	Universidad de Antioquia Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Instituto de Matemáticas Cursos de Servicios programas virtuales Ingeniería	Cálculo Integral Taller 3

1. Hallar el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje x la región acotada por la recta $y = 2x + 2$ y la parábola $y = x^2 + 2$

   a) Por el método del disco.

   b) Por el método de cascarones cilíndricos.

   a) Halle los puntos de corte de las curvas y determine el área entre las curvas en el intervalo definido por los puntos de corte.

   b) Determine las coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$ del centro de masa para la region definida por las curvas f y g.

   c) Utilice el Teorema de Pappus para determinar el volumen del sólido que se genera al girar el área en torno al eje x y en torno al eje y.

2. Calcular la longitud de la curva $y^2 = 4(x+4)^3$ en el intervalo $[0, 2]$, y $y \geq 0$.
3. Calcular el área de superficie obtenida la girar la curva $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{6x}$, $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$. respecto al eje x.
4. Use el teorema de Pappus para demostrar que el volumen del sólido obtenido mediante la rotación de la región R limitada por $y = sen(x)$, $x = 0$, $y = 0$, $x = \pi$ alrededor del eje y es $2\pi^2$.
5. Encuentre el volumen del sólido generado al rotar la región comprendida por las parábolas $y = -x^2$, $y = x^2 - 6x$ alrededor del eje x. Tome elementos de área paralelos al eje de giro.
6. Halle el centroide $(\overline{x}, \overline{y})$ de la región limitada por las curvas $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 0$, $x = 4$
7. Use el teorema de Pappus para demostrar que el volumen del sólido obtenido mediante la rotación de la región R limitada por $y = sen(x)$, $x = 0$, $y = 0$, $x = \pi$ alrededor del eje y es $2\pi^2$.
8. Hallar el volumen del sólido generado al girar alrededor de la recta $x = 2$ la región acotada por la recta $y = 2x + 4$ y la paróbola $y = x^2 + 4$ usando el método del disco.
9. Hallar el volumen del sólido generado al girar alrededor del eje x la región acotada por la recta $y = 2x + 4$ y la parábola $y = x^2 + 4$

   a) Por el método del disco.

   b) Por el método de cascarones cilíndricos.

10. Hallar el volumen del sólido generado al girar alrededor de la recta $x = 2$ la región acotada por la recta $y = 2x + 4$ y la parábola $y = x^2 + 4$ usando el método de los cascarones cilíndricos.
11. Hallar las coordenadas del centroide de la región acotada por la recta $y = 2x + 4$ y la parábola $y = x^2 + 4$

    Nota: Considere la densidad constante en toda la región.
12. Calcule la longitud de curva de la función $y = x^{3/2}$ desde el punto $(1, 1)$ hasta $(4, 8)$.
13. Calcule el área que se encuentra entre las curvas $y = x^2 - 4x + 3$ y $y = -x^2 + 2x + 3$.
14. Calcular el área de la región acotada por $f(x) = |x^2 - 1|$ y $g(x) = x + 1$.
15. Calcular el volumen del sólido generado al rotar alrededor del eje y el área encerrada por las curvas $h(x) = |x - 2|$ y $g(x) = \sqrt{x}$.
16. Calcular el área entre las curvas $y = 2x^2$ y $y = x^2 + 1$
17. Hallar el volumen del sólido del paraboloide obtenido al rotar alrededor del eje y la región encerrada por la par"abola $y = x^2$ y la recta $y = 5$
18. Encuentre el centroide de la región limitada por las curva $y = 2x^3$ y la recta $y = 2x$ en el primer cuadrante.
19. Determine la longitud de curva de $y = \dfrac{2}{3}(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$, de $x = 0$ a $x = 2$
20. Considere el arco de la curva limitado por: $y = x^5/10 + 1/(6x^3)$ en $[1, 2]$

a) Calcule la longitud del arco de curva correspondiente.

b) Exprese la integral (NO LA CALCULE) que mide el área superficial cuando el arco de curva plana gira alrededor del eje x (simplifique totalmente).

21. Haga un bosquejo y calcule el área de la región acotada por las gráficas de:

   a) $y = 3 - \frac{1}{3}x^2, \quad y = 0,$ entre $x = 0$ y $x = 3$ Rta:6

   b) $y = (x-3)(x-1), \quad y = x,$ Rta: $\frac{13\sqrt{13}}{6}$

   c) $x = -6y^2 + 4y, \quad x + 3y - 2 = 0,$ Rta: $\frac{1}{256}$

   d) $x = y^2 - 2, \quad x = e^y,$ entre $y = -1$ y $y = 1$
   Rta: $e - \frac{1}{e}$

   e) $y = \tan x, \quad y = 2\operatorname{sen} x, \quad -\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}$
   Rta: $2 - 2\ln 2$

22. Use la integral definida para encontrar el área de un triángulo con vértices: $(0,0), \quad (2,1), \quad (-1,6)$ Rta: $\frac{13}{2}$

23. Encuentre un número b tal que la recta de ecuación $y = b$ divide la región acotada por las curvas $y = x^2$ y $y = 4$ en dos regiones con igual área. Rta: $4^{2/3}$

24. Encuentre los valores de c tal que el área de la región acotada por las paábolas $y = x^2 - c^2$ y $y = c^2 - x^2$ es 576.
Rta: ± 6

25. Bosqueje el sólido S, una sección representativa (disco, arandela, etc) y encuentre el volumen de S, que es obtenido al girar la región acotada por las curvas dadas alrededor de la respectiva recta :

   a) $y = x^3, \quad y = x, \quad x \geq 0;$ el torno al eje x Rta: $4\pi/21$

   b) $x = y^2, \quad x = 1,$ en torno a $x = 1$ Rta: $16\pi/15$

   c) $y = x, \quad y = \sqrt{x},$ en torno a $y = 1$ Rta: $\pi/6$

   d) $y = 1/x, \quad x = 1, \quad x = 2, \quad y = 0$ en torno al eje x Rta: $\pi/2$

   e) $y = 1 + \sec x, \quad y = 3;$ en torno a $y = 1$
   Rta: $2\pi(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3})$

26. Encuentre el volumen del sólido S que se genera al hacer girar en torno al eje x la región acotada por la mitad de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Rta: $\frac{4}{3}ab^2\pi$

27. La base de un sólido S es la región interior del círculo
$x^2 + y^2 = 4$. Encuentre el volumen del sólido si cada sección perpendicular al eje x es un cuadrado. Rta: $128/3$

28. La base de un sólido S es una región elíptica acotada por
$9x^2 + 4y^2 = 36$. Encuentre el volumen del sólido si cada sección perpendicular al eje x es un triángulo rectángulo isósceles con la hipotenusa en la base. Rta: 24

29. La base de un sólido S es la región triangular con vértices $(0,0), \quad (1,0), \quad (0,1)$. Encuentre el volumen del sólido si cada sección perpendicular al eje x es un cuadrado. Rta: $1/3$

30. La base de un sólido S está acotada por un arco de
$y = \sqrt{\cos x} \quad -\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ y el eje x. Encuentre el volumen del sólido si cada sección perpendicular al eje x es un cuadrado. Rta: 2

31. Use el método de las capas cilíndricas para encontrar el
volumen del sólido S generado al girar la región acotada por las curvas dadas en torno a la respectiva recta:

   a) $y = 1/x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2,$ en torno al eje y Rta: 2π

   b) $y = e^{-x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1,$ en torno al
   eje y Rta: $\pi(1 - 1/e)$

   c) $y = x^3, \quad y = 8, \quad x = 0,$ en torno al eje x
   Rta: $768\pi/7$

d) $x = 1 + (y-2)^2, \quad x = 2, \quad$ en torno al eje x
Rta: $768\pi/7$

e) $y = x^4, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad$ en torno a la recta $x = 2$
Rta: $7\pi/15$

f) $y = \sqrt{x}, \quad x = 5, \quad y = 0, \quad$ en torno a la recta $x = 5$
Rta: $\frac{40\sqrt{5}}{3}\pi$

g) $x = y^2, \quad y = 2, \quad x = 0, \quad y = 0$; en torno a la recta $y = 3$ Rta: $8\pi/3$

32. Encuentre el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región Q acotada por las curvas $x = \sqrt{y}$ y $x = y^3/32$ alrededor del eje x. Rta: $64\pi/5$

33. Se perfora un agujero cilíndrico de radio a, cuyo centro pasa por el centro de una esfera sólida de radio b (con $b > a$). Encuentre el volumen del sólido S que queda.
Rta: $\frac{4\pi}{3}(b^2 - a^2)^{3/2}$

34. Encuentre el volumen del sólido que se genera al hacer girar la región Q acotada por las curvas $y = \operatorname{sen} x^2, \quad y = \cos x^2$, $x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad$ en torno al eje y Rta: $\pi(\sqrt{2} - 1)$

35. Sea Q la región acotada por $y = x^2$ y $y = x$. Encuentre el volumen del sólido que resulta cuando Q se hace girar alrededor de:

a) el eje x; Rta: $2\pi/15$

b) el eje y; Rta: $\pi/6$

c) la recta $y = x$; Rta: $\pi/60$

36. Encuentre la longitud de arco de:

a) $y = (4 - x^{2/3})^{3/2}, \quad$ entre $x = 1$ y $y = -2$ Rta: $\frac{595}{144}$

b) $x = y^4/16 + 1/2y^2, \quad$ entre $y = -3$ y $x = 8$ Rta: 9

c) $y = \int_1^x \sqrt{u^3 - 1}\, du, \quad 1 \leq x \leq 2$ Rta: $\frac{2}{5}(4\sqrt{2} - 1)$

d) $y = 1 + 6x^{3/2}, \quad 0 \leq x \leq 1$ Rta: $\frac{2}{243}(82\sqrt{82} - 1)$

e) $x = \frac{1}{3}\sqrt{y}(y - 3), \quad 1 \leq y \leq 9$ Rta: $\frac{32}{3}$

f) $y = \ln \sec x, \quad 0 \leq x \leq \pi/4$ Rta: $\ln(\sqrt{2} + 1)$

EXITOS