Ejercicios

Módulo 13

1. Sea $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como $T(x, y) = (x-2y,\ x+2y)$. Sean B_1 la base estándar de $\mathbb{R}^2$ y $B_2 = \{(1,-1),\ (0,1)\}$. Determine la matriz que representa a T con respecto a:

   a. B_1
   b. B_1 y B_2
   c. B_2 y B_1
   d. B_2
   e. Calcule $T(2,-1)$ empleando la definición de T y las matrices obtenidas en *a, b, c* y *d*.

2. Sea $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida como $T(x, y, z) = (x+2y+z,\ 2x-y,\ 2y+z)$. Sea B_1 la base natural para $\mathbb{R}^3$ y $B_2 = \{(1,\ 0,\ 1),\ (0,\ 1,\ 1),\ (0,\ 0,\ 1)\}$ otra base para $\mathbb{R}^3$. Determine la matriz de T con respecto a:

   a. B_1
   b. B_1 y B_2
   c. B_2 y B_1
   d. B_2
   e. Calcule $T(1,\ 1,\ -2)$ empleando la definición de T y las matrices obtenidas en *a, b, c, d*.

3. Sea $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida como $T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ y-z \end{bmatrix}$. Sean B_1 y B_2 las bases naturales de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente; además, sean $B_1'\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ y $B_2'\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ bases para $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Determine la matriz de T con respecto a:

   a. B_1 y B_2
   b. B_1' y B_2'
   c. Calcule $T\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ utilizando la definición de T y las matrices obtenidas en *a* y *b*.

4. Sea $T:\mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_2$ definida por $T(p(x)) = xp(x) + p(0)$.

Sean $B_1 = \{1,\ x\}$ y $B_1' = \{1+x,\ -1+x\}$ bases para $\mathbb{P}_1$.

Sean $B_2 = \{1,\ x,\ x^2\}$ y $B_2' = \{1+x^2,\ -1+x,\ 1+x\}$ bases para $\mathbb{P}_2$.

Determine la matriz de T con respecto a:

a. B_1 y B_2

b. B_1' y B_2'

c. Determine $T(3-3x)$ utilizando la definición de T y las matrices obtenidas en *a* y *b*.

5. Sea $T:\mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_3$ definida por $T(p(x)) = x^2 p(x)$. Sean $B_1 = \{1,\ x\}$ y $B_1' = \{x,\ 1+\ x\}$ bases para $\mathbb{P}_1$. Sean $B_2 = \{1,\ x,\ x^2, x^3\}$ y $B_2' = \{1+x,\ \ x, -1+x^2,\ \ x^3\}$ bases para $\mathbb{P}_3$.

Determine la matriz de T con respecto a:

a. B_1 y B_2

b. B_1' y B_2'

6. Sea $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y sea $T: M_{22} \to M_{22}$ la transformación lineal definida por $T(A) = AC - CA$ para A en M_{22} . Sean $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ y $B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ bases para M_{22} . Determine la matriz de T con respecto a:

a. B_1

b. B_2

c. B_1 y B_2

d. B_2 y B_1

7. Sea $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz con respecto a las bases naturales para $\mathbb{R}^3$ es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine:

a. $T\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ b. $T\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$

8. Suponga que la matriz de $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ con respecto a las bases $B_1=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ y $B_2=\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\}$ es $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\-1&1&0\end{bmatrix}$,

donde $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{w}_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, $\mathbf{w}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$.

a. Calcule $(T(\mathbf{v}_1))_{B_2}$, $(T(\mathbf{v}_2))_{B_2}$, $(T(\mathbf{v}_3))_{B_2}$.

b. Calcule $T(\mathbf{v}_1)$, $T(\mathbf{v}_2)$ y $T(\mathbf{v}_3)$.

c. Calcule $T\begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}$.

d. Calcule $T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$.

9. Sea $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ una transformación lineal. Suponga que la matriz de T con respecto a la base $B_1=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$ es

$A=\begin{bmatrix}2&-3\\-1&4\end{bmatrix}$, donde $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$.

a. Calcule $[T(\mathbf{v}_1)]_{B_1}$ y $[T(\mathbf{v}_2)]_{B_1}$.

b. Calcule $T(\mathbf{v}_1)$ y $T(\mathbf{v}_2)$.

c. Calcule $T=\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$.

10. Sea $T:\mathbb{P}_1\to\mathbb{P}_2$ una transformación lineal. Suponga que la matriz de T con respecto a las bases $B_1=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$ y

$B_2=\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3\}$ es $A=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\\-1&-2\end{bmatrix}$, donde $\mathbf{v}_1=1+x$, $\mathbf{v}_2=-1+x$, $\mathbf{w}_1=1+x^2$, $\mathbf{w}_2=x$, $\mathbf{w}_3=-1+x$.

a. Calcule $[T(\mathbf{v}_1)]_{B_2}$ y $[T(\mathbf{v}_2)]_{B_2}$.

b. Calcule $T(\mathbf{v}_1)$ y $T(\mathbf{v}_2)$.

c. Calcule $T(1+2x)$.

d. Calcule $T(b+ax)$.

11. En las transformaciones lineales definidas en los ejercicios 1, 3, 5 y 7 describa su núcleo y su imagen por medio de alguna de sus matrices asociadas.

12. Demuestre las partes *c* y *f* del teorema 6.

13. Se dan parejas de matrices *A* y *B*. En cada caso muéstrese que *A* y *B* no son similares.

a. $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}.$

b. $A=\begin{bmatrix}9 & 3 & 7\\ 0 & 5 & 6\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}.$

c. $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}.$