UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS
CURSOS DE SERVICIOS PARA INGENIERÍA

Materia: Álgebra Lineal	Código: 2552520	Grupo: 1	Parcial 4 (25 %)	**Nota**
Profesor: Alejandro Piedrahita H.			Fecha: 15/10/2019	
Estudiante:			Documento:	

La evaluación tiene una duración de 1 hora y 50 minutos. No está permitido utilizar durante la prueba notas de clase, libros, etc. Los procedimientos empleados para llegar a cada respuesta deben quedar registrados en el examen, a menos que se indique lo contrario.

1. $\boxed{25\,\%}$ Determine si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justifique brevemente sus respuestas.

   a) Los valores propios de una matriz simétrica siempre son reales. (V)
   Justificación.

   Por el teorema espectral.

   b) Si λ es un valor propio de una matriz A no singular, entonces $\frac{1}{\lambda}$ es valor pripio de la matriz A^{-1}. (V)
   Justificación.

   $Ax = \lambda x \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}(\lambda x) \Rightarrow x = \lambda A^{-1}x \Rightarrow A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x$, con $\lambda \neq 0$ pues A es no singular.

   c) Toda matriz de Jordan es diagonalizable. (F)
   Justificación.

   $J = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ del problema 4 es de Jordan y no es diagonalizable.

   d) Si A es una matriz 3×3 que tiene 3 valores propios distintos, entonces los vectores propios correspondientes a esos valores propios forman una base para $\mathbb{R}^3$. (V)
   Justificación.

   Por teorema los 3 vectores propios son LI y 3 vectores LI en $\mathbb{R}^3$ siempre forman una base.

   e) Si A es una matriz diagonalizable, entonces existe una matriz ortogonal Q tal que Q^TAQ es diagonal. (F)
   Justificación.

   Solamente si A es simétrica.

2. $\boxed{25\,\%}$ Considere la ecuación cuadrática

$$x^2 + 4xy + y^2 = 1. \tag{1}$$

a) $\boxed{5\,\%}$ Encuentre la matriz simétrica asociada a la forma cuadrática de la ecuación (1).

b) $\boxed{15\,\%}$ Encuentre una matriz ortogonal Q tal que el cambio de variable $\mathbf{x} = Q\mathbf{y}$ transforme la ecuación (1) en una sin términos cruzados xy.

c) $\boxed{5\,\%}$ Determine el tipo de cónica que representa la ecuación (1) y el ángulo de rotación (no requiere graficar).

Solución.

a) $$x^2 + 4xy + y^2 = (x \;\; y)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}, \quad \text{donde } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

b) El polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$$

y por tanto los autovalores de A son $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -1$. Para $E_{\lambda_1} = E_3$ tenemos:

$$(A - \lambda_1 I \,\vdots\, 0) = \left(\begin{array}{cc:c} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to -\frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{cc:c} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to -2R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc:c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow E_3 = \text{gen}\Big\{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1}\Big\}$$

Para $E_{\lambda_2} = E_{-1}$ tenemos:

$$(A - \lambda_2 I \,\vdots\, 0) = \left(\begin{array}{cc:c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to -2R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow E_{-1} = \text{gen}\Big\{\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2}\Big\}$$

Como $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (1 \;\; 1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ y $\|\vec{v}_1\| = \sqrt{2} = \|\vec{v}_2\|$, los correspondientes autovectores unitarios forman la matriz ortogonal

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad Q^T A Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D.$$

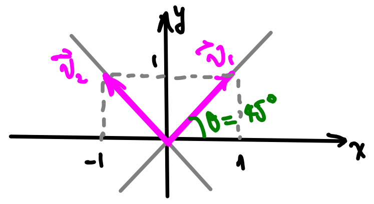
El cambio de variable

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

convierte la ecuación (1) en

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{y}^T D \mathbf{y} = 3(x')^2 - (y')^2 = 1 \tag{2}$$

c) La ecuación (2) es la ecuación de una hipérbola y por tanto (1) corresponde a una hipérbola rotada. El ángulo de rotación es $\theta = 45°$.



3. $\boxed{25\,\%}$ Suponga que el clima en una región particular se comporta de acuerdo con una cadena de Markov. Específicamente, suponga que la probabilidad de que mañana será un día húmedo es de 0.662 si hoy es húmedo y de 0.250 si hoy es seco. La probabilidad de que mañana sea un día seco es de 0.750 si hoy es seco y de 0.338 si hoy es húmedo.

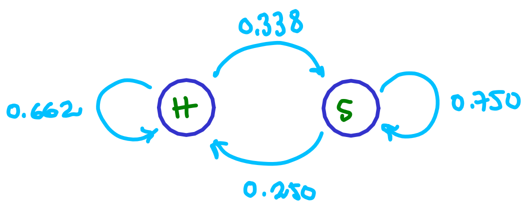
   a) $\boxed{7\,\%}$ Escriba la matriz de transición para esta cadena de Markov.

   b) $\boxed{8\,\%}$ Si el lunes es un día seco, calcule la probabilidad de que el miércoles sea húmedo.

   c) $\boxed{10\,\%}$ A largo plazo, ¿cuál será la distribución de días húmedos y secos?

Solución.

a) El problema tiene dos estados: húmedo (H) y seco (S).



	H	S
H	0.662	0.250
S	0.338	0.750

$$P = \begin{pmatrix} 0.662 & 0.250 \\ 0.338 & 0.750 \end{pmatrix}$$

b) Si el lunes es seco, $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y para el miércoles (2 días después) tendremos que

$$P^2 x_0 = \begin{pmatrix} 0.662 & 0.250 \\ 0.338 & 0.750 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.662 & 0.250 \\ 0.338 & 0.750 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.662 & 0.250 \\ 0.338 & 0.750 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.250 \\ 0.750 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.353 \\ 0.647 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow H \\ \leftarrow S \end{matrix}$$

La probabilidad de que el miércoles sea húmedo (H) es 0.353.

c) x es vector de estado estacionario $\Leftrightarrow$ $Px = x$ $\Leftrightarrow$ $(P-I)x = 0$.

Entonces

$$(P-I \mid 0) = \left(\begin{array}{cc|c} -0.338 & 0.250 & 0 \\ 0.338 & -0.250 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|c} -0.338 & 0.250 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to -\frac{1}{0.338} R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -0.73964 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

y por tanto

$$x = \begin{pmatrix} 0.73964\,t \\ t \end{pmatrix}.$$

Finalmente,

x es vector de probabilidad $\Leftrightarrow$ $0.73964\,t + t = 1$ $\Leftrightarrow$ $t = 0.57483$

por lo cual

$$x = \begin{pmatrix} 0.73964\,t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.42517 \\ 0.57483 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow H \\ \leftarrow S \end{matrix}$$

y por lo tanto a largo plazo el 42.5 % de los días serán húmedos (H) y el 57.5 % de los días serán secos (S), aproximadamente.

4. $\boxed{25\,\%}$ Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) $\boxed{6\,\%}$ Halle los autovalores y autovectores de A.

b) $\boxed{3\,\%}$ Muestre que A no es diagonalizable.

c) $\boxed{16\,\%}$ Encuentre una matriz C que transforme a A en su forma canónica de Jordan.

Solución.

a) El polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(2-\lambda) - 1\cdot(-1) = 8 - 6\lambda + \lambda^2 + 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda-3)^2$$

y por tanto $\lambda = 3$ es un autovalor de multiplicidad algebraica 2.

Para E_3 tenemos:

$$(A - 3I \,\vdots\, 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to -R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow E_3 = \operatorname{gen}\Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1} \Big\}$$

b) La multiplicidad algebraica de $\lambda = 3$ es 2 y la multiplicidad geométrica es $\dim E_3 = 1$. Por consiguiente A no es diagonalizable.

c) Hallemos ahora el vector propio generalizado $\vec{v}_2$ de A: $(A-\lambda I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$

$$(A - 3I \,\vdots\, v_1) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to -R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} v_1 = 1 + v_2 \\ v_2 = v_2 \end{array}$$

Eligiendo $v_2 = 0$ obtenemos el vector generalizado

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad C^{-1} = \frac{1}{\det C}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente

$$C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = J$$