UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803	**Universidad de Antioquia** Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Instituto de Matemáticas Cursos de Servicios programas virtuales Ingeniería	Álgebra Lineal Taller-Parcial 2

1. Para cada una de las siguientes proposiciones determine si son Verdaderas o son Falsas. Justifique cada respuesta.
   - Si Q es una matriz ortogonal entonces $Q^2 = Id$.
   - $\sin(x)$ y $\cos x$ son ortogonales en $C[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ con el producto interno $(f,g) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(x)g(x)dx$.
   - Si H es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, entonces $H \cap H^{\perp} = 0$.
   - En $\mathbb{R}^2$ si $x = (x_1, y_1)$, $y = (x_2, y_2)$ entonces $(x,y) = x_1x_2 - y_1y_2$ es un producto interno para $\mathbb{R}^2$.
   - Si V es un espacio vectorial, entonces el conjunto $H = \{v \in V : \; v \notin V\}$ es un subespacio de V.
   - Si $\{u, v\}$ es base para un espacio vectorial V, entonces sin importar $x \in V$, se tiene $\{x+u, x+v\}$ también es base para V .
   - Un conjunto generador de $\mathbb{R}^3$ contiene solo vectores L.I.
   - Toda base de un espacio vectorial debe contener al vector cero $(\vec{0})$.
   - Si $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ son L.I. entonces $\{\vec{u}-\vec{v}, \vec{u}+\vec{v}\}$ también.
   - H es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ entonces $H \cap H^{\perp} = \{\overrightarrow{0}\}$.
   - Es posible encontrar una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ donde todos los vectores sean de un mismo plano.
   - Si A es una matriz de orden 4×5 donde $dim C_A = 2$ podemos decir que la nulidad de A debe ser 3.
   - Para todo x, y en $\mathbb{R}^n$ se cumple que $\|x\| + \|y\| \leq \|x+y\|$.
   - Sea H un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y $v \in \mathbb{R}^n$. Si $proy_H(v) = 0$ entonces $v \in H^{\perp}$.
2. Dadas B_1 y B_2 bases para $\mathbb{R}^3$, calcular la matriz de transición de B_1 a B_2. Donde
$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
3. Sea H el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$Calcular una base ortonormal para H.
4. Sea $S = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, escribir el vector $(1, 2, -1)$ en está base.
5. Dados los puntos $(1, 4), (3, 7), (8, 5), (6, 9)$.
   - Determine la recta de mínimos cuadrados.
   - Determinar el polinomio cuadrático de mínimos cuadrados.
6. En $\mathbb{R}^2$, si $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ definamos la siguiente operación.
$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2$$
   Determine si $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es un producto interno en $\mathbb{R}^2$.
7. Considere el conjunto $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \; 2x = w \quad ; \quad y + z = 0 \right\}$ y $b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
   - Justifique brevemente por qué W es un subespacio. Encuentre el vector en W que está más cerca a b
   - Halle vectores p y q tal que $b = p + q$ con $p \in W$ y $q \in W^{\perp}$.
   - Encuentre una base para $W^{\perp}$.
8. Para la matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Halle bases para los subespacios $C_A,\ R_A,\ N_A$
- Comprobar el teorema del rango para la matriz A

9. Si $\beta = \{1-x; 1+x\}$ es base para $\mathcal{P}_1$ y $q(x) \in \mathcal{P}_1$ tal que $[q(x)]_\beta = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/3 \end{bmatrix}$

   - Si $\mathcal{P}_{\varepsilon \longleftarrow \beta} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ para cierta base ε de $\mathcal{P}_1$, encuentre los elementos que forman a ε.
   - Escriba a $q(x)$ como combinación lineal de los vectores de ε utilizando la parte anterior

10. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que si $\|x\|^2 = \|y\|^2$ entonces $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

11. En los numerales (a) y (b) determine si H es subespacio del espacio vectorial V.

    - $V = \mathbb{M}_{2\times 2}$, y $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2x2} : ab - cd \geq 0 \right\}$
    - $V = \mathbb{P}_2(x),\ H = \{A \in M_{2x2} :\ A^T + A = 0\}$.

12. Para que valores de α los vectores $u = (1,2,1)$, $v = (2\alpha, 3, -1)$ y $w = (4, 7, \alpha)$ son L.I. ?

13. Determine si $\{-2x, x+3x^2, x+2\}$ forma una base para P_2. En caso afirmativo encuentre las coordenadas con respecto a esa base de $p(x) = x^2 + 3x - 5$

14. En $\mathbb{R}^2$ suponga que $(x)_{\beta_1} = (1,-3)$, $\beta_1 = \{(2,1),(2,0)\}$. Escriba x en terminos de la base $\beta_2 = \{(0,3),(5,-1)\}$.

15. Utilice las coordenadas en una base adecuada para verificar si los siguientes conjuntos son linealmente independientes.

    a) En P_2 $x - 4x^2$, $1 + 2x$, $4 + x + 2x^2$

    b) En P_3 $x^3 - 1$, $x + 1$, $x^2 + 4x - 2$, $2x^2 + 5$

16. Encuentre el rango y la nulidad de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

17. Encuentre una base ortonormal para el subespacio $H = \{(x,y,z) \mid x - 3y + z = 0\}$

18. Demuestre que si Q es una matriz ortogonal entonces $\det Q = \pm 1$

19. Sea A la matriz definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

    Calcular el espacio fila asociado a la matriz, el espacio columna asociado a la matriz, el rango de la matriz y la nulidad de la matriz.

20. Dadas B_1 y B_2 bases para $\mathbb{R}^3$, calcular la matriz de cambio de base de B_1 para B_2. Donde

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

21. Sea H el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ definido por $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + 3y - z = 0\}$ Calcular una base ortonormal para H.

22. Sea $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, escribir el vector $V = (1,2,-1)$ en está base.

23. Dados los puntos $(1,4), (3,7), (8,5), (6,9)$.

    a) Determine la recta de mínimos cuadrados.

    b) Determinar el polinomio cuadrático de mínimos cuadrados.

24. En $\mathbb{R}^2$, si $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ definamos la siguiente operación.

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1$$

    Determine si $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

25. En $\mathbb{R}^2$, si $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ y $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ definamos la siguiente operación.

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2$$

Determine si $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

26. En $\mathbb{R}^2$ suponga que $(x)_{\beta_1} = (2, -1)$, $\beta_1 = \{(1, 1), (2, 3)\}$. Escriba x en terminos de la base $\beta_2 = \{(0, 3), (5, -1)\}$.

27. Utilice las coordenadas en una base adecuada para verificar si los siguientes conjuntos son linealmente independientes.

   a) En P_2 $x + 4x^2$, $-2 + 2x$, $2 + x + 12x^2$
   b) En P_2 $x^2 + 1$, $x + 1$, $x^2 + 4$