	Universidad de Antioquia Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Instituto de Matemáticas Cursos de Servicios programas virtuales Ingeniería	Álgebra Lineal Taller-Parcial 3

1. En las siguientes afirmaciones marque **F** si es falso o **V** si es verdadero, **justifique**.

   a) Toda función entre dos espacios vectoriales que envie el cero en el cero es transformación lineal.

   b) Todo par de espacios vectoriales isomorfos deben tener una base en común.

   c) Si T es una transformación lineal inyectiva entre espacios de dimensión finita entonces T es un isomorfismo.

   d) Todo espacio vectorial de dimensión n es isomorfo a R^n.

   e) Toda transformación lineal inyectiva es sobreyectiva.

   f) Dos espacios vectoriales isomorfos pueden tener dimensiones distintas.

   g) Si la matriz de una transformación lineal entre dos espacios vectoriales de dimesión finita es invertible entonces la transformación lineal es un isomorfismo.

   h) Toda transformación lineal mapea el cero en el cero.

   i) Si $T : V \longrightarrow W$ es transformación lineal no inyectiva entonces $dim(V) > dim(W)$.

   j) Si $S, T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, S es un isomorfismo y T es una isometría, entonces $S \circ T$ es una isometría.

   k) Si $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal y $T(1, 2, 1) = (0, 0)$, $T(2, 1, 5) = (0, 0)$ entonces $T(2, 4, 5) \neq (0, 0)$.

   l) Si $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal y $T(1, 1) = (2, 3)$, $T(2, 3) = (2, -2)$ entonces T es un isomorfismo.

   m) Sea $T : M_{nxn} \to M_{nxn}$ definida por $T(A) = AB - BA$ donde B es una matriz de nxn fija. entonces T es lineal.

   n) Sea $T : M_{2x2} \to \mathbb{R}$ definida por: $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb$. entonces T es lineal.

   ñ) Todo isomorfismo es una isometría.

   o) Sea $T : V \to V$ una transformación lineal con $dim(V) = n$, S_n la base canónica para V y B una base diferente a S_n. C_T y A_T las matrices asociadas a la transformación lineal en las bases S_n y B respectivamente. Entonces C_T no es semejante A_T.

2. Encuentre la representación matricial con respecto a las bases canonicas de las siguientes transformaciones lineales y determine si es inyectiva, sobreyectiva o un isomorfismo.

   a) $T : P_4 \Rightarrow P_3$ $T(p(x)) = p'(x)$

   b) $T : P_4 \Rightarrow P_3$ $T(p(x)) = p'(x) + p''(x)$

   c) $T : P_4 \Rightarrow P_4$ $T(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4) = ex^4 + cx^2 + a$

3. Determine si la función dada de es una transformación lineal.

   a) $T : \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}^2$ $T(x, y, z) = (x^2 - y, 3y)$

   b) $T : \mathbb{R}^4 \Rightarrow \mathbb{R}^2$ $T(x, y, z, w) = (x - e^w - 2y, y - \cos(x + 3z))$

4. Encuentre el nucleo, la imagen, rango y nulidad de las siguientes transformaciones lineales

   a) $T : \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}^2$ $T(x, y, z) = (3z - x + y, y - 3z + 3x)$

   b) $T : \mathbb{R}^4 \Rightarrow \mathbb{R}^2$ $T(x, y, z, w) = (x + z, y + w)$

5. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $T\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calcular $T\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

6. Considere la transformación lineal $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Hallar la imagen debida a T del paralelogramo que une los puntos $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$ y $(2, 2)$.

7. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ -x + z \end{pmatrix}$. Considere las bases $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ y $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Determinar la matriz de T respecto a las bases B_1 y B_2. Calcular $T\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ usando dicha matriz.

8. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y+2z\\3x+2y+z\end{pmatrix}$.

   a) Hallar nu T, imagen T, $\nu(T)$ y $\rho(T)$
   b) Determinar si T es inyectiva y determinar si T es sobreyectiva.

9. Sea V el espacio vectorial de las matrices simétricas de orden 2×2. Demostrar que V es isomorfo a $\mathbb{R}^3$, exhibiendo un isomorfismo entre estos dos espacios.

10. Considere la transformación lineal definida como $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, donde θ en un ángulo fijo.

    a) Demostrar que T es una isometría.
    b) Para el valor específico $\theta=30°$, graficar los vectores $X=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ y $T(X)$. Recuerde que $\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\operatorname{sen} 30°=\frac{1}{2}$.

11. Determine si la función dada es una transformación lineal.

    a) $T:\mathbb{R}^3\Rightarrow\mathbb{R}^2$ $T(x,y,z)=(x^2,y)$
    b) $T:\mathbb{R}^4\Rightarrow\mathbb{R}^2$ $T(x,y)=(x+y,y-w)$

12. Encuentre el nucleo, la imagen, rango y nulidad de las siguientes transformaciones lineales

    a) $T:\mathbb{R}^3\Rightarrow\mathbb{R}^2$ $T(x,y,z)=(z,y)$
    b) $T:\mathbb{R}^4\Rightarrow\mathbb{R}^2$ $T(x,y,z,w)=(x+z,y+w)$

13. Pruebe las siguientes afirmaciones

    a) Si V,W son dos espacios de dimension finita tal que $\dim V=\dim W$ entonces W es isomorfo a W
    b) Si V,W son dos espacios de dimension finita y $T:V\Rightarrow W$ es una transformacion lineal tal que el nucleo de T es igual a la imagen de T, entonces $\dim V$ es par.

14. Sea $T:M_{nxn}\to M_{nxn}$ definida por $T(A)=A^T+A$.

    i) Demostrar que T es una transformación lineal.

    ii) Calcular el núcleo y la imagen.

15. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ una transformación lineal definida por:

    $T(x,y,z)=(x+y,x+3y-z)$ y sean B_1 y B_2 las bases estándar de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente.

    $B_1'=\{(1,1,0),(0,1,0),(-1,1,1)\}$ y $B_2'=\{(-1,1),(1,2)\}$ bases para $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Determine La matriz asociada a la transformación lineal T respecto a:

    a) B_1 y B_2.

    b) B_1' y B_2'.

16. Sea $\mathbb{P}_2$ es el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a 2 y $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{P}_2$, una transformación definida por:
    $T(a,b,c)=a-b+(b-c)x+(a+b+c)x^2$. Demuestre:

    a) T es una transformación lineal.

    b) T es un isomorfismo.

    c) Determine T^{-1}.

17. Sea $T:M_{nxn}\to M_{nxn}$ definida por $T(A)=A^T+A$.

    i) Demostrar que T es una transformación lineal.

    ii) Calcular el núcleo y la imagen.

18. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ una transformación lineal definida por

    $T(x,y,z)=(x+y,y-z)$ y $B_1=\{(1,1,0),(0,1,0),(-1,1,1)\}$ y $B_2=\{(-1,1),(1,2)\}$ bases para $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Determine La matriz asociada a la transformación lineal T respecto a:

    a) B_1 y B_2.

19. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ una transformación definida por:
    $T(x,y,z)=(2x+4y-6z,5y-2z,9z)$. Demuestre:

    a) T es una transformación lineal.

    b) T es un isomorfismo.