UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS

Tarea 1 (Espacios De Probabilidad)

Profesor:
Jaime Vázquez Alamilla
Ayudantes:
Brian Pérez Gutiérrez
Miguel Angel Fernández Castresana
Alumnos:
Carlos Emilio Castañon Maldonado **319053315**
José Camilo García Ponce **319210536**
Claudio Naim De La Cruz Márquez **318151645**
Moisés Abraham Lira Rivera **319029930**
Semestre 2023-1

Probabilidad 1

Tarea 1 (Espacios De Probabilidad)
Fecha de entrega: Martes 20 Septiembre

1 **Una caja contiene tres canicas: una roja, una verde y una azul. Considere un experimento que consiste en sacar una canica de la caja, observar su color y devolverla a la caja; posteriormente sacar una segunda canica observar su color y devolverla. Describa el espacio muestral asociado a este experimento. Suponga ahora que la segunda canica se saca de la caja sin que la primera haya sido devuelta a la misma, ¿cambió el espacio muestral?, si sí, ¿cómo?.**

Espacio muestral del primer experimento:
$\Omega_1 = \{(roja, roja), (roja, verde), (roja, azul), (verde, roja), (verde, verde), (verde, azul), (azul, roja)$
$(azul, verde), (azul, azul)\}$

Espacio muestral del segundo experimento:
$\Omega_2 = \{(roja, verde), (roja, azul), (verde, roja), (verde, azul), (azul, roja), (azul, verde)\}$
Lo que cambia entre este espacio muestral y el del primer experimento, es que en el segundo espacio muestral ya no tenemos los eventos donde sacamos dos canicas del mismo color.

2 **La diferencia simétrica de dos conjuntos A, B se define como**
$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
Demuestre
(a) $A^c \triangle B^c = A \triangle B$
$A^c \triangle B^c = (A^c \cap (B^c)^c) \cup (B^c \cap (A^c)^c)$, por la definición de diferencia simétrica
$(A^c \cap (B^c)^c) \cup (B^c \cap (A^c)^c) = (A^c \cap B) \cup (B^c \cap A)$, debido a que el complemento del complemento se cancela $(A^c)^c = A$
$(A^c \cap B) \cup (B^c \cap A) = (B \cap A^c) \cup (A \cap B^c)$, por la conmutatividad de la intersección
$(B \cap A^c) \cup (A \cap B^c) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$, por la conmutatividad de la union
$(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = A \triangle B$, por la definición de diferencia simétrica $\square$

(b) $(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$

Demostración
Comencemos renombrando los conjuntos $A_1, A_2, B_1 y B_2$ como:

a) $A_1 = A$
b) $A_2 = B$
c) $B_1 = C$
d) $B_2 = D$

De este modo:

Empecemos con que $(A \cup B) \triangle (C \cup D) = ((A \cup B) \cap (C \cup D)^c) \cup ((C \cup D) \cap (A \cup B)^c)$, por definición de $\triangle$
Después $((A \cup B) \cap (C \cup D)^c) \cup ((C \cup D) \cap (A \cup B)^c) = ((A \cup B) \cap (C^c \cap D^c)) \cup ((C \cup D) \cap (A^c \cap B^c))$, por DeMorgan
Luego $((A \cup B) \cap (C^c \cap D^c)) \cup ((C \cup D) \cap (A^c \cap B^c)) = ((A \cap (C^c \cap D^c)) \cup (B \cap (C^c \cap D^c))) \cup ((C \cap$

$(A^c \cap B^c)) \cup (D \cap (A^c \cap B^c)))$, por distributiva de $\cup$ y $\cap$
Posteriormente $((A \cap (C^c \cap D^c)) \cup (B \cap (C^c \cap D^c))) \cup ((C \cap (A^c \cap B^c)) \cup (D \cap (A^c \cap B^c))) \subseteq ((A \cap C^c) \cup (B \cap D^c)) \cup ((C \cap A^c) \cup (D \cap B^c))$, debido a que $(A \cap B) \subseteq A$
Luego $((A \cap C^c) \cup (B \cap D^c)) \cup ((C \cap A^c) \cup (D \cap B^c)) = ((A \cap C^c) \cup (C \cap A^c)) \cup ((B \cap D^c) \cup (D \cap B^c))$, por la conmutativa de $\cup$
Después $((A \cap C^c) \cup (C \cap A^c)) \cup ((B \cap D^c) \cup (D \cap B^c)) = (A \triangle C) \cup (B \triangle D)$, por la definición de $\triangle$
Por lo tanto concluimos que $(A \cup B) \triangle (C \cup D) \subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle D)$ y entonces $(A_1 \cup A_2) \triangle (B_1 \cup B_2) \subseteq (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2)$ $\square$

(c) Sea Ω un conjunto y $F \subseteq P(\Omega)$ una $\sigma - \acute{a}lgebra$.
Demuestre que $A \triangle B \in F$ *siempre que* $A, B \in F$
Supongamos $A, B \in F$ PD $A \triangle B \in F$
$A \in F$ por el segundo (ii) axioma de Kolmogorov para F tenemos que $A^c \in F$ y $B \in F$ por el segundo (ii) axioma de Kolmogorov para F tenemos que $B^c \in F$
Como $A \in F$ y $B^c \in F$, usando la proposición de la clase del 23/8/22 tenemos que $A \cap B^c \in F$
De manera similar como $B \in F$ y $A^c \in F$, usando la proposición de la clase del 23/8/22 tenemos que $B \cap A^c \in F$
Ahora como $A \cap B^c \in F$ y $B \cap A^c \in F$ por el tercer (iii) axioma de Kolmogorov para F tenemos que $(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \in F$
Ahora como tenemos que $(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \in F$, aplicamos la definición de diferencia simétrica y obtenemos que $A \triangle B \in F$ $\square$

3 **Si $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ construya una $\sigma - \acute{a}lgebra$ $F \neq P(\Omega)$ tal que $\{\{1, 2\}, \{1, 3\}\} \subset F$**

$F = \{\varnothing, \Omega, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{3, 4, 5\}, \{2, 4, 5\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{1\},$
$\{3\}, \{2, 4, 5\}, \{4, 5\}, \{2\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{2, 3\}, \{1, 4, 5\}\}$

4 **Sean E, F y G tres eventos. Encuentre expresiones para:**
(a) Sólo E ocurre.
$E \cap F^c \cap G^c$

(b) Ocurren E y G pero no F.
$E \cap F^c \cap G$

(c) Ocurre al menos uno de los eventos.
$E \cup F \cup G$

(d) Ocurren al menos dos de los eventos.
$(E \cap F) \cup (E \cap G) \cup (F \cap G)$

(e) Ocurren los tres eventos.
$E \cap F \cap G$

(f) No ocurre ningún evento.
$E^c \cap F^c \cap G^c$

(g) A lo más uno de los tres eventos ocurre.
$(E^c \cap F^c \cap G^c) \cup (E \cap F^c \cap G^c) \cup (E^c \cap F \cap G^c) \cup (E^c \cap F^c \cap G)$

(h) A los más dos de los tres eventos ocurre.
$E^c \cup F^c \cup G^c$

(i) Ocurren exactamente dos eventos.
$(E \cap F \cap G^c) \cup (E \cap F^c \cap G) \cup (E^c \cap F \cap G)$

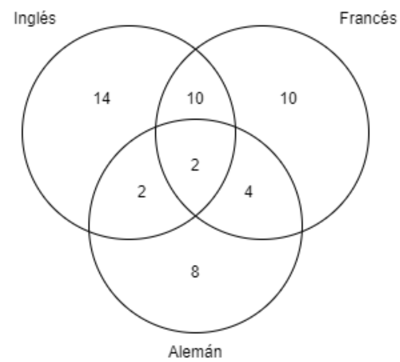
5 **En una escuela secundaria se ofrecen tres cursos de idiomas: uno de inglés, uno de francés y otro de alemán. Cualquiera de los 100 alumnos de la escuela puede tomar dichos cursos. Hay 28 estudiantes en la clase de inglés, 26 en la de francés y 16 en el de alemán. Hay 12 estudiantes que están en el de inglés y francés; 4 en el de inglés y alemán; 6 en el de alemán y francés; y 2 que están tomando los tres cursos.**

(a) Si un estudiante se selecciona aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que no esté inscrito en ningún curso de idiomas?
Pongamos los siguientes eventos: A: esta en ingles
B: esta en francés
C: esta en alemán
$A \cap B$: esta en ingles y francés
$A \cap C$: esta en ingles y alemán
$B \cap C$: esta en francés y alemán
$A \cap B \cap C$: esta en ingles, francés y alemán
D: no esta inscrito a ninguno
Veamos que D^{c}: esta inscrito a al menos 1 y esto lo podemos poner como $A \cup B \cup C$
Entonces calculemos $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$ usando la formula de exclusión inclusión
Entonces tenemos que $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$
Ya tenemos esas probabilidades entonces solo las sustituimos $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 0.28 + 0.26 + 0.16 - 0.12 - 0.04 - 0.06 + 0.02$
$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 0.5$
Y ahora $\mathbb{P}(D) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 1 - 0.5 = 0.5$

(b) Si un estudiante se selecciona aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que lleve exactamente uno de los cursos de idiomas?
Primero calculemos cuantos estudiantes toman exactamente una clase, para esto podemos basarnos en el diagrama de Venn o podemos sumar y restar los alumnos de los datos que nos dieron, primero sumamos todos los que están inscritos a 1 clase $28 + 26 + 16 = 70$, luego a lo que obtuvimos le restamos los que toman 2 clases, pero los restamos dos veces, ya que cuentan dos veces en la suma de 1 clase $70 - 2(12) - 2(4) - 2(6) = 26$ y por ultimo vamos a sumar los que toman las 3 clases, pero como en el caso de los que toman 2 clases vamos sumarlo 3 veces, debido a que al restarlos los tomamos 3 veces, obteniendo $26 + (3)2 = 32$ Ahora ya tenemos cuantos alumnos toman exactamente 1 clase por lo tanto vamos a dividir el total de casos (100) sobre el numero de casos favorables (32), así obtenemos que la probabilidad de que un alumno lleva exactamente un idioma es 0.32

(c) Si dos estudiantes se seleccionan aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno este tomando alguna clase de idiomas?
Para esto primero veremos cual es la probabilidad que ninguno de los dos este tomando ninguna clase. Primero veamos cual va a ser el total de posibles casos, como tomamos parejas de alumnos y tenemos 100 alumnos entonces seria las combinaciones de 100 de 2 en 2 lo cual es $\binom{100}{2} = 4950$, ahora ya sabemos que el porcentaje de alumnos que no toman ninguna clase es 0.5 por lo tanto 50 alumnos no toman ninguna clase, por lo tanto veamos cuantos posible casos favorables tenemos, lo que es las combinaciones de 50 de 2 en 2 y es $\binom{5}{2} = 1225$, ahora juntamos esto y tenemos que la probabilidad de que los dos no tomen ninguna clase es $\frac{1225}{4950} = \frac{49}{198} = 0.247$, ahora ya tenemos la probabilidad que ninguno de los dos tome un idioma, y si a esto le tomamos el completo seria que al menos uno de los dos toma una clase y para calcular esto tomamos esto $1 - 0.247 = 0.753$, por lo tanto la probabilidad de que al menos uno este tomando alguna clase de idiomas es 0.75

Diagrama de Venn



6 Si $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$ y $\mathbb{P}(B^c) = \frac{1}{4}$ ¿Pueden ser A y B mutuamente excluyentes?.
Supongamos que A y B son mutuamente excluyentes.
Ahora veamos quien es $\mathbb{P}(B)$, para esto usamos la tercera propiedad de $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ Como supusimos que A y B son mutuamente excluyentes, es decir $A \cap B = \varnothing$, entonces podemos usar la segunda propiedad de $\mathbb{P}$ para calcular $\mathbb{P}(A \cup B)$, lo cual seria $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$, como ya sabemos cuanto valen esas probabilidades tenemos que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} = \frac{13}{12}$
Ahora recordemos que la definición de $\mathbb{P}$ es una función con una imagen $[0, 1]$, pero podemos observar que claramente $\frac{13}{12}$ no esta en $[0, 1]$, lo cual es una contradicción.
Por lo tanto concluimos que A y B no pueden ser mutuamente excluyentes.

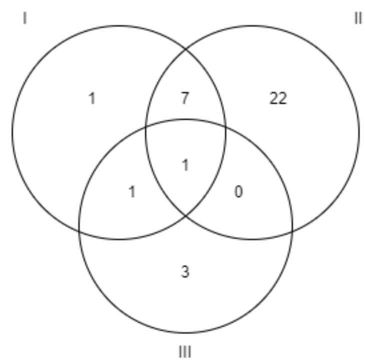
7 **En cierto pueblecillo con 100,000 habitantes se publican tres periódicos: I, II y III. La proporción de la gente que lee estos periódicos es la siguiente:**
$I : 10\%,\ II : 30\%,\ III : 5\%,\ I\ y\ II : 8\%,\ I\ y\ III : 2\%,\ II\ y\ III : 1\%,\ I, II\ y\ III : 1\%.$
(Esta lista dice por ejemplo que 8,000 personas leen los periódicos I y II)
(a) Encuentre el número de personas que leen sólo un periódico.
Para esto nos basaremos en el diagrama de Venn o podemos sumar y restar las personas dependiendo de lo que leen, primero sumamos todos los que leen un periódico $10,000 + 30,000 + 5,000 = 45,000$, luego a lo que obtuvimos le restamos los que leen dos periódicos, pero los restamos dos veces, porque si no los estaríamos contando dos veces, $45,000 - 2(8,000) - 2(2,000) - 2(1,000) = 23,000$ y por ultimo vamos a sumar a las personas que leen los tres periódicos, pero vamos a sumarlos 3 veces, de caso contrario no los estaríamos contando, obteniendo $23,000 + (3)1,000 = 26,000$, por lo tanto las personas que leen sólo un periódico son $26,000$.

(b) ¿Cuántas personas leen al menos dos periódicos?
Otra vez usamos un diagrama de Venn para facilitarnos la comprensión del problema y podemos llegar al resultado de que 9,000 personas leen al menos dos periódicos, ahora para llegar a este número lo podemos hacer sumando y restando personas, primero sumamos a las personas que leen dos periódicos $8,000 + 2,000 + 1,000 = 11,000$, después vamos a restar a las personas que leen los tres periódicos, pero vamos a restarlos dos veces de otra forma los estaríamos contando dos veces, $11,000 - 2(1,000) = 9,000$ y llegamos a lo mismo, 9,000 personas leen al menos dos periódicos.

(c) Si I y III son los periódicos matutinos y II es el periódico vespertino, ¿cuántas personas leen al menos un periódico matutino y un vespertino?
Por tercera vez usaremos el mismo diagrama de Venn para tener una idea más clara, para esta pregunta primero tenemos que sumar las personas que leen los periódicos $IyII$ y los periódicos $IIyIII$,

$8,000 + 1,000 = 9,000$, después vamos a restar las personas que leen los tres periódicos, pero a diferencia de en las otras preguntas aquí solo los restamos una vez debido a que nos sumamos a todas las personas que leen dos periódicos, entonces tenemos $9,000 - 1,000 = 8,000$, por lo tanto $8,000$ son las personas que leen al menos un periódico matutino y un vespertino.

Diagrama de Venn



8 Demuestre que
$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A^c \cap B) - \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B)$
Empecemos con $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A^c \cap B) - \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B)$
Ahora obtenemos $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A^c \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B)$ al sumar $\mathbb{P}(A \cap B)$ a ambos lados de la igualdad
Después tenemos $\mathbb{P}(A) = \frac{\mathbb{P}(A^c \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} - \mathbb{P}(A^c)$ al dividir ambos por $\mathbb{P}(B)$ ambos lados
Luego obtenemos $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c) = \frac{\mathbb{P}(A^c \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ al sumar de ambos lados $\mathbb{P}(A^c)$
Posteriormente alcanzamos que $1 = \frac{\mathbb{P}(A^c \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ usando la tercera propiedad de $\mathbb{P}$
Ahora notemos algunas cosas, primero $(A^c \cap B)$ y $(A \cap B)$ son disjuntos y segundo que $(A^c \cap B) \cup (A \cap B) = B$ debido a que $(A^c \cap B) \cup (A \cap B) = (A^c \cup A) \cap B$ por la propiedad distributiva, y eso es $(A^c \cup A) \cap B = \mathbb{U} \cap B = B$
Por lo acabado de ver tenemos que $\mathbb{P}(A^c \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$
Entonces usando esto en lo que teníamos obtenemos $1 = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$
Por lo tanto $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A^c \cap B) - \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B)$ $\square$

9 Demuestre que
$\mathbb{P}(A \cup B \cup D) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B^c \cap D)$
Primero veremos una manera para escribir $A \cup B \cup D$ pero como la unión de conjuntos disjuntos.
Empezamos notando que podemos escribir a $A \cup B$ como $A \cup (B \setminus A)$, esto es divido a que tomamos A y todo B menos A, por lo tanto A y $B \setminus A$ son disjuntos.
Ahora usando otra vez lo que notamos podemos escribir $(A \cup B) \cup D = (A \cup B) \cup (D \setminus (A \cup B))$ y notamos que $(A \cup B)$ y $D \setminus (A \cup B)$ son disjuntos.
Ahora juntando todo esto podemos escribir $A \cup B \cup D$ como $A \cup (B \setminus A) \cup (D \setminus (A \cup B))$ y tenemos que es la unión de tres conjuntos disjuntos.
Después, aplicando la definición de diferencia tenemos que $A \cup (B \setminus A) \cup (D \setminus (A \cup B)) = A \cup (B \cap A^{\mathsf{c}}) \cup (D \cap (A \cup B)^{\mathsf{c}})$
Luego, usando las leyes de DeMorgan obtenemos que $A \cup (B \cap A^{\mathsf{c}}) \cup (D \cap (A \cup B)^{\mathsf{c}}) = A \cup (B \cap A^{\mathsf{c}}) \cup (D \cap A^{\mathsf{c}} \cap B^{\mathsf{c}})$

Usando la conmutatividad de la intersección tenemos que $A \cup (B \cap A^{\mathsf{c}}) \cup (D \cap A^{\mathsf{c}} \cap B^{\mathsf{c}}) = A \cup (A^{\mathsf{c}} \cap B) \cup (A^{\mathsf{c}} \cap B^{\mathsf{c}} \cap D)$
Ahora si podemos empezar a ver quien es $\mathbb{P}(A \cup B \cup D)$
Usando lo visto arriba tenemos que $\mathbb{P}(A \cup B \cup D) = \mathbb{P}(A \cup (A^{\mathsf{c}} \cap B) \cup (A^{\mathsf{c}} \cap B^{\mathsf{c}} \cap D))$
Ahora usando la segunda propiedad de $\mathbb{P}$ obtenemos que $\mathbb{P}(A \cup (A^{\mathsf{c}} \cap B) \cup (A^{\mathsf{c}} \cap B^{\mathsf{c}} \cap D)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^{\mathsf{c}} \cap B) + \mathbb{P}(A^{\mathsf{c}} \cap B^{\mathsf{c}} \cap D))$, debido a que A, $B \cap A^{\mathsf{c}}$ y $D \cap A^{\mathsf{c}} \cap B^{\mathsf{c}})$ son eventos disjuntos o mutuamente excluyentes
Por lo tanto concluimos que $\mathbb{P}(A \cup B \cup D) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^{\mathsf{c}} \cap B) + \mathbb{P}(A^{\mathsf{c}} \cap B^{\mathsf{c}} \cap D))$ □

10 **Demuestre que**
$\mathbb{P}(A \cap B) \leq \ min\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\} \leq \mathbb{P}(A) \leq \ max\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\} \leq \mathbb{P}(A \cup B)$
Hagámoslo por casos
Caso 1) Supongamos que $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ es decir $min\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\} = \mathbb{P}(A)$ y $max\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\} \leq \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(B)$
Notemos que $(A \cap B) \subset A$, por lo tanto usando la cuarta propiedad de $\mathbb{P}$ tenemos que $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)$
Después como $B \subset (A \cup B)$ entonces volviendo a usar la cuarta propiedad obtenemos $\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A \cup B)$
Ahora uniendo lo que acabamos de ver y lo que supusimos tenemos que $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A \cup B)$
Caso 2) Supongamos que $\mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A)$ es decir $min\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\} = \mathbb{P}(B)$ y $max\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\} \leq \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A)$
Notemos que $(A \cap B) \subset B$, por lo tanto usando la cuarta propiedad de $\mathbb{P}$ tenemos que $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B)$
Después como $A \subset (A \cup B)$ entonces volviendo a usar la cuarta propiedad obtenemos $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A \cup B)$
Ahora uniendo lo que acabamos de ver y lo que supusimos tenemos que $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B) \leq \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A \cup B)$
Ahora observando en los dos casos podemos "unirlos" y tenemos que $\mathbb{P}(A \cap B) \leq min\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\} \leq \mathbb{P}(A) \leq max\{\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)\} \leq \mathbb{P}(A \cup B)$ □

11 **Sea $(\Omega, F, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Considere $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq F$.**
Demuestre que si para todo $i \in \mathbb{N}$ se cumple que $\mathbb{P}(A_i) = 1$, entonces $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1$

Antes de empezar intentemos demostrar un resultado que nos ayudara $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$
Definamos a los eventos C_i como $C_i = A_i \setminus \bigcup_{i=1}^{i-1} A_i$
Notemos que para C_i y C_j con $i \neq j$ son disjuntos o mutuamente excluyentes
Entonces lo que conseguimos es poder escribir $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ como la unión de eventos mutuamente excluyentes, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$
Por lo tanto $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right)$
Ahora usando el tercer axioma de Kolmogorov para $\mathbb{P}$ tenemos que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(C_i)$
Observemos que $C_i \subseteq A_i$ por la manera en la que lo definimos, usando la propiedad cuatro de $\mathbb{P}$ tenemos que $\mathbb{P}(C_i) \leq \mathbb{P}(A_i)$
Entonces uniendo todo lo que tenemos obtenemos $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(C_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$
Concluyendo que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

Ahora podemos a empezar demostrar lo que nos pidieron, veamos que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1-\mathbb{P}(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^{\mathsf{c}})$, por la tercera propiedad de $\mathbb{P}$

Luego $1-\mathbb{P}(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^{\mathsf{c}}) = 1-\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i)^c\right)$, por leyes de DeMorgan

Usando el resultado obtenido al inicio, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i)^c\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}((A_i)^c)$

Y como $\mathbb{P}(A_i) = 1$, entonces usando la tercera propiedad de $\mathbb{P}$ obtenemos que $\mathbb{P}((A_i)^c) = 1-\mathbb{P}(A_i) = 1-1 = 0$

Por lo tanto se sigue que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i)^c\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} 0 = 0$

Después tenemos que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i)^c\right) = 0$, por el segundo axioma de Kolmogorov para $\mathbb{P}$

Y juntando todo $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1-\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i)^c\right) = 1-0 = 1$

Por lo tanto concluimos que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1$ $\square$

12 **Demuestre que**

$\mathbb{P}(E\cup F\cup G) = \mathbb{P}(E)+\mathbb{P}(F)+\mathbb{P}(G)-\mathbb{P}(E^c\cap F\cap G)-\mathbb{P}(E\cap F^c\cap G)-\mathbb{P}(E\cap F\cap G^c)-2\mathbb{P}(E\cap F\cap G)$

Antes de empezar notemos esto, sean A, B y C tres conjuntos cualquiera, ahora veamos que $A\cap B = (A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap C^{\mathsf{c}})$ y que $(A\cap B\cap C)\cap(A\cap B\cap C^{\mathsf{c}}) = \varnothing$

Notemos que $C\cup C^{\mathsf{c}} = U$ por lo tanto $(A\cap B\cap C^{\mathsf{c}})\cup(A\cap B\cap C^{\mathsf{c}}) = (A\cap B\cap U) = (A\cap B)$

Ahora veamos que $(A\cap B\cap C)\cap(A\cap B\cap C^{\mathsf{c}}) = \varnothing$, es decir son disjuntos

Supongamos para generar una contradicción que no son disjuntos

Por lo tanto tenemos que $x\in(A\cap B\cap C)$ y $x\in(A\cap B\cap C^{\mathsf{c}})$

Por definición de intersección, $x\in A$ y $x\in B$ y $x\in C$ y $x\in A$ y $x\in B$ y $x\in C^{\mathsf{c}}$

Ahora por definición de complemento, $x\in A$ y $x\in B$ y $x\in C$ y $x\in A$ y $x\in B$ y $x\notin C$

Pero notemos que obtenemos una contradicción debido a que $x\in C$ y $x\notin C$

Por lo tanto $(A\cap B\cap C)\cap(A\cap B\cap C^{\mathsf{c}}) = \varnothing$

Con esto, ya podemos empezar con que $\mathbb{P}(E\cup F\cup G) = \mathbb{P}(E)+\mathbb{P}(F)+\mathbb{P}(G)-\mathbb{P}(E\cap F)-\mathbb{P}(E\cap G)-\mathbb{P}(F\cap G)+\mathbb{P}(E\cap F\cap G)$, por la formula de inclusión-exclusión

Luego, $\mathbb{P}(E)+\mathbb{P}(F)+\mathbb{P}(G)-\mathbb{P}(E\cap F)-\mathbb{P}(E\cap G)-\mathbb{P}(F\cap G)+\mathbb{P}(E\cap F\cap G) = \mathbb{P}(E)+\mathbb{P}(F)+\mathbb{P}(G)-\mathbb{P}((E\cap F\cap G)\cup(E\cap F\cap G^{\mathsf{c}}))-\mathbb{P}((E\cap F\cap G)\cup(E\cap F^{\mathsf{c}}\cap G))-\mathbb{P}((E\cap F\cap G)\cup(E^{\mathsf{c}}\cap F\cap G))+\mathbb{P}(E\cap F\cap G)$, por lo que no notamos al inicio

Después, $\mathbb{P}(E)+\mathbb{P}(F)+\mathbb{P}(G)-\mathbb{P}((E\cap F\cap G)\cup(E\cap F\cap G^{\mathsf{c}}))-\mathbb{P}((E\cap F\cap G)\cup(E\cap F^{\mathsf{c}}\cap G))-\mathbb{P}((E\cap F\cap G)\cup(E^{\mathsf{c}}\cap F\cap G))+\mathbb{P}(E\cap F\cap G) = \mathbb{P}(E)+\mathbb{P}(F)+\mathbb{P}(G)-\mathbb{P}(E\cap F\cap G)-\mathbb{P}(E\cap F\cap G^{\mathsf{c}})-\mathbb{P}(E\cap F\cap G)-\mathbb{P}(E\cap F^{\mathsf{c}}\cap G)-\mathbb{P}(E\cap F\cap G)-\mathbb{P}(E^{\mathsf{c}}\cap F\cap G)+\mathbb{P}(E\cap F\cap G)$, por la propiedad 2 de $\mathbb{P}$

Posteriormente obtenemos que, $\mathbb{P}(E)+\mathbb{P}(F)+\mathbb{P}(G)-\mathbb{P}(E\cap F\cap G)-\mathbb{P}(E\cap F\cap G^{\mathsf{c}})-\mathbb{P}(E\cap F\cap G)-\mathbb{P}(E\cap F^{\mathsf{c}}\cap G)-\mathbb{P}(E\cap F\cap G)-\mathbb{P}(E^{\mathsf{c}}\cap F\cap G)+\mathbb{P}(E\cap F\cap G) = \mathbb{P}(E)+\mathbb{P}(F)+\mathbb{P}(G)-\mathbb{P}(E\cap F\cap G^{\mathsf{c}})-\mathbb{P}(E\cap F^{\mathsf{c}}\cap G)-\mathbb{P}(E^{\mathsf{c}}\cap F\cap G)+2\mathbb{P}(E\cap F\cap G)$

Y reacomodando un poco, $\mathbb{P}(E)+\mathbb{P}(F)+\mathbb{P}(G)-\mathbb{P}(E\cap F\cap G^{\mathsf{c}})-\mathbb{P}(E\cap F^{\mathsf{c}}\cap G)-\mathbb{P}(E^{\mathsf{c}}\cap F\cap G)+2\mathbb{P}(E\cap F\cap G) = \mathbb{P}(E)+\mathbb{P}(F)+\mathbb{P}(G)-\mathbb{P}(E^{\mathsf{c}}\cap F\cap G)-\mathbb{P}(E\cap F^{\mathsf{c}}\cap G)-\mathbb{P}(E\cap F\cap G^{\mathsf{c}})+2\mathbb{P}(E\cap F\cap G)$

Por lo tanto concluimos que $\mathbb{P}(E\cup F\cup G) = \mathbb{P}(E)+\mathbb{P}(F)+\mathbb{P}(G)-\mathbb{P}(E^{\mathsf{c}}\cap F\cap G)-\mathbb{P}(E\cap F^{\mathsf{c}}\cap G)-\mathbb{P}(E\cap F\cap G^{\mathsf{c}})+2\mathbb{P}(E\cap F\cap G)$ $\square$

13 **Demuestre que si P y Q son dos medidas de probabilidad definidas sobre el mismo espacio muestral, entonces $aP + bQ$ es también una medida de probabilidad, para cualesquiera dos números no negativos a y b que satisfacen $a + b = 1$.**

Vamos a demostrar si $a\mathbb{P} + b\mathbb{Q}$ cumple con los tres axiomas de Kolmogorov para $\mathbb{P}$ y así ver si es una medida de probabilidad, para hacer las cosas más sencillas llamemos R a $a\mathbb{P} + b\mathbb{Q}$

1) $R(\Omega) = 1$

Empecemos viendo que $R(\Omega) = a\mathbb{P}(\Omega) + b\mathbb{Q}(\Omega)$, por la definición de R

Ahora, como P y Q son medidas de probabilidad entonces $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ y $\mathbb{Q}(\Omega) = 1$, entonces sustituimos $R(\Omega) = a * 1 + b * 1$

Después tenemos que $R(\Omega) = (a + b) * 1$

Y por nuestras hipótesis tenemos que $a + b = 1$ por lo tanto $R(\Omega) = (1) * 1 = 1$

2) Si $A \in \mathbb{F}$ entonces $R(A) \geq 0$

Sea $A \in \mathbb{F}$ cualquiera

Debido a que P y Q son medidas de probabilidad tenemos que $\mathbb{P}(A) \geq 0$ y $\mathbb{Q}(A) \geq 0$

Como a y b son no negativos entonces $a\mathbb{P}(A) \geq 0$ y $b\mathbb{Q}(A) \geq 0$

Por lo tanto $a\mathbb{P}(A) + b\mathbb{Q}(A) \geq 0$

Y por la definición de R tenemos que $R(A) \geq 0$

3) Si $A_1, A_2, ... \in \mathbb{F}$ tal que $A_i \cap A_j = \varnothing$ para $i \neq j$ entonces $R(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} R(A_i)$

Empecemos viendo que $R(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = a\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) + b\mathbb{Q}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i)$, por la definición de R

Como P y Q son medidas de probabilidad entonces $a\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) + b\mathbb{Q}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = a\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) + b\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Q}(A_i)$

Entonces $a\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) + b\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{Q}(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a\mathbb{P}(A_i) + \sum_{i=1}^{\infty} b\mathbb{Q}(A_i)$

Después $\sum_{i=1}^{\infty} a\mathbb{P}(A_i) + \sum_{i=1}^{\infty} b\mathbb{Q}(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} a\mathbb{P}(A_i) + b\mathbb{Q}(A_i)$

Y por ultimo $\sum_{i=1}^{\infty} a\mathbb{P}(A_i) + b\mathbb{Q}(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} R(A_i)$ por la definición de R

Por lo tanto $R(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} R(A_i)$

Como R cumple los tres axiomas de Kolmogorov para $\mathbb{P}$ entonces concluimos que $R = a\mathbb{P} + b\mathbb{Q}$ es una medida de probabilidad $\square$

14 **Suponga que un experimento se realiza n veces. Para cualquier evento E del espacio muestral considere $\nu(E)$ el numero de veces que el evento E ocurrió. Sea $g(E) = \nu(E)/n$. Demuestre que g satisface los axiomas de probabilidad.**

Los axiomas de Probabilidad son: $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

$\mathbb{P}(A) \geq 0$

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Tenemos ver que $g(E)$ los satisface.

Para empezar el axioma 1, sabemos que el experimento se realiza n veces, y $v(E)$ son las veces que ocurre el experimento, y esto nos dice que el experimento es positivo, pues el total de eventos está contenido en el espacio muestral, al igual que $v(E)$ esta contenido en el espacio muestral, entonces esto implica que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ Lo que quiere decir que la suma de eventos es positiva

Para el axioma 2, sabemos que n son las veces que se realiza el experimento, y $v(E)$ las veces que ocurre, sabiendo eso tenemos que $n \geq v(E)$ pues n es el total de veces ocurrida; entonces tenemos que $0 \leq v(E) \leq n$, y si dividimos todo entre n, tenemos que $0/n \leq v(E)/n \leq n/n$ que es igual a $0 \leq g(E) \leq 1$ por lo tanto $0 \leq g(E)$

Para el axioma 3, tenemos que ver si son excluyentes los eventos, como sabemos que $v(E)$ son los eventos en los que ocurre, supongamos que existe un $u(E)$ de eventos en los que no ocurre, y por ende sabemos que $h(E) = u(E)/n$ es la probabilidad de que no suceda el experimento sobre las veces que se realiza, y sabemos que son excluyentes pues no existe ninguna intersección entre ocurre y no ocurre. Entonces como no existe intersección, podemos decir que la $\mathbb{P}(g(E) \cup h(E)) = \mathbb{P}(g(E)) + \mathbb{P}(h(E))$, entonces sabemos que la probabilidad $g(E)$ cumple los axiomas

15 (a) Si $\mathbb{P}(A) = 0.9$ y $\mathbb{P}(B) = 0.8$ muestre que $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0.7$.
En general, demuestre la desigualdad de Bonferroni

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$$

Empezamos observando una cosa:
Veamos que $\mathbb{P}(A \cap B) \leq 1$ por el segundo axioma de Kolmogorov para $\mathbb{P}$
Entonces multiplicando por -1 ambos lados de la desigualdad obtenemos que $-\mathbb{P}(A \cap B) \geq -1$
Ahora con eso visto podemos empezar
Por la propiedad 6 de $\mathbb{P}$ tenemos que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
Entonces tenemos que $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$
Y usando lo que vimos al inicio obtenemos $\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1$ □

(b) Use inducción para demostrar la generalización de la desigualdad de Bonferroni para n eventos

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i)\right) - (n-1)$$

Demostración:
Procederemos por inducción sobre n.

Caso base:
Con n= 2 se tiene que:
$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) \geq \mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) - 1$ por lo que el otro lado de la desigualdad queda $\mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) - (2-1)$ que simplificando queda $\mathbb{P}(E_1) + \mathbb{P}(E_2) - 1$ por lo tanto se verifica la desigualdad para n= 2
Hipótesis de inducción:
Supongamos que la desigualdad de Bonferroni se cumple para n eventos:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i)\right) - (n-1)$$

Paso Inductivo:
Probemos para n+1:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} E_i\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(E_i)\right) - ((n+1)-1)$$

Veamos que:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} E_i\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) \cap E_{n+1}\right)$$

Luego, veamos a $\bigcap_{i=1}^{n+1} E_i$ y E_{n+1} como dos eventos, y si aplicamos la desigualdad de Boneferroni (el inciso a) obtenemos

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} E_i\right) \geq \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) + \mathbb{P}(E_{n+1}) - 1$$

Usando la hipótesis de inducción tenemos que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i) - (n-1) + \mathbb{P}(E_{n+1}) - 1$$

"Unimos" lo que tenemos se obtiene

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(E_i) - n + 1 - 1$$

Y terminas con que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} E_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}(E_i) - ((n+1) - 1)$$

□

16 **Suponga que los eventos A y B son mutuamente excluyentes y además** $\mathbb{P}(A) = 0.3$ **y** $P(B) = 0.5$**,** ¿Cual es la probabilidad de que

(a) ocurra A o B pero no ambos?
Por $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{B} - \mathbb{P}(A \cap B)$
Y también por
$A \cap B = \emptyset$
Tenemos que $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.3 + 0.5 = 0.8$
(b) A ocurra pero B no?
$\mathbb{P}(B) = 0.5$
Por lo que
$\mathbb{P}(B^c) = 1 - 0.5 = 0.5$
Entonces
$\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) = 0.3$
(c) A y B ocurran?.
$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$

17 Se presentan tres problemas clásicos en probabilidad

(a) Se lanzan tres dados balanceados. Comparar la probabilidad de que las suma de las caras sea 9 con la probabilidad de que la suma de las caras sea 10

El numero de casos totales esta dado por $(6)(6)(6) = 216$ casos. El numero de casos favorables en los que la suma de las caras dé 9, serán encontramos como:
Debido a que son demasiados casos, vamos a darle un orden para econtontrarlos, para ello vamos a usar un dado con un numero fijo y econtrarlos. Para ellos vamos a usar el primer dado fijado con el valor de 1 y buscar las combinaciones de las demás caras.
Tomamos primero: $(1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 4, 4)$ y los restantes que son combinaciones de los priemros dos $(1, 6, 2), (1, 5, 3)$. Y así con las demás caras fijas.
Ahora toca con el numero 2 y esos casos son: $(2, 1, 6), (2, 2, 5), (2, 3, 4), (2, 4, 3), (2, 6, 1), (2, 5, 2)$
Lo mismo pero con 3 y son: $(3, 3, 3)(3, 2, 4)(3, 4, 2)(3, 5, 1)(3, 1, 5)$
De igual forma con 4 y son: $(4, 4, 1)(4, 3, 2)(4, 1, 4)(4, 2, 3)$
Ahora sigue el numero 5 y son: $(5, 1, 3)(5, 3, 1)(5, 2, 2)$
Y por ultimo con el 6 y son: $(6, 1, 2)(6, 2, 1)$
Por lo tanto son 25 casos favorables de 216. La probabilidad de que la suma de las caras sea 9 está dado por $P_9(25/216) = 0.11574$
Ahora lo mismo pero con que la suma nos dé 10:
Para el 1 son: $(1, 4, 5)(1, 3, 6)(1, 5, 4)(2, 6, 3)$
Ahora con 2 son: $(2, 2, 6)(2, 3, 5)(2, 4, 4)(3, 6, 2)(2, 5, 3)$
Ahora con 3 son: $(3, 1, 6)(3, 2, 5)(3, 3, 4)(3, 6, 1)(3, 5, 2)(3, 4, 3)$
Ahora con 4 son: $(4, 1, 5)(4, 2, 4)(4, 3, 3)(4, 5, 1)(4, 4, 2)$
Ahora con 5 son: $(5, 1, 4)(5, 2, 3)(5, 4, 1)(5, 3, 2)$
Ahora con 6 son $(6, 2, 2)(6, 1, 3)(6, 3, 1)$
Por lo tanto son 27 casos favorables de 216. La probabilidad de que la suma de las caras sea 1o está dado por $P_{10}(27/216)$
Entonces la $P_{10} > P_9$

(b) Comparar la probabilidad de que al menos un 6 aparezca en cuatro lanzamientos de un dado balanceado con la probabilidad de que aparezca al menos un doble 6 en 24 lanzamientos de dos dados balanceados.

Para ello ocupamos pensar en la probabilidad de no sacar 6 en las 4 tiradas. Vamos a enlistar los eventos posibles:
E_1:No sacar 6 3n la primera tirada
E_2: No sacar 6 en la segunda tirada.
E_3: No sacar 6 en la tercera tirada.
E_4: No sacar 6 en la cuarta tirada.
Entonces la probabilidad de no sacar al menos un 6 en 4 tiradas está dada por: $P_n = 1 - P(Sacar 6)$
Entonces $[P(E_1)][P(E_2][P(E_3][P(E_4] = 1 - P(sacar6)$ que es igual a $(5/6)^4 = 1 - P(Sacar6)$ y esto a su vez es: $0.48225 = 1 - P(Sacar6)$, por lo tanto la probabilidad de sacar al menos un 6 en 4 tiradas es: $P(Sacar6) = 1 - 0.48225 = 0.51774$
Ahora debemos encontrar la probabilidad de dos lanzados 24 veces al menos salga un doble 6. Para ello usaremos la misma logica que en la probabilidad anterior, etnocnes tenemos los eventos:
E_1:De no sacar un doble 6 en la primera tirada.
E_2:De no sacar un doble 6 en la segunda tirada.
Así hasta E_{24}:De no sacar un doble 6 en la tirada 24.
Entonces la probabilidad de no sacar un doble 6 en 24 tiradas está dada por:$P_n = 1P(Sacarundoble6)$

Entonces tenemos:$\prod_{i=1}^{24} E_i = (\frac{35}{36})^{24} = 1 - P(Sacarundoble6)$
Entonces despejando quedaría como: $0.509 = 1 - P(Sacarundoble6)$. Que implica $P(Sacarundoble6) = 1 - 0.509 = 0.491$
Por lo tanto $P(sacar6) > P(sacardoble6)$

(c) Comparar la probabilidad de que al menos un 6 aparezca cuando seis dados son lanzados con la probabilidad de que al menos dos 6's aparezcan cuando doce dados son lanzados.

Seguiremos el mismo razonamiento que en la anterior, y para ellos primero vamos a buscar las veces que no aparece un 6 al lanzar 6 dados. Para ello enumeremos los eventos posibles.
$E(1)$: No sacar 6 en el primer dado
$E(2)$: No sacar 6 en el segundo dado
$E(3)$: No sacar 6 en el tercer dado
$E(4)$: No sacar 6 en el cuarto dado
$E(5)$: No sacar 6 en el quinto dado
$E(6)$: No sacar 6 en el sexto dado
Entonces la probabilidad de no sacar un 6 en los 6 dados está dada por: $P_n = 1 - P(Sacar6)$
Entonces quedaría como $\prod_{i=1}^{6} = (\frac{5}{6})^6 = 1 - P(Sacarun6)$ que despejar queda como $P(Sacarun6) = 1 - 0.3348 = 0.6651$ entonces $P(Sacar6) = 0.6651$
Ahora tenemos que buscar la probabilidad de sacar al menos un doble 6 en 12 dados para ello vamos a enumerar los eventos posibles de que no salgan dobles 6. Entonces quedaria como las combinaciones de no sacar un doble 6 y se veria como: $C_2^{12} = 66$ y $P_n = 1 - P(Sacardoble)$ que implica $(\frac{35}{36})^{66} = 1 - P(Sacardoble)$ que despejando queda como: $P(Sacardoble) = 1 - 0.15578 = 0.84421$
Entonces tenemos que: $P(sacarDoble) > P(Sacar6)$

18 Una urna contiene cinco bolas numeradas del 1 al 5 de las cuales las primeras tres son negras y las ultimas dos son doradas. Se extrae una muestra con reemplazo de tamaño dos. Sea B_1 el evento de que la primera bola extraída sea negra y sea B_2 el evento de que la segunda bola sea negra.

(a) Describir el espacio muestral para este experimento y exhibir los eventos B_1, B_2 y $B_1 \cap B_2$.

Llamemos a nuestras bolas enumeradas del 1 al 5 de la siguiente forma:

- n_1 = bola 1 negra
- n_2 = bola 2 negra
- n_3 = bola 3 negra
- d_4 = bola 4 dorada
- d_5 = bola 5 dorada

Sea Ω nuestro espacio muestral que define nuestro experimento, así:

Ω={$(n_1, n_2), (n_1, n_3), (n_2, n_1), (n_2, n_3), (n_3, n_1), (n_3, n_2), (n_1, d_4), (n_1, d_5), (n_2, d_4), (n_2, d_5), (n_3, d_4), (n_3, d_5),$
$(d_4, d_5), (d_5, d_4), (d_4, n_1), (d_4, n_2), (d_4, n_3), (d_5, n_1), (d_5, n_2), (d_5, n_3), (n_1, n_1), (n_2, n_2), (n_3, n_3), (d_4, d_4), (d_5, d_5)$}

Eventos

$B_1 = \{ (n_1, n_2), (n_1, n_3), (n_1, d_4), (n_1, d_5), (n_2, n_1), (n_2, n_3), (n_2, d_4), (n_2, d_5), (n_3, n_1), (n_3, n_2),$
$(n_3, d_4), (n_3, d_5), (n_1, n_1), (n_2, n_2), (n_3, n_3)\}$

$B_2 = \{ (\mathrm{n}_1, n_2), (n_1, n_3), (n_2, n_1), (n_2, n_3), (n_3, n_1), (n_3, n_2), (n_1, n_1), (n_2, n_2), (n_3, n_3), (d_4, n_1),$
$(\mathrm{d}_4, n_2), (d_4, n_3), (d_5, n_1), (d_5, n_2), (d_5, n_3), \}$

$B_1 \cap B_2 = \{ (\mathrm{n}_1, n_2), (n_1, n_3), (n_2, n_1), (n_2, n_3), (n_3, n_1), (n_3, n_2), (n_1, n_1), (n_2, n_2), (n_3, n_3), \}$

(b) Encontrar $\mathbb{P}(B_1), \mathbb{P}(B_2)$ y $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2)$

$\mathbb{P}(B_1) = \frac{15}{25}$
$\mathbb{P}(B_2) = \frac{15}{25}$
$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \frac{9}{25}$

(c) Repetir los incisos (a) y (b) para un muestreo sin reemplazo.

(a) Tenemos nuestras bolas definidas de la siguiente manera:

- n_1 = bola 1 negra
- n_2 = bola 2 negra
- n_3 = bola 3 negra
- d_4 = bola 4 dorada
- d_5 = bola 5 dorada

Sea Ω nuestro espacio muestral sin remplazo que define nuestro experimento, así:

$$\Omega=\{(n_1, n_2), (n_1, n_3), (n_2, n_1), (n_2, n_3), (n_3, n_1), (n_3, n_2), (n_1, d_4), (n_1, d_5), (n_2, d_4), (n_2, d_5), (n_3, d_4), (n_3, d_5),$$
$$(\mathrm{d}_4, d_5), (d_5, d_4), (d_4, n_1), (d_4, n_2), (d_4, n_3), (d_5, n_1), (d_5, n_2), (d_5, n_3)\}$$

Eventos

$B_1 = \{ (\mathrm{n}_1, n_2), (n_1, n_3), (n_1, d_4), (n_1, d_5), (n_2, n_1), (n_2, n_3), (n_2, d_4), (n_2, d_5), (n_3, n_1), (n_3, n_2),$
$(\mathrm{n}_3, d_4), (n_3, d_5)\}$

$B_2 = \{ (\mathrm{n}_1, n_2), (n_1, n_3), (n_2, n_1), (n_2, n_3), (n_3, n_1), (n_3, n_2), (d_4, n_1), (d_4, n_2), (d_4, n_3), (d_5, n_1),$
$(\mathrm{d}_5, n_2), (d_5, n_3), \}$

$B_1 \cap B_2 = \{ (\mathrm{n}_1, n_2), (n_1, n_3), (n_2, n_1), (n_2, n_3), (n_3, n_1), (n_3, n_2)\}$

(b)

$\mathbb{P}(B_1) = \frac{12}{20}$
$\mathbb{P}(B_2) = \frac{12}{20}$
$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \frac{6}{20}$

19 **Un closet contiene 10 pares de zapatos.**
Si 8 de ellos, se seleccionan al azar
a) ¿Cual es la probabilidad de que no se complete ningún par?
Tenemos 10 pares , como a cada par lo conforman dos zapatos entonces tenemos 20 zapatos
De esos 20 seleccionamos 8 zapatos
Tendremos entonces que de esos 8 zapatos todos son diferentes , por lo que
$\binom{10}{8}$
Ya que para no completar ningún par , se eligen 8 zapatos diferentes , de diferentes pares
A lo que tenemos
$\binom{10}{8} = 45 = \frac{10!}{8!(10-8)!} = \frac{9*10}{2} = 45$
Ahora para poder saber las formas de seleccionar un zapato de cada uno de los pares tenemos 2^8 formas de obtenerlos
$2^8 = 2*2*2*2*2*2*2*2 = 256$
Lo cual nos lleva a que el $Total = \binom{20}{8}$
Y por consiguiente a que sea c el evento de no completar ningún par
$\mathbb{P} = (\{c\}) = \frac{\binom{10}{8}*2^8}{\binom{20}{8}}$
$\binom{20}{8} = \frac{20!}{8!(20-8)!} = \frac{20!}{8!(12)!} = \frac{20*19*18*17*16*15*14*13*12!}{8!12!} = \frac{20*19*18*17*16*15*14*13}{8*7*6*5*4*3*2*1} = 125970$
Remplazando con lo obtenido anteriormente tenemos que $= \frac{45*256}{125970} = \frac{11520}{125970} = \frac{384}{4199}$
Y por ende
$\mathbb{P} = (\{c\}) = \frac{\binom{10}{8}*2^8}{\binom{20}{8}} = \frac{384}{4199}$

b) ¿Cual es la probabilidad de que se complete exactamente un par?
Definimos los eventos
$C =$ A que la muestra contiene exactamente uno de los pares.
Hay 10 maneras de elegir el par de zapatos de entre los 10.
Ya que los zapatos restantes no pueden coincidir, hay $\binom{9}{6}$ formas de elegir los pares de los cuales seleccionar los zapatos restantes, 2^6 formas de seleccionar zapatos individuales de los 6 pares, y divididos por $\binom{20}{8}$ formas de seleccionar 8 zapatos de 20.
Esto nos da $\mathbb{P}(C) = \frac{10\binom{9}{6}2^6}{\binom{20}{8}}$

Desarrollando $\binom{9}{6}$ tenemos
$\frac{9!}{6!(9-6)!} = \frac{9!}{6!(3)!} = \frac{9*8*7*6!}{6!(3)!} = \frac{9*8*7}{(3)!} = \frac{9*8*7}{3*2*1} = \frac{504}{6} = 84$

Desarrollando $\binom{20}{8}$ tenemos
$\frac{20!}{8!(20-8)!} = \frac{20!}{8!(12)!} = \frac{20*19*18*17*16*15*14*13*12!}{8!(12)!} = \frac{20*19*18*17*16*15*14*13}{8!} = \frac{20*19*18*17*16*15*14*13}{8*7*6*5*4*3*2*1} = \frac{5079110400}{40320} = 125970$

Desarrollando 2^6 tenemos $2*2*2*2*2*2 = 64$
Ahora remplazamos en la formula original
$\mathbb{P}(C) = \frac{10(84)(64)}{125970} = \frac{53760}{125970} = \frac{1792}{4199} \approx 0.426768$