1) Demuestre que el conjunto $\mathbb{Q}(i) = \{a+ib : a,b \in \mathbb{Q}\}$ con la suma definida por $(a+ib)+(x+iy) = (a+x)+i(b+y)$ y el producto definido por $(a+ib)(x+iy) = (ax-by)+i(ay+bx)$ es un campo. $\mathbb{Q}(i) \not\subset \mathbb{R}$

notemos que $\mathbb{Q}$ es un campo

Dem:

— Veamos si la suma cumple lo siguiente $\forall a+ib, c+id, x+iy \in \mathbb{Q}(i)$

- Conmutativa $(a+ib)+(x+iy) \overset{\text{def suma}}{\Rightarrow} (a+x)+i(b+y)$

$\overset{\text{conmutativa de } \mathbb{Q}}{\Rightarrow} (x+a)+i(y+b) \overset{\text{def suma}}{\Rightarrow} (x+iy)+(a+ib)$

- asociativa $(a+ib)+((x+iy)+(c+di)) \overset{\text{def suma}}{\Rightarrow} (a+ib)+((x+c)+i(y+d))$

$\overset{\text{def suma}}{\Rightarrow} (a+(x+c))+i(b+(y+d)) \overset{\text{asociativa de } \mathbb{Q}}{\Rightarrow} ((a+x)+c)+i((b+y)+d)$

$\overset{\text{def suma}}{\Rightarrow} ((a+x)+i(b+y)) + (c+id) \overset{\text{def suma}}{\Rightarrow} ((a+ib)+(x+iy)) + (c+id)$

- neutro veamos que $0 \in \mathbb{Q}$ entonces $0+i0 \in \mathbb{Q}(i)$

ahora $(a+ib)+(0+i0) \overset{\text{def suma}}{\Rightarrow} (a+0)+i(b+0)$

$\overset{\text{neutro de } \mathbb{Q}}{\Rightarrow} (a)+i(b)$

- Inverso $\forall a+ib$ veamos que su inverso es $-a+i(-b)$

$(a+ib)+(-a+i(-b)) \overset{\text{def suma}}{\Rightarrow} (a-a)+i(b-b) \overset{\text{inverso de } \mathbb{Q}}{\Rightarrow} (0)+i(0) = 0$

— veamos si el producto cumple lo siguiente

- Conmutativa $(a+ib)(x+iy) \overset{\text{def prod}}{\Rightarrow} (ax-by)+i(ay+bx)$

$\overset{\text{conmutativa de } \mathbb{Q} \text{ (suma y producto)}}{\Rightarrow} (xa-yb)+i(xb+ya) \overset{\text{def prod}}{\Rightarrow} (x+iy)(a+ib)$

• asociativa $(a+ib)((x+iy)(c+id)) \overset{\text{def prod}}{\Rightarrow} (a+ib)((xc-yd)+i(xd+yc))$

$\overset{\text{def prod}}{\Rightarrow} (axc-ayd-bxd-byc)+i(axd+ayc+bxc-byd)$

y distri de $\mathbb{Q}$

distri de $\mathbb{Q} \Rightarrow ((ax-by)c-(ay+bx)d)+i((ax-by)d+(ay+bx)c)$

$\overset{\text{def prod}}{\Rightarrow} ((ax-by)+i(ay+bx))(c+id) \overset{\text{def prod}}{\Rightarrow} ((a+ib)(x+iy))(c+id)$

• neutro veamos que $0 \in \mathbb{Q}$ y $1 \in \mathbb{Q}$ entonces $1+0i \in \mathbb{Q}(i)$

ahora $(a+ib)(1+0i) \overset{\text{def prod}}{\Rightarrow} (a1-b0)+i(a0+b1) = a+ib$

• Inverso

como $a,b \in \mathbb{Q}$ entonces $\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i \in \mathbb{Q}(i)$

$$(a+ib)\left(\frac{a-ib}{a^2+b^2}\right) = \frac{(a+ib)(a-ib)}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{a^2+iab-iab-ib^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2-b^2i^2}{a^2+b^2}$$

$$= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$$

- por ultimo probemos la distributiva

$(a+ib)((x+iy)+(c+id)) \overset{\text{def suma}}{\Rightarrow} (a+ib)((x+c)+i(y+d))$

def prod y distri $\mathbb{Q}$ $\Rightarrow ((ax+ac)-(by-bd))+i((ay+ad)+(bx+bc))$

$\overset{\text{def suma}}{\Rightarrow} ((ax-by)+i(ay+bx))+((ac-bd)+i(ad+bc))$

$\overset{\text{def prod}}{\Rightarrow} (a+ib)(x+iy)+(a+ib)(c+id)$

$\square$

2) Demuestre que el conjunto $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a+\sqrt{2}b : a,b \in \mathbb{Q}\}$ con la suma definida $(a+\sqrt{2}b)+(x+\sqrt{2}y) = (a+x)+\sqrt{2}(b+y)$ y el producto definido $(a+\sqrt{2}b)(x+\sqrt{2}y) = (ax+2by)+\sqrt{2}(ay+bx)$ es un campo

notemos que $\mathbb{Q}$ es campo

Dem

$\forall\, a+\sqrt{2}b,\ c+\sqrt{2}d,\ x+\sqrt{2}y \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

— veamos si la suma cumple lo siguiente

• Conmutativa $(a+\sqrt{2}b)+(x+\sqrt{2}y) \overset{\text{def suma}}{\Rightarrow} (a+x)+\sqrt{2}(b+y)$

$\overset{\text{conmutativa } \mathbb{Q}}{\Rightarrow} (x+a)+\sqrt{2}(y+b) \overset{\text{def suma}}{\Rightarrow} (x+\sqrt{2}y)+(a+\sqrt{2}b)$

• asociativa $(a+\sqrt{2}b)+[(x+\sqrt{2}y)+(c+\sqrt{2}d)] \overset{\text{def suma}}{\Rightarrow} (a+\sqrt{2}b)+((x+c)+\sqrt{2}(y+d))$

$\overset{\text{def suma}}{\Rightarrow} (a+(x+c))+\sqrt{2}(b+(y+d)) \overset{\text{asociativa } \mathbb{Q}}{\Rightarrow} ((a+x)+c)+\sqrt{2}((b+y)+d)$

$\overset{\text{def suma}}{\Rightarrow} ((a+x)+\sqrt{2}(b+y))+(c+\sqrt{2}d) \overset{\text{def suma}}{\Rightarrow} ((a+\sqrt{2}b)+(x+\sqrt{2}y))+(c+\sqrt{2}d)$

• neutro veamos que $0 \in \mathbb{Q}$ entonces $0+\sqrt{2}0 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

ahora $(a+\sqrt{2}b)+(0+\sqrt{2}0) \overset{\text{def suma}}{\Rightarrow} (a+0)+\sqrt{2}(b+0) = a+\sqrt{2}b$

• inverso $\forall a+\sqrt{2}b$ veamos que su inverso es $-a+\sqrt{2}(-b)$

$(a+\sqrt{2}b)+(-a+\sqrt{2}(-b)) \overset{\text{def suma}}{\Rightarrow} (a-a)+\sqrt{2}(b-b) = 0+\sqrt{2}(0) = 0$

— veamos si el producto cumple lo siguiente

• conmutativa $(a+\sqrt{2}b)(x+\sqrt{2}y) \overset{\text{def prod}}{\Rightarrow} (ax+2by)+\sqrt{2}(ay+bx)$

$\overset{\text{conmutativa } \mathbb{Q} \text{ (suma y producto)}}{\Rightarrow} (xa+2yb)+\sqrt{2}(xb+ya) \overset{\text{def prod}}{\Rightarrow} (x+\sqrt{2}y)(a+\sqrt{2}b)$

• asociativa $(a+\sqrt{2}b)((x+\sqrt{2}y)(c+\sqrt{2}d)) \overset{\text{def prod}}{\Rightarrow} (a+\sqrt{2}b)((xc+2yd)+\sqrt{2}(xd+yc))$

$\overset{\text{def prod}}{\Rightarrow} (axc+2ayd+2bxd+2byc)+\sqrt{2}(axd+ayc+bxc+2ydb)$

$\overset{\text{distri } \mathbb{Q}}{\Rightarrow} ((ax+2by)c+2(ay+bx)d)+\sqrt{2}((ax+2yb)d+(ay+bx)c)$

$\overset{\text{def prod}}{\Rightarrow} ((ax+2by)+\sqrt{2}(ay+bx))(c+\sqrt{2}d) \overset{\text{def prod}}{\Rightarrow} ((a+\sqrt{2}b)(x+\sqrt{2}y))(c+\sqrt{2}d)$

• neutro veamos que $0 \in \mathbb{Q}$, y $1 \in \mathbb{Q}$ entonces $1+\sqrt{2}0 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

ahora $(a+\sqrt{2}b)(1+\sqrt{2}0) \overset{\text{def prod}}{\Rightarrow} (a1+2b0)+\sqrt{2}(a0+b1) = a+\sqrt{2}b$

• inverso

como $a,b \in \mathbb{Q}$ entonces $-\frac{a}{2b^2-a^2}+\frac{b}{2b^2-a^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

$$(a+\sqrt{2}b)\left(\frac{-a+\sqrt{2}b}{2b^2-a^2}\right) = \frac{(a+\sqrt{2}b)(-a+\sqrt{2}b)}{2b^2-a^2}$$

$$= \frac{-a^2+\sqrt{2}ba-\sqrt{2}ba+2b^2}{2b^2-a^2} = \frac{-a^2+2b^2}{2b^2-a^2} = 1$$

– por último probemos la distributiva

$(a+\sqrt{2}b)((x+\sqrt{2}y)+(c+\sqrt{2}d)) \overset{\text{def suma}}{\Rightarrow} (a+\sqrt{2}b)((x+c)+\sqrt{2}(y+d))$

$\overset{\text{def prod y distri } \mathbb{Q}}{\Rightarrow} ((ax+ac+2by+2bd)+\sqrt{2}(ay+ad+bx+bc)$

$\overset{\text{def suma}}{\Rightarrow} ((ax+2by)+\sqrt{2}(ay+bx))+((ac+2bd)+\sqrt{2}(ad+bc))$

$\overset{\text{def prod}}{\Rightarrow} (a+\sqrt{2}b)(x+\sqrt{2}y) + (a+\sqrt{2}b)(c+\sqrt{2}d)$

$\square$

3) Determine si el conjunto $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ con las operaciones $(a,b)+(x,y)$

$= (a+x, b+y)$ y $(a,b)(x,y) = (ax, by)$ es un campo

No es un campo ya que $(1,0), (0,1) \in \mathbb{R}^2$

y $(1,0)(0,1) = (0,0)$. pero $(1,0),(0,1) \neq 0$!

Teorema de clase. 17/8/22