Ejercicios

Módulo 14

1. Dé un ejemplo de una TL $T:V \to W$ que sea

   a. Uno a uno pero no sobre.
   b. Sobreyectiva pero no uno a uno.
   c. Uno a uno y sobreyectiva.

2. Demuestre que $T: M_{mn} \to M_{nm}$ definida por $T(A) = A^T$ es un isomorfismo.

3. Encuentre un isomorfismo entre D_n, matrices diagonales de orden *n*, y $\mathbb{R}^n$.

4. Sea $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida como $T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Determine si *T* es un isomorfismo.

5. Para cada una de las siguientes transformaciones determine si es un isomorfismo a partir de la información dada.

   a. $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\rho_T = 4.$
   b. $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\nu_{(T)} = 2.$
   c. $T:\mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$, $\nu_{(T)} = 1.$
   d. $T:\mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$, $\rho_T = 4.$

6. Sea $V = \mathbb{P}_4$ y $W = \{p \in \mathbb{P}_5 : p(0) = 0\}$. Demuestre que $V \cong W$.

7. Sea $T:\mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_n$ tal que $Tp(x) = xp'(x)$. Determine si *T* es un isomorfismo.

8. Demuestre que si $T:V \to W$ es un isomorfismo, entonces existe un isomorfismo $L:W \to V$ tal que $L(T(\mathbf{v})) = \mathbf{v}$. A *L* se le llama *transformación inversa de T* y se denota T^{-1}.

9. Demuestre que si $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ está definido por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ y T es un isomorfismo, entonces T^{-1} está dado por $T^{-1}(\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{x}$.

10. Sea $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una TL dada por $T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+4y-6z \\ 5y-2z \\ 9z \end{bmatrix}$.

Demuestre que T es un isomorfismo y determine T^{-1}.

11. Sea $T: M_{n\times n} \to M_{n\times n}$ la transformación lineal dada por $T(A) = BA$, donde B es una matriz fija de orden n. Demuestre que T es un isomorfismo si y sólo si B es una matriz invertible. En tal caso, describa T^{-1}.

Ejercicios del módulo 14