UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

Tarea 2 (Probabilidad Condicional e Independencia)

Profesor:
Jaime Vázquez Alamilla
Ayudantes:
Brian Pérez Gutiérrez
Miguel Angel Fernández Castresana
Alumnos:
Carlos Emilio Castañon Maldonado **319053315**
José Camilo García Ponce **319210536**
Claudio Naim De La Cruz Márquez **318151645**
Moisés Abraham Lira Rivera **319029930**

Semestre 2023-1

Probabilidad I

Tarea 2 (Probabilidad Condicional e Independencia)
Fecha de entrega: Viernes 30 Septiembre

1 **Diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Demuestre o de un contraejemplo:**

a) $\mathbb{P}(A|B) \leq \mathbb{P}(A)$
Esto es no es cierto siempre, veamos un contraejemplo
Sea $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
Sea $\mathbb{F}$ = el conjunto potencia de Ω
Sea $\mathbb{P}$ definida como, para todo $A \in \mathbb{F}$, $\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$
Sean los siguientes eventos $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ y por lo tanto $A \cap B = \{3, 4\}$
Entonces $\mathbb{P}(A) = \frac{5}{10}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{10}$ y $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{10}$
Entonces $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$, por la definición de probabilidad condicional
Reemplazamos los valores $\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$
Ahora notemos que $\frac{2}{3} \geq \frac{5}{10}$ entonces $\mathbb{P}(A|B) \geq \mathbb{P}(A)$

b) Si $\mathbb{P}(A|B) \leq \mathbb{P}(A)$, entonces $\mathbb{P}(B|A) \leq \mathbb{P}(B)$
Aquí tenemos dos casos cuando $\mathbb{P}(A) \neq 0$ y cuando $\mathbb{P}(A) = 0$

Caso 1: aquí si se cumple
Supongamos que $\mathbb{P}(A|B) \leq \mathbb{P}(A)$ y que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ Luego $\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} \leq \mathbb{P}(A)$, por la definición de probabilidad condicional
Ahora $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, al multiplicar ambos lados por $\mathbb{P}(B)$ ya que $\mathbb{P}(B) \geq 0$ por el segundo axioma de Kolmogorov para $\mathbb{P}$
Después $\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} \leq \mathbb{P}(B)$, al dividir ambos lados por $\mathbb{P}(A)$ ya que $\mathbb{P}(A) \geq 0$ por el segundo axioma de Kolmogorov para $\mathbb{P}$
Posteriormente $\frac{\mathbb{P}(B\cap A)}{\mathbb{P}(A)} \leq \mathbb{P}(B)$, por la conmutatividad de la unión
Y por ultimo $\mathbb{P}(B|A) \leq \mathbb{P}(B)$, por la definición de probabilidad condicional $\square$

Caso 2: aquí no se cumple, veamos un contraejemplo
Sea $\Omega = \{1, 2\}$
Sea $\mathbb{F}$ = el conjunto potencia de Ω
Sea $\mathbb{P}$ definida como, para todo $A \in \mathbb{F}$, $\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$
Sean los siguientes eventos $A = \{\}$, $B = \{1\}$ y $A \cap B = \{\}$
Entonces $\mathbb{P}(A) = \frac{0}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$ y $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{0}{2}$
Por lo tanto:
$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{0}{2}}{\frac{1}{2}} = 0 \leq 0 = \mathbb{P}(A)$, entonces $B \searrow A$
$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B\cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{0}{2}}{\frac{0}{2}}$ lo cual no podemos hacer, ya que no podemos dividir sobre 0, por lo tanto no tenemos que $A \searrow B$

c) Si $\mathbb{P}(A) = 0$ entonces $A = \varnothing$
Esto es no es cierto siempre, veamos un contraejemplo
Sea $\Omega = [0, 1]$
Sea $\mathbb{F} =$ el conjunto potencia de Ω
Sea $\mathbb{P}$ definida como, para todo $A \in \mathbb{F}$, $\mathbb{P}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lfloor x_i \rfloor$, con x_i todos los elementos de A y $n = \#A$, es decir la suma de la función piso de todos los elementos de A
Sea $B = \{0.5\} \in \mathbb{F}$ un evento, observemos que B no es el vacio
Ahora notemos que $\mathbb{P}(B) = \lfloor 0.5 \rfloor = 0$

d) Si $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B^{\mathsf{c}})$ entonces $A = B^{\mathsf{c}}$
Esto es no es cierto siempre, veamos un contraejemplo
Sea $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$
Sea $\mathbb{F} =$ el conjunto potencia de Ω
Sea $\mathbb{P}$ definida como, para todo $A \in \mathbb{F}$, $\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$
Sean los siguientes eventos $A = \{1\}$, $B^{\mathsf{c}} = \{4\}$, entonces $B = \{1, 2, 3\}$
Entonces $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(B^{\mathsf{c}}) = \frac{1}{4}$ y $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{4}$
Ahora notemos que $\frac{1}{4} = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$, pero $\{1\} \neq \{4\}$, entonces $A \neq B^{\mathsf{c}}$

e) $\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(A|B^{\mathsf{c}}) = 1$
Esto es no es cierto siempre, veamos un contraejemplo
Sea $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$
Sea $\mathbb{F} =$ el conjunto potencia de Ω
Sea $\mathbb{P}$ definida como, para todo $A \in \mathbb{F}$, $\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$
Sean los siguientes eventos $A = \{1, 2, 3\}$, $B^{\mathsf{c}} = \{1, 3, 4\}$, entonces $B = \{2\}$
$A \cap B = \{2\}$ y $A \cap B^{\mathsf{c}} = \{1, 3\}$
Entonces $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}$, $\mathbb{P}(B^{\mathsf{c}}) = \frac{3}{4}$ y $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$
$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$ y $\mathbb{P}(A \cap B^{\mathsf{c}}) = \frac{2}{4}$
Ahora veamos que $\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(A|B^{\mathsf{c}}) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} + \frac{\mathbb{P}(A \cap B^{\mathsf{c}})}{\mathbb{P}(B^{\mathsf{c}})}$, por definición de probabilidad condicional
Luego reemplazamos con los valores que sabemos $\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} + \frac{\mathbb{P}(A \cap B^{\mathsf{c}})}{\mathbb{P}(B^{\mathsf{c}})} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} + \frac{\frac{2}{4}}{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$
Notemos que claramente $1 \neq \frac{5}{3}$, entonces $1 \neq \mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(A|B^{\mathsf{c}})$

f) Si A y B son mutuamente excluyentes entonces $\mathbb{P}(A|(A \cup B)) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)}$
Empecemos con que $\mathbb{P}(A|(A \cup B)) = \frac{\mathbb{P}(A \cap (A \cup B))}{\mathbb{P}(A \cup B)}$, por definición de probabilidad condicional
Luego $\frac{\mathbb{P}(A \cap (A \cup B))}{\mathbb{P}(A \cup B)} = \frac{\mathbb{P}((A \cap A) \cup (A \cap B))}{\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)}$, por la distributividad de la unión e intersección y por la propiedad dos de $\mathbb{P}$ ya que A y B son mutuamente excluyentes
Después $\frac{\mathbb{P}((A \cap A) \cup (A \cap B))}{\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A \cup \varnothing)}{\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)}$, debido a que A y B son mutuamente excluyentes
Y por ultimo $\frac{\mathbb{P}(A \cup \varnothing)}{\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)}$
Por lo tanto $\mathbb{P}(A|(A \cup B)) = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)}$ $\square$

2 $a)$ Se dice que un evento B carga información negativa acerca del evento A si $\mathbb{P}(A|B) \leq \mathbb{P}(A)$, se denota $B \searrow A$. Demuestre o dé un contraejemplo de las siguientes afirmaciones.

1) Si $B \searrow A$, entonces $A \searrow B$
<u>Solución:</u> *Dem:*
Aquí tenemos dos casos cuando $\mathbb{P}(A) \neq 0$ y cuando $\mathbb{P}(A) = 0$

Caso 1: aquí si se cumple
Supongamos que $B \searrow A$ y que $\mathbb{P}(A) \neq 0$, ya que si es 0 no podemos dividir sobre 0, por lo tanto no podemos usar la probabilidad condicional
Luego tenemos que $\mathbb{P}(A|B) \leq \mathbb{P}(A)$, por la definición de que un evento carga información negativo acerca de otro evento
Después $\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \leq \mathbb{P}(A)$, por definición de probabilidad condicional
Posteriormente $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, multiplicando ambos lados por $\mathbb{P}(B)$, debido a que $\mathbb{P}(B) \geq 0$
Seguidamente $\mathbb{P}(B \cap A) \leq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, por la conmutatividad de la intersección
Luego $\frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \leq \mathbb{P}(B)$, dividiendo ambos lados por $\mathbb{P}(A)$, debido a que $\mathbb{P}(A) \geq 0$
Después $\mathbb{P}(B|A) \leq \mathbb{P}(B)$, por definición de probabilidad condicional
Y por ultimo $A \searrow B$, por la definición de que un evento carga información negativo acerca de otro evento
Caso 2: aquí no se cumple, veamos un contraejemplo
Sea $\Omega = \{1, 2\}$
Sea $\mathbb{F} =$ el conjunto potencia de Ω
Sea $\mathbb{P}$ definida como, para todo $A \in \mathbb{F}$, $\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$
Sean los siguientes eventos $A = \{\}$, $B = \{1\}$ y $A \cap B = \{\}$
Entonces $\mathbb{P}(A) = \frac{0}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$ y $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{0}{2}$
Por lo tanto:
$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{0}{2}}{\frac{1}{2}} = 0 \leq 0 = \mathbb{P}(A)$, entonces $B \searrow A$
$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{0}{2}}{\frac{0}{2}}$ lo cual no podemos hacer, ya que no podemos dividir sobre 0, por lo tanto no tenemos que $A \searrow B$

2) Si $B \searrow A$ y $A \searrow C$, entonces, $B \searrow C$
<u>Solución:</u> *CONTRAEJEMPLO*
Sea nuestro espacio muestral el siguiente:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$\mathbb{F} = \text{el conjunto potencia de } \Omega$$
$$\mathbb{P} \text{ definida como, para todo } A \in \mathbb{F},\ \mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Y nuestros eventos A,B y C definidos de la siguiente forma:

- $A = \{1, 2, 3\}$
- $B = \{1, 5\}$
- $C = \{1, 4\}$
- $A \cap B = \{1\}$
- $A \cap C = \{1\}$
- $B \cap C = \{1\}$
- $A \cap B \cap C = \{1\}$

Entonces las probabilidades son:

- $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{5}$
- $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{5}$
- $\mathbb{P}(C) = \frac{2}{5}$
- $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{5}$
- $\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{5}$
- $\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{5}$
- $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{5}$

Ahora veamos que si $B \searrow A$ y $A \searrow C$, entonces no se cumple que $B \searrow C$

$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2} \leq \mathbb{P}(A) = \frac{3}{5}$ *(cumple)*
$\mathbb{P}(C|A) = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3} \leq \mathbb{P}(C) = \frac{2}{5}$*(cumple)*
$\mathbb{P}(C|B) = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2} \nleq \mathbb{P}(C) = \frac{2}{5}$ *(no cumple)*
Por lo tanto no se cumple la propiedad

3) Si $B \searrow A$ y $C \searrow A$, entonces, $B \cap C \searrow A$
Solución: *CONTRAEJEMPLO*
Sea nuestro espacio muestral el siguiente:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$\mathbb{F} = \text{el conjunto potencia de } \Omega$$
$$\mathbb{P} \text{ definida como, para todo } A \in \mathbb{F},\ \mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Y nuestros eventos A, B y C definidos como:

- $A = \{1, 2, 3\}$
- $B = \{1, 5\}$
- $C = \{1, 4\}$
- $A \cap B = \{1\}$
- $A \cap C = \{1\}$
- $B \cap C = \{1\}$
- $A \cap B \cap C = \{1\}$

Entonces las probabilidades son:

- $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{5}$
- $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{5}$
- $\mathbb{P}(C) = \frac{2}{5}$
- $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{5}$
- $\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{5}$
- $\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{5}$
- $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{5}$

Ahora vamos a ver que si $B \searrow A$ y $C \searrow A$, entonces no, $B \cap C \searrow A$
$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2} \leq \mathbb{P}(A) = \frac{3}{5}$ *(cumple)*
$\mathbb{P}(A|C) = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{2} \leq \mathbb{P}(A) = \frac{3}{5}$*(cumple)*
$\mathbb{P}(A|(B \cap C)) = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}} = 1 \nleq \mathbb{P}(A) = \frac{3}{5}$ *(no cumple)*

b) Se dice que un evento B carga información positiva acerca del evento A si $\mathbb{P}(A|B) \geq \mathbb{P}(A)$, se denota $B \nearrow A$. Demuestre o dé un contraejemplo de las siguientes afirmaciones.

1) Si $B \nearrow A$, entonces $A \nearrow B$

Solución: *Dem:*

Aquí tenemos dos casos cuando $\mathbb{P}(A) \neq 0$ y cuando $\mathbb{P}(A) = 0$

Caso 1: aquí si se cumple

Supongamos que $B \nearrow A$ y que $\mathbb{P}(A) \neq 0$, ya que si es 0 no podemos dividir sobre 0, por lo tanto no podemos usar la probabilidad condicional

Luego tenemos que $\mathbb{P}(A|B) \geq \mathbb{P}(A)$, por la definición de que un evento carga información negativo acerca de otro evento

Después $\frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \geq \mathbb{P}(A)$, por definición de probabilidad condicional

Posteriormente $\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, multiplicando ambos lados por $\mathbb{P}(B)$, debido a que $\mathbb{P}(B) \geq 0$

Seguidamente $\mathbb{P}(B \cap A) \geq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, por la conmutatividad de la intersección

Luego $\frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} \geq \mathbb{P}(B)$, dividiendo ambos lados por $\mathbb{P}(A)$, debido a que $\mathbb{P}(A) \geq 0$

Después $\mathbb{P}(B|A) \geq \mathbb{P}(B)$, por definición de probabilidad condicional

Y por ultimo $A \nearrow B$, por la definición de que un evento carga información negativo acerca de otro evento

Caso 2: aquí no se cumple, veamos un contraejemplo

Sea $\Omega = \{1, 2\}$

Sea $\mathbb{F} =$ el conjunto potencia de Ω

Sea $\mathbb{P}$ definida como, para todo $A \in \mathbb{F}$, $\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$

Sean los siguientes eventos $A = \{\}$, $B = \{1\}$ y $A \cap B = \{\}$

Entonces $\mathbb{P}(A) = \frac{0}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$ y $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{0}{2}$

Por lo tanto:

$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{0}{2}}{\frac{1}{2}} = 0 \geq 0 = \mathbb{P}(A)$, entonces $B \nearrow A$

$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{0}{2}}{\frac{0}{2}}$ lo cual no podemos hacer, ya que no podemos dividir sobre 0, por lo tanto no tenemos que $A \nearrow B$

2) Si $B \nearrow A$ y $A \nearrow C$, entonces, $B \nearrow C$

Solución: *CONTRAEJEMPLO*

Sea nuestro espacio muestral el siguiente:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$\mathbb{F} = \text{el conjunto potencia de } \Omega$$
$$\mathbb{P} \text{ definida como, para todo } A \in \mathbb{F},\ \mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Y nuestros eventos A,B y C definidos de la siguiente forma:

- $A = \{2, 3, 4\}$
- $B = \{2, 3\}$
- $C = \{4\}$
- $A \cap B = \{2, 3\}$
- $A \cap C = \{4\}$
- $B \cap C = \{\}$

Entonces las probabilidades son:

- $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6}$
- $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{6}$
- $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{6}$
- $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{6}$
- $\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{6}$
- $\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{0}{6}$

Ahora veamos que si $B \nearrow A$ y $A \nearrow C$, entonces no se cumple que $B \nearrow C$
$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{2}{6}} = 1 \geq \mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$ *(cumple)*
$\mathbb{P}(C|A) = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3} \geq \mathbb{P}(C) = \frac{1}{6}$*(cumple)*
$\mathbb{P}(C|B) = \frac{\frac{0}{6}}{\frac{2}{6}} = 0 \ngeq \mathbb{P}(C) = \frac{1}{6}$ *(no cumple)*

3) Si $B \nearrow A$ y $C \nearrow A$, entonces, $B \cap C \nearrow A$

Solución: *CONTRAEJEMPLO*
Sea nuestro espacio muestral el siguiente:

$$\Omega = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$
$$\mathbb{F} = \text{el conjunto potencia de } \Omega$$
$$\mathbb{P} \text{ definida como, para todo } A \in \mathbb{F},\ \mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Y nuestros eventos A,B y C definidos de la siguiente forma:

- $A = \{2, 4, 6, 8\}$
- $B = \{2, 8, 12\}$
- $C = \{4, 6, 12\}$
- $A \cap B = \{2, 8\}$
- $A \cap C = \{4, 6\}$
- $B \cap C = \{12\}$
- $A \cap B \cap C = \{\}$

Entonces las probabilidades son:

- $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{6}$
- $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{6}$
- $\mathbb{P}(C) = \frac{3}{6}$
- $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{6}$
- $\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{2}{6}$
- $\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{6}$
- $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{0}{6}$

Ahora veamos que Si $B \nearrow A$ y $C \nearrow A$, entonces no se cumple que $B \cap C \nearrow A$
$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3} \geq \mathbb{P}(A) = \frac{2}{3}$ *(cumple)*
$\mathbb{P}(A|C) = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3} \geq \mathbb{P}(A) = \frac{2}{3}$ *(cumple)*
$\mathbb{P}(A|B \cap C) = \frac{\frac{0}{6}}{\frac{1}{6}} = 0 \ngeq \mathbb{P}(A) = \frac{2}{3}$ *(no cumple)*

3 Se tienen 100 urnas de tres diferentes tipos.
El primer tipo contiene 8 bolas blancas y 2 negras; el Segundo tipo 4 blancas y 6 negras; el Tercero, 1 blanca y 9 negras.
Se selecciona una urna al azar y se extrae de ella una bola que resulta blanca. Se devuelve la bola a la urna y se repite el proceso, siendo ahora la bola extraída negra. Si se sabe que la probabilidad de que siendo la bola blanca proceda del primer tipo de urna es $\frac{16}{39}$ y la probabilidad de que siendo la bola negra proceda del segundo tipo de urna es $\frac{30}{61}$
Calcular el número de urnas de cada tipo.
Teniendo en cuenta la probabilidad de Bayes
$P(\frac{A_i}{B}) = P(A_i)\frac{P(\frac{B}{A_i})}{P(B)}$
Tenemos 100 urnas de tres tipos
Tipo A : Contiene 8 bolas blancas y 2 bolas negras
Tipo B : Contiene 4 bolas blancas y 6 bolas negras
Tipo C : Contiene 1 bola blanca y 9 bolas negras
$P(B/A) = \frac{16}{39}$
$P(X/B) = \frac{30}{61}$
Y como sabemos que son 100 urnas , entonces tenemos que
$A + B + C = 100$
Y por ende $A = 100 - B - C \qquad B = 100 - A - C \qquad C = 100 - A - B$
Lo cual nos lleva a que
$P(B/A) = \frac{A}{100} * \frac{8/10}{(A/100)*(8/10))} + (\frac{B}{100} * \frac{4}{10}) + (\frac{C}{100} * \frac{1}{10}) = \frac{8A}{8A+4B+C}$
Como los valores dominantes son A y B , despejamos a C con $C = 100 - A - B$
$= \frac{8A}{8A+4B+100-A-B} = \frac{8A}{7A+3B+100} = \frac{16}{39}$
$P(X/B) = \frac{6X}{2A+6B+9C} = \frac{6X}{2A+6B+9(100-A-B)} = \frac{6X}{2A+6B+900-9A-9B} = \frac{6X}{900-7A-3B} = \frac{30}{61}$
Resolvemos el sistema de ecuaciones con dos incógnitas y obtenemos que:
A = 20 urnas
B = 50 urnas
C = 30 urnas

4 Demuestre que si A, B, C son independientes entonces A y $B \cup C$ son independientes
Supongamos que A, B, C son independientes
Ahora veamos quien es $\mathbb{P}(A \cap (B \cup C))$
$\mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C))$, por la distributivad de la unión e intersección
$\mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C)) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}((A \cap B) \cap (A \cap C))$, por la sexta propiedad de $\mathbb{P}$
$\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}((A \cap B) \cap (A \cap C)) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$, por intersección
$\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$, ya que A, B y C son independientes
$\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$, ya que A, B y C son independientes
$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cap C)$, ya que A, B y C son independientes
$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(A)[\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C)]$, por distributividad
$\mathbb{P}(A)[\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C)] = \mathbb{P}(A)[\mathbb{P}(B \cup C)]$, por la sexta propiedad de $\mathbb{P}$
Por lo tanto $\mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cup C)$
Y por la definición de independencia concluimos que A y $B \cup C$ son independientes $\square$
revisar si a,b y c independientes entonces a y b independientes

5 **Se sabe que $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$ y $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{7}{10}$**
Alex supone que A y B son independientes y calcula $\mathbb{P}(B)$ basándose en dicha suposición
Augusto supone que A y B son mutuamente excluyentes y calcula $\mathbb{P}(B)$ basándose en dicha suposición.
Encontrar la diferencia absoluta entre los dos resultados
Empecemos calculando la $\mathbb{P}(B)$ que calculo Alex
Suponemos que A y B son independientes, por definicion de independientes tenemos que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
Por la propiedad 6 de $\mathbb{P}$ sabemos que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
Como supusimos que son independientes entonces $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
Ahora reemplazando los datos que ya sabemos $\frac{7}{10} = \frac{1}{2} + \mathbb{P}(B) - \frac{1}{2}\mathbb{P}(B)$
Después $\frac{7}{10} - \frac{1}{2} = \mathbb{P}(B) - \frac{1}{2}\mathbb{P}(B)$
Luego $\frac{1}{5} = \mathbb{P}(B) - \frac{1}{2}\mathbb{P}(B)$
Posteriormente $\frac{1}{5} = \mathbb{P}(B)(1 - \frac{1}{2})$
Después $\frac{1}{5} = \mathbb{P}(B)(\frac{1}{2})$
Luego $\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \mathbb{P}(B)$
Entonces $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{5}$
Ahora calculemos la $\mathbb{P}(B)$ que calculo Augusto
Suponemos que A y B son mutuamente excluyentes, por lo tanto $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
Empezamos con $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
Reemplazamos lo que ya sabemos y obtenemos $\frac{7}{10} = \frac{1}{2} + \mathbb{P}(B)$
Después $\mathbb{P}(B) = \frac{7}{10} - \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$
Entonces $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{5}$
Ya que calculamos las dos $\mathbb{P}(B)$ calculemos su diferencia absoluta
Para no confundirnos llamemos a la proba que calculo Alex como $\mathbb{P}(alex)$ y la de Augusto como $\mathbb{P}(augusto)$ Por lo tanto $|\mathbb{P}(alex) - \mathbb{P}(augusto)| = |\frac{2}{5} - \frac{1}{5}| = |\frac{1}{5}|$
Por lo tanto la diferencia absoluta entre las dos probabilidades es $\frac{1}{5}$

6 **Considérese $(\Omega, F, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad**
Demuestre que si $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subset F$ son eventos independientes entonces
$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - \prod_{i=1}^{n}[1 - \mathbb{P}(A_i)]$
Antes de empezar demostremos algo para ayudarnos Si $A_1, A_2, ..., A_n$ son eventos independientes entonces $(A_1)^{\mathsf{c}}, (A_2)^{\mathsf{c}}, ..., (A_n)^{\mathsf{c}}$ son independiente
Usaremos inducción sobre n
Caso base: A_1 y A_2 independientes entonces $(A_1)^{\mathsf{c}}$ y $(A_2)^{\mathsf{c}}$ independientes
Esto lo vimos en la clase del 23/9/22
Hipótesis de inducción: supongamos $A_1, ..., A_n$ independientes entonces $(A_1)^{\mathsf{c}}, ..., (A_n)^{\mathsf{c}}$ son independientes
Paso inductivo: supongamos $A_1, ..., A_n, A_{n+1}$ independientes
Luego $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i) = \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1})$
Posteriormente $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)\mathbb{P}(A_{n+1}) = [\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)]\mathbb{P}(A_{n+1})$, ya que $A_1, ..., A_n$ independientes
Después $[\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)]\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)\mathbb{P}(A_{n+1})$, por la formula vista el 23/9/22

Entonces $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ y A_{n+1} son independientes

Usando la propiedad (b) del día 23/9/22, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ y $(A_{n+1})^{\mathsf{c}}$ son independientes

Usamos la hipótesis y concluimos que $(A_1)^{\mathsf{c}}, ..., (A_n)^{\mathsf{c}}$ y $(A_{n+1})^{\mathsf{c}}$ son independientes

Con eso ya podemos empezar a demostrar lo que queremos

Empecemos con que $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = 1 - \mathbb{P}((\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i)^{\mathsf{c}})$, por la tercera propiedad de $\mathbb{P}$

Luego $1 - \mathbb{P}((\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i)^{\mathsf{c}}) = 1 - \mathbb{P}(\bigcap\limits_{i=1}^{n} (A_i)^{\mathsf{c}})$, por leyes de DeMorgan

Después $1 - \mathbb{P}(\bigcap\limits_{i=1}^{n} (A_i)^{\mathsf{c}}) = 1 - \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}((A_i)^{\mathsf{c}})$, ya que $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ son independientes, entonces usando lo demostrado al inicio entonces $\{(A_i)^{\mathsf{c}}\}_{i=1}^{n}$ son independientes, y usando la formula del día 23/9/22

Y por ultimo $1 - \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}((A_i)^{\mathsf{c}}) = 1 - \prod\limits_{i=1}^{n}[1 - \mathbb{P}(A_i)]$, usando la tercera propiedad de $\mathbb{P}$

Concluimos que $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i) = 1 - \prod\limits_{i=1}^{n}[1 - \mathbb{P}(A_i)]$ $\square$

7 **Sea $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ y supóngase que $\mathbb{P}(\{i\}) = 0.25$ para cualquier $i \in \{1, 2, 3, 4\}$**
Demuestre que las parejas de eventos A y B; A y C; y B y C son independientes
Donde $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{2, 4\}$

Un evento independiente es un evento que no depende de otro evento que determine su resultado.
Los eventos independientes cumplen que;
$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
Entonces para demostrar la independencia de los eventos, solo basta con probar que la intersección de los eventos sea igual a la multiplicación de las probabilidades de los eventos.
Entonces, la probabilidad de $\mathbb{P}(A) = 1$ por hipótesis, y pues esta compuesta por los cuatro elementos.
A es igual al espacio muestral.
Ahora, la probabilidad de $\mathbb{P} = 0.5$ por hipótesis, por estar compuesta por dos elementos.
Entonces, la Probabilidad de la intersección de ambos eventos esta dada por $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ que a su vez es igual a $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.5$ y $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(b) = (1)(0.5) = 0.5$ y como se cumple que la probabilidad en la intersección, como en la multiplicación de probabilidades son iguales, entonces son independientes.
Ahora para los eventos A y C. Para ello usaremos el mismo procedimiento, encontrar las probabilidades de los eventos, de su intersección, y de la multiplicación.
Sea $\mathbb{P}(A) = 1$ por hipótesis, y sea $\mathbb{P}(C) = 0.5$ igual por hipótesis, entonces tenemos:
La probabilidad de $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$ donde la probabilidad de la intersección es: $\mathbb{P}(A \cap C) = 0.5$ pues está compuesta por dos elementos, ahora la multiplicación de las probabilidades es: $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) = (1)(0.5) = 0.5$ y como son iguales las probabilidades, entonces también se cumple que los eventos sean independientes.
Por ultimo, los eventos B y C para ello, vamos a ver que la intersección sea igual a su multiplicación de probabilidades, entonces tenemos:
$\mathbb{P}(B) = 0.5$ y $\mathbb{P} = 0.5$, entonces, la probabilidad de la intersección quedaría como: $\mathbb{P}(B \cap C) = 0.25$ por hipótesis, y para la multiplicación quedaría como: $\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = (0.5)(0.5) = 0.25$ y como ambas probabilidades son iguales, entonces los eventos B y C son independientes.

8 **Exhiba un ejemplo de un espacio de probabilidad de tal manera que A, B y C satisfagan que $\mathbb{P}\{A \cap B \cap C\} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$**
pero que no sean independientes.
Consideremos el experimento aleatorio consistente en lanzar 4 veces una moneda en forma consecutiva, observando el resultado que se obtiene en cada lanzamiento, pudiendo este ser Águila o Sol.
Ω = posibles resultados de lanzar 4 veces una moneda (16 posibles resultados)
Sea $\mathbb{F}$ = el conjunto potencia de Ω
Sea $\mathbb{P}$ definida como, para todo $A \in \mathbb{F}$, $\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$
Definamos entonces los siguientes eventos:
$A = \{(S;S;S;S);(S;S;A;A);(S;A;S;S);(S;A;S;A);(A;S;A;A);(A;A;S;A);(A;S;A;S);(A;S;S;S)\}$
$B = \{(S;S;S;S);(S;S;A;A);(S;S;S;A);(S;A;A;A);(A;A;A;A);(A;A;A;S);(A;A;S;S);(A;S;S;S)\}$
C: Se obtiene S en el primer lanzamiento. Ahora veamos quienes son:
$A \cap B \cap C = \{(S;S;S;S);(S;S;A;A)\}$
$A \cap B = \{(S;S;S;S);(S;S;A;A);(A;S;S;S)\}$
Ahora calculémonos estas probabilidades
$\mathbb{P}(A) = \frac{8}{16}$
$\mathbb{P}(B) = \frac{8}{16}$
$\mathbb{P}(C) = \frac{8}{16}$
$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{2}{16}$
$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{16}$
Se tiene $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)P(B)P(C)$
Pues $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{2}{16} = \frac{2}{16} = \frac{8}{16}\frac{8}{16}\frac{8}{16} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$
Pero
Se tiene $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ por lo tanto no son independientes.
$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{16} \neq \frac{4}{16} = \frac{8}{16}\frac{8}{16} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

9 **Dé un ejemplo de un espacio de probabilidad, tal que tres eventos A_1, A_2 y A_3 satisfagan que $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j\ para\ i \neq j;$ pero que no sean independientes)**
(Distinto al de la clase)

Sea $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$
Sea $\mathbb{F}$ = el conjunto potencia de Ω
Sea $\mathbb{P}$ definida como, para todo $A \in \mathbb{F}$, $\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$
Sean los siguientes eventos $A_1 = \{1,2,3,4\}$, $A_2 = \{1,2,3,5,6,7\}$, y $A_3 = \{1,2,5,8\}$
Por lo tanto $A_1 \cap A_2 = \{1,2,3\}$, $A_1 \cap A_3 = \{1,2\}$, y $A_2 \cap A_3 = \{1,2,5\}$
Entonces $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{1,2\}$
Por lo tanto veamos cuanto valen las probabilidades de estos eventos
$\mathbb{P}(A_1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A_2) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ y $\mathbb{P}(A_3) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{3}{8}$, $\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ y $\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \frac{3}{8}$
$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{2}{8} = \frac{4}{16}$
Ahora notemos que se cumple que
$\frac{3}{8} = \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2} * \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$
$\frac{1}{4} = \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
$\frac{3}{8} = \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3) = \frac{3}{4} * \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$
Observemos que $\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{2} * \frac{3}{4} * \frac{1}{2} = \frac{3}{16}$
Y como ya vimos $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{4}{16}$
Entonces $\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3) \neq \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$, por lo tanto A_1, A_2 y A_3 no son independientes

10 **En el salón de cierto grupo de Probabilidad I hay 4 hombres y 6 mujeres que estudian la licenciatura en Actuaría.**
También hay 6 hombres que estudian la licenciatura en Matemáticas.
¿Cuántas mujeres de la licenciatura en Matemáticas deben estar presentes en la clase si el sexo y la carrera se consideran independientes cuando se selecciona un estudiante al azar?.
Primero definamos algunas cosas
Sea $\Omega =$ el total de personas en el grupo, en este caso son 4 hombres de Actuaría, 6 mujeres de Actuaría, 46 hombres de Matemáticas y X mujeres de Matemáticas, para un total de $16 + X$, entonces $\#\Omega = 16 + X$
Sea $\mathbb{P}$ definida como, para todo evento A, $\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$
Sean los siguientes eventos
$A =$ estudia Actuaría
$M =$ estudia Matemáticas
$H =$ es hombre
$F =$ es mujer
Por lo tanto tenemos que
$A \cap H =$ es hombre y estudia Actuaría
$A \cap F =$ es mujer y estudia Actuaría
$M \cap H =$ es hombre y estudia Matemáticas
$M \cap F =$ es mujer y estudia Matemáticas
Ahora calculemos la probabilidades de los eventos anteriores
$\mathbb{P}(A) = \frac{10}{16+X}$
$\mathbb{P}(M) = \frac{6+X}{16+X}$
$\mathbb{P}(H) = \frac{10}{16+X}$
$\mathbb{P}(F) = \frac{6+X}{16+X}$
$\mathbb{P}(A \cap H) = \frac{4}{16+X}$
$\mathbb{P}(A \cap F) = \frac{6}{16+X}$
$\mathbb{P}(M \cap H) = \frac{6}{16+X}$
$\mathbb{P}(M \cap F) = \frac{X}{16+X}$
Ahora con todo esto listo podemos empezar
Queremos saber quien es X y para esto podemos usar el otro dato que nos dan, es decir, el sexo y la carrera se consideren independientes cuando se selecciona un estudiantes
Esto quiere decir que $\mathbb{P}(sexo \cap carrera) = \mathbb{P}(sexo)\mathbb{P}(carrera)$, por la definición de independencia
Por lo tanto tomemos el evento $A \cap H$ para hacer nuestros cálculos
Tenemos que $\mathbb{P}(A \cap H) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(H)$, por lo que notamos hace poco
Entonces $\frac{4}{16+X} = \frac{10}{16+X}\frac{10}{16+X}$, reemplazando las probabilidades que vimos al inicio
Después $\frac{4}{16+X} = \frac{100}{(16+X)^2}$
Luego $4(16 + X)^2 = 100(16 + X)$
Posteriormente $4(16 + X)^2 - 100(16 + X) = 0$
Por tanto $4(16 + X)[(16 + X) - 25] = 0$
Seguidamente $(16 + X)(-9 + X) = 0$
Por lo tanto tenemos dos opciones $16 + X = 0$ o $X - 9 = 0$
Opción 1: $16 + X = 0$, entonces $X = -16$, lo cual no puede pasar, no existe personas negativas y además si no nuestras probabilidades dividen sobre 0
Opción 2: $X - 9 = 0$, entonces $X = 9$, por lo tanto hay 9 mujeres en Matemáticas, para un total de 25 personas en la clase
Antes de terminar revisemos que todas las probabilidades estén bien
$\mathbb{P}(A) = \frac{10}{25}$

$\mathbb{P}(M) = \frac{15}{25}$
$\mathbb{P}(H) = \frac{10}{25}$
$\mathbb{P}(F) = \frac{15}{25}$
$\mathbb{P}(A \cap H) = \frac{4}{25}$
$\mathbb{P}(A \cap F) = \frac{6}{25}$
$\mathbb{P}(M \cap H) = \frac{6}{25}$
$\mathbb{P}(M \cap F) = \frac{9}{25}$
Ahora veamos si el sexo y la carrera son independientes cuando se selecciona un estudiantes
$\frac{4}{25} = \mathbb{P}(A \cap H) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(H) = \frac{10}{25}\frac{10}{25} = \frac{4}{25}$, esta bien
$\frac{6}{25} = \mathbb{P}(A \cap F) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(F) = \frac{10}{25}\frac{15}{25} = \frac{6}{25}$, esta bien
$\frac{6}{25} = \mathbb{P}(M \cap H) = \mathbb{P}(M)\mathbb{P}(H) = \frac{15}{25}\frac{10}{25} = \frac{6}{25}$, esta bien
$\frac{9}{25} = \mathbb{P}(M \cap F) = \mathbb{P}(M)\mathbb{P}(F) = \frac{15}{25}\frac{15}{25} = \frac{9}{25}$, esta bien
Por lo tanto el numero de mujeres en Matemáticas debe ser 9

11 **Resuelva los siguientes ejercicios:**

a) Se sabe que $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{5}$, $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{3}{5}$, $\mathbb{P}(B|A) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(C|B) = \frac{1}{3}$ y $\mathbb{P}(C|A \cap B) = \frac{1}{2}$. Encontrar $\mathbb{P}(A|B \cap C)$

Solución:
Recordemos la definición de probabilidad condicional:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

De este modo buscamos encontrar:

$$\mathbb{P}(A|B \cap C) = \frac{\mathbb{P}(A\cap(B\cap C))}{\mathbb{P}(B\cap C)}$$

Identifiquemos nuestros eventos faltantes de calcular para poder sustituir en nuestra fórmula:

- $\mathbb{P}(B)$
- $\mathbb{P}(B \cap C)$
- $\mathbb{P}(A \cap (B \cap C))$

Para obtener las probabilidades anteriores, despejamos en las probabilidades dadas como datos del ejercicio, así:
Para obtener $\mathbb{P}(B)$ primero obtengamos $\mathbb{P}(A\cap B)$. Para calcular $\mathbb{P}(A\cap B)$ utilizamos $\mathbb{P}(B|A) = \frac{1}{4}$ que en su expresión desarrollada quedaría de la siguiente forma:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B\cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1}{4}$$

Despejando $\mathbb{P}(B \cap A)$ tenemos que:

$$\mathbb{P}(B \cap A) = \frac{1}{4}(\mathbb{P}(A))$$

Sustituyendo $\mathbb{P}(A)$:

$$\mathbb{P}(B \cap A) = (\tfrac{1}{4})(\tfrac{2}{5})$$

Ya que $B \cap A = A \cap B$ así tenemos que:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{10}$$

Para obtener $\mathbb{P}(B)$ recordemos que $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{3}{5}$ y que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$, sustituyendo $\mathbb{P}(A)$ y $\mathbb{P}(A \cap B)$ en la anterior fórmula, se tiene que:

$$\frac{3}{5} = \frac{2}{5} + \mathbb{P}(B) - \frac{1}{10}$$

Despejando tenemos que:

$$\mathbb{P}(B) = \frac{3}{5} - \frac{2}{5} + \frac{1}{10}$$

Así:

$$\mathbb{P}(B) = \frac{3}{10}$$

Para obtener $\mathbb{P}(B \cap C)$ desarrollamos $\mathbb{P}(C|B) = \frac{1}{3}$ y sustituimos $\mathbb{P}(B)$

$$\mathbb{P}(C|B) = \frac{\mathbb{P}(C \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1}{3}$$

Despejando $\mathbb{P}(C \cap B)$

$$\frac{\mathbb{P}(C \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{P}(C \cap B) = (\frac{1}{3})(\mathbb{P}(B))$$

Sustituyendo $\mathbb{P}(B)$

$$\mathbb{P}(C \cap B) = (\frac{1}{3})(\frac{3}{10})$$

Así:

$$\mathbb{P}(C \cap B) = \frac{1}{10}$$

Y recordando que $C \cap B = B \cap C$ tenemos que:

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{10}$$

Para calcular, $\mathbb{P}(A \cap (B \cap C))$ utilizamos $\mathbb{P}(C|A \cap B) = \frac{1}{2}$ en su forma desarrollada, así:

$$\frac{\mathbb{P}(C \cap (A \cap B)}{\mathbb{P}(A \cap B)} = \frac{1}{2}$$

Recordemos que $\mathbb{P}(C \cap (A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap (B \cap C))$ ya que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C \cap (A \cap B) &= \mathbb{P}(C \cap (B \cap A)) \text{ (por la conmutatividad de la intersección)} \\
. \quad &= \mathbb{P}((C \cap B) \cap A) \text{ (por la asociatividad de la intersección)} \\
. \quad &= \mathbb{P}((B \cap C) \cap A) \text{ (por la conmutatividad de la intersección)} \\
. \quad &= \mathbb{P}(A \cap (B \cap C)) \text{ (acomodando de la forma conveniente)}
\end{aligned}$$

Así despejando $\mathbb{P}(C \cap (A \cap B)$ tenemos que:

$$\mathbb{P}(C \cap (A \cap B) = \frac{1}{2}(\mathbb{P}(A \cap B))$$

Sustituyendo $\mathbb{P}(A \cap B)$ tenemos que:

$$\mathbb{P}(C \cap (A \cap B) = (\frac{1}{2})(\frac{1}{10})$$

$$\mathbb{P}(C \cap (A \cap B) = \frac{1}{20}$$

De este modo tenemos que:

- $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{10}$
- $\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{10}$
- $\mathbb{P}(A \cap (B \cap C)) = \frac{1}{20}$

Y sustituyendo en $\mathbb{P}(A|B \cap C) = \frac{\mathbb{P}(A \cap (B \cap C))}{\mathbb{P}(B \cap C)}$ tenemos que:

$$\frac{\mathbb{P}(A \cap (B \cap C))}{\mathbb{P}(B \cap C)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{10}}$$

$$\frac{\mathbb{P}(A\cap(B\cap C))}{\mathbb{P}(B\cap C)} = \frac{1}{2}$$

Asi:

$$\mathbb{P}(A|B\cap C) = \frac{1}{2}$$

b) Se sabe que $\mathbb{P}(A|B\cap C) = 0.6$, $\mathbb{P}(B|A\cap C) = 0.3$ y $\mathbb{P}(C|A\cap B) = 0.9$.
Encontrar $\mathbb{P}(A\cap B\cap C|(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C))$

Solución:

Pongamos en su forma desarrollada lo que queremos encontrar:

$$\mathbb{P}(A\cap B\cap C|(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)) = \frac{\mathbb{P}((A\cap B\cap C)\cap((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)))}{\mathbb{P}((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C))}$$

Analizamos su representación en diagramas de Venn

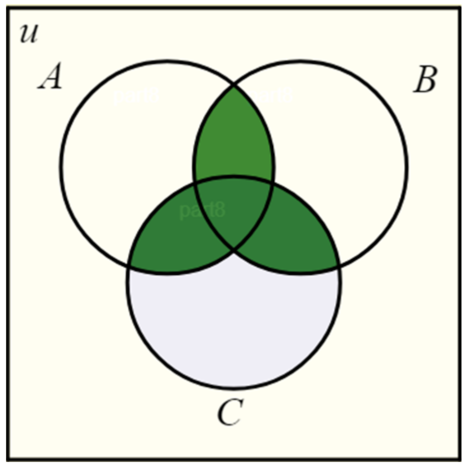

Figura 1: Representación de $\mathbb{P}((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C))$

Si aplicamos el principio de inclusión-exclusión para $\mathbb{P}((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C))$ tenemos que:

$\mathbb{P}((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)) = \mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(A\cap C)+\mathbb{P}(B\cap C)-\mathbb{P}((A\cap B)\cap(A\cap C))-\mathbb{P}((A\cap C)\cap(B\cap C))-\mathbb{P}((A\cap B)\cap(B\cap C))+\mathbb{P}((A\cap B)\cap(A\cap C)\cap(B\cap C))$

Analizando las expresiones con sus respectivas operaciones (intersección) tenemos que:

$\mathbb{P}((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)) = \mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(A\cap C)+\mathbb{P}(B\cap C)-\mathbb{P}(A\cap B\cap C)-\mathbb{P}(A\cap C\cap B)-\mathbb{P}(A\cap B\cap C)+\mathbb{P}(A\cap B\cap C)$

Simplificando y factorizando:

$\mathbb{P}((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)) = \mathbb{P}(A\cap B)+\mathbb{P}(A\cap C)+\mathbb{P}(B\cap C)-2\mathbb{P}(A\cap B\cap C)$

Ahora veamos que podemos sustituir $\mathbb{P}(A\cap B), \mathbb{P}(A\cap C)$ y $\mathbb{P}(B\cap C)$ despejando de $\mathbb{P}(A|B\cap C) = 0.6$, $\mathbb{P}(B|A\cap C) = 0.3$ y $\mathbb{P}(C|A\cap B) = 0.9$ Dichos despejes quedarían de la siguiente forma:

- $\mathbb{P}(A|B\cap C) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B\cap C)}{\mathbb{P}(B\cap C)} = 0.6 \quad \mathbb{P}(B\cap C) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B\cap C)}{0.6}$
- $\mathbb{P}(B|A\cap C) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B\cap C)}{\mathbb{P}(A\cap C)} = 0.3 \quad \mathbb{P}(A\cap C) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B\cap C)}{0.3}$
- $\mathbb{P}(C|A\cap B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B\cap C)}{\mathbb{P}(A\cap B)} = 0.9 \quad \mathbb{P}(A\cap B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B\cap C)}{0.9}$

De este modo sustituyendo en $\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - 2\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$ tendríamos que:

$\mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - 2\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$

$\mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{0.9} + \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{0.3} + \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{0.6} - 2\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$

Factorizando $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$ tenemos que:

$\mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C)(\frac{1}{0.9} + \frac{1}{0.3} + \frac{1}{0.6} - 2)$

$\mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C)(\frac{37}{9})$

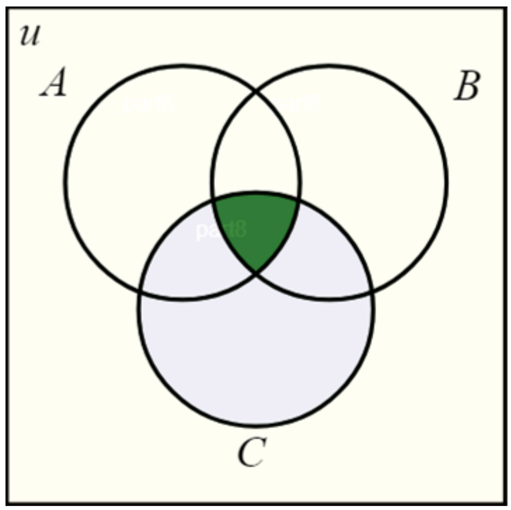

Figura 2: Representación de $\mathbb{P}((A \cap B \cap C) \cap ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)))$

De este modo podemos ver que $\mathbb{P}((A \cap B \cap C) \cap ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$

Ahora sustituyendo en $\mathbb{P}(A \cap B \cap C|(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = \frac{\mathbb{P}((A \cap B \cap C) \cap ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)))}{\mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))}$ los resultados anteriores, tenemos que:

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C|(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)(\frac{37}{9})}$$

Simplificando tenemos que:

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C|(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = \frac{1}{\frac{37}{9}}$$

Asi:

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C|(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = \frac{9}{37}$$