UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS
CURSOS DE SERVICIOS PARA INGENIERÍA

Materia: Álgebra Lineal	Código: 2552520	Grupo: 1	Parcial 3 (25 %)	**Nota**
Profesor: Alejandro Piedrahita H.			Fecha: 17/09/2019	
Estudiante:			Documento:	

La evaluación tiene una duración de 1 hora y 50 minutos. No está permitido utilizar durante la prueba notas de clase, libros, etc. Los procedimientos empleados para llegar a cada respuesta deben quedar registrados en el examen, a menos que se indique lo contrario.

1. $\boxed{24\,\%}$ Las preguntas (1a) a (1d) son de selección múltiple con una única respuesta. Justifique *brevemente* sus respuestas.

   a) Si $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal cuyo núcleo es un subespacio de dimensión 3 de $\mathbb{R}^5$, entonces la imagen de T es:

   (1) El subespacio trivial cero.
   (2) Una recta que pasa por el origen.
   (3) Un plano que pasa por el origen.
   (4) Todo el espacio $\mathbb{R}^3$.

   Justificación.

   $\rho(T) + \nu(T) = 5 \Rightarrow \rho(T) = 5 - 3 = 2 \Rightarrow \dim \operatorname{im}(T) = 2 \Rightarrow \operatorname{im}(T)$ es un plano en $\mathbb{R}^3$

   b) Si la matriz de representación A_T de una transformación lineal T es 3×2, entonces:

   (1) $\operatorname{nu}(T)$ es subespacio de $\mathbb{R}^3$.
   (2) $\operatorname{im}(T)$ y C_{A_T} son isomorfos.
   (3) $\operatorname{im}(T)$ es subespacio de $\mathbb{R}^2$.
   (4) $\rho(T) + \nu(T) = 3$.

   Justificación.

   $\dim \operatorname{im}(T) = \rho(T) = \rho(A_T) = \dim C_{A_T} \Rightarrow \operatorname{im}(T)$ y C_{A_T} son isomorfos

   c) Sea $T : M_{22} \to P_4$ una transformación lineal inyectiva. Entonces:

   (1) T es un isomorfismo.
   (2) $\nu(T) = 1$.
   (3) T no es sobreyectiva.
   (4) $\rho(T) = 5$.

   Justificación.

   $\rho(T) + \nu(T) = 2\times 4 = 8 \Rightarrow \rho(T) = 8 \neq 5 = \dim P_4$

   d) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una isometría. De las siguientes afirmaciones:

   (I) Las columnas de su representación matricial son ortogonales.
   (II) T no es inyectiva.
   (III) $T(3, -2)$ es ortogonal a $T(2, 3)$.

   son verdaderas:

   (1) Sólo (I). (2) Sólo (I) y (II). (3) Sólo (III). (4) Sólo (I) y (III).

   Justificación.

   T isometría $\Rightarrow A_T(A_T)^T = I \Rightarrow$ (I) es verdadera

   T isometría $\Rightarrow T(3,-2)\cdot T(2,3) = (3,-2)\cdot(2,3) = 0 \Rightarrow$ (III) es verdadera

2. $\boxed{25\,\%}$ Considere la transformación lineal $T:\mathbb{R}^2 \to P_3$ definida por

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a + bx + (a+b)x^2 + (a-b)x^3.$$

a) $\boxed{6\,\%}$ Halle el núcleo y la nulidad de T.

b) $\boxed{16\,\%}$ Halle una base para la imagen de T y su rango.

c) $\boxed{3\,\%}$ ¿Es T un isomorfismo?

Solución.

a) $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in nu(T) \Leftrightarrow T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$

$\Leftrightarrow a + bx + (a+b)x^2 + (a-b)x^3 = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$

$\Leftrightarrow a = 0$ y $b = 0$

Por tanto

$$nu(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad \nu(T) = 0.$$

b) $T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a + bx + (a+b)x^2 + (a-b)x^3$

$= a + bx + ax^2 + bx^2 + ax^3 - bx^3$

$= a(1 + x^2 + x^3) + b(x + x^2 - x^3)$

De lo anterior,

$$im(T) = gen\{1 + x^2 + x^3,\ x + x^2 - x^3\}$$

Como $1 + x^2 + x^3$ y $x + x^2 - x^3$ son L.I, dichos conjuntos constituyen una base para $im(T)$ y por tanto

$$\rho(T) = 2.$$

c) Como $\rho(T) = 2 \neq 4 = \dim P_3$, entonces T no es sobreyectiva y por tanto T <u>no</u> es isomorfismo.

3. $\boxed{26\,\%}$ Sea $T : \mathbb{R}^3 \to P_1$ una transformación lineal tal que su representación matricial, respecto a las bases $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ y $\mathcal{B}' = \{p_1(x), p_2(x)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y P_1 respectivamente es

$$M_T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $\mathbf{v}_1 = (-1, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 0, 0)$, $p_1(x) = 1 + 2x$, y $p_2(x) = 1 - x$.
Halle:

a) $\boxed{6\,\%}$ $[T(\mathbf{v}_1)]_{\mathcal{B}'}$, $[T(\mathbf{v}_2)]_{\mathcal{B}'}$ y $[T(\mathbf{v}_3)]_{\mathcal{B}'}$.

b) $\boxed{6\,\%}$ $T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2)$ y $T(\mathbf{v}_3)$.

c) $\boxed{14\,\%}$ $T\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Solución.

a) $[T(v_1)]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $[T(v_2)]_{B'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $[T(v_3)]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $[T(v_1)]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow T(v_1) = 1 \cdot p_1(x) + (-1)\, p_2(x) = 1 + 2x - (1 - x) = 3x$

$[T(v_1)]_{B'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T(v_1) = 2 \cdot p_1(x) + 1 \cdot p_2(x) = 2(1+2x) + 1 - x = 3 + x$

$[T(v_1)]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow T(v_1) = 1\, p_1(x) + 0 \cdot p_2(x) = 1 + 2x$

c) Debemos expresar a $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ en la base B:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \rightleftarrows R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_1 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to -R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to -R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to -R_3 + R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to -R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Luego

$$\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left[T\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right]_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \cdot p_1(x) + (-3)\, p_2(x) = -3(1 - x) = -3 + 3x$$

4. $\boxed{25\,\%}$ Considere la transformación lineal $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y)=(x+2y,x-2y)$.

a) $\boxed{12\,\%}$ Muestre que T es una transformación lineal invertible.

b) $\boxed{8\,\%}$ Halle $T^{-1}(x,y)$.

c) $\boxed{5\,\%}$ ¿Es T una isometría?

Solución.

a) Respecto a la base canónica $B=\{(1,0),(0,1)\}$, $T(1,0)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $T(0,1)=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$

y por tanto

$$A_T=\begin{pmatrix}1&2\\1&-2\end{pmatrix}.$$

Como $\det A_T = 1\cdot(-2)-1\cdot 2=-4\neq 0$, A_T es invertible y por tanto T es invertible.

b) Como $A_{T^{-1}}=(A_T)^{-1}$ y

$$A_T^{-1}=\frac{1}{\det A_T}\begin{pmatrix}-2&-2\\-1&1\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix},$$

entonces

$$\left[T^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right]_B = A_T^{-1}\left[\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right]_B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x+y}{2}\\\frac{x-y}{4}\end{pmatrix}$$

y por tanto

$$T^{-1}(x,y)=\left(\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{4}\right)$$

c)

$$A_T(A_T)^T=\begin{pmatrix}1&2\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-3\\-3&5\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

implica que A_T no es ortogonal y por tanto T <u>no</u> es isometría.