puede pasar ya que $x^2, -x \in \mathbb{N}$ y por def' de producto y como $-x \neq 1$ ya que $x \neq -1$ entonces $-x < x^2$, lo cual contradice lo anterior, entonces no hay enteros entre 0 y -1

Y la contradiccion original surgio al suponer que $a \neq -1$, por lo tanto $a = -1$, y con esto concluimos que las unicas unidades en $\mathbb{Z}$ son 1 y -1, por lo tanto -5 no

puede ser una unidad en $\mathbb{Z}$ y por lo tanto

$5x+3=2$ no tiene solucion en $\mathbb{Z}$ $\square$

*ya termine el examen auge en algunas

partes no estoy muy seguro (principalmente la

6), pero intente dar lo mejor de mi :) *

saludos