García Ponce José Camilo

# Matemáticas para Ciencias de la Tierra III
# Matemáticas para las Ciencias Aplicadas III
# Tarea 5

Fecha de entrega: **Lunes 14 de noviembre de 2022.**

**Explica claramente todas las suposiciones en las que bases tus respuestas. Todos los ejercicios tienen el mismo valor**

1. **Integrales triples en coordenadas cartesianas**

   a) Evalúa la integral triple:
   $$\iiint_E 15z\,dV$$
   Donde $E$ es la región entre $2x+y+z=4$, $4x+4y+2z=20$ y delimitada por $z=2y^2$ y $z=\sqrt{4y}$, en el primer octante.

   b) Evalúa la integral triple:
   $$\iiint_E (3-4x)\,dV$$
   Donde $E$ es la región debajo de $z=4-xy$ y encima del plano $xy$ definido por $0\leqslant x\leqslant 2$ y $0\leqslant y\leqslant 1$.

   c) Evalúa la integral triple:
   $$\iiint_E (2y-9z)\,dV$$
   Donde $E$ es la región detrás de $6x+3y+3z=15$ frente al triángulo con vértices en $(x,z)$ dados por $(0,0)$, $(0,4)$ y $(2,4)$.

2. **Integrales triples en coordenadas cilíndricas**

   a) Evalúa la integral triple convirtiendo a coordenadas cilíndricas:
   $$\iiint_E 4xy\,dV$$
   Donde $E$ es la región delimitada $z=2x^2+2y^2-7$ y $z=1$.

   b) Usa una integral triple para determinar el volumen de la región debajo $z=6-x$, por encima de $z=-\sqrt{4x^2+4y^2}$ dentro del cilindro $x^2+y^2=3$ con $x\leqslant 0$

   c) Usa una integral triple para determinar el volumen de la región detrás de $x=z+3$, frente a $x=-z-6$ dentro del cilindro $y^2+z^2=4$.

3. **Integrales triples en coordenadas esféricas**

   a) Evalúa la integral triple:
   $$\iiint_E (10xz+3)\,dV$$
   Donde $E$ es la porción de $x^2+y^2+z^2=16$ con $z\geqslant 0$.

   b) Evalúa la integral triple:
   $$\iiint_E x^2\,dV$$
   Donde $E$ es la región dentro de $x^2+y^2+z^2=36$ y $z=-\sqrt{3x^2+3y^2}$.

   c) Evalúa la integral triple:
   $$\iiint_E (3x-2y)\,dV$$
   Donde $E$ es la región entre las esferas $x^2+y^2+z^2=1$ y $x^2+y^2+z^2=4$, con $z\leqslant 0$.

3.C 2.9

García Ponce José Camilo

1) Integrales triples en coordenadas cartesianas

a) Evalua la integral triple $\iiint_E 15z \, dV$

Donde E es la region entre $2x+y+z=4$, $4x+4y+2z=20$

y delimitada por $z=2y^2$ y $z=\sqrt{4y}$, en el primer octante

hagamos que el dominio D este sobre el plano Oyz

y así tenemos que los limites D son

$2y^2=\sqrt{4y} \Rightarrow 2y^2=2\sqrt{y} \Rightarrow y^2=\sqrt{y} \Rightarrow y^4=y$

$\Rightarrow y^4-y=0 \Rightarrow y(1-y^3)$ entonces

$y_1=0$ y $y_2=1$

por lo tanto $\begin{cases} 0\le y\le 1 \\ 2y^2\le z\le 2\sqrt{y} \end{cases}$

$\left\{ 2-\frac{y}{2}-\frac{z}{2}\le x\le 5-y-\frac{z}{2} \right.$

y para x despejamos

$2x+y+z=4 \Rightarrow x=2-\frac{y}{2}-\frac{z}{2}$ esta es la inferior

$4x+4y+2z=20 \Rightarrow x=5-y-\frac{z}{2}$ esta es la superior

por lo tanto

$$\int_0^1\int_{2y^2}^{2\sqrt{y}}\int_{2-\frac{y}{2}-\frac{z}{2}}^{5-y-\frac{z}{2}} 15z \, dx\,dz\,dy$$

$$\phi(z,y) = \int_{2-\frac{y}{2}-\frac{z}{2}}^{5-y-\frac{z}{2}} 15z\, dx = 15z \int_{2-\frac{y}{2}-\frac{z}{2}}^{5-y-\frac{z}{2}} dx = 15z\left[ x \Big|_{2-\frac{y}{2}-\frac{z}{2}}^{5-y-\frac{z}{2}} \right]$$

$$= 15z\left[\left(5-y-\frac{z}{2}\right) - \left(2-\frac{y}{2}-\frac{z}{2}\right)\right] = 15z\left[3 - \frac{y}{2}\right]$$

$$= 45z - \frac{15}{2}yz$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \int_{2y^2}^{2\sqrt{y}} \phi(z,y)\, dz\, dy = \int_0^1 \int_{2y^2}^{2\sqrt{y}} 45z - \frac{15}{2}yz\, dz\, dy$$

$$\psi(y) = \int_{2y^2}^{2\sqrt{y}} 45z - \frac{15}{2}yz\, dz = \int_{2y^2}^{2\sqrt{y}} \left(45 - \frac{15}{2}y\right)z\, dz = \left(45 - \frac{15}{2}y\right)\int_{2y^2}^{2\sqrt{y}} z\, dz$$

$$= \left(45 - \frac{15}{2}y\right)\left[\frac{z^2}{2}\Big|_{2y^2}^{2\sqrt{y}}\right] = \left(45 - \frac{15}{2}y\right)\left[\frac{4y}{2} - \frac{4y^4}{2}\right]$$

$$= \left(45 - \frac{15}{2}y\right)(2y - 2y^4) = 90y - 90y^4 - 15y^2 + 15y^5$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \psi(y)\, dy = \int_0^1 90y - 90y^4 - 15y^2 + 15y^5\, dy$$

$$= 90\int_0^1 y\, dy - 90\int_0^1 y^4\, dy - 15\int_0^1 y^2\, dy + 15\int_0^1 y^5\, dy$$

$$= 90\left[\frac{y^2}{2}\Big|_0^1\right] - 90\left[\frac{y^5}{5}\Big|_0^1\right] - 15\left[\frac{y^3}{3}\Big|_0^1\right] + 15\left[\frac{y^6}{6}\Big|_0^1\right]$$

$$= 90\left[\frac{1}{2}\right] - 90\left[\frac{1}{5}\right] - 15\left[\frac{1}{3}\right] + 15\left[\frac{1}{6}\right] = 45 - 18 - 5 + \frac{5}{2}$$

$$= \frac{49}{2} = 24.5$$

b) Evalua $\iiint_E (3-4x)\,dV$

donde E es la region debajo de $z=4-xy$ y encima del plano

$xy$ $(z=0)$, definido por $0\le x\le 2$ y $0\le y\le 1$

haremos que el dominio D este sobre el plano $Oxy$ $(z=0)$

y ya nos dieron los limites de este dominio D

$$\begin{cases} 0\le x\le 2 \\ 0\le y\le 1 \end{cases}$$

ahora para los de z, nos dijeron por debajo de $z=4-xy$

y encima del plano $xy$ $(z=0)$ entonces tenemos

$$\begin{cases} 0\le z\le 4-xy \\ 0\le x\le 2 \\ 0\le y\le 1 \end{cases}$$

entonces $\displaystyle\int_0^1\int_0^2\int_0^{4-xy} (3-4x)\,dz\,dx\,dy$

$$\phi(x,y) = (3-4x)\int_0^{4-xy} dz = (3-4x)\left[z\Big|_0^{4-xy}\right] = (3-4x)[4-xy-0]$$

$$= (3-4x)(4-xy) = 12-3xy-16x+4x^2y$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \int_0^2 \phi(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^2 12 - 3xy - 16x + 4x^2 y \, dx\, dy$$

$$\xi(y) = 12\int_0^2 dx - 3y\int_0^2 x\, dx - 16\int_0^2 x\, dx + 4y\int_0^2 x^2\, dx$$

$$= 12\left[x\Big|_0^2\right] - 3y\left[\frac{x^2}{2}\Big|_0^2\right] - 16\left[\frac{x^2}{2}\Big|_0^2\right] + 4y\left[\frac{x^3}{3}\Big|_0^2\right]$$

$$= 12[2-0] - 3y\left[\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] - 16\left[\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] + 4y\left[\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right]$$

$$= 24 - 6y - 32 + \frac{32}{3}y = \frac{14}{3}y - 8$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \xi(y)\, dy = \int_0^1 \frac{14}{3}y - 8\, dy = \frac{14}{3}\int_0^1 y\, dy - 8\int_0^1 dy = \frac{14}{3}\left[\frac{y^2}{2}\Big|_0^1\right] - 8\left[y\Big|_0^1\right]$$

$$= \frac{14}{3}\left[\frac{1^2}{2} - 0\right] - 8[1-0] = \frac{7}{3} - 8 = -\frac{17}{3}$$

c) Evalúa $\iiint_E (2y - 9z)\, dV$

con $E$ es la región de $6x+3y+3z=15$ frente al triangulo con

vertices en $(x,z)$ dados por $(0,0), (0,4)$ y $(2,4)$

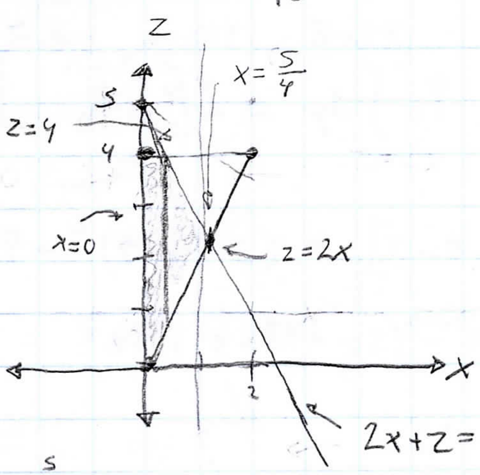
hacemos que el dominio $D$ este sobre el plano $Oxz$ $(y=0)$ y veamos

como quedara el triangulo / como la recta que nos dieron corta y pasa

por detras del triangulo quitaremos son del dominio

para esto hacemos la intercepcion entre $y=0$ y el plano

$6x+3z=15 \Rightarrow 2x+z=5$ por lo tanto tenemos algo asi




por lo tanto partimos el dominio en 2

con $z=4$

$2x+z=5$

$\Rightarrow 2x+4=5$

$x=\frac{1}{2}$

$2x=z$

y $z=5-2x$

$2x=5-2x$

$\Rightarrow 4x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{4}$

por lo tanto los limites de los dos dominios quedan

$$\underbrace{\begin{cases} 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2x \le z \le 4 \end{cases}}_{D_1} \quad \text{y} \quad \underbrace{\begin{cases} \frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{4} \\ 2x \le z \le 5-2x \end{cases}}_{D_2}$$

entonces los limits quedan

$$\begin{cases} 0 \le y \le 5-2x-z \\ 2x \le z \le 4 \\ 0 \le x \le \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \le y \le 5-2x-z \\ 2x \le z \le 5-2x \\ \frac{1}{2} \le x \le \frac{5}{4} \end{cases}$$

$D_1$ y $D_2$

entonces

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{2x}^{4}\int_0^{5-2x-z} (2y-9z)\,dy\,dz\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{4}}\int_{2x}^{5-2x}\int_0^{5-2x-z} (2y-9z)\,dy\,dz\,dx$$

empezemos con la izquierda

$$\phi(z,x) = \int_0^{5-2x-z} 2y-9z\,dy = 2\int_0^{5-2x-z} y\,dy - 9z\int_0^{5-2x-z} dy = 2\left[\frac{y^2}{2}\Big|_0^{5-2x-z}\right] + 9z\left[y\Big|_0^{5-2x-z}\right]$$

$$= 2\left[\frac{(5-2x-z)^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] - 9z\left[5-2x-z-0\right] = (5-2x-z)^2 - 9z(5-2x-z)$$

$$= 25 + 4x^2 + z^2 - 20x - 10z + 4xz - 45z + 18xz + 9z^2$$

$$= 22xz + 10z^2 + 4x^2 - 55z - 20x + 25$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}}\int_{2x}^{4} \phi(z,x)\,dz\,dx = \int_0^{2}\int_{2x}^{4} 22xz + 10z^2 + 4x^2 - 55z - 20x + 25\,dz\,dx$$

$$\xi(x) = 22x\int_{2x}^{4} z\,dz + 10\int_{2x}^{4} z^2\,dz + 4x^2\int_{2x}^{4} dz - 55\int_{2x}^{4} z\,dz - 20x\int_{2x}^{4} dz + 25\int_{2x}^{4} dz$$

$$= 22x\left[\frac{z^2}{2}\Big|_{2x}^{4}\right] + 10\left[\frac{z^3}{3}\Big|_{2x}^{4}\right] + 4x^2\left[z\Big|_{2x}^{4}\right] - 55\left[\frac{z^2}{2}\Big|_{2x}^{4}\right] - 20x\left[z\Big|_{2x}^{4}\right] + 25\left[z\Big|_{2x}^{4}\right]$$

$$= 22x\left[\frac{4^2}{2} - \frac{(2x)^2}{2}\right] + 10\left[\frac{4^3}{3} - \frac{(2x)^3}{3}\right] + 4x^2\left[4-2x\right] - 55\left[\frac{4^2}{2} - \frac{(2x)^2}{2}\right]$$

$$-20x\left[4-2x\right] + 25\left[4-2x\right]$$

$$= 22x\left[8-2x^2\right] + 10\left[\frac{64}{3} - \frac{8}{3}x^3\right] + 16x^2 - 8x^3 - 55\left[8-2x^2\right] - 80x + 40x^2$$

$$+100 - 50x$$

$$= 176x - 44x^3 + \frac{640}{3} - \frac{80}{3}x^3 - 440 + 110x^2 - 8x^3 + 56x^2 - 130x + 100$$

$$= -\frac{236}{3}x^3 + 166x^2 + 46x - \frac{380}{3}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} \mathcal{E}(x)\,dx = \frac{-236}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} x^3\,dx + 166\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,dx + 46\int_0^{2} x\,dx - \frac{380}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{-236}{3}\left[\frac{x^4}{4}\Big|_0^{\frac{1}{2}}\right] + 166\left[\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{2}}\right] + 46\left[\frac{x^2}{2}\Big|_0^{2}\right] - \frac{380}{3}\left[x\Big|_0^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \frac{-236}{3}\left[\frac{(\frac{1}{2})^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right] + 166\left[\frac{(\frac{1}{2})^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] + 46\left[\frac{(\frac{1}{2})^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] - \frac{380}{3}\left[\frac{1}{2} - 0\right]$$

$$= -\frac{236}{3}\left(\frac{1}{64}\right) + 166\left(\frac{1}{24}\right) + 46\left[\frac{1}{8}\right] - \frac{380}{3}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{59}{48} + \frac{83}{12} + \frac{23}{4} - \frac{190}{3} = -\frac{2491}{48} \approx -51.89$$

ahora la de la derecha

(la resolvimos antes)

$$\mu(z,x) = \int_0^{5-2x-z} 2y - 9z\,dy = 22xz + 10z^2 + 4x^2 - 55z - 20x + 25$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{4}}\int_{2x}^{5-2x} \mu(z,x)\,dz\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{4}}\int_{2x}^{5-2x} 22xz + 10z^2 + 4x^2 - 55z - 20x + 25\,dz\,dx$$

$$\psi(x) = 22x\int_{2x}^{5-2x} z\,dz + 10\int_{2x}^{5-2x} z^2\,dz + 4x^2\int_{2x}^{5-2x} dz - 55\int_{2x}^{5-2x} z\,dz - 20x\int_{2x}^{5-2x} dz + 25\int_{2x}^{5-2x} dz$$

$$= 22x\left[\frac{z^2}{2}\Big|_{2x}^{5-2x}\right] + 10\left[\frac{z^3}{3}\Big|_{2x}^{5-2x}\right] + 4x^2\left[z\Big|_{2x}^{5-2x}\right] - 55\left[\frac{z^2}{2}\Big|_{2x}^{5-2x}\right] - 20x\left[z\Big|_{2x}^{5-2x}\right]$$

$$+25\left[z\Big|_{2x}^{5-2x}\right]$$

$$= 22x\left[\frac{(5-2x)^2}{2} - \frac{(2x)^2}{2}\right] + 10\left[\frac{(5-2x)^3}{3} - \frac{(2x)^3}{3}\right] + 4x^2\left[5-2x-2x\right] - 55\left[\frac{(5-2x)^2}{2} - \frac{(2x)^2}{2}\right]$$

$$-20x\left[5-2x-2x\right] + 25\left[5-2x-2x\right]$$

$$= 22x\left[\frac{25}{2} - 10x\right] + 10\left[\frac{-16}{3}x^3 + 20x^2 - 50x + \frac{125}{3}\right] + 4x^2\left[5-4x\right] - 55\left[\frac{25}{2} - 10x\right]$$

$$-20x\left[5-4x\right] + 25\left[5-4x\right]$$

$$= 275x - 220x^2 - \frac{160}{3}x^3 + 200x^2 - 500x + \frac{1250}{3} + 20x^2 - 16x^3$$

$$-\frac{1375}{2} + 550x - 100x + 80x^2 + 125 - 100x$$

$$= \frac{-208}{3}x^3 + 80x^2 + 125x - \frac{875}{6}$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{4}} \psi(x)\,dx = \frac{-208}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{4}} x^3\,dx + 80\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{4}} x^2\,dx + 125\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{4}} x\,dx - \frac{875}{6}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{4}} dx$$

$$= \frac{-208}{3}\left[\frac{x^4}{4}\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{4}}\right] + 80\left[\frac{x^3}{3}\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{4}}\right] + 125\left[\frac{x^2}{2}\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{4}}\right] - \frac{875}{6}\left[x\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{4}}\right]$$

$$= -\frac{208}{3}\left[\frac{(\frac{5}{4})^4}{4} - \frac{(\frac{1}{2})^4}{4}\right] + 80\left[\frac{(\frac{5}{4})^3}{3} - \frac{(\frac{1}{2})^3}{3}\right] + 125\left[\frac{(\frac{5}{4})^2}{2} - \frac{(\frac{1}{2})^2}{2}\right] - \frac{875}{6}\left[\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{-208}{3}\left[\frac{609}{1024}\right] + 80\left[\frac{39}{64}\right] + 125\left[\frac{21}{32}\right] - \frac{875}{6}\left[\frac{3}{4}\right]$$

$$= -\frac{2639}{64} + \frac{195}{4} + \frac{2625}{32} - \frac{875}{8}$$

$$= -\frac{1269}{64} \simeq -19.82$$

entonces

la respuesta es

$$-\frac{2491}{48} - \frac{1269}{64} = -\frac{13771}{192} \simeq -71.72$$

2) Integrales triples en coordenadas cilíndricas

a) Evalúa la integral triple convirtiendo a coordenadas cilíndricas

$$\iiint_E 4xy \, dV$$ con E es la región delimitada $z=2x^2+2y^2-7$ y $z=1$

haremos que el dominio D este sobre el plano Oxy y para esto necesitamos ver que area generan cuando $z=1.$ y $z=2x^2+2y^2-7$ se intersectan

$$2x^2+2y^2-z=7 \quad y \quad z=1$$

$$\Rightarrow 2x^2+2y^2-1=7 \Rightarrow 2x^2+2y^2=8 \Rightarrow x^2+y^2=4$$

notemos que es un circulo con centro en $(0,0,1)$ y radio 2

por lo tanto usamos coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\,\text{sen}\,\theta \\ z=z \end{cases}$$

Jacobiano $=\rho$

$$z=2x^2+2y^2-7$$

$$\Rightarrow z=2\rho^2\cos^2\theta+2\rho^2\text{sen}^2-7$$

$$\Rightarrow z=2\rho^2-7$$

entonces los limites son

$$\begin{cases} 0\le\rho\le 2 \\ 0\le\theta\le 2\pi \\ 2\rho^2-7\le z\le 1 \end{cases}$$

Funcion

$$4xy \Rightarrow 4\rho\cos\theta\rho\,\text{sen}\,\theta$$

$$\Rightarrow 4\rho^2\cos\theta\,\text{sen}\,\theta$$

$$\Rightarrow 2\,\text{sen}(2\theta)\rho^2$$

entonces

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{2\rho^2-7}^{1} 2sen(2\theta)\,\rho^2\,\rho\,dz\,d\rho\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{2\rho^2-7}^{1} 2\,sen(2\theta)\,\rho^3\,dz\,d\rho\,d\theta$$

$$\phi(\rho,\theta) = \int_{2\rho^2-7}^{1} 2sen(2\theta)\rho^3\,dz = 2sen(2\theta)\rho^3\int_{2\rho^2-7}^{1} dz = 2sen(2\theta)\rho^3\left[z\Big|_{2\rho^2-7}^{1}\right]$$

$$= 2sen(2\theta)\rho^3[1-(2\rho^2-7)] = 2\,sen(2\theta)\,\rho^3\,[8-2\rho^2]$$

$$= 16\rho^3\,sen(2\theta) - 4\rho^5\,sen(2\theta) = sen(2\theta)(16\rho^3-4\rho^5)$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{2}\phi(\rho,\theta)\,d\rho\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{2} sen(2\theta)\,(16\rho^3-4\rho^5)\,d\rho\,d\theta$$

$$\psi(\theta) = sen(2\theta)\int_0^2 16\rho^3-4\rho^5\,d\rho = sen(2\theta)\left[16\int_0^2\rho^3 d\rho - 4\int_0^2\rho^5 d\rho\right]$$

$$= sen(2\theta)\left[16\left(\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^2\right) - 4\left(\frac{\rho^6}{6}\Big|_0^2\right)\right]$$

$$= sen(2\theta)\left[16\left(\frac{2^4}{4}-\frac{0^4}{4}\right) - 4\left(\frac{2^6}{6}-\frac{0^6}{6}\right)\right]$$

$$= sen(2\theta)\left[16(4) - 4\left(\frac{32}{3}\right)\right] = sen(2\theta)\left(64-\frac{128}{3}\right)$$

$$= sen(2\theta)\left(\frac{64}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\psi(\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} sen(2\theta)\left(\frac{64}{3}\right)d\theta = \frac{64}{3}\int_0^{2\pi} sen(2\theta)\,d\theta$$

sustitución $u = 2\theta$ $du = 2dx$ $\Rightarrow \begin{cases} 2\pi \Rightarrow 2(2\pi) = 4\pi \\ 0 \Rightarrow 2(0) = 0 \end{cases}$

$$= \frac{32}{3} \int_{0}^{4\pi} \operatorname{sen}(u)\, du = \frac{32}{3} \left[ -\cos(u) \Big|_{0}^{4\pi} \right]$$

$$= \frac{32}{3} \left[ -\cos(4\pi) + \cos(0) \right] = \frac{32}{3} \left[ -1 + 1 \right] = \frac{32}{3} [0] = 0$$

b) Con una integral triple determina el volumen de la region debajo de

$z = 6 - x$, por encima de $z = -\sqrt{4x^2+4y^2}$ dentro del cilindro

$x^2+y^2=3$ con $x \leq 0$

haremos que el dominio D este sobre el plano Oxy

por lo tanto sera $x^2+y^2=3$

ahora veamos cuales seran los limites en coordenadas cilindricas

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

jacobiano $= \rho$

$x^2+y^2=3 \Rightarrow \rho^2\cos^2\theta + \rho^2\mathrm{sen}^2\theta = 3$

$\Rightarrow \rho^2 = 3 \Rightarrow \rho = \sqrt{3}$

$z = 6 - x$

$\Rightarrow z = 6 - \rho\cos\theta$

$z = -\sqrt{4x^2+4y^2} \Rightarrow z = -\sqrt{4\rho^2\cos^2\theta + 4\rho^2\mathrm{sen}^2\theta}$

$\Rightarrow z = -\sqrt{4\rho^2} = -2\rho$

entonces los limites son

$$\begin{cases} 0 \leq \rho \leq \sqrt{3} \\ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} \\ -2\rho \leq z \leq 6 - \rho\cos\theta \end{cases}$$

funcion

como es volumen

entonces la funcion es 1

ya que queremos cuando

$x \leq 0$ entonces solo es una mitad del circulo entonces

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\int_{0}^{\sqrt{3}}\int_{-2\rho}^{6-\rho\cos\theta} 1\ \rho\, dz\, d\rho\, d\theta$$

$$\phi(\rho,\theta) = \int_{-2\rho}^{6-\rho\cos\theta} \rho\, dz = \rho\int_{-2\rho}^{6-\rho\cos\theta} dz = \rho\left[ z\Big|_{-2\rho}^{6-\rho\cos\theta}\right]$$

$$= \rho\left[6-\rho\cos\theta-(-2\rho)\right] = 6\rho-\rho^2\cos\theta+2\rho^2$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\int_{0}^{\sqrt{3}} \phi(\rho,\theta)\,d\rho\, d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\int_{0}^{\sqrt{3}} 6\rho-\rho^2\cos\theta+2\rho^2\, d\rho\, d\theta$$

$$\psi(\theta) = \int_{0}^{\sqrt{3}} 6\rho-\rho^2\cos\theta+2\rho^2\, d\rho = 6\int_{0}^{\sqrt{3}}\rho\, d\rho - \cos\theta\int_{0}^{\sqrt{3}}\rho^2\, d\rho + 2\int_{0}^{\sqrt{3}}\rho^2\, d\rho$$

$$= 6\left[\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{3}}\right] - \cos\theta\left[\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{3}}\right] + 2\left[\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{3}}\right] =$$

$$= 6\left[\frac{\sqrt{3}^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right] - \cos\theta\left[\frac{\sqrt{3}^3}{3}-\frac{0^3}{0}\right] + 2\left[\frac{\sqrt{3}^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right] = 6\left[\frac{3}{2}\right] - \cos\theta\left[\sqrt{3}\right] + 2\left[\sqrt{3}\right]$$

$$= 9-\sqrt{3}\cos\theta+2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \psi(\theta)\, d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 9-\sqrt{3}\cos\theta+2\sqrt{3}\, d\theta = 9\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta - \sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta + 2\sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta$$

$$= 9\left[\theta\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2}\right] - \sqrt{3}\left[\operatorname{sen}(\theta)\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2}\right] + 2\sqrt{3}\left[\theta\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2}\right]$$

$$= 9\left[\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right] - \sqrt{3}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] + 2\sqrt{3}\left[\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right]$$

$= 9\left[\pi\right] - \sqrt{3}\left[-1 \quad -1\right] + 2\sqrt{3}\left[\pi\right]$

$= 9\pi \quad - \sqrt{3}\left[-2\right] \quad + 2\sqrt{3}\,\pi \quad = \quad 9\pi + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\,\pi \quad \approx 42.62$

c) Usa una integral triple para determinar el volumen de la region dentras de $x = z+3$, frente a $x=-z-6$, dentro del cilindro $y^2+z^2=4$

hacemos que el dominio D este sobre el plano $Oyz$

por lo tanto sera $y^2+z^2=4$

ahora veamos cuales seran los limits en coordenadas cilindricas pero con un cambio

como el cilindro esta acostado, dejaremos a x igual y su funcion de transformacion se la damos a z (deberia ser el mismo jacobiano)

$$\begin{cases} x=x \\ y=\rho\,\text{sen}\theta \\ z=\rho\cos\theta \end{cases}$$

jacobiano $=\rho$

$y^2+z^2=4$

$\Rightarrow \rho^2\text{sen}^2\theta+\rho^2\cos^2\theta=4 \quad \Rightarrow \rho^2=4$

$\Rightarrow \rho=2$

$x=-z-6$

$\Rightarrow x=-\rho\cos\theta-6$

$x=z+3$

$\Rightarrow x=\rho\cos\theta+3$

entonces

$$\begin{cases} 0\le\rho\le 2 \\ 0\le\theta\le 2\pi \\ -\rho\cos\theta-6\le x\le\rho\cos\theta+3 \end{cases}$$

funcion

como es volumen la funcion es 1

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_{-\rho\cos\theta-6}^{\rho\cos\theta+3} \rho \, dx \, d\rho \, d\theta$$

$$\phi(\rho,\theta) = \int_{-\rho\cos\theta-6}^{\rho\cos\theta+3} \rho \, dx = \rho \int_{-\rho\cos\theta-6}^{\rho\cos\theta+3} dx = \rho \left[ x \Big|_{-\rho\cos\theta-6}^{\rho\cos\theta+3} \right]$$

$$= \rho\left[\rho\cos\theta + 3 - (-\rho\cos\theta - 6)\right] = \rho\left[2\rho\cos\theta + 9\right] = 2\rho^2\cos\theta + 9\rho$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{2} \phi(\rho,\theta)\, d\rho\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{2} 2\rho^2\cos\theta + 9\rho \, d\rho\, d\theta$$

$$\psi(\theta) = \int_0^2 2\rho^2\cos\theta + 9\rho\, d\rho = 2\cos\theta \int_0^2 \rho^2 d\rho + 9\int_0^2 \rho\, d\rho = 2\cos\theta\left[\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^2\right] + 9\left[\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^2\right]$$

$$= 2\cos\theta\left[\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] + 9\left[\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] = 2\cos\theta\left[\frac{8}{3}\right] + 9\left[2\right]$$

$$= \frac{16}{3}\cos\theta + 18$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \psi(\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{16}{3}\cos\theta + 18\, d\theta = \frac{16}{3}\int_0^{2\pi} \cos\theta\, d\theta + 18\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{16}{3}\left[\operatorname{sen}\theta \Big|_0^{2\pi}\right] + 18\left[\theta\Big|_0^{2\pi}\right] = \frac{16}{3}\left[\operatorname{sen}(2\pi) - \operatorname{sen}(0)\right] + 18\left[2\pi - 0\right]$$

$$= \frac{16}{3}\left[0 - 0\right] + 18\left[2\pi\right] = 36\pi \approx 113{,}09$$

3) Integrales triples en coordenadas esfericas

a) Evalua $\iiint_E (10xz+3)\,dV$

con E es la porcion de $x^2+y^2+z^2=16$ con $z \geq 0$

esto es la parte superior de una esfera de radio 4, con centro en $(0,0,0)$

entonces veamos los limites en coordenadas esfericas

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \operatorname{sen}\phi \\ y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \\ z = r\cos\phi \end{cases}$$

Jacobiano $= r^2 \operatorname{sen}\phi$

entonces

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 4 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

y la funcion

$10xz+3 \Rightarrow 10\, r\cos\theta \operatorname{sen}\phi \, r\cos\phi + 3$

$= 10r^2 \cos\theta \operatorname{sen}\phi \cos\phi + 3$

entonces

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^4 \left(10r^2\cos\theta \operatorname{sen}\phi\cos\phi + 3\right) r^2 \operatorname{sen}\phi \; dr\, d\phi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^4 10r^4\cos\theta\cos\phi \operatorname{sen}^2\phi + 3r^2\operatorname{sen}\phi \; dr\, d\phi\, d\theta$$

$$\phi(\phi,\theta) = \int_0^4 10r^4\cos\theta\cos\phi\, sen^2\phi + 3r^2 sen\phi\, dr$$

$$= 10\cos\theta\cos\phi\, sen^2\phi \int_0^4 r^4\, dr + 3\, sen\phi \int_0^4 r^2\, dr$$

$$= 10\cos\theta\cos\phi\, sen^2\phi \left[\frac{r^5}{5}\Big|_0^4\right] + 3\, sen\phi\left[\frac{r^3}{3}\Big|_0^4\right]$$

$$= 10\cos\theta\cos\phi\, sen^2\phi\left[\frac{4^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right] + 3\, sen\phi\left[\frac{4^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right]$$

$$= 10\cos\theta\cos\phi\, sen^2\phi\left[\frac{1024}{5}\right] + 3\, sen\phi\left[\frac{64}{3}\right]$$

$$= 2048\cos\theta\cos\phi\, sen^2\phi + 64\, sen\phi$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \phi(\phi,\theta)\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} 2048\cos\theta\cos\phi\, sen^2\phi + 64\, sen\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$\psi(\theta) = \int_0^{\pi/2} 2048\cos\theta\cos\phi\, sen^2\phi + 64\, sen\phi\, d\phi$$

$$= 2048\cos\theta \int_0^{\pi/2} \cos\phi\, sen^2\phi\, d\phi + 64\int_0^{\pi/2} sen\phi\, d\phi$$

sustitucion con

$$u = sen\phi$$
$$du = \cos\phi\, d\phi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} \Rightarrow sen(\frac{\pi}{2}) = 1 \\ 0 \Rightarrow sen(0) = 0 \end{cases}$$

$$= 2048\cos\theta \int_0^1 u^2\, du + 64\left[-\cos\phi\Big|_0^{\pi/2}\right]$$

$$= 2048\cos\theta\left[\frac{u^3}{3}\Big|_0^1\right] + 64\left[-\cos(\tfrac{\pi}{2}) - (-\cos(0))\right]$$

$$= 2048\cos\theta\left[\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] + 64\left[0 + 1\right] = 2048\cos\theta\left[\frac{1}{3}\right] + 64[1]$$

$$= \frac{2048}{3}\cos\theta + 64$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \psi(\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2048}{3}\cos\theta + 64 \; d\theta$$

$$= \frac{2048}{3}\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta + 64 \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2048}{3}\left[ \operatorname{sen}(\theta)\Big|_0^{2\pi} \right] + 64 \left[ \theta \Big|_0^{2\pi} \right]$$

$$= \frac{2048}{3}\left[ \operatorname{sen}(2\pi) - \operatorname{sen}(0) \right] + 64 \left[ 2\pi - 0 \right]$$

$$= \frac{2048}{3}\left[ 0 - 0 \right] + 64 \left[ 2\pi \right] = 128\pi$$

b) Evalua $\iiint_E x^2 \, dV$

con E es la region dentro de $x^2+y^2+z^2=36$ y $z=-\sqrt{3x^2+3y^2}$

notemos que es una esfera de radio 6, centro en (0,0,0)

y un cono por lo tanto usemos coordenadas esfericas

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\,\text{sen}\,\phi \\ x = r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi \\ z = r\cos\phi \end{cases}$$

Jacobiano $= r^2 \text{sen}\,\phi$

veamos la interseccion entre la esfera y cono

$x^2+y^2+z^2=36 \Rightarrow z = \pm\sqrt{36-x^2-y^2}$ usaremos $-$ ya que la

interseccion es en la parte de abajo

$$\begin{cases} z = -\sqrt{36-x^2-y^2} \\ z = -\sqrt{3x^2+3y^2} \end{cases} \Rightarrow -\sqrt{36-x^2-y^2} = -\sqrt{3x^2+3y^2}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{36-r^2\cos^2\theta\,\text{sen}^2\phi - r^2\text{sen}^2\theta\,\text{sen}^2\phi} = -\sqrt{3r^2\cos^2\theta\,\text{sen}^2\phi + 3r^2\text{sen}^2\theta\,\text{sen}^2\phi}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{36-(r^2\text{sen}^2\phi)(\cos^2\theta+\text{sen}^2\theta)} = -\sqrt{3r^2\text{sen}^2\phi\,(\cos^2\theta+\text{sen}^2\theta)}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{36-r^2\text{sen}^2\phi} = -\sqrt{3r^2\text{sen}^2\phi}$$

pero $r=6$ $\Rightarrow -\sqrt{36-(6)^2\text{sen}^2\phi} = -\sqrt{3(6)^2\text{sen}^2\phi}$

$$\Rightarrow -\sqrt{36-36\,\text{sen}^2\phi} = -\sqrt{3(36)\text{sen}^2\phi}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{36(1-\text{sen}^2\phi)} = -\sqrt{3}\sqrt{36}\sqrt{\text{sen}^2\phi}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{36\cos^2\phi} = -\sqrt{3}\,6\,\text{sen}\,\phi$$

$$\Rightarrow \quad -6\cos\phi = -6\sqrt{3}\ \text{sen}\,\phi$$

$$\Rightarrow \quad -6\cot\phi = -6\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad \cot\phi = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad \phi = \cot^{-1}(\sqrt{3}) \rightarrow \phi = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

como es la parte de abajo tomamos $\frac{7\pi}{6}$

entonces

$$\begin{cases} 0 \le r \le 6 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ \pi \le \phi \le \frac{7}{6}\pi \end{cases}$$

y la funcion

$$x^2 \Rightarrow r^2\cos^2\theta\,\text{sen}^2\phi$$

entonces

$$\int_0^{2\pi}\int_{\pi}^{\frac{7}{6}\pi}\int_0^6 (r^2\cos^2\theta\,\text{sen}^2\phi)\,r^2\,\text{sen}\,\phi\; dr\,d\phi\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{\pi}^{\frac{7}{6}\pi}\int_0^6 r^4\cos^2\theta\,\text{sen}^3\phi\; dr\,d\phi\,d\theta$$

$$\phi(\phi,\theta) = \int_0^6 r^4\cos^2\theta\,\text{sen}^3\phi\,dr = \cos^2\theta\,\text{sen}^3\phi\int_0^6 r^4\,dr$$

$$= \cos^2\theta\,\text{sen}^3\phi\left[\frac{r^5}{5}\Big|_0^6\right] = \cos^2\theta\,\text{sen}^3\phi\left[\frac{6^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right] = \cos^2\theta\,\text{sen}^3\phi\left(\frac{7776}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_{\pi}^{7/6\,\pi} \phi(\phi,\theta)\,d\phi\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{\pi}^{\frac{7}{6}\pi} \cos^2\theta\,\text{sen}^3\phi\left(\frac{7776}{5}\right)d\phi\,d\theta$$

$$\psi(\theta) = \int_{\pi}^{\frac{7}{6}\pi} \cos^2\theta \,\text{sen}^3\phi \left(\frac{7776}{5}\right) d\phi = \cos^2\theta \left(\frac{7776}{5}\right) \int_{\pi}^{\frac{7}{6}\pi} \text{sen}^3\phi \, d\phi$$

usemos una tabla de integrales y tenemos que $\int \text{sen}^3(ax)dx = -\frac{9\cos(ax)}{12a} + \frac{\cos(3ax)}{12a}$

entonces

$$= \cos^2\theta \left(\frac{7776}{5}\right) \left[ -\frac{9\cos(\theta)}{12} + \frac{\cos(3\theta)}{12} \Big|_{\pi}^{\frac{7}{6}\pi} \right]$$

$$= \cos^2\theta \left(\frac{7776}{5}\right) \left[ \left( -\frac{9\cos(\frac{7}{6}\pi)}{12} + \frac{\cos(\frac{7}{2}\pi)}{12} \right) - \left( -\frac{9\cos(\pi)}{12} + \frac{\cos(3\pi)}{12} \right) \right]$$

$$= \cos^2\theta \left(\frac{7776}{5}\right) \left[ \left( \frac{3\sqrt{3}}{8} + 0 \right) - \left( \frac{9}{12} - \frac{1}{12} \right) \right]$$

$$= \cos^2\theta \left(\frac{7776}{5}\right) \left[ \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{8}{12} \right] = \cos^2\theta \left(\frac{7776}{5}\right) \left[ \frac{9\sqrt{3} - 16}{24} \right]$$

$$= \cos^2\theta \left(\frac{324}{5}\right) (9\sqrt{3} - 16)$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \psi(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \left(\frac{324}{5}\right) (9\sqrt{3} - 16) \, d\theta$$

$$= \left(\frac{324}{5}\right) (9\sqrt{3} - 16) \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \left(\frac{324}{5}\right) (9\sqrt{3} - 16) \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2\theta)}{2} d\theta$$

$$= \left(\frac{162}{5}\right) (9\sqrt{3} - 16) \left[ \int_0^{2\pi} d\theta + \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) \, d\theta \right]$$

sustitucion

$u = 2\theta$

$du = 2d\theta$

$\Rightarrow \begin{cases} 2\pi \Rightarrow 2(2\pi) = 4\pi \\ 0 \Rightarrow 2(0) = 0 \end{cases}$

$$= \left(\frac{162}{5}\right) (9\sqrt{3} - 16) \left[ \left( \theta \Big|_0^{2\pi} \right) + \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} \cos(u) \, du \right]$$

$$= \left(\frac{162}{5}\right)(9\sqrt{3}-16)\left[(2\pi-0)+\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(u)\Big|_0^{4\pi}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{162}{5}\right)(9\sqrt{3}-16)\left[2\pi+\frac{1}{2}(\operatorname{sen}(4\pi)-\operatorname{sen}(0))\right]$$

$$= \left(\frac{162}{5}\right)(9\sqrt{3}-16)\left[2\pi+\frac{1}{2}(0)\right]$$

$$= \frac{162}{5}(9\sqrt{3}-16)(2\pi) = \left(\frac{324}{5}\pi\right)(9\sqrt{3}-16) \approx -83.77$$

c) Evalua

$$\iiint_E (3x-2y)\, dV$$

con $E$ es la región entre las esferas $x^2+y^2+z^2=1$ y $x^2+y^2+z^2=4$, con $z\leq 0$

(radio 1 y radio 2)

notemos que el dominio sera el volumen entre dos esferas por lo tanto

veamos en coordenadas esfericas

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \operatorname{sen}\phi \\ y = r\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \\ z = r\cos\phi \end{cases}$$

Jacobiano $= r^2 \operatorname{sen}\phi$

veamos como serian los limites

como $z\leq 0$ entonces sera la parte de abajo

$$\begin{cases} 1\leq r\leq 2 \\ 0\leq \theta\leq 2\pi \\ \pi/2 \leq \phi \leq \pi \end{cases}$$

porque $z\leq 0$

ahora veamos la funcion

$$(3x-2y) \Rightarrow (3r\cos\theta\operatorname{sen}\phi - 2r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi)$$

$$\Rightarrow (r\operatorname{sen}\phi)(3\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta)$$

entonces

$$\int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_1^2 (r\operatorname{sen}\phi)(3\cos\theta-2\operatorname{sen}\theta)(r^2\operatorname{sen}\phi)\, dr\, d\phi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\int_1^2 r^3 \operatorname{sen}^2\phi\, (3\cos\theta-2\operatorname{sen}\theta)\, dr\, d\phi\, d\theta$$

$$\phi(\phi,\theta) = \int_1^2 r^3\operatorname{sen}^2\phi\,(3\cos\theta-2\operatorname{sen}\theta)\, dr \quad = (\operatorname{sen}^2\phi)(3\cos\theta-2\operatorname{sen}\theta)\int_1^2 r^3\, dr$$

$$= (\operatorname{sen}^2\phi)(3\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta)\left[\frac{r^4}{4}\Big|_1^2\right]$$

$$= (\operatorname{sen}^2\phi)(3\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta)\left[\frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4}\right] = (\operatorname{sen}^2\phi)(3\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta)\left[4 - \frac{1}{4}\right]$$

$$= (\operatorname{sen}^2\phi)(3\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta)\left(\frac{15}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \varnothing(\phi,\theta)\,d\phi\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (\operatorname{sen}^2\phi)(3\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta)\left(\frac{15}{4}\right)d\phi\,d\theta$$

$$\psi(\theta) = \int_{\pi/2}^{\pi} (\operatorname{sen}^2\phi)(3\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta)\left(\frac{15}{4}\right)d\phi$$

$$= (3\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta)\left(\frac{15}{4}\right)\int_{\pi/2}^{\pi}\operatorname{sen}^2\phi\,d\phi = (3\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta)\left(\frac{15}{4}\right)\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{1-\cos(2\theta)}{2}d\theta$$

$$= (3\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta)\left(\frac{15}{8}\right)\left[\int_{\pi/2}^{\pi}d\theta - \int_{\pi/2}^{\pi}\cos(2\theta)\,d\theta\right]$$

sustitución

$u = 2\theta$

$du = 2\,d\theta$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi \Rightarrow 2(\pi) = 2\pi \\ \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2(\frac{\pi}{2}) = \pi \end{cases}$$

$$= (3\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta)\left(\frac{15}{8}\right)\left[\left(\theta\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right) - \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi}\cos(u)\,du\right]$$

$$= (3\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta)\left(\frac{15}{8}\right)\left[\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(u)\Big|_{\pi}^{2\pi}\right)\right]$$

$$= (3\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta)\left(\frac{15}{8}\right)\left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}(2\pi) - \operatorname{sen}(\pi)\right)\right]$$

$$= (3\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta)\left(\frac{15}{8}\right)\left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(0)\right] = (3\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta)\left(\frac{15}{8}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= (3\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta)\left(\frac{15}{16}\pi\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\psi(\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi}(3\cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta)\left(\frac{15}{16}\pi\right)d\theta$$

$$= \left(\frac{15}{16}\pi\right) \int_0^{2\pi} 3\cos\theta - 2\,\text{sen}\,\theta \; d\theta = \left(\frac{15}{16}\pi\right)\left[3\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta - 2\int_0^{2\pi} \text{sen}\,\theta \, d\theta\right]$$

$$= \left(\frac{15}{16}\pi\right)\left[3\left(\text{sen}(\theta)\Big|_0^{2\pi}\right) - 2\left(-\cos(\theta)\Big|_0^{2\pi}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{15}{16}\pi\right)\left[3(\text{sen}(2\pi) - \text{sen}(0)) - 2(-\cos(2\pi) + \cos(0))\right]$$

$$= \left(\frac{15}{16}\pi\right)\left[3(0) - 2(-1+1)\right] = \left(\frac{15}{16}\pi\right)(0) = 0$$