Ejercicios

Módulo 4

En los ejercicios 1 a 4 muestre por inspección que los vectores son linealmente dependientes, LD.

1. $\mathbf{u}_1 = (2, 3), \quad \mathbf{u}_2 = (-4, -6)$, en $\mathbb{R}^2$.
2. $\mathbf{u}_1 = (5, 2, 3),\ \mathbf{u}_2 = (0, 3, -1),\ \mathbf{u}_3 = (-1, 4, 0),\ \mathbf{u}_4 = (5, 7, -2)$, en $\mathbb{R}^3$.
3. $P_1 = -1 + 4x, \quad P_2 = \dfrac{1}{2} - 2x$, en $\mathbb{P}_1$.
4. $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, en M_{22}.

En los ejercicios 5 a 11 determine si el conjunto de vectores dado es LI o LD.

5. $(2, -1, 3),\ (3, 4, 1),\ (2, -3, 4)$, en $\mathbb{R}^3$.
6. $(3, 1, 4, 1),\ (1, 1, 0, 0),\ (0, 0, 2, 2)$, en $\mathbb{R}^4$.
7. $(3, 0, 2, -2),\ (5, 0, 3, -1),\ (1, -2, 1, 1),\ (0, 4, -1, 1)$, en $\mathbb{R}^4$.
8. $P_1(x) = 1 + x + x^2, \quad P_2(x) = 2 - x + 3x^2, \quad P_3(x) = -1 + 5x - 3x^2$, en $\mathbb{P}_2$.
9. $P_1(x) = 1 + x, \quad P_2(x) = x^2 + x^3, \quad P_3(x) = -2 - 2x + 3x^2 + 3x^3$, en $\mathbb{P}_3$.
10. $A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, en M_{23}.
11. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, en M_{22}.
12. Si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es un conjunto LI, demuestre que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3\}$, $\{\mathbf{u}_1\}$, $\{\mathbf{u}_2\}$ son LI.
13. Justifique las proposiciones 1, 2, 3 de este módulo.
14. Construya argumentaciones para justificar los teoremas 2, 3 y 4.
15. Si $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es LI, pruebe que cualquier subconjunto no vacío de este conjunto es LI.
16. Si $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es LD, pruebe que $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{u}_{n+1}, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ también es LD.

17. Sea A una matriz cuadrada $n \times n$ cuyas columnas son los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$. Demuestre que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ son LI si y sólo si la forma escalonada reducida por renglones de A no contiene un renglón de ceros.

En los ejercicios 18 y 19 escriba la solución del sistema homogéneo dado en términos de uno o más vectores LI.

18. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 7x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 8x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

19. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

20. Demuestre que cualesquiera cuatro polinomios en $\mathbb{P}_2$ son LD.

21. Demuestre que cualesquiera $n+2$ polinomios en $\mathbb{P}_n$ son LD.

22. Demuestre que cualesquiera siete matrices en M_{32} son LD.

23. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ un conjunto LI.

    Demuestre que los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, ..., $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + ... + \mathbf{v}_n$ son LI.

24. Suponga que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k\}$ es un conjunto LI y que $\mathbf{v}_{k+1}$ no está en $\text{gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k\}$. Demuestre que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}\}$ es un conjunto LI.

25. ¿Para cuáles valores de α son LD los vectores $(-1, 0, -1)$, $(2, 1, 2)$ y $(1, 1, \alpha)$ en $\mathbb{R}^3$?

26. ¿Para cuáles valores de λ son LD los vectores $3 + x$ y $2 + \lambda^2 + 2x$ en $\mathbb{P}_1$?

27. Encuentre un conjunto de tres vectores LI en $\mathbb{R}^3$ que contenga los vectores $(1, 2, 4)$, $(-1, 0, 2)$.

28. Si $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son tres vectores coplanares en $\mathbb{R}^3$, demuestre que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ es un conjunto LD.