García Ponce José Camilo

(1) ¿Sera cierto que toda $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ puede escribirse como una funcion par más una funcion impar?

Esto si es cierto, veamos por que

Primero, en la clase del 18/11/22, vimos que la interseccion entre las funciones pares e impares es 0, por lo tanto solo falta ver una forma de escribir cualquier funcion como la suma de par e impar

Sea $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cualquiera

veamos como obtener $g(x)$ y $h(x)$ tal que $f(x)=g(x)+h(x)$

$$f(x)=f(x) \Rightarrow f(x)=\frac{2f(x)}{2} \Rightarrow \frac{2f(x)+0}{2}=f(x)$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{2f(x)+(f(-x)-f(-x))}{2} \Rightarrow f(x)=\underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{g(x)}+\underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{h(x)}$$

entonces

$$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad y \quad h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

ahora veamos que $g(x)+h(x)=f(x)$

$$g(x)+h(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}=\frac{f(x)+f(-x)+f(x)-f(-x)}{2}=\frac{2f(x)}{2}=f(x)$$

ahora veamos que $g(x)$ es par y $h(x)$ es impar

$$g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}=\frac{f(-(-x))+f(-x)}{2}=\frac{f(-x)+f(-(-x))}{2}=g(-x)$$

$$h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}=-\frac{-f(x)+f(-x)}{2}=-\frac{f(-x)-f(-(-x))}{2}=-h(-x)$$

por lo tanto es cierto

(2) Demuestra que si $W_1 \oplus W_2 = V$, $B_1 \subseteq W_1$ base y $B_2 \subseteq W_2$ base, entonces $B_1 \cup B_2$ es base de V

Sean $\beta_1 = \{u_1, \dots, u_n\}$ y $\beta_2 = \{w_1, \dots, w_m\}$

veamos que $\{u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m\}$ es linear independiente

Supongamos $a_1u_1 + \dots + a_nu_n + b_1w_1 + \dots + b_mw_m = 0$

entonces $a_1u_1 + \dots + a_nu_n = -(b_1w_1 + \dots + b_mw_m)$ y como

$a_1u_1 + \dots + a_nu_n \in W_1$ y $-(b_1w_1 + \dots + b_mw_m) \in W_2$, entonces

$a_1u_1 + \dots + a_nu_n = -(b_1w_1 + \dots + b_mw_m) \in W_1 \cap W_2$ y por hipotesis que

$W_1 \oplus W_2 = V$, entonces $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, con lo que tenemos

$a_1u_1 + \dots + a_nu_n = 0$ y $b_1w_1 + \dots + b_mw_m = 0$, pero como $\{u_1, \dots, u_n\}$ es

base de W_1 y $\{w_1, \dots, w_m\}$ es base de W_2 entonces

$a_1 = \dots = a_n = 0$ y $b_1 = \dots = b_m = 0$, entonces $a_1 = \dots = a_n = b_1 = \dots = b_m = 0$

por lo tanto $\beta_1 \cup \beta_2 = \{u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m\}$ es linear independiente

Ahora veamos si $\{u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m\}$ genera a V

Sea $v \in V$, cualquiera, por hipotesis $W_1 \oplus W_2 \in V$, tenemos que

$\exists x \in W_1$ y $\exists y \in W_2$ tal que $v = x + y$, como B_1 es base de W_1

y B_2 es base de W_2, entonces existen $c_1, \dots, c_n$ y $d_1, \dots, d_m$ tal que

$x = c_1u_1 + \dots + c_nu_n$ y $y = d_1w_1 + \dots + d_mw_m$, por lo tanto

$v = x + y = c_1u_1 + \dots + c_nu_n + d_1w_1 + \dots + d_mw_m$, por lo tanto

$\{u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m\}$ genera a V

Y con esto concluimos que $\{u_1, \dots, u_n, w_1, \dots, w_m\} = \beta_1 \cup \beta_2$ es base de V

(3) Sean V y W espacios vectoriales de dimension finita y $T: V \to W$ lineal

(a) Demostrar que si $\dim V < \dim W$, entonces T no puede ser sobreyectiva

Supongamos que $\dim V < \dim W$, ahora supongamos que T es sobreyectiva, para generar una contradiccion

Como T es sobreyectiva, entonces $\operatorname{Im} T = W$, por lo tanto $\dim \operatorname{Im} T = \dim W$, usemos el Teorema de dimension, que dice $\dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T$ y con lo observado arriba $\dim V = \dim \ker T + \dim W$, entonces $\dim \ker T = \dim V - \dim W$ y usando la hipotesis $\dim V < \dim W$, obtenemos que $\dim \ker T = \dim V - \dim W < 0$! , lo cual no puede pasar, ya que la $\dim \ker T$ no puede ser negativa.

Por lo tanto T no puede ser sobreyectiva

(b) Demostrar que si $\dim V > \dim W$, entonces T no puede ser uno a uno

Supongamos que $\dim V > \dim W$, ahora supongamos que T es uno a uno, para generar una contradiccion

Como T es uno a uno y por lo revisado la clase del 22/11/22 tenemos que $\dim \ker T$ es 0, ahora usando el teorema de dimension y por lo observado, tenemos que $\dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = 0 + \dim \operatorname{Im} T$ es decir $\dim V = \dim \operatorname{Im} T$ y con la hipotesis, $\dim \operatorname{Im} T = \dim V > \dim W$! lo cual no puede pasar ya que $\dim \operatorname{Im} T \leq \dim W$

Por lo tanto T no puede ser uno a uno

(4) Da un ejemplo de una transformacion lineal $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\ker T = \operatorname{Im} T$

Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida asi $(x,y) \longmapsto (0, 2x)$

es decir $T(x,y) = (0, 2x)$, ahora veamos si $\ker T = \operatorname{Im} T$

Notemos viendo que la imagen de T es $\{(0,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, que seria el eje y, si vieramos a $\mathbb{R}^2$ como grafica ?

ahora veamos quien es el $\ker T$ (los vectores X tales que $T(X) = 0$) que seria $\{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}$, notemos que tambien es el eje y

Por lo tanto notamos que se cumple que $\ker T = \operatorname{Im} T$ para esta T

(5) Da un ejemplo de dos transformaciones lineales $T: U \to V$, $S: U \to V$ distintas, tales que $\ker T = \ker S$ y $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} S$

Tomemos a U y V como $\mathbb{R}^2$, entonces $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

veamos quienes seran los ejemplos

$T(x,y) = (x,y)$, la identidad y $S(x,y) = (y,x)$

notemos que T y S son distintas

Veamos si $\ker T = \ker S$, notemos que $\ker T$ es $\{(0,0)\}$ y que $\ker S$ es $\{(0,0)\}$, por lo tanto $\ker T = \ker S$

Ahora veamos las imagenes, usemos doble contencion

$\subseteq]$ Sea $(x,y) \in \operatorname{Im} T$ cualquiera, notemos que $(y,x) \in \mathbb{R}^2$ entonces $S(y,x) = (x,y) \in \operatorname{Im} S$, entonces $\operatorname{Im} T \subseteq \operatorname{Im} S$

$\supseteq]$ Sea $(x,y) \in \operatorname{Im} S$ cualquiera, entonces veamos que $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ por lo tanto $T(x,y) = (x,y) \in \operatorname{Im} T$, entonces $\operatorname{Im} S \subseteq \operatorname{Im} T$

por lo tanto se cumple que $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} S$

(6) Verdadero o falso, Todo sistema de m ecuaciones lineales con n incognitas cuya matriz de coeficientes tiene rango m tiene una solucion

Esto es verdadero, veamos por que

para tener solucion es que $\exists \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tal que $\underset{\text{matriz de coeficiente}}{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

y así $\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ tiene solucion

pero esto es que $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} T$ (visto la clase del 25/11/22) con $T: K^n \to K^m$ la transformacion lineal relacionada con la matriz

Ahora, como sabemos que el rango es m, entonces $\dim \operatorname{Im} T = m$ lo que significa que $\operatorname{Im} T = K^m$, debido a que K^m es el codominio de T y $\dim \operatorname{Im} T = m$, por lo tanto $\operatorname{Im} T = K^m$, ahora veamos que es claro que $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m$ y por lo tanto $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} T$, concluyendo que si tiene solucion el sistema

(7) Demostrar que si $A \in M_{n \times n}(K)$, entonces $\det(A) = \det(A^t)$

Sean

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad y \quad A^t = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

con $a_{ij} = b_{ji}$ $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$

recordemos que por definicion

$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ y por como definimos a $a_{ij} = b_{ji}$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, b_{\sigma(1)1} \cdots b_{\sigma(n)n}$$
, ahora notemos algo, tenemos que $\sigma(i) = \lambda$ y $\sigma^{-1}(\lambda) = i$, debido a que $\sigma \in S_n$, entonces σ es biyectiva, por lo tanto

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, b_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots b_{n\sigma^{-1}(n)}$$
, recordemos un poco y notemos que $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$, por propiedades de la paridad de permutaciones,

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1})\, b_{1\sigma^{-1}(n)} \cdots b_{n\sigma^{-1}(n)} = \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1})\, b_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots b_{n\sigma^{-1}(n)},$$

debido a que σ es biyectiva entonces σ^{-1} tambien, y por ultimo por definicion de $\det(A^t)$,

$$\det(A) = \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1})\, b_{1\sigma^{-1}(1)} \cdots b_{n\sigma^{-1}(n)} = \det(A^t)$$

entonces $\det(A) = \det(A^t)$