Materia: Álgebra Lineal	Código: 2552520	Grupo: 1	Parcial 2 (25 %)	**Nota**
Profesor: Alejandro Piedrahita H.			Fecha: 15/08/2019	
Estudiante:			Documento:	

La evaluación tiene una duración de 1 hora y 50 minutos. No está permitido sacar ningún tipo de documento durante el examen ni celulares. Realice los procedimientos de forma clara y ordenada. En los puntos 2 al 4 muestre el procedimiento.

1. $\boxed{24\,\%}$ A continuación se da una matriz A de tamaño 4×5 y E la matriz escalonada reducida de A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{4} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Determine si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justifique brevemente sus respuestas.

a) La nulidad de A es 2. (V)
Justificación.

Como el número de renglones no nulos de E es 3, $\rho(A) = 3$ y por tanto
$\nu(A) = 5 - \rho(A) = 5 - 3 = 2$.

b) Una base para el espacio renglón de A, R_A, esta dada por

$$\left\{ \left(1, 0, 0, -\frac{7}{4}, -1\right), \left(0, 1, 0, -\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right), \left(0, 0, 1, \frac{3}{2}, 1\right) \right\},$$

y la $\dim(R_A) = 3$. (V)
Justificación.

$R_A = R_E$

c) Una base para el espacio columna de A, C_A, esta dada por

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

y $\dim(C_A) = 3$. (F)
Justificación.

$C_A \neq C_E$

d) $R_A \cap N_A = \{\mathbf{0}\}$. (V)
Justificación.

$C_A^{\perp} = N_{A^T} \Rightarrow (C_{A^T})^{T} = N_A \longrightarrow (R_A)^{\perp} = N_A \Rightarrow R_A \cap N_A = \{0\}$

2. $\boxed{24\,\%}$ En P_2,

$$(\mathbf{x})_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{donde} \qquad B_1 = \{6 - x, 3x, x^2 - x - 2\}.$$

Escriba a $\mathbf{x}$ en términos de la base $B_2 = \{2, -4 + x, x + x^2\}$.

Solución.

Las coordenadas con respecto a la base canónica $\mathcal{E}$ de P_2 de los vectores de la base B_1 son

$$(6-x)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3x)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad (x^2-x-2)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para los vectores de la base B_2 tenemos

$$(2)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (-4+x)_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad y \quad (x+x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para hallar la matriz de cambio de base $P_{B_2 \leftarrow B_1}$, escalonamos la matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 0 & 6 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to 2R_2+R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

y obtenemos

$$P_{B_2 \leftarrow B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -5 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente,

$$(x)_{B_2} = P_{B_2 \leftarrow B_1} (x)_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -5 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 6\cdot 1 + (-5)\cdot 3 \\ (-1)\cdot 2 + 3\cdot 1 + (-2)\cdot 3 \\ 0\cdot 2 + 0\cdot 1 + 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$x = (-7)\cdot 2 + (-5)(-4+x) + 3\cdot(x+x^2) = -14 + 20 - 5x + 3x + 3x^2 = 6 - 2x + 3x^2$$

3. $\boxed{32\,\%}$ Considere en $\mathbb{R}^4$ el subespacio y el vector

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x = y, \quad \text{y} \quad w = 3y \right\} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) $\boxed{16\,\%}$ Calcule $\text{proy}_H \mathbf{v}$.

b) $\boxed{8\,\%}$ Encuentre una base ortonormal para $H^\perp$.

c) $\boxed{8\,\%}$ Exprese a $\mathbf{v}$ como $\mathbf{h} + \mathbf{p}$, donde $\mathbf{h} \in H$ y $\mathbf{p} \in H^\perp$.

Solución.

a) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ z \\ 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \\ 3y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = y \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{v_1} + z \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2} \Rightarrow H = \text{gen}\{v_1, v_2\}$$

Como v_1 y v_2 son LI (ninguno es múltiplo escalar del otro) y $v_1 \cdot v_2 = 0$, $\{v_1, v_2\}$ es base ortogonal de H. Por otra parte

$$\|v_1\| = \sqrt{1^2+1^2+0^2+3^2} = \sqrt{11} \quad \text{y} \quad \|v_2\| = \sqrt{0^2+0^2+1^2+0^2} = 1.$$

Luego

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 0 \\ 3/\sqrt{11} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

forman una base ortonormal de H y por tanto

$$\text{proy}_H v = (v \cdot u_1) u_1 + (v \cdot u_2) u_2$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{2}{\sqrt{11}} + \frac{3}{\sqrt{11}}\right) u_1 + 3 u_2$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 0 \\ 3/\sqrt{11} \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 4/11 \\ 4/11 \\ 0 \\ 12/11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/11 \\ 4/11 \\ 3 \\ 12/11 \end{pmatrix}$$

b) $H^\perp = N_{A^T}$, donde A es la matriz cuyas columnas están dadas por v_1 y v_2. Resolvemos el sistema $A^T x = 0$ y obtenemos

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 - 3x_4 \\ x_2 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} + x_4 \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2}$$

Como v_1 y v_2 son LI, $\{v_1, v_2\}$ es una base de $H^\perp$ que no es ortonormal, pues $v_1 v_2 = 3$. Aplicando Gram-Schmidt, $w_1 = v_1$ y

$$w_2 = v_2 - \text{proy}_{w_1} v_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{\|w_1\|^2} w_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente

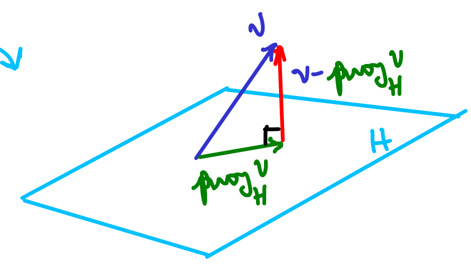
$$\|w_1\| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}, \quad \|w_2\| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2+1^2} = \sqrt{\frac{11}{2}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}}$$

y por tanto

$$u_1 = \frac{1}{\|w_1\|} w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad u_2 = \frac{1}{\|w_2\|} w_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} -3/2 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

constituyen una base ortonormal de $H^\perp$.

c) $$v = \underbrace{proy_H^v}_{h} + \underbrace{(v - proy_H^v)}_{p}$$



$$= \begin{pmatrix} 4/11 \\ 4/11 \\ 3 \\ 12/11 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4/11 \\ 4/11 \\ 3 \\ 12/11 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 4/11 \\ 4/11 \\ 3 \\ 12/11 \end{pmatrix}}_{h} + \underbrace{\begin{pmatrix} -15/11 \\ 18/11 \\ 0 \\ -1/11 \end{pmatrix}}_{p}$$

4. $\boxed{20\,\%}$ Encuentre la recta que mejor se ajusta a los puntos

$$(21,10),(22,6),(26,6),(2,22).$$

Solución

$y = c_0 + c_1 x$ debe satisfacer el sistema

$$\begin{aligned} c_0 + 21c_1 &= 10 \\ c_0 + 22c_1 &= 6 \\ c_0 + 26c_1 &= 6 \\ c_0 + 2c_1 &= 22 \end{aligned} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 21 \\ 1 & 22 \\ 1 & 26 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 6 \\ 22 \end{pmatrix}}_{b}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones normales $A^TAx = A^Tb$, donde

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 21 & 22 & 26 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 21 \\ 1 & 22 \\ 1 & 26 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 71 \\ 71 & 1605 \end{pmatrix}$$

y

$$A^Tb = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 21 & 22 & 26 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 6 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ 542 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 71 & 44 \\ 71 & 1605 & 542 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to \frac{1}{4}R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 71/4 & 11 \\ 71 & 1605 & 542 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to -71R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 71/4 & 11 \\ 0 & 1379/4 & -239 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2 \to 4/1379 R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 71/4 & 11 \\ 0 & 1 & -956/1379 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 \to -71/4 R_2 + R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 32138/1379 \\ 0 & 1 & -956/1379 \end{array}\right)$$

La recta que "mejor se ajusta" a los datos es

$$y = \frac{32138}{1379} - \frac{956}{1379}x.$$