Universidad de Antioquia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas
Cursos de Servicios para Ingeniería

Materia: Álgebra Lineal	Código: 2552520	Grupo: 1	Parcial 1 (20 %)	**Nota**
Profesor: Alejandro Piedrahita H.			Fecha: 16/07/2019	
Estudiante:			Documento:	

La evaluación tiene una duración de 1 hora y 50 minutos. No está permitido sacar ningún tipo de documento durante el examen ni celulares. Realice los procedimientos de forma clara y ordenada. En los puntos 2 al 4 muestre el procedimiento.

1. $\boxed{25\,\%}$ Determine si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justifique brevemente sus respuestas.

   a) El conjunto $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x + 3\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$. (F)
   Justificación.
   El vector $(0,0) \notin H$, pues $2 \cdot 0 + 3 = 3 \neq 0$.

   b) Si $B = \{v_1, v_2\}$ es una base para un espacio vectorial V, entonces $B' = \{v_1, v_1 + v_2\}$ también es una base para V. (V)
   Justificación.
   Como B es base, $\dim V = 2$. Por otra parte
   $c_1 v_1 + c_2(v_1 + v_2) = \vec{0} \Rightarrow (c_1 + c_2)v_1 + c_2 v_2 = \vec{0} \Rightarrow c_1 + c_2 = 0,\ c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0.$
   Luego B' es LI y como $\dim V = 2$, B' genera a V y es base.

   c) Si H_1 y H_2 son subespacios de $\mathbb{R}^2$, entonces $H_1 \cup H_2$ es subespacio de $\mathbb{R}^2$. (F)
   Justificación.
   Por ejemplo si $H_1 = \{(x,y) : y = x\}$ y $H_2 = \{(x,y) : y = -x\}$, entonces $v_1 = (1,1) \in H_1$ y $v_2 = (-1,1) \in H_2$, pero $v_1 + v_2 = (0,2) \notin H_1 \cup H_2$.

   d) Sean u, v y w vectores en $\mathbb{R}^2$. Si $\{u, v\}$ genera a $\mathbb{R}^2$, entonces $\{u, v, w\}$ también genera a $\mathbb{R}^2$. (V)
   Justificación.
   Si $\{u,v\}$ genera a $\mathbb{R}^2$, entonces para todo $x \in \mathbb{R}^2$ existen escalares c_1 y c_2 tales que $x = c_1 u + c_2 v = c_1 u + c_2 v + 0w$.

   e) El conjunto de polinomios $\{x + 1, x^2 - 3\}$ es una base para $\mathbb{P}_2$. (F)
   Justificación.
   $\dim \mathbb{P}_2 = 2 + 1 = 3$ y por tanto dos vectores no pueden ser base para $\mathbb{P}_2$.

2. $\boxed{24\,\%}$ Determine en cada caso si el conjunto dado es un espacio vectorial.

a) $\boxed{12\,\%}$ El conjunto de todas las matrices 2×2 de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{donde} \quad ad = 0,$$

con la suma matricial y multiplicación por escalar usuales.

Solución.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pertenecen al conjunto, sin embargo

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

no pertenece, pues $1 \cdot 1 \neq 0$. Luego el conjunto no es cerrado para la suma y por tanto no es espacio vectorial.

b) $\boxed{12\,\%}$ $\mathbb{R}^2$ con la suma usual pero con la multiplicación por escalar definida por

$$c \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx \\ y \end{pmatrix}.$$

Solución.

La operación suma satisface los axiomas de espacio vectorial, sin embargo el producto por escalar no:

$$0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. $\boxed{25\,\%}$ Considere en $\mathbb{R}^3$ los vectores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

a) $\boxed{20\,\%}$ Halle el espacio generado por $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Solución.

$(x,y,z) \in \text{gen}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ si y solo si existen escalares c_1, c_2 y c_3 tales que

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Resolvemos entonces el sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 & x \\ 0 & 1 & 1 & 3 & y \\ 1 & 2 & 1 & 5 & z \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \rightleftarrows R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & z \\ 0 & 1 & 1 & 3 & y \\ 2 & 3 & 1 & 7 & x \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 - 2R_1 \to R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & z \\ 0 & 1 & 1 & 3 & y \\ 0 & -1 & -1 & -3 & x-2z \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 + R_3 \to R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 5 & z \\ 0 & 1 & 1 & 3 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x+y-2z \end{array}\right)$$

El sistema $(*)$ tiene solución únicamente si $x+y-2z=0$.

El espacio generado es entonces el plano $x+y-2z=0$.

b) $\boxed{5\,\%}$ Determine si el vector $v = (1,2,3)$ pertenece a $\text{gen}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Solución.

$v = (1,2,3) \notin \text{gen}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, pues

$$1 + 2 - 2 \cdot 3 = 3 - 6 = -3 \neq 0.$$

4. $\boxed{26\,\%}$ Considere el conjunto

$$H = \{p(x) \in \mathbb{P}_1 : p(2) = 0\}$$

a) $\boxed{16\,\%}$ Muestre que H es subespacio de $\mathbb{P}_1$

Solución.

$p(x) = ax+b$ pertenece a H si y sólo si

$$p(2) = a\cdot 2^2 + 2b = 4a+2b = 0,$$

es decir, $2a+b=0$.

$p(x) = 0x+0$ pertenece a H, ya que $2\cdot 0+0=0$.

Veamos que H es cerrado bajo la suma: sean

$$p(x) = a_1x+b_1 \quad \text{y} \quad q(x) = a_2x+b_2$$

polinomios en H. Entonces $2a_1+b_1=0$, $2a_2+b_2=0$

y
$$(p+q)(x) = p(x)+q(x) = (a_1+a_2)x + (b_1+b_2)$$

con
$$2(a_1+a_2) + (b_1+b_2) = 2a_1+b_1 + 2a_2+b_2 = 0,$$

luego $p+q \in H$. De manera análoga, si $p(x) = ax+b \in H$, $2a+b=0$ y $(\alpha p)(x) = \alpha p(x) = \alpha a x + \alpha b$, con $2(\alpha a)+\alpha b = \alpha(2a+b) = 0$ y por tanto $\alpha p \in H$. Como H es un subconjunto no vacío de $\mathbb{P}_1$, cerrado para la suma y el producto por escalar, concluimos que H es subespacio de $\mathbb{P}_1$.

b) $\boxed{10\,\%}$ Halla una base y la dimensión de H.

Solución.

$$\begin{aligned} p(x) = ax+b \in H &\iff 2a+b=0 \\ &\iff b = -2a \\ &\iff p(x) = ax-2a \\ &\iff p(x) = a(x-2) \end{aligned}$$

Luego $H = \text{gen}\{x-2\}$ y como $\{x-2\}$ es LI, $B = \{x-2\}$ es base para H y $\dim H = 1$.