García Ponce José Camilo

Matemáticas para Ciencias de la Tierra III
Matemáticas para las Ciencias Aplicadas III
Tarea 3

Fecha de entrega: **Lunes 10 de octubre de 2022.**

1. Evalúa la siguiente integral doble usando coordenadas polares (2 puntos):

$$\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} e^{x^2+y^2}\, dydx$$

2. Usa coordenadas polares para evaluar la integral (2 puntos):

$$\iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2},$$

donde D es la mitad inferior del círculo $x^2+y^2=16$.

3. Usa una doble integral para evaluar el volumen del sólido que se encuentra dentro del cilindro definido por $x^2+y^2=16$, debajo de $z=2x^2+2y^2$ por encima del plano xy (2 puntos).

4. Evalúa la integral:

$$\iint_D \operatorname{sen}(3x^2+3y^2)dA,$$

donde D es la región entre $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=7$ (2 puntos).

5. Usa una doble integral para evaluar el área de la región que se encuentra dentro de $r=4$ y fuera de $r=8+6\operatorname{sen}(\theta)$ (2 puntos).

Imagenes, procedimientos

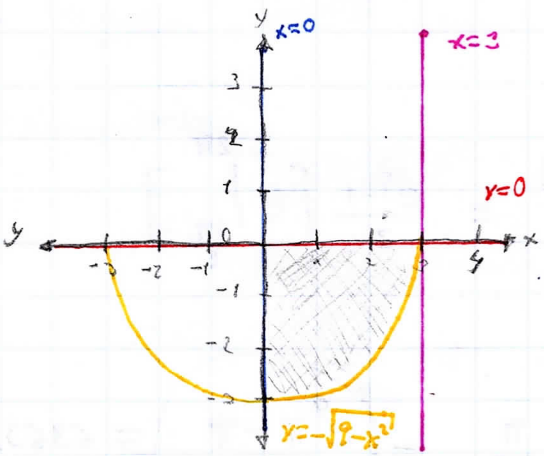
y resultados en hojitas

García Ponce José Camilo

1) Evalua la siguient integral doble usando coordenadas polares:

$$\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} e^{x^2+y^2}\, dy\, dx$$

primero veamos el dominio



notemos que el dominio es un cuarto del circulo de radio 3 con centro en el origen

entonces veamos como queda este dominio en polares

recordando que $\rho = 3$ (circulo en el centro)

limites

$$0 \leq \rho \leq 3$$

$\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$ debido a que es el ultimo cuarto del circulo

ahora $e^{x^2+y^2}$ transformemoslo

$x = \rho\cos(\theta)$
$y = \rho\,\mathrm{sen}(\theta)$

$$e^{\rho^2\cos^2(\theta)+\rho^2\mathrm{sen}^2(\theta)} = e^{\rho^2(\cos^2(\theta)+\mathrm{sen}^2(\theta))} = e^{\rho^2}$$

entonces la integral queda

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \int_0^3 e^{\rho^2}\rho\, d\rho\, d\theta$$

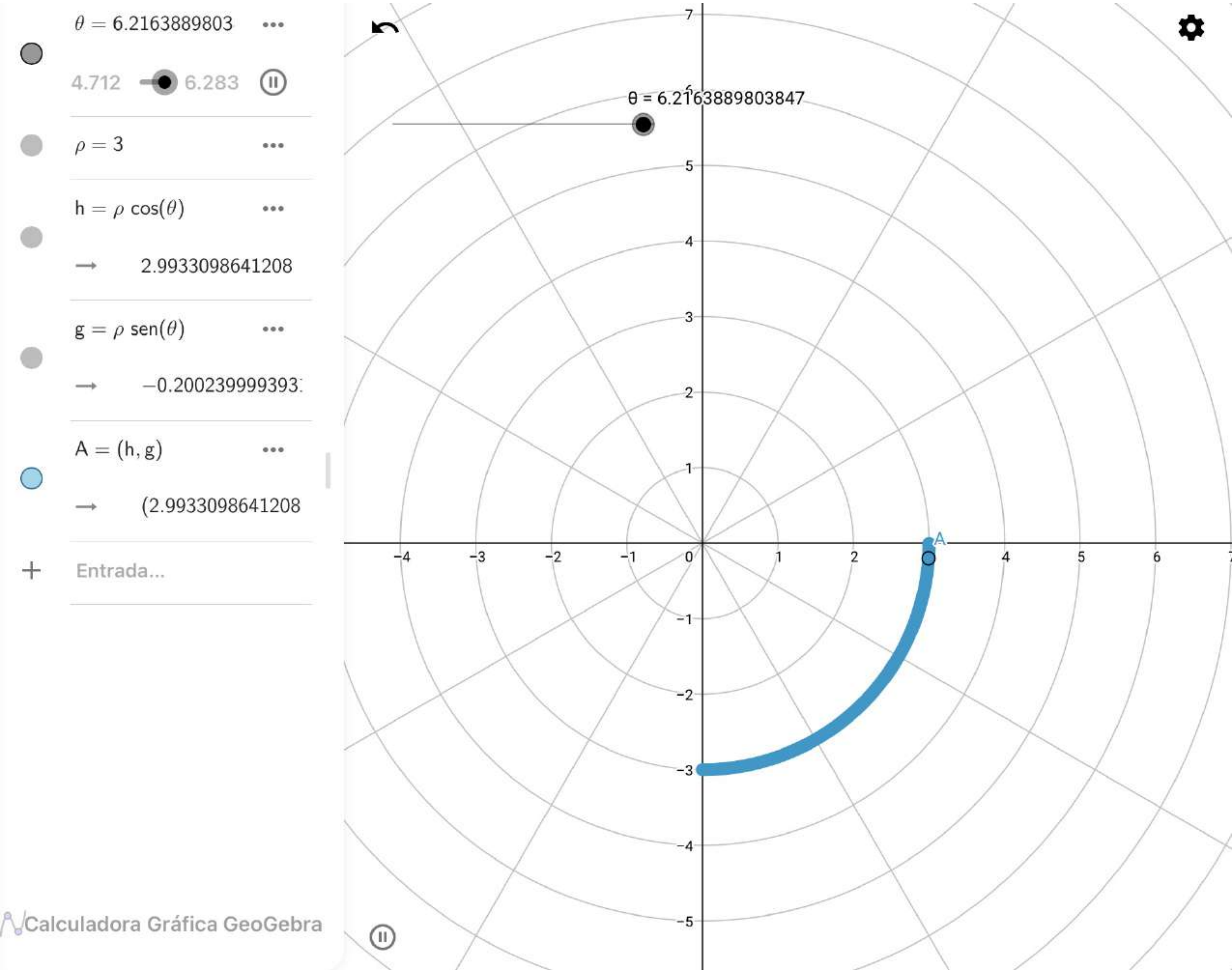
$$\phi(\theta) = \int_0^3 e^{\rho^2}\rho \, d\rho \qquad \text{sustitución} \quad t = e^{\rho^2}, \quad dt = e^{\rho^2}\, 2\rho\, d\rho \quad \Rightarrow \begin{cases} \rho = 3 \Rightarrow e^{3^2} = e^9 \\ \rho = 0 \Rightarrow e^{0^2} = 1 \end{cases}$$

$$= \int_1^{e^9} \frac{1}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int_1^{e^9} dt = \frac{1}{2}\left[t \Big|_1^{e^9} \right] = \frac{1}{2}\left[e^9 - 1 \right]$$

$$= \frac{e^9 - 1}{2}$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{e^9 - 1}{2}\, d\theta = \frac{e^9 - 1}{2}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} d\theta = \frac{e^9 - 1}{2}\left[\theta \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \right]$$

$$= \frac{e^9 - 1}{2}\left[2\pi - \frac{3\pi}{2} \right] = \frac{e^9 - 1}{2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{e^9\pi - \pi}{4} \approx 6363.36$$


θ = 6.2163889803
4.712
6.283
ρ = 3
h = ρ cos(θ)
→ 2.9933098641208
g = ρ sen(θ)
→ −0.200239999393
A = (h, g)
→ (2.9933098641208
Entrada...
Calculadora Gráfica GeoGebra
θ = 6.2163889803847
A

2) Usa coordenadas polares para evaluar la integral

$$\iint_D \sqrt{1+4x^2+4y^2} \quad \text{con } D \text{ la mitad inferior del circulo } x^2+y^2=16$$

notemos que $x^2+y^2=16$ es un circulo de radio 4 con

centro en el origen , veamos que en polares esos $\rho=4$

ahora veamos los limites

$0 \leq \rho \leq 4$

$\pi \leq \theta \leq 2\pi$ debido a que queremos solo la parte de abajo

ahora $\sqrt{1+4x^2+4y^2}$ transformemoslo $\begin{matrix} x=\rho\cos(\theta) \\ y=\rho\,\text{sen}(\theta) \end{matrix}$

$$\sqrt{1+4\rho^2\cos^2(\theta)+4\rho^2\text{sen}^2(\theta)} = \sqrt{1+4\rho^2(\cos^2(\theta)+\text{sen}^2(\theta))} = \sqrt{1+4\rho^2(1)} = \sqrt{1+4\rho^2}$$

la integral queda

$$\int_{\pi}^{2\pi}\int_{0}^{4} \sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\, d\rho\, d\theta$$

$$\phi(\theta) = \int_0^4 \sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\, d\rho \quad \text{sustitucion} \quad \begin{matrix} t = 1+4\rho^2 \\ dt = 8\rho\, d\rho \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \rho=4 \Rightarrow 1+4(4^2) = 65 \\ \rho=0 \Rightarrow 1+4(0^2) = 1 \end{cases}$$

$$= \int_1^{65} \frac{1}{8}\sqrt{t}\, dt = \frac{1}{8}\int_1^{65} \sqrt{t}\, dt = \frac{1}{8}\int_1^{65} t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{8}\left[\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_1^{65} \right]$$

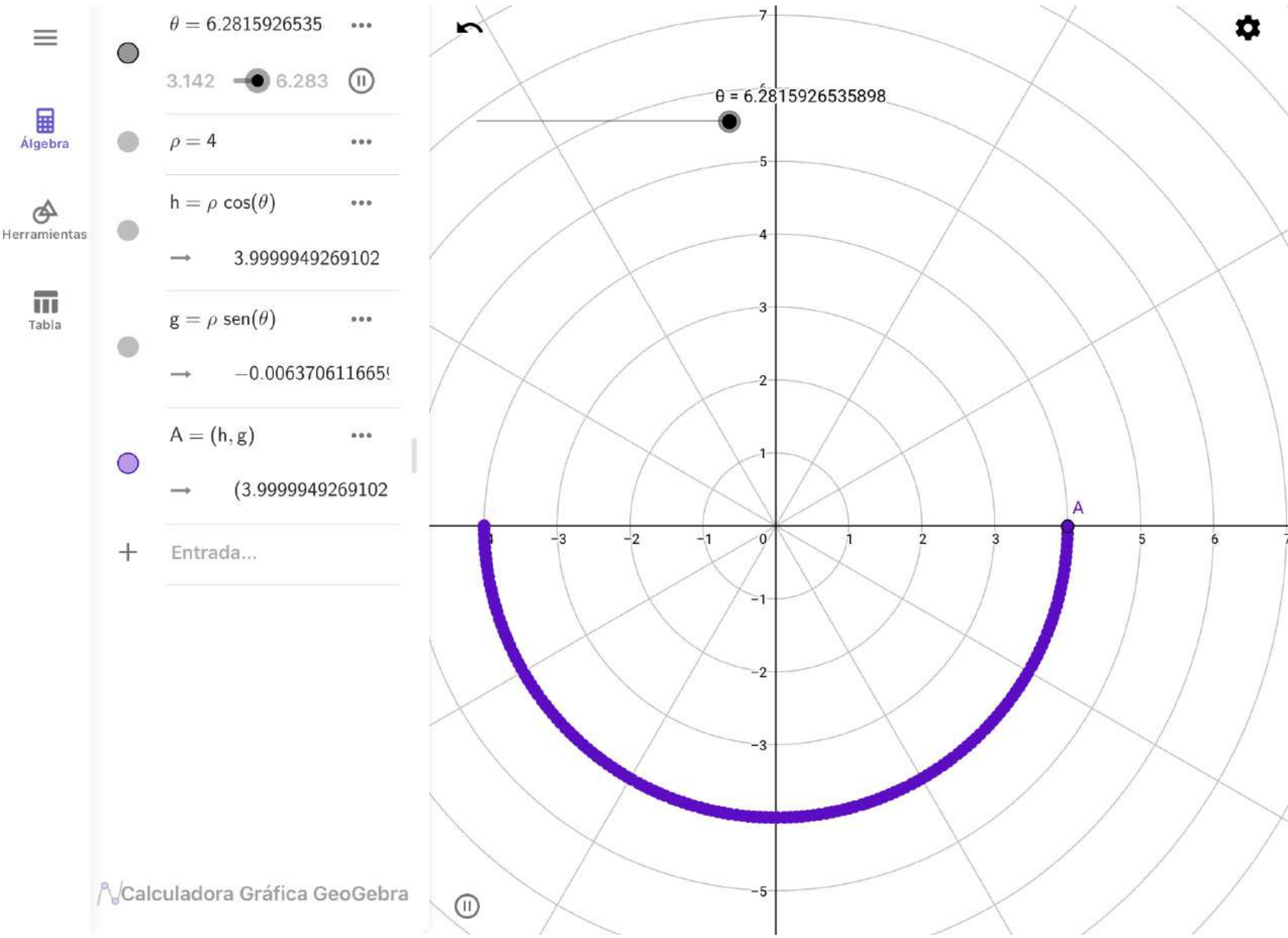
$$= \frac{1}{8}\left[\frac{2(65)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2(1)^{\frac{3}{2}}}{3}\right] = \frac{1}{8}\left[\frac{2\sqrt{65^3}}{3} - \frac{2\sqrt{1^3}}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{24}\left[2\sqrt{65^3} - 2\right] = \frac{1}{24}\left[2\cdot 65\cdot\sqrt{65} - 2\right] = \frac{1}{24}\left[2(65\sqrt{65} - 1)\right]$$

$$= \frac{1}{12}(65\sqrt{65} - 1) = \frac{65\sqrt{65} - 1}{12}.$$

$$\Rightarrow \int_{\pi}^{2\pi} \frac{65\sqrt{65} - 1}{12}\, d\theta = \frac{65\sqrt{65} - 1}{12}\int_{\pi}^{2\pi} d\theta = \frac{65\sqrt{65} - 1}{12}\left[\theta \Big|_{\pi}^{2\pi}\right]$$

$$= \frac{65\sqrt{65} - 1}{12}\left[2\pi - \pi\right] = \frac{65\sqrt{65} - 1}{12}\left[\pi\right] = \frac{65\sqrt{65}\,\pi - \pi}{12} \approx 136.93$$



Álgebra
Herramientas
Tabla
θ = 6.2815926535
3.142
6.283
ρ = 4
h = ρ cos(θ)
3.9999949269102
g = ρ sen(θ)
−0.006370611665
A = (h, g)
(3.9999949269102
Entrada...
Calculadora Gráfica GeoGebra
θ = 6.2815926535898
A

3) Usa una doble integral para evaluar el volumen del solido que se encuentra dentro del cilindro $x^2+y^2=16$, debajo de $z=2x^2+2y^2$ y encima del plano xy

notemos que el dominio sera un circulo de radio 4 con centro en el origen, en polares es $\rho=4$, veamos los limites

$0 \le \rho \le 4$

$0 \le \theta \le 2\pi$ debido a que es todo el circulo

ahora veamos la funcion a integrar y transformemosla

$(2x^2+2y^2)-(0)$ $\uparrow$ $z=0$ plano xy

$x=\rho\cos(\theta)$
$y=\rho\,\text{sen}(\theta)$

$$(2\rho^2\cos^2(\theta)+2\rho^2\,\text{sen}^2(\theta))-(0) = 2\rho^2(\cos^2(\theta)+\text{sen}^2(\theta)) = 2\rho^2(1)=2\rho^2$$

la integral queda

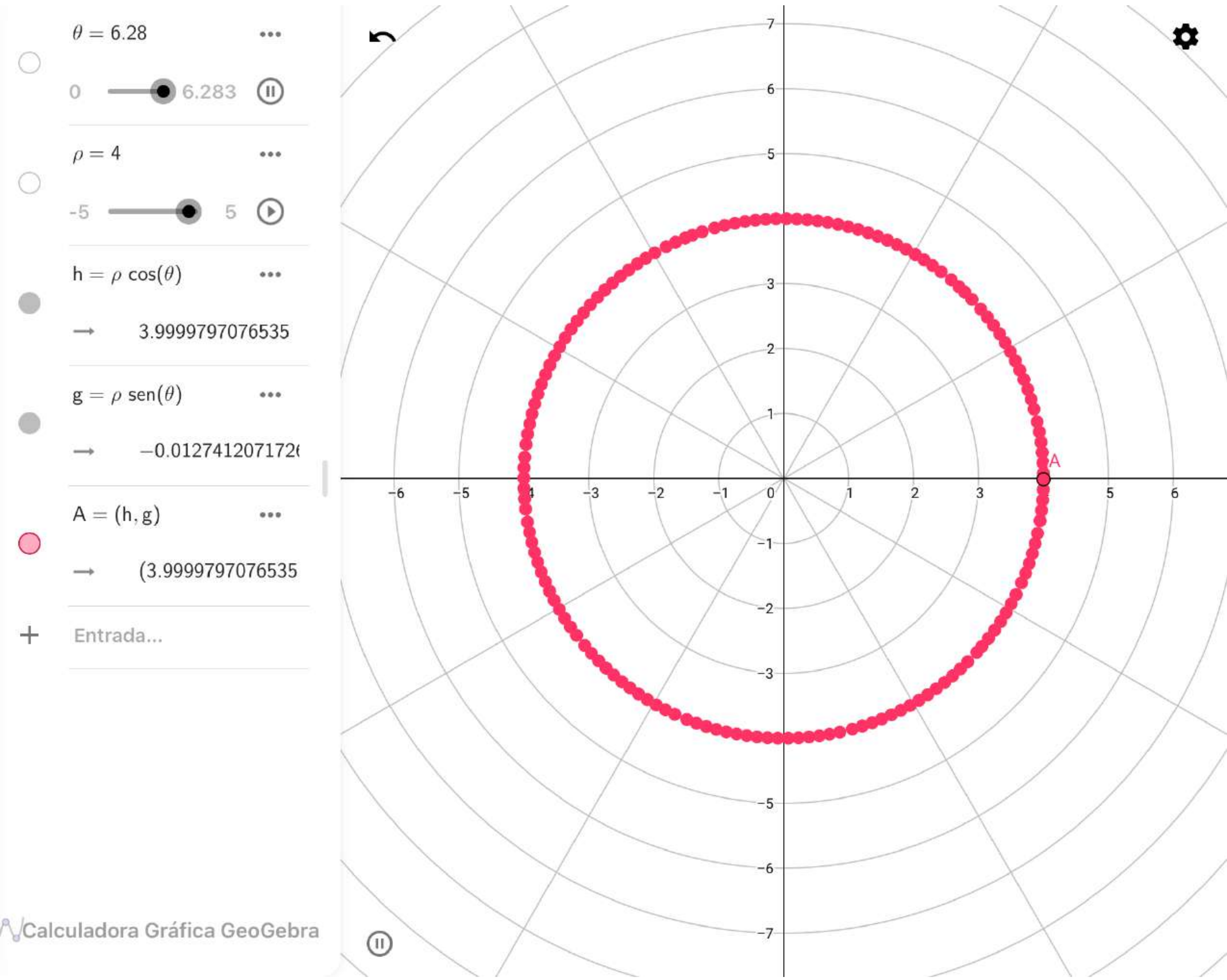
$$\int_0^{2\pi}\int_0^4 2\rho^2\rho\,d\rho\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^4 2\rho^3\,d\rho\,d\theta$$

$$\phi(\theta) = \int_0^4 2\rho^3 d\rho = 2\int_0^4 \rho^3 d\rho = 2\left[\frac{x^4}{4}\Big|_0^4\right]$$

$$= 2\left[\frac{4^4}{4}-\frac{0^4}{4}\right] = 2(64) = 128$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} 128 \, d\theta = 128 \int_0^{2\pi} d\theta = 128 \left[\theta \Big|_0^{2\pi} \right]$$

$$= 128 [2\pi - 0] = 128 \, (2\pi) = 256\pi \approx 804.24$$



θ = 6.28
0
6.283
ρ = 4
-5
5
h = ρ cos(θ)
→ 3.9999797076535
g = ρ sen(θ)
→ −0.012741207172
A = (h, g)
→ (3.9999797076535
Entrada...
Calculadora Gráfica GeoGebra
A
−6
−5
−3
−2
−1
0
1
2
3
5
6
7
6
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−5
−6
−7

4) Evalua la integral $\iint_D \operatorname{sen}(3x^2+3y^2)\,dA$

con D la region entre $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=7$

notemos que el dominio sera lo que esta entre un circulo de radio 1 y centro en el origen y otro circulo de radio $\sqrt{7}$ con centro en el origen, por lo tanto $\rho=1$ para el circulo 1 (el pequeño) y $\rho=\sqrt{7}$ para el circulo 2 (el grande)

veamos los limites

$1 \leq \rho \leq \sqrt{7}$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ debido a que es todo el circulo en ambos circulos

ahora transformemos la funcion $\operatorname{sen}(3x^2+3y^2)$ $\quad x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\operatorname{sen}\theta$

$$\operatorname{sen}(3\rho^2\cos^2\theta+3\rho^2\operatorname{sen}^2\theta) = \operatorname{sen}(3\rho^2(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)) = \operatorname{sen}(3\rho^2(1)) = \operatorname{sen}(3\rho^2)$$

la integral queda

$$\int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{7}} \operatorname{sen}(3\rho^2)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$\phi(\theta) = \int_1^{\sqrt{7}} \operatorname{sen}(3\rho^2)\rho\,d\rho \qquad \text{sustitucion} \quad t=3\rho^2, \; dt = 6\rho\,d\theta \Rightarrow \begin{cases} \rho=\sqrt{7} \Rightarrow 3(\sqrt{7}^2)=21 \\ \rho=1 \Rightarrow 3(1^2)=3 \end{cases}$$

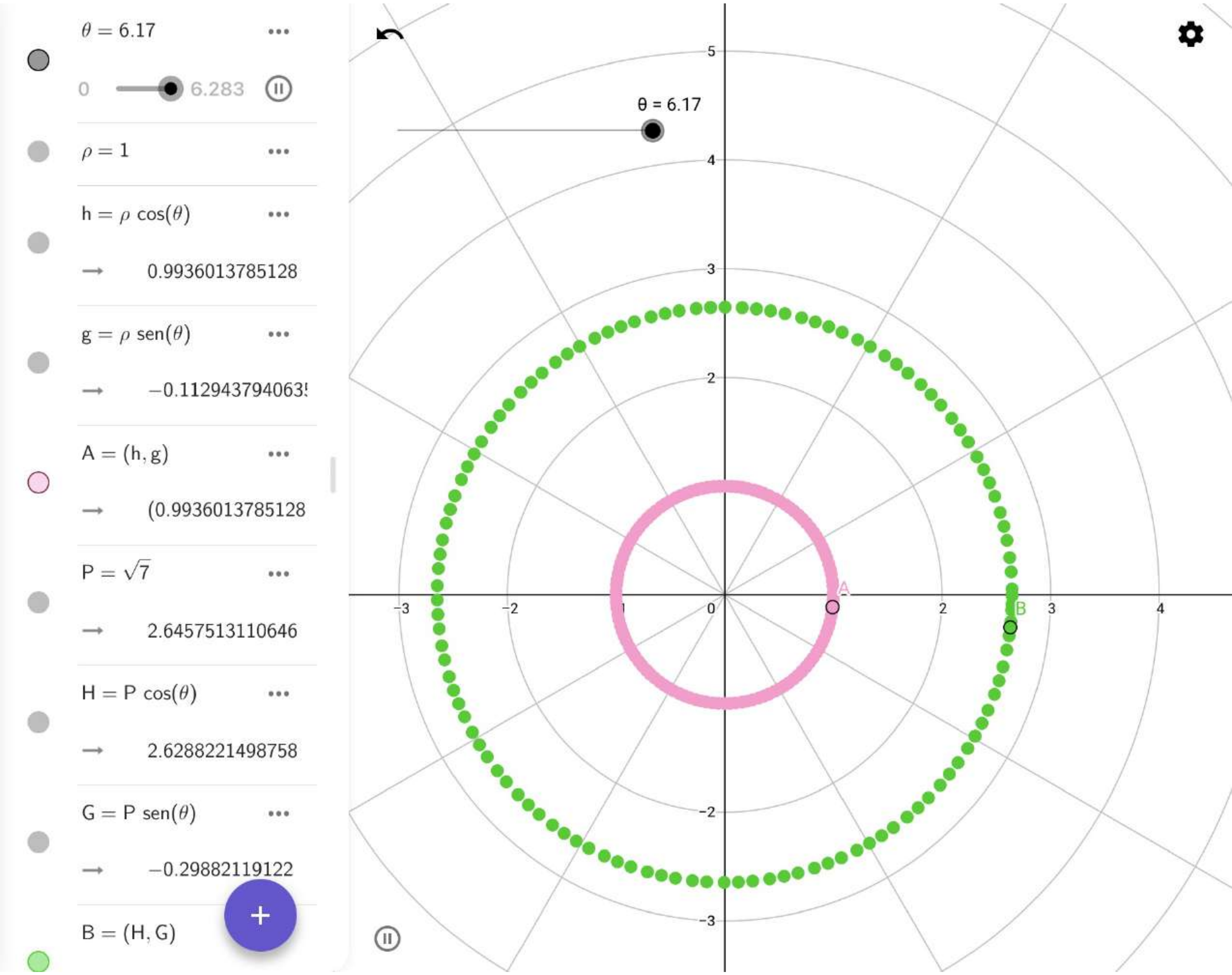
$$= \int_3^{21} \frac{1}{6}\operatorname{sen}(t)\,dt = \frac{1}{6}\int_3^{21}\operatorname{sen}(t)\,dt = \frac{1}{6}\left[-\cos(t)\Big|_3^{21}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[-\cos(21) + \cos(3)\right] = \frac{\cos(3) - \cos(21)}{6}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{\cos(3) - \cos(21)}{6}\, d\theta = \frac{\cos(3) - \cos(21)}{6} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{\cos(3) - \cos(21)}{6}\left[\theta \Big|_0^{2\pi}\right] = \frac{\cos(3) - \cos(21)}{6}\left[2\pi\right]$$

$$= \frac{\pi\cos(3) - \pi\cos(21)}{3} \approx -0.46$$


θ = 6.17
0
6.283
ρ = 1
h = ρ cos(θ)
→ 0.9936013785128
g = ρ sen(θ)
→ −0.112943794063!
A = (h, g)
→ (0.9936013785128
P = √7
→ 2.6457513110646
H = P cos(θ)
→ 2.6288221498758
G = P sen(θ)
→ −0.29882119122
B = (H, G)
θ = 6.17
A
B

5) Usa una doble Integral para evaluar el area de la region qe se encuentra dentro de $r_1 = 4$ y fuera de $r_2 = 8 + 6\,sen(\theta)$

veamos en qe θ se intersecten

$$4 = 8 + 6sen(\theta) \Rightarrow 6sen(\theta) = -4$$

$$sen(\theta) = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

hay dos solucion

$$sen(\theta) = -\frac{2}{3} \quad y \quad sen(\pi - \theta) = -\frac{2}{3}$$

$$\theta = sen^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) \quad y \quad \pi - \theta = sen^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$\theta_1 = -sen^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \quad y \quad \theta_2 = sen^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) + \pi$$

$$\theta_1 = \underset{+2k\pi}{-0.729} \quad y \quad \theta_2 = 3.871_{+2k\pi}$$

ponganoslo en grads 318.2° y 221.8°

ahora veamos el rango de donde a donde sera, necesitamos qe $r_2 \le r_1$. probemos con 0°

$0^\circ \Rightarrow r_1 = 4$ y $r_2 = 8 + 6sen(0^\circ) = 8$ $\quad r_1 < r_2$

entones el rango es 221.8° a 318.2° y en radianes es 3.87 a 5.55

como queremos area, la funcion a integrar sera 1, no hay qe transformar

los limites son

$$8 + 6sen(\theta) \le \rho \le 4$$

$$3.87 \le \theta \le 5.55$$

la integral queda

$$\int_{3.87}^{5.55}\int_{8+6sen(\theta)}^{4} 1\,\rho\, d\rho\, d\theta$$

$$\phi(\theta) = \int_{8+6sen(\theta)}^{4} \rho\, d\rho = \frac{\rho^2}{2}\Big|_{8+6sen(\theta)}^{4} = \left[\frac{4^2}{2} - \frac{(8+6sen(\theta))^2}{2}\right]$$

$$= \left[\frac{16}{2} - \frac{64+96sen(\theta)+36sen^2(\theta)}{2}\right] = 8 - \frac{2(32+48sen(\theta)+18sen^2(\theta))}{2}$$

$$= 8 - (32+48sen(\theta)+18sen^2(\theta)) = -24-48sen(\theta)-18sen^2(\theta)$$

$$\Rightarrow \int_{3.87}^{5.55} -24-48sen(\theta)-18sen^2(\theta)\, d\theta$$

$$\left[sen^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}\right]$$

$$= -24\int_{3.87}^{5.55} d\theta - 48\int_{3.87}^{5.55} sen(\theta)d\theta - 18\int_{3.87}^{5.55} sen^2(\theta)d\theta$$

$$= -24\left[\theta\Big|_{3.87}^{5.55}\right] + 48\left[\cos(\theta)\Big|_{3.87}^{5.55}\right] - 18\int_{3.87}^{5.55} \frac{1-\cos(2\theta)}{2}d\theta$$

$$= -24[5.55-3.87] + 48[\cos(5.55)-\cos(3.87)] - 9\int_{3.87}^{5.55} 1-\cos(2\theta)\,d\theta$$

$$t=2\theta \quad dt=2d\theta \quad \begin{cases} 11.1 \\ 7.74 \end{cases}$$

$$= -24[1.68] + 48[1.489] - 9\left[\int_{3.87}^{5.55} d\theta - \int_{3.87}^{5.55}\cos(2\theta)\,d\theta\right]$$

$$= -40.32 + 71.472 - 9\left[\theta\Big|_{3.87}^{5.55} - \int_{7.74}^{11.1}\frac{1}{2}\cos(t)\,d\theta\right]$$

$$= 31.152 - 9\left[1.68 - \frac{1}{2}\left[sen(t)\Big|_{7.74}^{11.1}\right]\right]$$

$$= 31.152 - 9\left[1.68 - \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(11.1) - \operatorname{sen}(7.74)\right]\right]$$

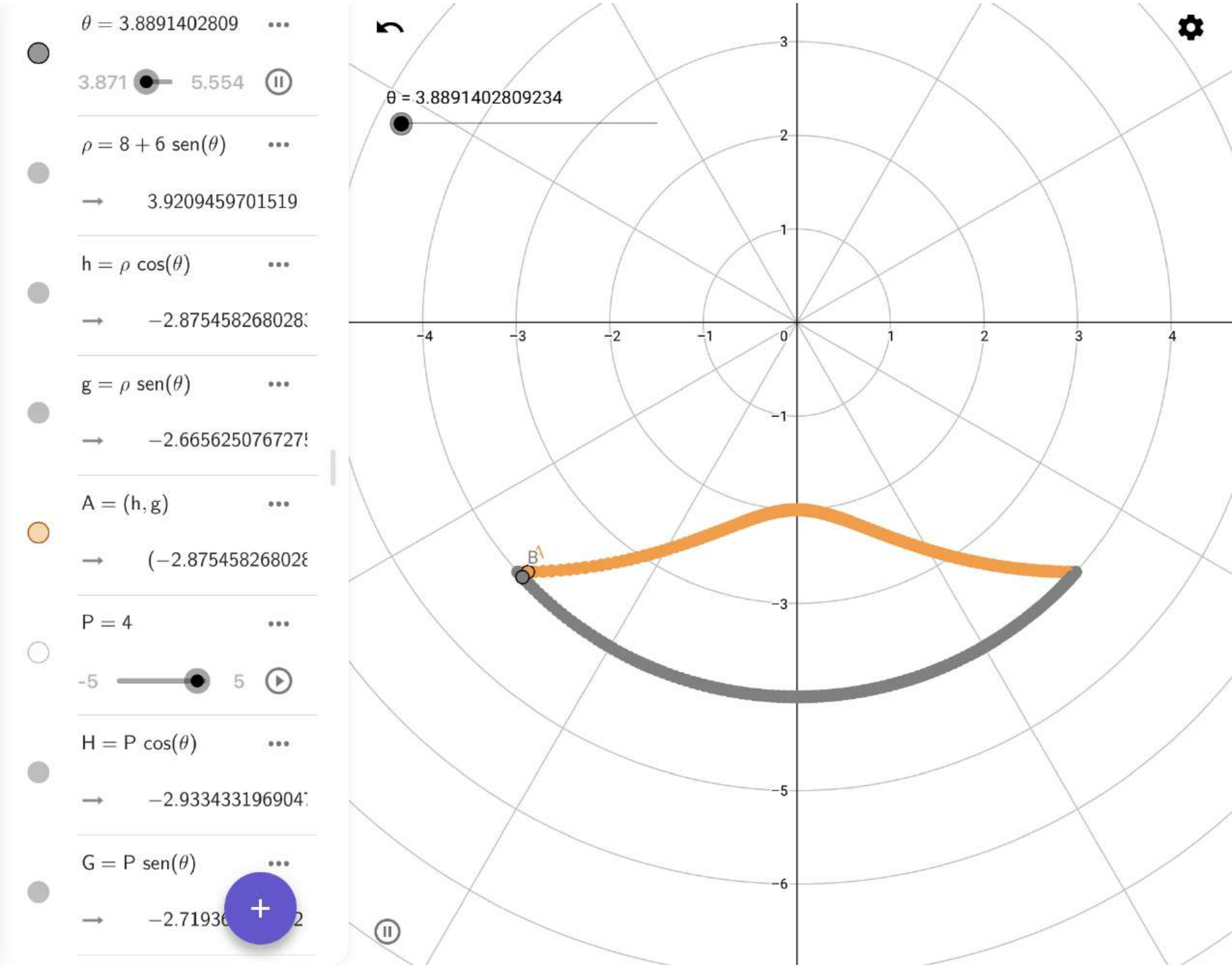
$$= 31.152 - 9\left[1.68 - \frac{1}{2}\left[-1.988\right]\right]$$

$$= 31.152 - 9\left[1.68 + 0.994\right]$$

$$= 31.152 - 9\left[2.674\right] = 31.152 - 24.066$$

$$\approx 7.086$$

un poco más, un poco mens, algunos decimales los acorte


θ = 3.8891402809
3.871
5.554
ρ = 8 + 6 sen(θ)
→ 3.9209459701519
h = ρ cos(θ)
→ −2.875458268028
g = ρ sen(θ)
→ −2.665625076727
A = (h, g)
→ (−2.875458268028
P = 4
-5
5
H = P cos(θ)
→ −2.933433196904
G = P sen(θ)
→ −2.71936
θ = 3.8891402809234
B
A