Redes de computadores 2

Capítulo 1

Métodos de acceso al medio

Los procedimientos descritos a continuación son tomados del capítulo 4 del libro *Data Networks* [1]. El propósito de este ejercicio es documentar el desarrollo matemático de diferentes métodos de contienda que implementa un nodo para acceder a un medio compartido.

1.1 ALOHA ranurado

Existen dos variantes del sistema ALOHA. En ALOHA tradicional, cuando una estación tiene una trama para transmitir, lo hará inmediatamente. Si otra estación está transmitiendo en ese momento, entonces habrá una colisión y las estaciones deberán esperar un tiempo aleatorio para intentar volver a transmitir esa trama. En la variante ranurada, el sistema se divide en *slots* y los nodos que tengan una trama para transmitir deben esperar al inicio de un *slot* para intentar "poner" su trama en el medio. En este último caso, dos o más nodos pueden intentar transmitir en el mismo slot generando una colisión.

Con el fin de facilitar el análisis, revisaremos primero el caso de ALOHA ranurado, considerando un modelo ideal, con las siguientes asunciones:

- Todos los paquetes transmitidos tienen la misma longitud y cada uno de ellos requiere una unidad de tiempo (*slot*) para ser trans-

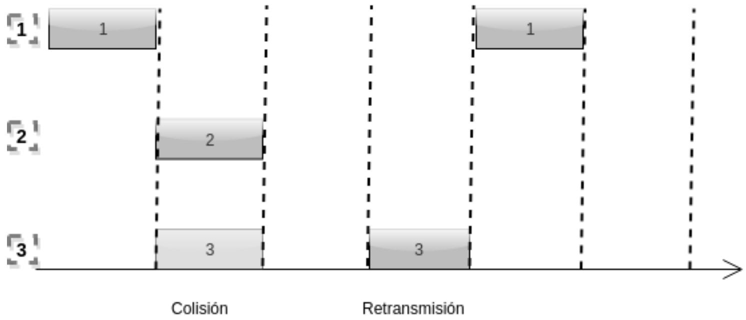

Figura 1.1: ALOHA ranurado

mitida. Todos los transmisores están sincronizados para garantizar que la recepción de cada paquete comience y termine según el *slot* definido

- Las tramas llegan a cada uno de los nodos del sistema siguiendo procesos independientes *Poisson*. Sea λ la tasa **media** de llegadas (de tramas) al sistema (todos los nodos combinados)
- Solo habrá colisiones o recepciones perfectas, el ruido no afectará la recepción de una trama.
- Cada trama que resulte en una colisión debe ser retransmitida en un *slot* futuro, este proceso se repite hasta que la trama logre ser transmitida. Un nodo con una trama que deba ser retransmitida se conoce como un nodo *backlogged* (o en espera)
- No hay *buffering*, las tramas nuevas que lleguen a un nodo *backlogged* serán descartadas. Una alternativa es considerar que el sistema cuenta con nodos infinitos, y que cada trama nueva llega a un nodo nuevo.

De las anteriores asunciones es importante conocer cuáles de ellas representan un escenario realista y cuáles son utilizadas simplemente para facilitar el análisis.

El sistema se puede modelar como una cadena de Markov donde los estados del sistema representan en número de nodos *backlogged* en el inicio de un *slot*, como se puede ver en la figura 1.2 (que prometo mejorar en la próxima versión del documento). Cada uno de los nodos *backlogged* intentará transmitir su trama en dicho *slot*, con probabilidad q_r. Todos los nodos que reciban una trama en el *slot* anterior intentarán transmitir en el *slot* actual.

Tomando en cuenta lo anterior, el estado del sistema puede decrecer a lo sumo en 1 por transición, pero puede incrementarse una cantidad arbitraria, pues en un *slot* sólo se podrá transmitir una trama correctamente, mientras que puede haber un número aleatorio de nuevas tramas generadas. Por ejemplo cuando definimos algunas probabilidades de transición:

- $P_{i,i-1}$ representa la probabilidad de que un nodo *backlogged* transmita y no lleguen nuevas tramas.
- $P_{i,i}$ representa la probabilidad de que llegue una nueva trama y que no haya intentos de nodos *backlogged* (la nueva trama se transmite correctamente). También representa la posibilidad de que no haya una nueva trama, y que los intentos de retransmisión sean fallidos.
- $P_{i,i+j}$ representa la probabilidad de que lleguen j nuevas tramas y se realicen uno o más intentos de retransmisión.

Ahora bien, podemos considerar que la tasa de intentos en el estado n en el siguiente slot será:

$$g(n) = \lambda + nq_r \tag{1.1}$$

Esto representa una generalización del caso revisado en clase y corresponde a la suma del valor esperado de llegadas de tramas nuevas, más el valor esperado de retransmisiones. En este caso asumiremos que el número de intentos de transmisión (nuevos más retransmisiones) será una variable aleatoria Poisson con tasa $g(n)$. Podemos entonces calcular la probabilidad:

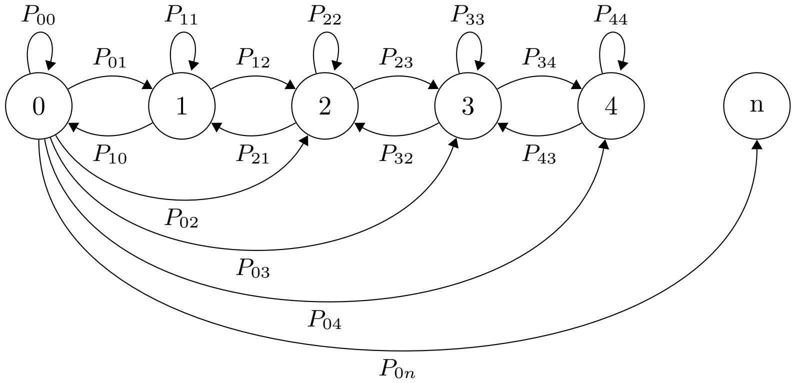

Figura 1.2: Cadena de Markov para ALOHA ranurado

- $P(m) = \dfrac{g(n)^m * e^{-g(n)}}{m!}$, equivalente a la probabilidad de tener m intentos de transmisión en un *slot*
- $P(0) = e^{-g(n)}$, equivalente a la probabilidad de no tener intentos de transmisión en un *slot*
- $P(1) = g(n) * e^{-g(n)}$, equivalente a la probabilidad tener un único intento de transmisión o de retransmisión en un *slot*.
- $P(c) = 1 - P(0) - P(1)$, equivalente a la probabilidad de que ocurra una colisión

Si queremos calcular la eficiencia como la fracción de los *slots* que contienen una transmisión exitosa, esta será $P(1)$:

$$S = g(n) * e^{-g(n)} S = G * e^{-G} \tag{1.2}$$

¿Qué valores de $g(n)$ maximizan S?

$$\begin{aligned} \frac{d}{dg(n)} g(n) * e^{-g(n)} &= 0 \\ e^{-g(n)} - g(n) * e^{-g(n)} &= 0 \\ g(n) &= 1 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Se puede verificar que cuando $g(n) = 1$ se encuentra un valor máximo de la función de eficiencia con $S = 1/e = 0.36$. Si la tasa de tramas transmitidas por slot se puede mantener cercana a 1 $trama/slot$, entonces se pueden transmitir bien el 36% de los paquetes. Si $g(n) < 1$, entonces tendremos muchos slots libres y si $g(n) > 1$ tendremos muchas colisiones y los nodos *backlogged* crecerán de manera no controlada.

1.2 ALOHA no ranurado

En este esquema, cada nodo transmite inmediatamente una trama sin esperar que comience un *slot*. En este caso suprimiremos la asunción de los *slots*. Si ocurre una colisión, los nodos involucrados intentarán transmitir la trama después de un tiempo aleatorio.
Se puede observar en la figura 1.3 que si todos las tramas tienen duración 1 y un nodo intenta transmitir en un tiempo t, cualquier transmisión que inicie entre el periodo comprendido entre $t-1$ y $t+1$ generará una colisión. De nuevo, asumiremos un número infinito de nodos y consideraremos un nodo como *backlogged* desde el momento en que participó en una colisión hasta el instante donde intenta retransmitir. Asumamos que el periodo hasta intentar retransmitir τ es una variable aleatoria exponencial con F.D.P $xe^{-x\tau}$, y x es la tasa de retransmisión de un nodo. Si el sistema tiene una tasa de llegada Poisson de nuevas tramas λ, entonces la los intentos de transmisión en el sistema en el estado n es un proceso Poisson con tasa:

$$G(n) = \lambda + nx \tag{1.4}$$

Consideremos una secuencia de intentos de transmisión sucesivos en el canal. τ_i será el tiempo entre los inicios de intentos de transmisión i $i+1$. En la figura 1.4 podemos ver que el intento i será exitoso si los intervalos τ_i y τ_{i-1} son mayores a un tiempo de trama, lo que significa que no debe haber transmisiones iniciadas un tiempo de trama antes ni un tiempo de trama después del inicio del intento i

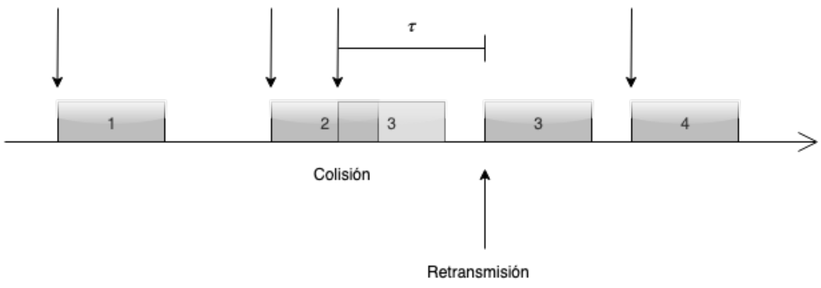

Figura 1.3: ALOHA puro

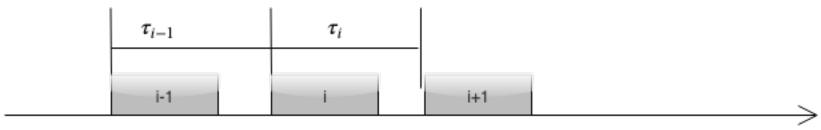

Figura 1.4: Tiempo vulnerable en ALOHA puro

En el estado n el sistema tendremos entonces que la probabilidad de éxito se traduce en la probabilidad de que ningún nodo intente transmitir en el intervalo correspondiente a 2 tiempos de trama:

$$P_{éxito} = e^{-2G(n)} \tag{1.5}$$

Como las transmisiones ocurren con tasa $G(n)$, entonces el número esperado de transmisiones exitosas (*throughput*) será:

$$throughput(n) = G(n)e^{-2G(n)} \tag{1.6}$$

Similar al caso anterior, se puede verificar que cuando $G(n) = 1/2$ se encuentra un valor máximo de la función de eficiencia con $S = 1/e = 0.18$. Si la tasa de tramas transmitidas por slot se puede mantener cercana a 0.5 $trama/slot$, entonces se pueden transmitir bien el 18% de los paquetes. Si $G(n) > 0.5$ tendremos muchas colisiones y los nodos *backlogged* crecerán de manera no controlada.

1.3 ALOHA ranurado con CSMA

En varios sistemas multiacceso un nodo puede ”escuchar” si otros nodos están transmitiendo después de un pequeño periodo de detección y propagación que depende del tiempo de transmisión de trama. Estas estrategias se conocen normalmente como acceso múltiple por detección de portadora (CSMA). Este tiempo es el periodo que se requiere para que un receptor determine si otro nodo está transmitiendo o no. Para nuestro análisis consideraremos el medio como un canal de bits intermitente, donde los periodos libres (o inactivos) pueden ser distinguidos (con retardo) de los periodos de transmisión de tramas.

Consideremos β como el retardo de propagación y detección en unidades de transmisión de trama (tiempo de trama), este será el requerido para que todas los nodos puedan reconocer el canal como libre después del fin de una transmisión. Si τ es este tiempo en segundos, entonces podemos expresarlo en unidades de tiempo de trama con C como la capacidad del canal en bits por segundo y L como el tamaño esperado de trama:

$$\beta = \frac{\tau C}{L} \tag{1.7}$$

Partiremos de un sistema CSMA ranurado donde, si nada se transmite en un slot, este terminará después de β unidades. El supuesto de dividir el sistema en periodos inactivos de longitud β no es realista, pero provee una buena aproximación con un modelo más simple. Asumiremos tramas de longitud 1, por lo que el tiempo esperado de transmisión de trama es 1. Seguiremos asumiendo un número infinito de nodos y llegadas de tramas nuevas Poisson con intensidad λ. Adicionalmente asumiremos que:

- Si una trama llega a un nodo cuando hay una transmisión en progreso, este nodo inmediatamente se convierte en backlogged.

- Se utilizará el modelo *no persistente*: Una trama que llegue durante un *slot* libre será transmitida en el siguiente slot. Un nodo backlogged que encuentre el medio libre intentará transmitir en el siguiente *slot* con probabilidad q_r
- Podemos utilizar la misma cadena de markov de la figura 1.2 para explicar el sistema.
- Un slot libre seguirá siempre después de cada *slot* ocupado (colisión o transmisión exitosa), pues los nodos sólo pueden transmitir después de detectar un *slot* libre
- El tiempo entre transiciones de estados será β si es un slot donde no hay transmisiones o $1+\beta$ en el caso de una transmisión o colisión.

En el estado n, la probabilidad de tener un *slot* libre después de una transición entre estados estará determinada por la probabilidad de no transmisiones en el siguiente *slot*:

$$P_{SLibre} = \underbrace{e^{-\lambda\beta}}_{\text{No haya nuevas tramas}} * \underbrace{(1-q_r)^n}_{\text{No retransmisiones de nodos backlogged}} \tag{1.8}$$

El primer término se obtiene de evaluar la F.D.P. Poisson cuando la v.a. es igual a 0 (o ocurrencias en un periodo de tiempo β inmediatamente anterior) el segundo término es la probabilidad de que n nodos backlogged no transmitan $((1-q_r)*(1-q_r)*...*(1-q_r))$ como ambos eventos son independientes, entonces la probabilidad será la multiplicación de la probabilidad de ambos. Ahora bien, si queremos calcular el tiempo esperado de transición entre estados, en el estado n será:

$$E[T_{transición}] = \beta + \underbrace{1*[1-e^{-\lambda\beta}(1-q_r)^n]}_{\text{Probabilidad de transmisión o colisión}} \tag{1.9}$$

Siempre se debe esperar β antes de una transmisión. El tiempo de transmisión o colisión siempre será 1 y se debe multiplicar por la

probabilidad de que ocurra una de las dos situaciones, que se traduce en $1 - P_{slot-libre}$.
Podemos entonces definir como el número esperado de llegadas (nuevas tramas) en un tiempo de transición de estados:

$$E[llegadas] = \lambda\{\beta + [1 - e^{-\lambda\beta}(1 - q_r)^n]\} \tag{1.10}$$

Como λ es la tasa de llegadas general del sistema por unidad de tiempo, multiplicarla por un tiempo permitirá encontrar la cantidad esperada de llegadas en ese periodo.
Podemos definir también la probabilidad de una transmisión exitosa como:

$$\begin{aligned} P_{\acute{E}xito} &= \underbrace{(\lambda\beta e^{-\lambda\beta})(1 - q_r)^n}_{\text{P. de una nueva llegada sin reTx}} + \underbrace{(e^{-\lambda\beta})\binom{n}{1}(1 - q_r)^{n-1}q_r}_{\text{P. de no llegadas y una reTx}} \\ P_{\acute{E}xito} &= \lambda\beta e^{-\lambda\beta}(1 - q_r)^n + e^{-\lambda\beta}n(1 - q_r)^{n-1}q_r \\ P_{\acute{E}xito} &= \left(\lambda\beta + \frac{q_r n}{1 - q_r}\right)e^{-\lambda\beta}(1 - q_r)^n \end{aligned} \tag{1.11}$$

Podemos definir el $drift$ o la deriva del sistema en el estado n como el número esperado de llegadas menos el número esperado de salidas (de tramas) entre transiciones entre estados:

$$\begin{aligned} D_n =& \lambda\{\beta + [1 - e^{-\lambda\beta}(1 - q_r)^n]\} - 1 * \left[\left(\lambda\beta + \frac{q_r n}{1 - q_r}\right)e^{-\lambda\beta}(1 - q_r)^n\right] \\ D_n =& \lambda(\beta + 1 - e^{-\lambda\beta}e^{-q_r n}) - (\lambda\beta e^{-\lambda\beta}e^{-q_r n} + q_r n e^{-\lambda\beta}e^{-q_r n}) \\ D_n \approx& \lambda(\beta + 1 - e^{-(\lambda\beta + q_r n)}) - (\lambda\beta e^{-(\lambda\beta + q_r n)} + q_r n e^{-(\lambda\beta + q_r n)}) \end{aligned} \tag{1.12}$$

Si q_r es pequeño: $(1 - q_r)^n \approx (1 - q_r)^{n-1} \approx e^{-q_r n}$

Podemos definir:

$$g(n) = \lambda\beta + q_r n \tag{1.13}$$

Que será el número esperado de intentos de transmisión en una transición desde el estado n (nuevas llegadas más intentos de transmisión de nodos backlogged). D_n puede ser expresado como:

$$D_n \approx \lambda(\beta + 1 - e^{-g(n)}) - g(n)e^{-g(n)} \tag{1.14}$$

Nos interesa que el $Drift$ sea negativo para que el número de nodos backlogged no crezca sin límites, es decir, que en promedio la salida de tramas sea mayor a la llegada de nuevas tramas. Para esto, la tasa de llegadas λ debe cumplir:

$$\lambda < \frac{g(n)e^{-g(n)}}{\beta + 1 - e^{-g(n)}} \tag{1.15}$$

El numerador de la ecuación 1.15 es el número esperado de tramas transmitidas por transición de estados y el denominador es la duración esperada de un periodo de transición entre estados, por lo que la fracción se puede interpretar como la tasa de salidas (*departure rate*) por unidad de tiempo. Si maximizamos esta función sobre $g(n)$ encontraremos un máximo en $1/(1+\sqrt{2\beta})$ cuando $g(n) = \sqrt{2\beta}$.

1.4 ALOHA puro con CSMA

En la sección anterior asumimos que todos los nodos estaban sincronizados para iniciar su transmisión en múltiplos de β. En este caso removeremos esta restricción. Cuando una trama llega, si el medio está libre, será inmediatamente transmitida. Si encuentra el medio ocupado el nodo se convierte inmediatamente en *backlogged*. Similar a lo visto en ALOHA puro, los nodos backlogged intentarán retransmitir sus tramas después de tiempos aleatorios τ. exponencialmente distribuidos $xe^{-x\tau}$. Asumiremos de nuevo un periodo de propagación y detección de β. Si un nodo comienza una transmisión en el instante t, otro nodo no detectará el canal como ocupado hasta el instante $t + \beta$.

Consideremos un sistema en el estado n. El tiempo para que la primera transmisión comience será una v.a. exponencial con tasa:

$$G(n) = \underbrace{\lambda}_{\text{Nuevas llegadas}} + \underbrace{nx}_{\text{retransmisiones}} \tag{1.16}$$

$G(n)$ está expresada en tramas por unidad de tiempo, y corresponde a la suma de las nuevas tramas en el sistema más los intentos de retransmisión (Poisson con tasa x, provenientes de los tiempos τ de espera de retransmisión).

Si un nodo inicia una transmisión, habrá una colisión si otro nodo "escucha" el medio dentro de un tiempo β. En este periodo de ocupación del canal, la probabilidad de una colisión será $P(\tau < \beta = 1 - e^{-\beta G(n)})$, que se puede explicar como la probabilidad de que el tiempo τ que un nodo toma para escuchar el medio sea menor al tiempo de detección y propagación β. A partir de este análisis, podemos formular la probabilidad de tener una transmisión exitosa como la probabilidad de no tener intentos de transmisión en un periodo β:

$$P_{éxito} = e^{-\beta G(n)} \tag{1.17}$$

El tiempo esperado entre periodos libres será:

$$\underbrace{\frac{1}{G(n)}}_{\text{Tiempo medio antes de escuchar el medio}} + \underbrace{1 + \beta}_{\text{Tiempo de transmisión o colisión}} \tag{1.18}$$

El primer término corresponde al tiempo medio de espera hasta que la primera transmisión comience (la media de la v.a. aleatoria exponencial). El segundo término es el tiempo hasta que la transmisión (o colisión) termine y el canal esté de nuevo libre para transmitir. Ahora bien, con n nodos backlogged podemos definir la tasa de salidas entre periodos libres cómo:

$$TasaSalidas(n) = \frac{e^{-\beta G(n)}}{\frac{1}{G(n)} + 1 + \beta} \tag{1.19}$$

Si maximizamos esta función sobre $G(n)$ encontraremos un máximo en $1/(1+2\sqrt{\beta})$ cuando $G(n) = \sqrt{\beta}$.

1.5 CSMA/CD Ranurado

En los modelos anteriores los periodos de colisión duran el mismo tiempo que los periodos de transmisión. Tendría sentido terminar los periodos de colisión rápidamente para mejorar el desempeño del sistema. Este es el caso de CSMA/CD (Collision Detection), donde dos nodos involucrados en una colisión detendrán su transmisión inmediatamente detecten esta situación (pueden escuchar lo que están transmitiendo).

Para facilitar el análisis consideraremos de nuevo un sistema en términos de slots y mini-slots. Los minislots tendrán duración β, que es el tiempo de propagación de un extremo del cable al otro. Si más de un nodo comienza a transmitir en un mini-slot, todos los nodos involucrados detectarán la situación y terminarán de transmitir al final del mini-slot. Los mini-slot son utilizados en modo contención, así, si un nodo logra realizar una transmisión exitosa en el mini-slot "reservará" el canal para el resto de la transmisión.

CSMA/CD puede ser analizado con la misma cadena de Markov que se ha utilizado para los métodos anteriores. Las transmisiones después de un slot libre será una v.a. Poisson con parámetro $g(n) = \lambda\beta + q_r n$. Consideraremos las transiciones de estado al final de un slot libre, si no hay transmisiones entonces el siguiente slot terminará después de β. Si una transmisión ocurre entonces el siguiente slot libre iniciará después de $1+\beta$. Si ocurre una colisión, el siguiente slot libre comenzará después de 2β, pues los nodos deben escuchar un slot libre después de la colisión para saber que es seguro transmitir.

Similar a lo visto en la sección 1.3, podemos calcular el tiempo esperado entre transiciones de estado:

$$E[T_{transición}] = \beta + \underbrace{1 * [g(n)e^{-g(n)}]}_{\text{Probabilidad de tx}} + \underbrace{\beta[1-(1+g(n))e^{-g(n)}]}_{\text{Probabilidad de colisión}} \quad (1.20)$$

En este caso seguimos con la asunción de que una trama transmitida tiene una duración esperada de 1. Se define el *drift* como $\lambda E[T_{transición}] - 1 * P_{Tx}$ (Recordar: cambio en el estado), que será negativo si:

$$\lambda < \frac{g(n)e^{-g(n)}}{\beta + 1 - g(n)e^{-g(n)} + \beta[1-(1+g(n))e^{-g(n)}]} \quad (1.21)$$

Si maximizamos esta función sobre $g(n)$ encontraremos un máximo en $1/(1+3.31\beta)$ cuando $g(n) = 0.77$.

1.6 CSMA/CD Ranurado

$$TasaSalidas(n) = \frac{e^{-\beta G(n)}}{\frac{1}{G(n)} + \beta + 2\beta(1-e^{-\beta G(n)}) + e^{-\beta G(n)}} \quad (1.22)$$

Si maximizamos esta función sobre $G(n)$ encontraremos un máximo en $1/(1+6.2\beta)$ cuando $G(n) = 0.43/\beta$.

Bibliography

[1] D. Bertsekas and R. Gallager, *Data Networks (2Nd Ed.)*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1992.