Universidad de Antioquia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas
Cursos de Servicios para Ingeniería

Materia: Cálculo integral	Código: 2555231	Grupo: 5	Parcial 2 (25 %)	**Nota**
Docente: Alejandro Piedrahita H.			Fecha: 01/03/2022	
Estudiante:			Documento:	

La evaluación consta de 4 ejercicios para ser resueltos en un tiempo máximo de 1 hora y 50 minutos. Los procedimientos empleados para llegar a cada respuesta deben ser justificados y quedar registrados en las hojas de respuesta. No está permitido utilizar dispositivos electrónicos ni documentos o apuntes durante la prueba. Realice los procedimientos de forma clara y ordenada.

1. $\boxed{20\,\%}$ Encuentre la derivada de la función

$$F(x) = \int_{\operatorname{sen} x}^{e^x} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,dx.$$

2. $\boxed{30\,\%}$ Considere la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2-1}.$$

   a) $\boxed{10\,\%}$ Explique por qué es impropia.
   b) $\boxed{20\,\%}$ Determine si converge o diverge.

3. $\boxed{30\,\%}$ Utilice la definición de integral definida de Riemann para evaluar

$$\int_{-1}^{3} (2x+5)\,dx.$$

4. $\boxed{20\,\%}$ Utilice el teorema fundamental del cálculo para evaluar la siguiente integral.

$$\int_{\pi/4}^{-\pi/4} \left(\operatorname{sen}^3 x \cos x + \tan x\right)\,dx.$$

Solución

Las soluciones propuestas a continuación no indica un criterio para la valoración de los ejercicios, son sólo una orientación para una posible solución.

1.

$$F(x) = \int_{\operatorname{sen} x}^{a} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,dt + \int_{a}^{e^x} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$$

$$= -\int_{a}^{\operatorname{sen} x} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,dt + \int_{a}^{e^x} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,dt.$$

Por el teorema fundamental del cálculo, parte I,

$$\frac{dF}{dx} = -\frac{d}{dx}\int_{a}^{\operatorname{sen} x} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,dt + \frac{d}{dx}\int_{a}^{e^x} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,dt$$

$$= -\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x+1}}\cdot\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x + \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}\cdot\frac{d}{dx}e^x$$

$$= -\frac{\operatorname{sen} x\cdot\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 x+1}} + \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+1}}$$

2.

a) Por una parte el intervalo de integración es infinito y por otra, el integrando tiene una discontinuidad infinita en $x=1$.

b) $$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{a\to 1^+} \int_a^b \frac{dx}{x^2-1} + \lim_{c\to\infty} \int_b^c \frac{dx}{x^2-1}$$

Para analizar cada integral aplicamos fracciones parciales:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow 1 = (x+1)A + (x-1)B$$

$$\rightarrow 1 = (A+B)x + (A-B)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \text{ y } B = \frac{-1}{2}$$

Luego

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1|$$

y

$$\lim_{a\to 1^+} \int_a^b \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{a\to 1^+} \left[\frac{1}{2}\ln|b-1| - \frac{1}{2}\ln|b+1| - \frac{1}{2}\ln|a-1| + \frac{1}{2}\ln|a+1| \right] = \infty,$$

pues $$\lim_{a\to 1^+} \ln|a-1| = \lim_{a\to 1^+} \ln(a-1) = -\infty$$

Por consiguiente la integral diverge!

3. Dividimos el intervalo $[-1, 3]$ en n subintervalos de longitud

$$\Delta x = \frac{3-(-1)}{n} = \frac{4}{n}$$

y tomamos la partición

$$x_0 = -1, \quad x_1 = -1+\Delta x, \quad x_2 = -1+2\Delta x, \ \dots, \ x_i = -1+i\Delta x, \ \dots, \ x_n = -1+n\Delta x = 3$$

donde

$$x_i = -1 + i\Delta x = -1 + \frac{4i}{n} = \frac{4i-n}{n}.$$

Entonces

$$\int_{-1}^{3} (2x+5)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(2\,\frac{4i-n}{n}+5\right)\frac{4}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{8i-2n+5n}{n}\cdot\frac{4}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} (32i+12n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(32\sum_{i=1}^{n} i + 12n\sum_{i=1}^{n} 1\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(32\cdot\frac{n(n+1)}{2} + 12n^2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{16(n+1)}{n}+12\right) = \lim_{n\to\infty}\left(16\left(1+\frac{1}{n}\right)+12\right) = 16+12$$

$$= 28$$

4.

$$\int (\operatorname{sen}^3 x \cos x + \tan x)\,dx = \int \operatorname{sen}^3 x \cos x\,dx + \int \tan x\,dx$$

Para la primera integral a la derecha hacemos la sustitucion $u = \operatorname{sen} x$, $du = \cos x\,dx$ y obtenemos

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos x\,dx = \int u^3\,du = \frac{1}{4}u^4 + c = \frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x + c.$$

Para la segunda integral,

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx$$

hacemos $u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen} x\,dx$ y

$$\int \tan x\,dx = \int -\frac{1}{u}\,du = -\ln u + c = -\ln|\cos x| + c.$$

Por tanto

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}} (\operatorname{sen}^3 x \cos x + \tan x)\,dx = -\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{sen}^3 x \cos x + \tan x)\,dx$$

$$= -\left[\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x - \ln|\cos x|\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\left[\cancel{\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4\left(\frac{\pi}{4}\right)} - \cancel{\ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right|} - \cancel{\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4\left(\frac{\pi}{4}\right)} + \cancel{\ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right|}\right]$$

$$= 0$$