1. Responda si los siguientes enunciados son falsos o verdaderos, justificando su respuesta.

   a) $\int f(x)g(x)dx = \int f(x)dx \int g(x)dx$

   b) $\int \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}dx = f(x)g(x) + C$

   c) $\int xdt = \frac{x^2}{2} + C$

   d) $\int \ln x dx = \frac{1}{x} + C$

   e) Solo se pueden resolver integrales de funciones racionales donde el grado del numerador es menor que el del denominador.

2. Calcule la siguiente integral

$$\int x2^{x^2+1}dx$$

3. Utilice integración por partes para calcular las integrales

$$\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$$

$$\int \ln^2 x dx$$

4. Utilice fracciones parciales para calcular la integral

$$\int \frac{1}{(x-2)\sqrt{x+2}}dx$$

5. Calcule la integral

$$\int e^{5x}\cos 2x dx$$

6. Una pelota se lanza verticalmente hacia arriba desde el suelo con una velocidad inicial de $15m/s$. ¿Cuanto tiempo le tomará llegar al suelo y con que velodidad caerá? ¿Durante cuanto tiempo estará subiendo y que tan alto llegará?.

7. Se lanza una pelota hacia arriba desde la superficie de la tierra con una velocidad inicial de $40m/s$ ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?

8. Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales encontrar la solución particular determinada por las condiciones iniciales que se dan.

   a) $\frac{dy}{dx} = 8x^3 + 5x - 2 \quad \text{cuando} \quad x = 0$

   b) $\frac{d^2y}{dx^2} = \sin(x) \quad \text{con} \quad y' = 1 \quad y \quad y = 6 \quad \text{para} \quad x = 0$

9. Calcule las siguientes integrales:

   a) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

   b) $\int x\cos(x^2)dx$

   c) Calcule $\int \frac{\ln 2x^2}{x^2}dx$

   d) $\int \frac{4\,\text{sen}\, t dt}{\sqrt{16+6\cos t - \cos^2 t}}$

   e) Calcule $\int \text{sen}^{1/2}(a\theta)\cos^3(a\theta)d\theta$, con $a \neq 0$

   f) $\int \frac{e^{\tan^{-1}x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx$

   g) $\int \tan^6 x \sec^2 x dx$

   h) Calcule $\int \text{sen}^{1/2}(a\theta)\cos^3(a\theta)d\theta$, con $a \neq 0$

   i) Calcule $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$

   j) $\int sen^2(x)cos^3(x)dx$

   k) Utilice sustitución trigonometrica para calcular la integral $\int \sqrt{4-9x^2}dx$

   l) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

   m) $\int \frac{1}{2+\cos(x)}dx$

   n) $\int e^x\cos(3x)dx$

   ñ) $\int \cos^{-1}(t)dt$ (Recuerde que : $\cos^{-1}(t) = arccos(t)$).

   o) $\int \frac{x^2-3x-1}{x(x^2+4)}dx$

   p) $\int tan^5(x)\sec^2(x)dx$

   q) $\int \sec^3(x)dx$

   r) $\int \cos^3(x)\,\text{sen}^3(x)dx$

   s) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx$

   t) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}dx$

   u) $\int \frac{1}{\sqrt{16-x^2}}dx$

10. Evalúe las integrales indefinidas usando las propiedades de linealidad (suma y multiplicación por escalar) y tenga en cuenta la tabla básica vista en clase para la evaluación directa de cada integral.
(**No olvide la constante de integración**)

    a) $\int \frac{x^2+4x-4}{\sqrt{x}}dx$

    b) $\int (\sec\theta + \tan\theta)^2 d\theta$,

c) $\int (\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^3\, dx$

11. Diga si es falsa o verdadera cada una de las siguientes igualdades y justifique brevemente su respuesta (**No evalúe la integral**)

a) $\int \frac{1}{e^{2x}+4}\, dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{8}\ln(e^{2x+4}) + C$

b) $\int x^3 \ln x\, dx = \frac{1}{4}x^4 \left(\ln x - \frac{1}{4}\right) + C$

c) $\int e^{x^2}\, dx = e^{x^2} + C$

12. Evalúe la integral indefinida usando una (o varias) sustitución(es) adecuada(s) (Recuerde buscar el diferencial de la nueva variable en la integral para que tenga éxito)

a) $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\, dx$

b) $\int w^5 \sqrt{w^3+1}\, dw$

c) $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

d) $\int \frac{\cos(\ln(4x^2))}{x}\, dx$

e) $\int \frac{(r^{1/3}+2)^4}{\sqrt[3]{r^2}}\, dr$

f) $\int \sqrt{t}\sqrt{1+t\sqrt{t}}\, dt$

g) $\int \frac{x\cos\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}\, dx$

h) $\int \frac{t^2\cos(t^3-2)}{[\operatorname{sen}(t^3-2)]^2}\, dt$

i) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}}\, dx$ (Reto!)

j) $\int \frac{1}{1+e^x}\, dx$ (Reto!)

13. Usando primero una sustitución adecuada, resuelva las integrales trigonométricas de potencias de seno y coseno

a) $\int x\operatorname{sen}(x^2)\cos(x^2)\, dx$

b) $\int \frac{1}{x}\operatorname{sen}^3(\ln x)\cos(\ln x)\, dx$

c) $\int \sqrt[5]{\operatorname{sen}^2(3x+2)}\cos^5(3x+2)\, dx$

d) $\int e^x \operatorname{sen}^2(e^x)\cos^4(e^x)\, dx$

14. Evalúe las siguientes integrales trigonométricas de potencias de secante y tangente:

a) $\int \sec^4 7x\, dx$

b) $\int \tan^5 3\theta\, d\theta$

c) $\int \sec^6 4z \tan^7 4z\, dz$

15. Evalúe las integrales usando una sustitución trigonométrica adecuada

a) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ (Evalúe esta integral con una sustitución directa (No trigonométrica) y compare sus respuestas)

b) $\int \frac{x^2}{(4+9x^2)^2}\, dx$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{16+6x-x^2}}$

d) $\int \frac{dx}{(x^2-4x)^{3/2}}$

e) $\int \sqrt{5-4x-x^2}\, dx$

f) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^4}}$ sug: haga primero $u = x^2$

16. Calcule las integrales por el método de integración por partes.
**Nota:** Puede que requiera usar algún método distinto antes de aplicar partes.

a) $\int x\operatorname{sen} x\cos x\, dx$

b) $\int e^t \sec^3(e^t-1)\, dt$

c) $\int (r^2+r+1)e^r\, dr$

d) $\int (x^4-3x+1)\ln x\, dx$

e) $\int e^{2x}\cos 3x\, dx$

f) $\int \ln(x+x^2)\, dx$

g) $\int x\tan^{-1} x\, dx$

h) $\int z(\ln z)^2\, dz$

i) $\int \operatorname{sen}(\ln x)\, dx$

j) $\int e^{\sqrt{3s+9}}\, ds$

k) $\int x^5\cos x\, dx$

17. **Fracciones parciales:** Calcule las siguientes integral usando el método de descomposición en fracciones parciales.

a) $\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$

b) $\int \frac{y^2+2y+1}{(y^2+1)^2}\, dy$

c) $\int \frac{2t+2}{(t^2+1)(t-1)^3}\, dt$

d) $\int \frac{1}{x^3-1}\, dx$

e) $\int \frac{3x^4}{x^3+1}\, dx$

*f*) $\displaystyle\int \frac{y^4+y^2-1}{y^3+y}\,dy$

*g*) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^6-1}\,dx$

Para las siguientes integrales, realice primero una sustitución conveniente

*h*) $\displaystyle\int \frac{e^t dt}{e^{2t}+3e^t+2}$

*i*) $\displaystyle\int \frac{\cos y\,dy}{\operatorname{sen}^2 y+\operatorname{sen} y-6}$

*j*) $\displaystyle\int \frac{(x-2)^2\tan^{-1}(2x)-12x^3-3x}{(4x^2+1)(x-2)^2}\,dx$

*k*) $\displaystyle\int \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx$ (Reto!)

18. **sustituciones diversas:**

*a*) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}\,dx$

*b*) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}\,dx$

Para las siguientes integrales, realice la sustitución $z=\tan\frac{x}{2}$

*c*) $\displaystyle\int \frac{dx}{4-5\operatorname{sen} x}$

*d*) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x-\cos x}$

*e*) $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{1-\cos x}$

19. **integración por dos métodos:**
(compare sus respuestas)

*a*) $\displaystyle\int \sec x\,dx$

**primer método:** use la sustitución $z=\tan\frac{x}{2}$
**segundo método:** escriba $\sec x$ en términos de $\cos x$, multiplique y divida por $\cos x$, use la identidad $\cos^2 x=1-\operatorname{sen}^2 x$ y haga una sustitución adecuada para luego realizar fracciones parciales

*b*) $\displaystyle\int \csc x\,dx$ (análogo al anterior)

*c*) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx$

**primer método:** use la sustitución $z=\tan\frac{x}{2}$
**segundo método:** multiplique y divida por $1-\cos x$

*d*) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen} x+\cos x}$

**primer método:** use la sustitución $z=\tan\frac{x}{2}$
**segundo método:** multiplique y divida por $(1+\operatorname{sen} x)-\cos x$

# Miscelánea de ejercicios

Identifique el(los) método(s) más adecuado(s) para evaluar la integral

1. $\displaystyle\int x\cos^2 x\,dx$
2. $\displaystyle\int x\sqrt{1-x}\,dx$
3. $\displaystyle\int \sqrt{z^2+1}\,dz$
4. $\displaystyle\int (\ln 2x)^2\,dx$
5. $\displaystyle\int \frac{2^{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}}\,dx$
6. $\displaystyle\int x\operatorname{sen}^{-1} x\,dx$
7. $\displaystyle\int (\operatorname{sen}^{-1} x)^2\,dx$
8. $\displaystyle\int xe^x\cos x\,dx$
9. $\displaystyle\int \frac{e^{\tan^{-1} x}}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$
10. $\displaystyle\int \frac{9dv}{81-v^4}$

Retos:

11. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{8-2x^2-x^4}}$
12. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1}{\theta^2}+\frac{1}{\theta^4}}\,d\theta$
13. $\displaystyle\int \frac{d\theta}{1-\tan^2\theta}$
14. $\displaystyle\int \frac{dt}{t-\sqrt{1-t^2}}$
15. $\displaystyle\int \frac{(2e^{2x}-e^x)\,dx}{\sqrt{3e^{2x}-6e^x-1}}$
16. $\displaystyle\int \ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})\,dx$
17. $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+4}\,dx$
(**sugerencia:** complete un trinomio cuadrado perfecto)
18. $\displaystyle\int \sqrt{\tan x}\,dx$
(**sugerencia:** está resuelto en el texto del profesor Jesús del Valle)

# Integrales de funciones trigonométricas hiperbólicas

Recuerde que $\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta=1$. Si se hace $x=\cos\theta$ y $y=\operatorname{sen}\theta$, se sigue que las funciones trigonométricas satisfacen la ecuación del círculo unitario $x^2+y^2=1$ por esta razón, estas funciones trigonométricas se les llama funciones trigonométricas circulares.

Las funciones $\dfrac{e^\theta+e^{-\theta}}{2}$ y $\dfrac{e^\theta-e^{-\theta}}{2}$ aparecen con mucha frecuencia en aplicaciones a la ingeniería y se les ha dado un nombre especial de acuerdo a sus propiedades y semejanzas con las funciones trigonométricas coseno y seno. Veamos:

Es fácil ver que la derivada de la primera función es la segunda y viceversa (algo muy similar a lo que ocurre con las funciones coseno y seno). También es fácil ver que $\left(\dfrac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}\right)^2 = 1$ (verifícalo!)

Si hacemos $x = \dfrac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$ y $y = \dfrac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}$, se sigue que estas funciones satisfacen la ecuación de la hipérbola unitaria $x^2 - y^2 = 1$, por estas razones a estas funciones se les llama funciones trigonométricas hiperbólicas y se simbolizan por:

$$\cosh\theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$$

$$\operatorname{senh}\theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}$$

Nótese que de lo anterior se tiene la "identidad"

$$\cosh^2\theta - \operatorname{senh}^2\theta = 1$$

A continuación se definen, por analogía con las funciones trigonométricas, las restantes funciones trigonométricas hiperbólicas:

$$\tanh\theta = \frac{\operatorname{senh}\theta}{\cosh\theta} \qquad \coth\theta = \frac{\cosh\theta}{\operatorname{senh}\theta}$$

$$\operatorname{sech}\theta = \frac{1}{\cosh\theta} \qquad \operatorname{csch}\theta = \frac{1}{\operatorname{senh}\theta}$$

De acuerdo a las definiciones anteriores se puede verificar las siguientes "identidades hiperbólicas"(hacerlo!)

$$\left.\begin{aligned} \cosh^2\theta &= 1 + \operatorname{senh}^2\theta \\ \operatorname{sech}^2\theta &= 1 - \tanh^2\theta \\ \operatorname{csch}^2\theta &= \coth^2\theta - 1 \end{aligned}\right\} \text{ Pitagóricas}$$

$$\left.\begin{aligned} \cosh 2\theta &= \cosh^2\theta + \operatorname{senh}^2\theta \\ \operatorname{senh} 2\theta &= 2\operatorname{senh}\theta\cosh\theta \end{aligned}\right\} \text{ Argumento duplo}$$

$$\left.\begin{aligned} \cosh^2\theta &= \frac{\cosh 2\theta + 1}{2} \\ \operatorname{senh}^2\theta &= \frac{\cosh 2\theta - 1}{2} \end{aligned}\right\} \text{ Disminución de potencia}$$

**T**ABLA DE DERIVADAS

$$\boxed{\begin{aligned} &\tfrac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x \\ &\tfrac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x \\ &\tfrac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x \\ &\tfrac{d}{dx}\coth x = -\operatorname{csch}^2 x \\ &\tfrac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x\tanh x \\ &\tfrac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x\coth x \end{aligned}}$$

**T**ABLA DE INTEGRALES

$$\boxed{\begin{aligned} &\textstyle\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C \\ &\textstyle\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C \\ &\textstyle\int sech^2 x\,dx = tanhx + C \\ &\textstyle\int csch^2 x\,dx = -cothx + C \\ &\textstyle\int sechx\tanh x\,dx = -sechx + C \\ &\textstyle\int cschx\coth x\,dx = -cschx + C \end{aligned}}$$

Maneje un procedimiento similar al que se hizo con las integrales de las funciones trigonométricas para resolver las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int \operatorname{senh}^3 x\cosh x\,dx$
2. $\displaystyle\int \operatorname{senh}^2 x\cosh^2 x\,dx$
3. $\displaystyle\int sech^4 x\tanh^{3/2} x\,dx$
4. $\displaystyle\int sech^{7/3} x\tanh^3 x\,dx$
5. $\displaystyle\int \tanh^5 x\,dx$

Use una sustitución trigonométrica hiperbólica adecuada para resolver las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(4x^2-9)^{3/2}}\,dx$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}\,dx$

**EXITOS**