Examen 2 García Ponce José Carlo

(1) Sea $q \in \mathbb{Z}$ tal que $q \mid (8a-b)$ y $q \mid (8c-d)$, donde $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$. Demuestra que $q \mid (ad-bc)$

Por las hipotesis sabemos que existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tal que

$8a = b + k_1 q$ y existe k_2 tal que $8c = d + k_2 q$

ahora la primera igualdad la multiplicamos por c y la segunda igualdad por a obteniendo

$8ac = bc + k_1 q c$ y $8ac = ad + k_2 q a$

luego despejamos un poco y obtenemos

$-bc = k_1 q c - 8ac$ y $ad = 8ac - k_2 q a$

ahora sumamos las igualdades y tenemos

$$ad - bc = k_1 q c - 8ac + 8ac - k_2 q a$$

$$ad - bc = k_1 q c - k_2 q a$$

$$ad - bc = (k_1 c - k_2 a) q$$

y como el producto y suma (resta) de entero esta en los enteros entonces $k_1 c - k_2 a \in \mathbb{Z}$

por lo tanto por la definicion de divisor concluimos que

$q \mid (ad-bc)$

$\square$

(2) Sean $a,b \in \mathbb{Z}$ y sea $d=(a,b)=ar+bs$, con $r,s \in \mathbb{Z}$

Demuestre que r y s son primos relativos

Sea $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k|r$ y $k|s$ PD $kd|d$.

sabemos que $d|a$ y $k|r$ por lo tanto $kd|ar$

y ademas como $d|b$ y $k|s$ entonces $kd|bs$

todo esto por lo visto en clase y por ultimo

como $kd|ar$ y $kd|bs$ entonces $kd|ar+bs$

y como $d=ar+bs$ entonces $kd|d$, por lo tanto

debe ser menor igual a 1 $k \leq 1$, entonces como

$k|r$ y $k|s$ sabemos que el maximo comun divisor de

r y s debe ser 1, por lo tanto $(r,s)=1$

y por la definicion de primos relativos concluimos que

r y s son primos relativos

$\square$

(3) Si el siguiente sistema de congruencias tiene solucion, encuentra su solucion positiva minima

$$\begin{cases} x \equiv 8 \bmod 3 \\ x \equiv 3 \bmod 5 \\ x \equiv 4 \bmod 2 \end{cases}$$

si tiene solucion ya que $(3,5,2)=1$

resolver $m = 3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$

$$\begin{array}{lll} m/m_j \downarrow & b_j \downarrow & a_j \downarrow \\ (10,3)=1 = 10(1)+3(-3) & b_1 = 1 & 8 \\ (6,5)=1=6(1)+5(-1) & b_2 = 1 & 3 \\ (15,2)=1=15(1)+2(-7) & b_3 = 1 & 4 \end{array}$$

$x_0 = 10 \cdot 1 \cdot 8 + 6 \cdot 1 \cdot 3 + 15 \cdot 1 \cdot 4 = 80 + 18 + 60 = 158$

$x_i = \sum_{j=1}^{k} m/m_j \, b_j \, a_j$

las soluciones son $x = 158 + 30k$

ahora busquemos la minima positiva

observemos que si $k=-5$ entonces $158 + 30(-5) = 158 - 150 = 8$

es la solucion minima positiva

entonces $x = 8$

(4) Encuentra todas las unidades de los anillos $\mathbb{Z}_{10}$ y $\mathbb{Z}_{11}$

como vimos en la clase del 2/5/22 para encontrar las unidades en $\mathbb{Z}_n$ necesitamos encontrar los a (entre 0 y $n-1$) tal que son primos relativos con n

- $\mathbb{Z}_{10}$ veamos que números son primos relativos con 10

$(9,10)=1$ ✓ $(5,10)=5$ ✗ $(1,10)=1$ ✓

$(8,10)=2$ ✗ $(4,10)=2$ ✗ $(0,10)=$ no se puede?

$(7,10)=1$ ✓ $(3,10)=1$ ✓

$(6,10)=2$ ✗ $(2,10)=2$ ✗

entonces observemos que las unidades son $1, 3, 7$ y 9

- $\mathbb{Z}_{11}$ veamos que números son primos relativos con 11

$(10,11)=1$ ✓ $(6,11)=1$ ✓ $(2,11)=1$ ✓

$(9,11)=1$ ✓ $(5,11)=1$ ✓ $(1,11)=1$ ✓

$(8,11)=1$ ✓ $(4,11)=1$ ✓ $(0,11)=$ no se puede?

$(7,11)=1$ ✓ $(3,11)=1$ ✓

entonces observemos que las unidades son $1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$

y son todas ya que 11 es primo

mcd = 1

(5) Sea $n \in \mathbb{N}$, utilizando el algoritmo de Euclides exprese el mcd de $4n^2+2n-40$ y $2n+7$ como combinación lineal de ellos

$(4n^2+2n-40) = (2n+7)\cdot(-6) + (4n^2+14n+2)$ ✓

$(2n+7) = (4n^2+14n+2)\cdot(0) + (2n+7)$ /

$(4n^2+14n+2) = (2n+7)\cdot(2n) + (2)$ ✓

$(2n+7) = (2)\cdot(n) + (7)$ /

$(2) = (7)\cdot(0) + (2)$ /

$(7) = (2)\cdot(3) + (1)$ /

$(2) = (1)\cdot(2)$ / entonces el mcd es 1

$$
\begin{aligned}
1 &= 7 + 2(-3) \\
&= 7 + ((2+7(0))(-3)) \\
&= 7 + 2(-3) \quad \text{xd} \\
&= (2n+7+2(-n)) + 2(-3) \\
&= (2n+7) + 2(-n) + 2(-3) \\
&= (2n+7)(1) + 2(-n-3) \\
&= (2n+7)(1) + (4n^2+14n+2+2n+7(-2n))(-n-3) \\
&= (2n+7)(1) + (4n^2+14n+2)(-n-3) + (2n+7)(2n^2+6n) \\
&= (2n+7)(2n^2+6n+1) + (4n^2+14n+2)(-n-3) \\
&= (2n+7)(2n^2+6n+1) + (4n^2+2n-40 + 2n+7(6))(-n-3) \\
&= (2n+7)(2n^2+6n+1) + (4n^2+2n-40)(-n-3) + (2n+7)(-6n-18) \\
&= (2n+7)(2n^2-17) + (4n^2+2n-40)(-n-3)
\end{aligned}
$$

la combi lineal

$$= (2n+7)(2n^2-17) + (4n^2+2n-40)(-n-3) = 1$$