Examen 3

García Ponce
José Camilo

1) Calcula las raíces cuartas de -16

primero veamos a -16 en su forma polar

$z = -16$ $\qquad$ $z = 16 \text{ cis } 180°$

ahora para las raíces n-ésimas tenemos que

$$\omega_k = \sqrt[n]{r} \text{ cis } \left(\frac{\theta}{n} + k\frac{360°}{n}\right) \qquad \text{con } 0 \leq k \leq n-1$$

entonces

$$z_0 = \sqrt[4]{16} \text{ cis } \left(\frac{180°}{4} + 0\,\frac{360°}{4}\right) = 2 \text{ cis } 45° = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$$

$$z_1 = \sqrt[4]{16} \text{ cis } \left(\frac{180°}{4} + 1\,\frac{360°}{4}\right) = 2 \text{ cis } 135° = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$$

$$z_2 = \sqrt[4]{16} \text{ cis } \left(\frac{180°}{4} + 2\,\frac{360°}{4}\right) = 2 \text{ cis } 225° = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$$

$$z_3 = \sqrt[4]{16} \text{ cis } \left(\frac{180°}{4} + 3\,\frac{360°}{4}\right) = 2 \text{ cis } 315° = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$$

2) Demuestra que $\omega \in \mathbb{C}$, con $\omega \neq 1$ es una raiz n-esima de 1 si y solo si $\bar{\omega}$ lo es

primero recordemos que $1 = 1 \text{cis}\, 0°$ por lo tanto sus raices n-esimas son de la forma $z_k = 1 \text{cis}\, k \frac{360°}{n}$ con $0 \leq k \leq n-1$

tambien recordemos que las raices n-esimas de 1 son los vertices del poligono regular de n-lados inscrito en el circulo de radio 1 con centro en (0,0) (si $n > 2$, ya que con dos es una linea)

entonces veamos los casos

• caso 1)

si $n=2$ entonces veamos que las raices son $1 \text{cis}\, 0° = 1$ y $1 \text{cis}\, 90° = -1$ y como son Reales entonces su conjugado es el mismo por lo tanto se cumple

• caso 2)

si n es par y $n > 2$, si esto pasa vamos a tener un poligono con numero de lados par, ahora recordemos que para toda n tenemos que $1 \text{cis}\, 0° = 1$ sera una raiz z_0 entonces podemos cortar al poligono a la mitad por eje de las x y como es un poligono regular tenemos que es simetrico entonces para las raíces z_i tendremos que se encuentran

del lado opuesto (por simetría!) de las raíces z_{n-i}

para $i \mid 1 \leq i \leq n-1$ (excepto para $\frac{n}{2}$), entonces

por como definimos gráficamente el conjugado (reflejo en el eje real) tenemos que

z_i y z_{n-i} son conjugado entre ellos, ahora para

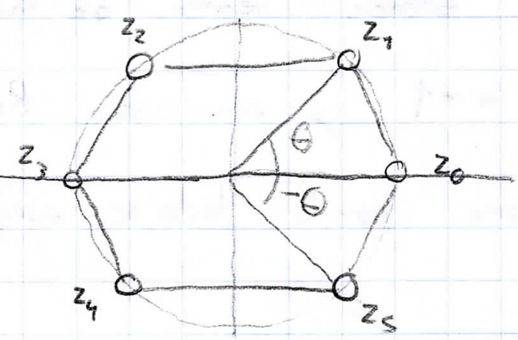
el caso de $z_0 = 1$ y para $z_{n/2}$ tenemos que va a ser

Reales, ya que $z_{n/2} = 1 \operatorname{cis} \frac{n}{2} \cdot \frac{360}{n} = 1 \operatorname{cis} 180^\circ$

entonces ellos mismos son sus conjugados, por lo tanto si una raíz está también su conjugado

ejemplo

para $n=6$



tenemos que z_0 y z_3 son sus propios conjugados

y z_2 y z_4 son conjugado entre sí

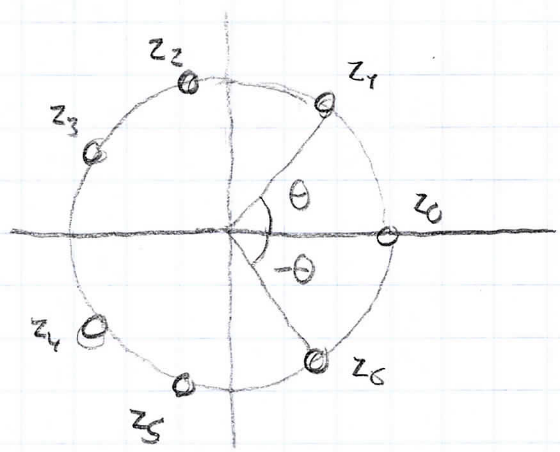
y z_1 y z_5 son conjugados entre sí

• caso 3)

si n es impar y $n>2$, si esto pasa vamos a tener un polisono con numero de lados impar, como vimos en el caso anterior $1 \cos 0° = 1 = z_0$ es una raiz, ahora si cortamos el polisono por el eje de las x tendremos dos mitades simetricas, por lo tanto para las raices z_i (con $1 \leq i \leq n-1$) tendremos que se encuentran del lado opuesto (simetricamente?) de las raices z_{n-i}, y por como es la definicion de conjugado y como se ve geometricamente (reflexion sobre el eje real) tenemos que z_i y z_{n-i} son conjugados entre ellos, ahora para $z_0 = 1$ ya vimos que su propio conjugado entonces y si una raiz esta debe estar su conjugado

ejemplo

para $n = 7$



entonces z_1 y z_6 son conjugados entre si

z_2 y z_5 son conjugados entre si

z_3 y z_4 son conjugados entre si

y z_0 es su propio conjugado

*en esta demostracion no estoy muy seguro

3) Resuelve la ecuacion $2z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = 0$ para $z \in \mathbb{C}$

tenemos que $2z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = 0$

primero factorizamos a la ecuacion

$$2z^3 - 2z^2 - z^2 + 2z + z - 1 = 0$$

$$2z^3 - z^2 - 2z^2 + z + 2z - 1 = 0$$

$$z^2(2z-1) - z(2z-1) + 1(2z-1) = 0$$

$$(2z-1)(z^2 - z + 1) = 0$$

entonces $(2z-1) = 0$ o $(z^2 - z + 1) = 0$

si $2z - 1 = 0$ entonces

$$2z = 1 \Rightarrow z_1 = \frac{1}{2}$$

si $z^2 - z + 1 = 0$ entonces

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

ahora recordemos que $-3 = 3 \operatorname{cis} 180°$ entonces sus raices cuadradas

son $\sqrt{3} \operatorname{cis} 90° \to 0 + \sqrt{3}i$ y $\sqrt{3} \operatorname{cis} 270° \to 0 - \sqrt{3}i$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

entons

$$z_2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2+0i}$$

$$z_2 = \frac{2}{4} + \frac{2\sqrt{3}}{4}i$$

$$z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_3 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2+0i}$$

$$z_3 = \frac{2}{4} + \frac{-2\sqrt{3}}{4}i$$

$$z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

entonces

las soluciones son :

$$z_1 = \frac{1}{2}$$

$$z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

4) Si ω es una raiz n-esima de 1 con $\omega \neq 1$ demuestra que

que $1+2\omega+3\omega^2+\dots+n\omega^{n-1} = -\frac{n}{1-\omega}$

igualemos el lado derecho a $z \in \mathbb{C}$ un complejo y veamos quien es z

$$1+2\omega+3\omega^2+\dots+n\omega^{n-1} = z \qquad \text{equacion } 1$$

$$\omega(1+2\omega+3\omega^2+\dots+n\omega^{n-1}) = \omega(z)$$

$$\omega+2\omega^2+3\omega^3+\dots+n\omega^n = \omega z \qquad \text{equacion } 2$$

ahora a la equacion 1 le restamos la 2

$$1+\omega+\omega^2+\dots+\omega^{n-1}-n\omega^n = z-\omega z$$

$$1+\omega+\omega^2+\dots+\omega^{n-1}-n = z-\omega z \qquad \text{ya que } \omega^n = 1$$

$$1+\omega+\omega^2+\dots+\omega^{n-1} = z-\omega z+n = z(1-\omega)+n$$

y por la suma geometrica tenemos

$$\frac{\omega^n-1}{\omega-1} = \frac{1-1}{\omega-1} = \frac{0}{\omega-1} = 0 = z(1-\omega)+n$$

$$-n = z(1-\omega)$$

$$\frac{-n}{1-\omega} = z$$

$\square$

5) Sea ω una raiz quita de 1 Sea $z = \omega + \frac{1}{\omega}$ Demuestra

que $z^2 + z = 1$

Primero veamos quienes son las 5 raíces quintas de 1 $\quad 1 = 1 \text{cis } 0^\circ$

$\omega_0 = 1 \text{ cis } 0^\circ = 1 + 0i$

$\omega_1 = 1 \text{ cis } 72^\circ = \cos(72^\circ) + \sin(72^\circ)i$

$\omega_2 = 1 \text{ cis } 144^\circ = \cos(144^\circ) + \sin(144^\circ)i$

$\omega_3 = 1 \text{ cis } 216^\circ = \cos(216^\circ) + \sin(216^\circ)i$

$\omega_4 = 1 \text{ cis } 288^\circ = \cos(288^\circ) + \sin(288^\circ)i$

entonces recordemos que $\frac{1}{\omega} = \omega^{-1}$ y si $z = a + bi \Rightarrow z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{-b}{a^2+b^2} i$

$\omega_0^{-1} = \frac{1}{1} + \frac{-0}{1} i = 1$

$$\left.\begin{array}{l}
\omega_1^{-1} = \cos(72) + -\sin(72)i = \cos(72) - \sin(72)i \\
\omega_2^{-1} = \cos(144) + -\sin(144)i = \cos(144) - \sin(144)i \\
\omega_3^{-1} = \cos(216) + -\sin(216)i = \cos(216) - \sin(216)i \\
\omega_4^{-1} = \cos(288) + -\sin(288)i = \cos(288) - \sin(288)i
\end{array}\right\} \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

entonces veamos quienes son $z = w + \frac{1}{w} = w + w^{-1}$

$z_0 = 1 + 1 = 2$

$z_1 = \cos(72) + \sin(72)i + \cos(72) - \sin(72)i = 2\cos(72)$

$z_2 = \cos(144) + \sin(144)i + \cos(144) - \sin(144)i = 2\cos(144)$

$z_3 = \cos(216) + \sin(216)i + \cos(216) - \sin(216)i = 2\cos(216)$

$z_4 = \cos(288) + \sin(288)i + \cos(288) - \sin(288)i = 2\cos(288)$

ahora veamos si se cumple $z^2 + z = 1$ (usando la magica calculadora)

- caso 0) $(2)^2 + 2 = 4 + 2 = 6$ no se cumple
- caso 1) $(2\cos(72))^2 + 2\cos(72) = 0.381 + 0.618 = 1$ se cumple
- caso 2) $(2\cos(144))^2 + 2\cos(144) = 2.618 + -1.618 = 1$ se cumple
- caso 3) $(2\cos(216))^2 + 2\cos(216) = 2.618 + -1.618 = 1$ se cumple
- caso 4) $(2\cos(288))^2 + 2\cos(288) = 0.381 + 0.618 = 1$ se cumple

por lo tanto se cumple que $z^2 + z = 1$ para

todas las raices quintas de 1, excepto 1