Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

García Ponce
José Camilo

Tarea # 2
Matemáticas para las Ciencias Aplicadas III
Fecha de Entrega 14 de Septiembre del 2022

Todos los problemas deben ser resueltos con procedimientos claros y limpios. Cada problema tiene que ir con su representación gráfica a mano o graficadora, pero debe ser explícito el dominio D. Todos los problemas valen lo mismo

1. Dibujar los dominios e intercambiar el orden de integración.

   a) $\int_0^1 \int_0^{x^{2/3}} f(x,y)dydx + \int_1^2 \int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x,y)dydx$

   b) $\int_0^1 \int_y^{2-y} f(x,y)dxdy$ en hojitas

   c) $\int_{-2}^4 \int_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1} f(x,y)dxdy$

2. Determinar los límites de integración.

   a) $\iint_D f(x,y)dxdy$, donde D es el paralelogramo que tiene por vértices a los puntos $(0,0)$, $(4,2)$, $(5,4)$ y $(1,2)$.

   b) $\iint_D f(x,y)dydx$, donde D está delimitada por $x=y^2$ y $y=x^2$. en hojitas

3. Calcular las siguientes integrales y dibujar el dominio de integración.

   a) $\iint_D \frac{y}{x^5+1}dydx$, donde $D=\{(x,y)|\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x^2\}$.

   b) $\iint_D xydydx$, donde D es el triángulo con vértices en $(1,1)$, $(4,1)$ y $(1,2)$. en hojitas

   c) $\iint_D (1+2y)dxdy$, donde D es la región delimitada por $x=1$, $y-x^2=0$ y $y-x=0$.

García Ponce José Camilo

① Dibuja los dominios e intercambia el orden de integración

a) $$\int_0^1\int_0^{x^{2/3}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^2\int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x,y)\,dy\,dx$$ Tipo ①

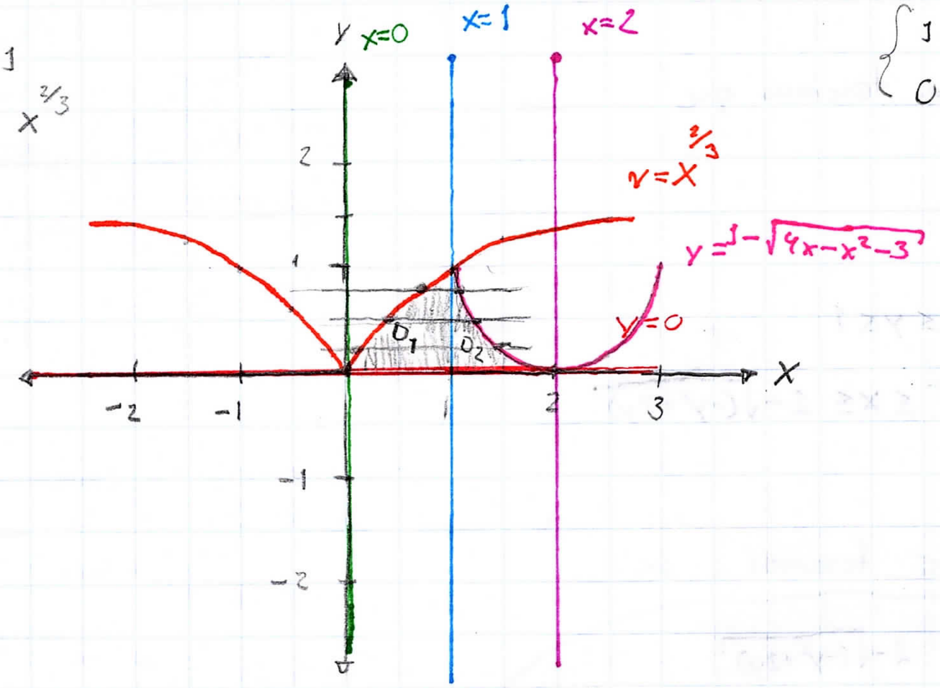
Dominios

Dominio 1

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x^{2/3} \end{cases}$$

Dominio 2

$$\begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 1-\sqrt{4x-x^2-3} \end{cases}$$



Como esta en tipo ① pasamos a tipo ②

y independiente , x dependiente

$$\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ ?? \le x \le ?? \end{cases}$$

$y = x^{2/3}$

$y^3 = x^2$

$x = \pm y\sqrt{y}$ tomamos ⊕ positivo

$y = 1-\sqrt{4x-x^2-3}$

$\sqrt{4x-x^2-3} = 1-y$

$4x-x^2-3 = 1-2y+y^2$

$4x-x^2 = 4-2y+y^2$

$4x-x^2+2y-y^2=4$

$4x-x^2+2y-y^2-4=0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2-4(-1)(-y^2+2y-4)}}{2(-1)}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{(4\cdot 4)+4(-y^2+2y-4)}}{-2}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4(4-y^2+2y-4)}}{-2}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4(\cancel{4} - y^2 + 2y - 4)}}{-2}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4(-y^2+2y)}}{-2}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4}\sqrt{(-y^2+2y)}}{-2}$$

$$x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{(-y^2+2y)}}{-2}$$

$$x = \frac{\cancel{-2}\left(2 \pm \sqrt{(-y^2+2y)}\right)}{\cancel{-2}}$$

$$x = 2 \pm \sqrt{(-y^2+2y)}$$

tomamos lo negativo

entonces tenemos que

$$\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y\sqrt{y} \le x \le 2 - \sqrt{(-y^2+2y)} \end{cases}$$

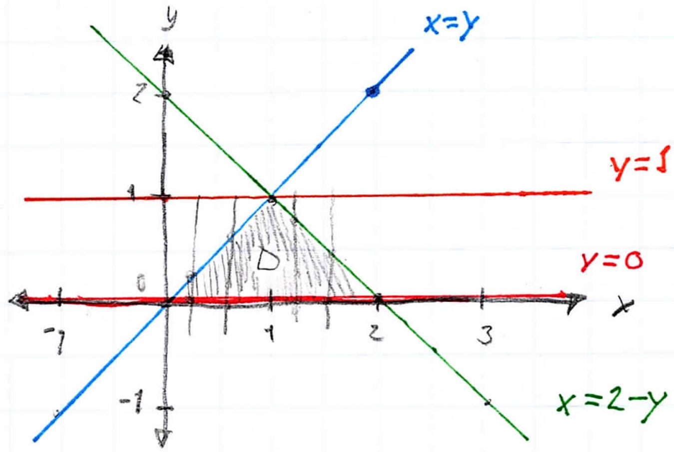
y así tenemos

$$\int_0^1 \int_{y\sqrt{y}}^{2-\sqrt{(-y^2+2y)}} f(x,y)\,dx\,dy$$

b) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{2-y} f(x,y)\,dx\,dy$ tipo ②

Dominio

$$\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y \le x \le 2-y \end{cases}$$



como es de tipo ② pasamos a tipo ①

pero notemos que vamos a tener que dividir el dominio en 2

Dominio 1

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$$

Dominio 2

$$\begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2-x \end{cases}$$

$x = 2-y$

$y = 2-x$

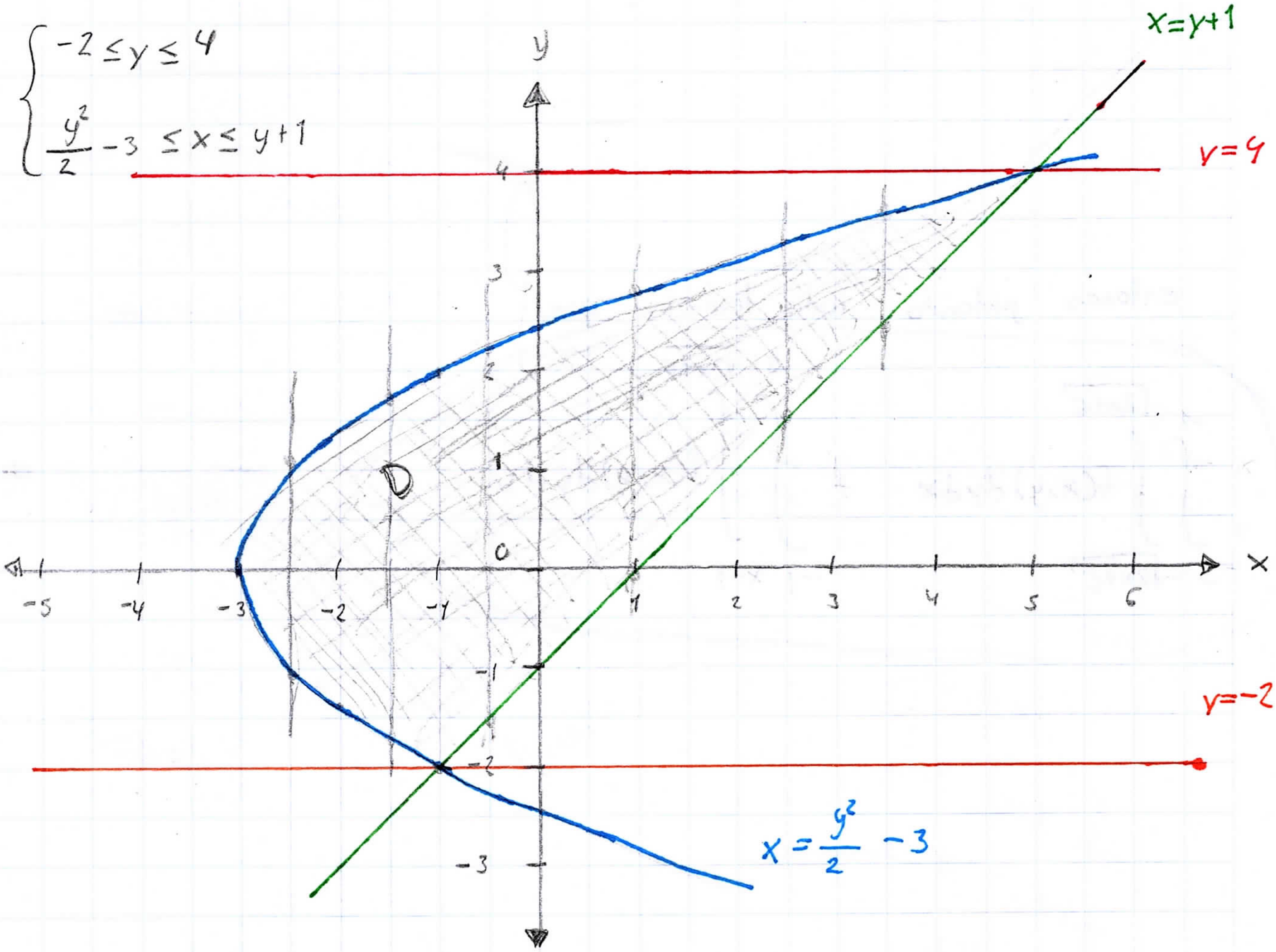
entonces juntando tenemos que es

$$\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x,y)\,dy\,dx$$

c) $\displaystyle\int_{-2}^{4}\int_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1} f(x,y)\,dx\,dy$ tipo 2

Dominio

$$\begin{cases} -2 \le y \le 4 \\ \frac{y^2}{2}-3 \le x \le y+1 \end{cases}$$



como es de tipo 2 pasamos a tipo 1

pero notemos que vamos a tener que dividir el dominio en 2

Dominio 1
$$\begin{cases} -3 \le x \le -1 \\ -\sqrt{2x+6} \le y \le \sqrt{2x+6} \end{cases}$$

$x=\frac{y^2}{2}-3$

$\frac{y^2}{2}=x+3$

$y^2=2x+6$

$y=\pm\sqrt{2x+6}$

la funcion arriba sera positiva

la funcion abajo sera negativa

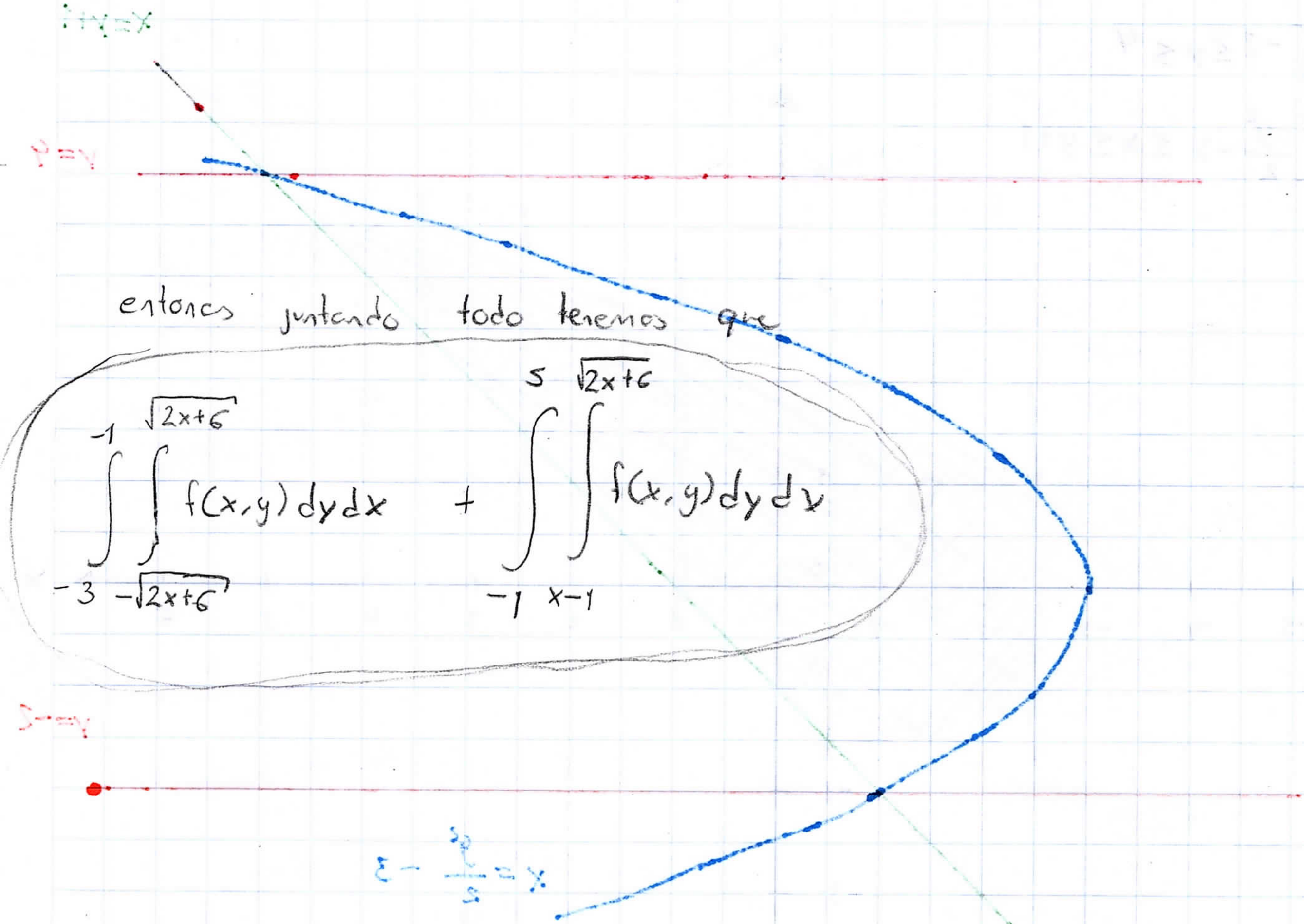
Dominio 2

$$\begin{cases} -1 \le x \le 5 \\ x-1 \le y \le \sqrt{2x+6} \end{cases}$$

aqui tomamos $y = \sqrt{2x+6}$ porque queremos la parte de arriba

$x = y+1$

$y = x-1$



entonces juntando todo tenemos que

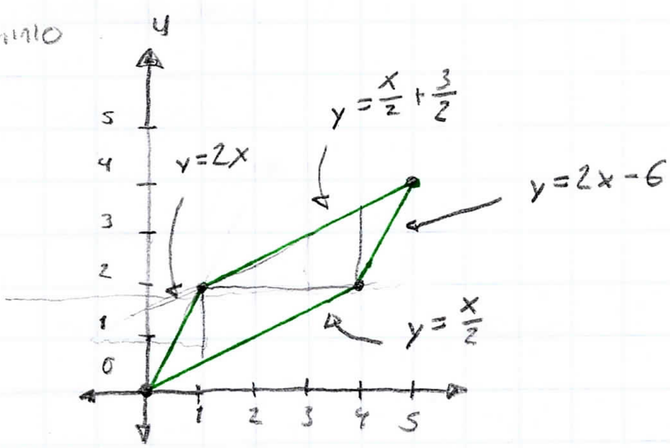
$$\int_{-3}^{-1}\int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_{-1}^{5}\int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} f(x,y)\,dy\,dx$$

② Determinar los límites de integración

a) $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, donde D es el paralelogramo con vértices

$(0,0)$, $(4,2)$, $(5,4)$ y $(1,2)$

Dominio



Tipo ②

Dividimos en 2 dominios

$$D_1 \begin{cases} 0 \le y \le 2 \\ \frac{y}{2} \le x \le 2y \end{cases}$$

$$D_3 \begin{cases} 2 \le y \le 4 \\ 2y-3 \le x \le \frac{y}{2}+3 \end{cases}$$

$y=\frac{x}{2} \Rightarrow x=2y$

$y=2x \Rightarrow x=\frac{y}{2}$

$y=2x-6 \Rightarrow x=\frac{y}{2}+3$

$y=\frac{x}{2}+\frac{3}{2} \Rightarrow x=2y-3$

$$\int_0^2\int_{\frac{y}{2}}^{2y} f(x,y)\,dx\,dy + \int_2^4\int_{2y-3}^{\frac{y}{2}-3} f(x,y)\,dx\,dy$$

Tipo ①

Dividimos en 3 dominios

$$D_1 \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ \frac{x}{2} \le y \le 2x \end{cases}$$

$$D_2 \begin{cases} 1 \le x \le 4 \\ \frac{x}{2} \le y \le \frac{x}{2}+\frac{3}{2} \end{cases}$$

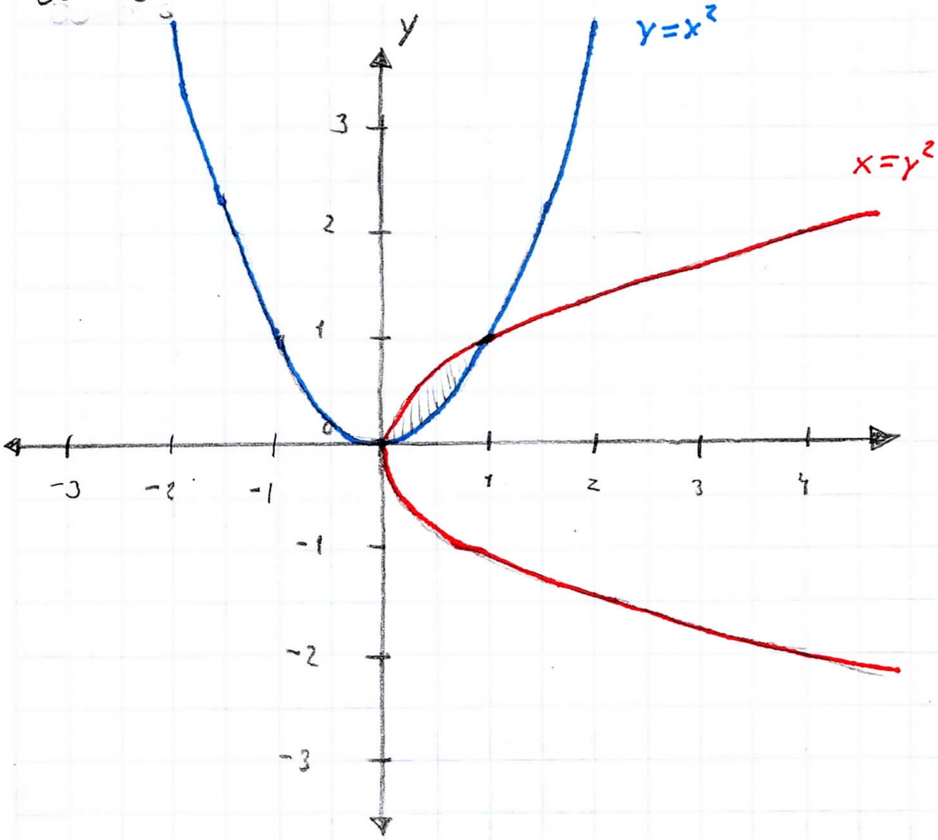
$$D_3 \begin{cases} 4 \le x \le 5 \\ 2x-6 \le y \le \frac{x}{2}+\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\int_0^1\int_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^4\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}+\frac{3}{2}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_4^5\int_{2x-6}^{\frac{x}{2}+\frac{3}{2}} f(x,y)\,dy\,dx$$

b) $\iint_D f(x,y)\,dy\,dx$, donde D está delimitada por

$x = y^2 \quad y = x^2$

DOMINIO



Tipo 1

$x = y^2 \rightarrow y = \pm\sqrt{x}$

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$$

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx$$

Tipo 2

$y = x^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{y}$

$$\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y^2 \le x \le \sqrt{y} \end{cases}$$

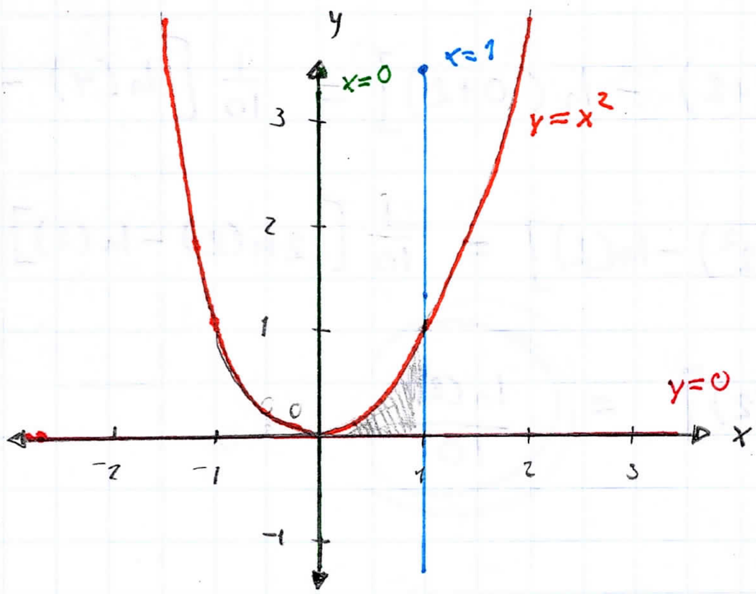
$$\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dy\,dx$$

③ Calcula la integral y dibuja el dominio de integración

a) $\iint_D \frac{y}{x^5+1}\,dy\,dx$, donde $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\}$

Dominio

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x^2 \end{cases}$$



hacemos tipo ①

$$\int_0^1 \underbrace{\int_0^{x^2} \frac{y}{x^5+1}\,dy}\,dx$$

$$\varnothing(x) = \int_0^{x^2} \frac{y}{x^5+1}\,dy = \frac{1}{x^5+1}\int_0^{x^2} y\,dy = \frac{1}{x^5+1}\left[\frac{y^2}{2}\Big|_0^{x^2}\right]$$

$$= \frac{1}{x^5+1}\left[\frac{(x^2)^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] = \frac{1}{x^5+1}\left[\frac{x^4}{2}\right] = \frac{x^4}{2x^5+2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \varnothing(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^4}{2x^5+2}\,dx$$

sustitución $u = 2x^5+2$

$du = 10x^4\,dx$

tabla de integral

$$= \int_0^1 \frac{1}{10}\,\frac{1}{4}\,du = \frac{1}{10}\int_0^1 \frac{1}{4}\,du = \frac{1}{10}\left[\ln(|u|)\Big|_{??}^{??}\right]$$

$$= \frac{1}{10}\left[\ln(|2x^5+2|)\Big|_0^1\right] = \frac{1}{10}\left[\ln(|2(1)^5+2|) - \ln(|2(0)^5+2|)\right]$$

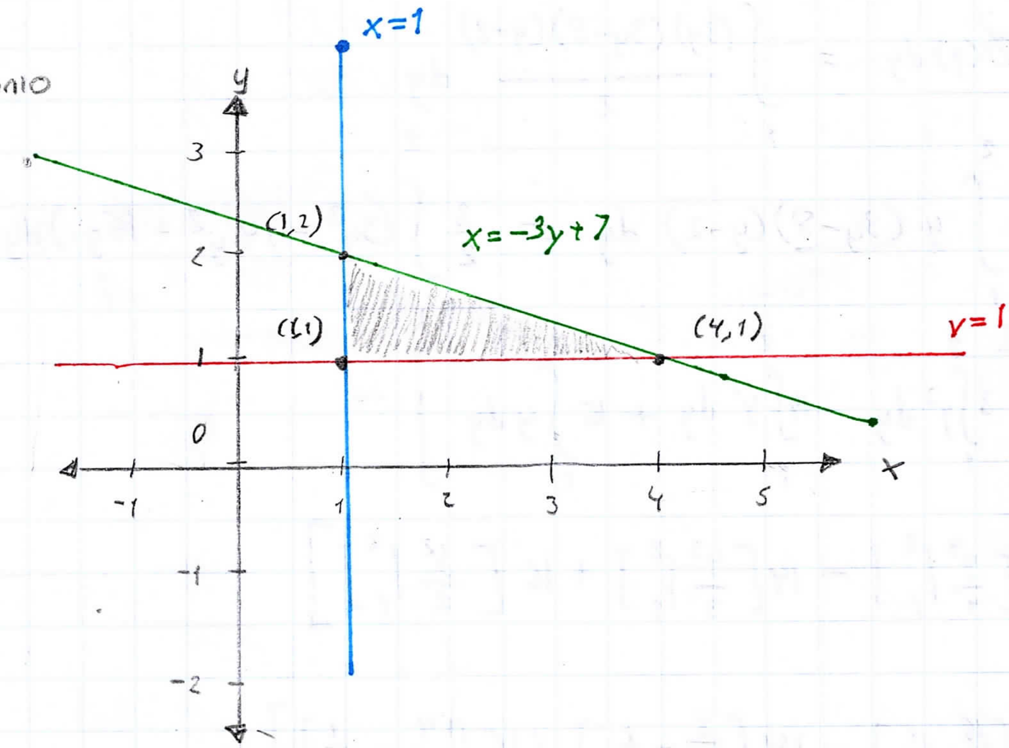
$$= \frac{1}{10}\left[\ln(2+2) - \ln(0+2)\right] = \frac{1}{10}\left[\ln(4) - \ln(2)\right]$$

$$= \frac{1}{10}\left[\ln(2^2) - \ln(2)\right] = \frac{1}{10}\left[2\ln(2) - \ln(2)\right]$$

$$= \frac{1}{10}\left[\ln(2)\right] = \frac{\ln(2)}{10}$$

b) $\iint_D (xy)\,dy\,dx$, donde D es el triangulo con vertices (1,1), (4,1) y (1,2)

Dominio



hacemos tipo ②

$$\begin{cases} 1 \le y \le 2 \\ 1 \le x \le -3y+7 \end{cases}$$

$$\int_1^2 \int_1^{-3y+7} (xy)\,dx\,dy$$

$$\varnothing(y) = \int_1^{-3y+7} (xy)\,dx = y \int_1^{-3y+7} x\,dx = y\left[\frac{x^2}{2} \Big|_1^{-3y+7} \right]$$

$$= y\left[\frac{(-3y+7)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2} \right] = y\left[\frac{9y^2-42y+49}{2} - \frac{1}{2} \right] = y\left[\frac{9y^2-42y+48}{2} \right]$$

$$= y\left[\frac{3(3y-8)(y-2)}{2}\right] = \frac{(3y)(3y-8)(y-2)}{2}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \phi(y)\,dy = \int_1^2 \frac{(3y)(3y-8)(y-2)}{2}\,dy$$

$$= \frac{3}{2}\int_1^2 y(3y-8)(y-2)\,dy = \frac{3}{2}\int_1^2 (3y^3 - 14y^2 + 16y)\,dy$$

$$= \frac{3}{2}\left[3\int_1^2 y^3\,dy - 14\int_1^2 y^2\,dy + 16\int_1^2 y\,dy\right]$$

$$= \frac{3}{2}\left[3\left[\frac{y^4}{4}\Big|_1^2\right] - 14\left[\frac{y^3}{3}\Big|_1^2\right] + 16\left[\frac{y^2}{2}\Big|_1^2\right]\right]$$

$$= \frac{3}{2}\left[3\left[\frac{16}{4}-\frac{1}{4}\right] - 14\left[\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right] + 16\left[\frac{4}{2}-\frac{1}{2}\right]\right]$$

$$= \frac{3}{2}\left[3\left[\frac{15}{4}\right] - 14\left[\frac{7}{3}\right] + 16\left[\frac{3}{2}\right]\right]$$

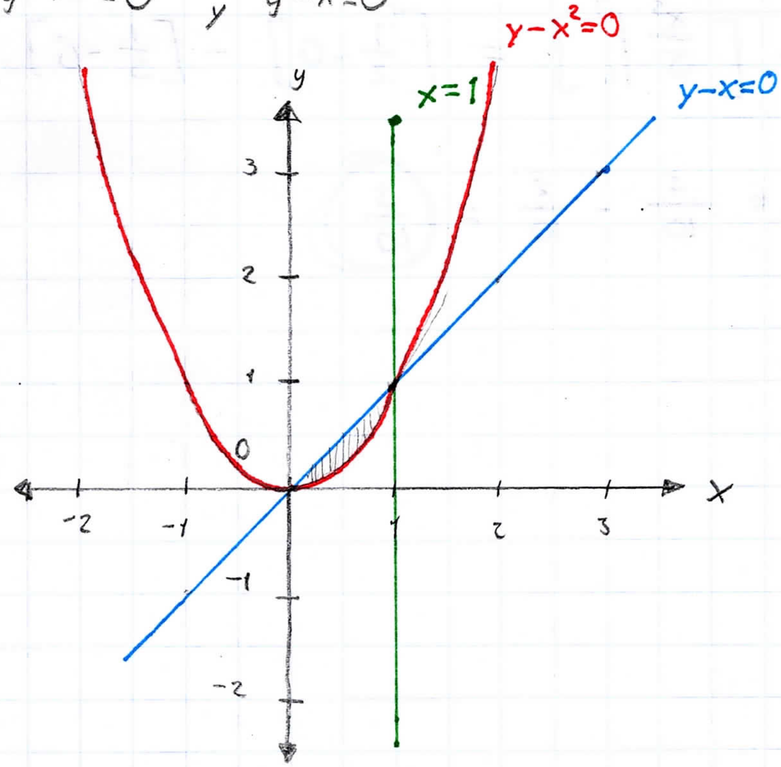
$$= \frac{3}{2}\left[\frac{45}{4} - \frac{98}{3} + \frac{48}{2}\right] = \frac{3}{2}\left[\frac{135}{12} - \frac{392}{12} + \frac{288}{12}\right]$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{31}{12}\right] = \frac{93}{24} = \frac{31}{8}$$

c) $\iint_D (1+2y)\,dx\,dy$, donde D es la región delimitada por

$x=1$, $y-x^2=0$ y $y-x=0$

Dominio



hacemos tipo 1

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le x \end{cases}$$

$y-x^2=0 \rightarrow y=x^2$

$y-x=0 \rightarrow y=x$

$$\int_0^1 \underbrace{\int_{x^2}^{x} (1+2y)\,dy}\,dx$$

$$\phi(x) = \int_{x^2}^{x} (1+2y)\,dy = \int_{x^2}^{x} dy + 2\int_{x^2}^{x} y\,dy = \left[y \Big|_{x^2}^{x} \right] + 2\left[\frac{y^2}{2} \Big|_{x^2}^{x} \right]$$

$$= \left[x - x^2\right] + 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2}\right] = x - x^2 + x^2 - x^4 = x - x^4$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \varnothing(x)\,dx = \int_0^1 (x - x^4)\,dx = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^4\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right] - \left[\frac{x^5}{5}\Big|_0^1\right] = \left[\frac{1}{2} - 0\right] - \left[\frac{1}{5} - 0\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{5}{10} - \frac{2}{10} = \frac{3}{10}$$