Ejercicios

Módulo 11

En los ejercicios 1 a 4 determine cuáles de las siguientes transformaciones $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son lineales.

1. $T(x,y)=3x+y.$
2. $T(x,y)=x^2-y.$
3. $T(x,y)=y.$
4. $T(x,y)=2.$

En los ejercicios 5 a 8 determine cuáles de las siguientes transformaciones $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ son lineales.

5. $T(x,y)=(x,0).$
6. $T(x,y)=(1,y).$
7. $T(x,y)=(x^2,y^2).$
8. $T(x,y)=(xy,\ x+y).$

En los ejercicios 9 a 11 determine cuáles de las siguientes transformaciones $T:\mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3$ son lineales.

9. $T(a_0+a_1x+a_2x^2)=a_0+a_1x^2+a_2x^3.$
10. $T(a_0+a_1x+a_2x^2)=(a_0+a_1)x-(2a_1+a_2)x^3.$
11. $T(a_0+a_1x+a_2x^2)=a_1a_2+3a_0a_2x^2-x^3.$

Determine si las transformaciones dadas en los ejercicios 12 a 20 son lineales.

12. $T:M_{22}\to\mathbb{R}$ dada por $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=ad-bc.$
13. $T:M_{22}\to\mathbb{R}$ dada por $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=a+b+c+d.$
14. $T:M_{nn}\to\mathbb{R}$ dada por $T(A)=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}.$
15. $T:M_{nn}\to\mathbb{R}$ dada por $T(A)=a_{11}\ a_{22}\ldots a_{nn}.$
16. $T:M_{nn}\to\mathbb{R}$ dada por $T(A)=\det A.$
17. $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ dada por $T(x_1,\ x_2,\ldots,x_n)=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n,$ con $a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n$ constantes dadas.

18. $T: C[0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $T(f(x)) = f(x-1)$.

19. $T: C[0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $T(f(x)) = f(x)+1$.

20. $T: C[0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $T(f) = f(1)$.

En los ejercicios 21 y 22 se describe geométricamente una transformación $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Defina analíticamente la transformación y muestre que es lineal.

21.

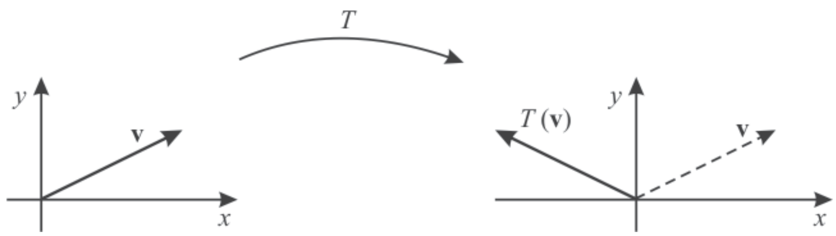

Figura 1 Figura 2

22.

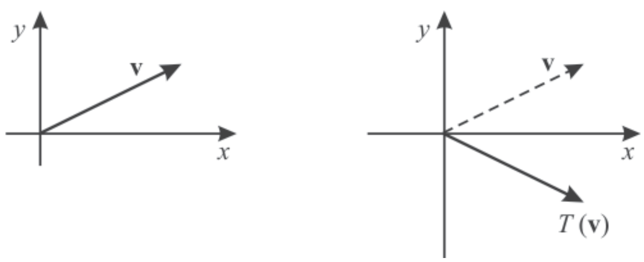

Figura 3 Figura 4

23. Sea B una matriz cuadrada de orden n. Considere la transformación $T: M_{n\times n} \to M_{n\times n}$ dada por $T(A) = AB - BA$ (B es una matriz fija de orden n). Demuestre que T es una transformación lineal.

24. Si $T: V \to W$ es una transformación lineal, demuestre que αT también es una transformación lineal de V en W.

25. Sean T_1 y T_2 transformaciones lineales de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dadas por $T_1(\mathbf{x}) = Ax$ y $T_2(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$. Determine:

   a. $(T_1 + T_2)(\mathbf{x})$.

   b. $(T_1 \circ T_2)(\mathbf{x})$.

26. Sean T_1 y T_2 transformaciones lineales de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ dadas por:

$$T_1\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y+z \\ x+y \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad T_2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+y \\ 2x-y-z \end{bmatrix}.$$

Calcule T_1+T_2, $4T_1$.

27. Sean $T_1:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-y+z \\ x+2z \end{bmatrix}$ y $T_2:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T_2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-4y \\ x-y \end{bmatrix}$.

Determine $(T_1 \circ T_2)$ y $(T_2 \circ T_1)$.