Universidad de Antioquia Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Instituto de Matemáticas Cursos de Servicios programas virtuales Ingeniería	Álgebra Lineal Taller-Parcial 4

1. En las siguientes afirmaciones marque **F** si es falso o **V** si es verdadero, **justifique**.

   a) ( ) La suma de dos matrices diagonalizables es diagonalizable.
   b) ( ) La forma canónica de Jordan de una matriz diagonalizable es una matriz diagonal.
   c) ( ) Es posible encontrar una matriz A invertible tal $D = P^{-1}AP$ con P invertible y D diagonal no invertible.
   d) ( ) Toda matriz simétrica es diagonalizable.
   e) ( ) Toda matriz invertible es diagonalizable.
   f) ( ) El producto de matrices diagonalizables es diagonalizable.
   g) ( ) Toda matriz que tenga a 0 como valor propio no es invertible.
   h) ( ) Una matriz simétrica diferente de cero puede tener todos sus valores propios iguales a cero.
   i) ( ) Si λ_1 es valor propio de A y λ_2 es valor propio de B entonces$\lambda_1\lambda_2$ es valor propio de AB.
   j) ( ) Si A es invertible y diagonalizable entonces A^{-1} es diagonalizable.
   k) ( ) Si $A_{2\times 2}$ no es diagonalizable entonces tiene un vector característico generalizado v.
   l) ( ) Si A es una matriz cuadrada de orden 3 con dos valores propios diferentes λ_1, λ_2 entonces A no es diagonalizable.
   m) ( ) Si A no es invertible entonces A no es diagonalizable.
   n) ( ) Podrá existir una matriz A_{3x3} con $P_A(\lambda) = -(\lambda+2)^2(\lambda-3)$ y $det(A) = -12$
   ñ) ( ) Toda matriz invertible es diagonalizable.
   o) ( ) $\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ es un vector propio de $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.
   p) ( ) Si λ_1 es un valor propio de A y λ_2 es valor propio de B, entonces $\lambda_1 + \lambda_2$ es un valor propio de $A + B$.
   q) ( ) Suponiendo que $J = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es la forma canónica de Jordan para cierta matriz A, podemos decir que A no es diagonalizable.

2. Considerar la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Hallar el polinomio característico de A.
   b) Hallar los valores propios de A.
   c) Hallar los espacios propios de A.
   d) Hallar una base y la dimensión de cada espacio propio.
   e) Hallar las multiplicidades algebraica y geométrica de cada valor propio.

3. Encuentre los valores propios de las siguientes matrices junto con sus multiplicidades algebraicas y geométricas

   a) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
   b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

4. Demuestre que si λ es un valor propio de A, entonces λ^3 es un valor propio de A^3.

5. Encuentre los valores propios de las siguientes matrices junto con sus multiplicidades algebraicas y geométricas

   a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$
   b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ calcular:

   a) Los valores característicos.

   b) Los vectores característicos.

   c) Los espacios característicos.

7. Demuestre que los valores propios de una matriz simétrica de orden 2 deben ser números reales.

8. Considere una matriz A_{2x2} con espacios propios dados por: $\mathcal{E}_1 = gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}$, $\mathcal{E}_4 = gen\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$. Encuentre una posible matriz A

9. Defina una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $Ker(T) = \{(x, y, z)|\ 2x - y + 3z = 0\}$, $Im(T) = gen\{(1, 0, 0)\}$.

10. Determine si la matriz A dada es diagonalizable en caso afirmativo encuentre las matrices C y D con D diagonal tal que $D = C^{-1}AC$.

    a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

    b) $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

    c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

    d) $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

    e) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

    f) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

11. Calcule A^{10} con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

12. Si el polinomio característico de A es $(\lambda - 2)(\lambda + 3)^3$. Escriba todas las posibles formas canónicas de A.

13. Demuestre que si A es invertible y diagonalizable entonces A^{-1} es invertible

14. Transforme la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en su forma canónica de Jordan.

15. Halle todos los valores y vectores propios de la siguiente matriz A, determine si es posible diagonalizar A.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

16. Defina todas las posibles matrices de Jordan de orden 2×2, 3×3 y 4×4.

17. Si A es una matriz con $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 3)^2$ determine todas las posibles formas de Jordan para A.

18. Identifique la grafica de la ecuación y escribala en su forma canónica.

$$5x^2 + 5y^2 - 6xy - 30\sqrt{2}x + 18\sqrt{2}y + 82 = 0$$

19. Escriba las formas cuadráticas en términos de las nuevas variables x', y' y z', de manera que no estén presentes los términos de productos cruzados.

    a) $x^2 - 2xy + y^2 - 2xz - 2yz + z^2$

b) $x^2 + xy + y^2 + 3xy + z^2$

20. Represente la forma cuadrática $2x^2 + 5xy - 9y^2$ como $X^T RX$ donde R es una matriz simétrica.

21. Identificar la cónica dada por la ecuación $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 6 = 0$ y hacer su gráfica.

22. Identifique y grafique la cónica dada por la ecuación $3x^2 - 4xy + 5y^2 = 1$

23. Cada año 1/10 de la gente de Estados Unidos que vive fuera de California se muda dentro y 2/10 de la gente que vive dentro de California se muda fuera. Si inicialmente y_0 z_0 eran los tamaños de las poblaciones fuera y dentro de California:

    a) Encuentre, para el k-ésimo año, el tamaño de la población que vive fuera (dentro) de California.

    b) Â¿ Puede modelar este problema como un proceso de Markov ?

    c) Encuentre la probabilidad de que un individuo de Estados Unidos, elegido al azar, viva fuera (dentro) de California en el k-ésimo año.

24. En una población de aves, cada año ocurre lo siguiente; cada hembra adulta produce una cría hembra, sobreviven el 50 % de los jóvenes y el 75 % de los adultos. Si la población inicial es de 10 jóvenes y 35 adultos.

    a) Encuentre la población en el año 1 y en el año k (para cualquier $k \in \mathbb{N}$).

    b) Pruebe que la población crece en el futuro y calcule el porcentaje de adultos que debe cazar para que la población se mantenga estable.

25. Suponga que una compañía tiene tres centros principales de camiones A,B,C. Cada mes, la tercera parte de los que están en A y en B van a C, los demás permanecen donde están y los camiones de C se dividen igualmente entre A y B. Si inicialmente la compañía tenía 10, 5 y 5 camiones en A, B y C respectivamente, determine

    (a) La distribución de camiones en el mes 1

    (b) La distribución final

26. En un estudio de enfermedades infecciosas se mantiene un registro de sarampión en un colegio particular. Se estima que la población P_n infectada en la n-ésima semana esta dada por: $P_{n+2} = P_{n+1} - \frac{1}{5}P_n$. Si $P_0 = 0$ y $P_1 = 1000$.

    a) Plantee un sistema matricial de la forma $U_{n+1} = AU_n$ que permita encontrar la población de infectados en la n-ésima semana.

    b) Puede modelar este problema como un Proceso de Markov?

    c) Es este proceso estable?, inestable? o neutralmente estable?. Interprete su respuesta.

EXITOS