Ejercicios

Módulo 6

En los ejercicios 1 a 3 se da una matriz en forma escalonada. Encuentre una base para su espacio renglón, una base para su espacio columna y determine su rango.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 4 a 9 encuentre bases para los espacios nulo, renglón y columna de la matriz dada. Determine además el rango y la nulidad y verifique en cada caso que $\rho_A + \nu_A = n$.

4. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 8 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 5 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 10 a 12 encuentre una base para el espacio generado por los conjuntos de vectores dados.

10. $(2, 3, 5),\ (-1, 0, -2),\ (5, 6, 12),\ (2, 1, 0).$

11. $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$

12. $(-2, 6, 4, 1),\ (1, 0, -3, 5),\ (0, 4, -2, 1).$

En los ejercicios 13 a 15 determine si el sistema dado tiene solución.

13. $$\begin{aligned} x+y-z&=2\\ x+2y+2z&=-3\\ 2x+3y+z&=1 \end{aligned}$$

14. $$\begin{aligned} x+y-z&=2\\ x+2y+2z&=-3\\ 2x+3y+z&=-1 \end{aligned}$$

15. $$\begin{aligned} x-2y+z+w&=2\\ 3x\qquad +2z-2w&=-8\\ 4y-z-w&=1\\ 5x\qquad +3z-w&=-3 \end{aligned}$$

16. Sea A una matriz diagonal. Demuestre que $\rho(A)$ es el número de componentes diferentes de cero en la diagonal.

17. Demuestre que para cualquier matriz A, $\rho(A)=\rho(A^t)$.

18. Sea A una matriz triangular $n\times n$ con ceros en la diagonal. Demuestre que $\rho(A)<n$.

19. Sea A una matriz $n\times n$. Demuestre que $\rho(A)<n$ si y sólo si existe un vector $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ y $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

20. ¿Son los siguientes enunciados verdaderos o falsos? Justifique su respuesta.

    a. Si A es una matriz de $m\times n$, entonces $\mathbb{R}_A=\mathbb{C}_A$.
    b. Si A es una matriz 5×3, entonces las columnas de A deben ser LI.
    c. Si A es una matriz 3×5, las columnas de A no pueden ser LI.
    d. Si A es una matriz de $m\times n$ y las columnas de A son LI, entonces $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ puede o no tener solución. Pero si tiene solución, ésta es única.

21. Sea A una matriz $m\times n$.

    a. Si las columnas de A son LI, ¿cuál es el rango de A y cuál es la relación entre m y n?
    b. Si las columnas de A generan $\mathbb{R}^m$, ¿cuál es el rango de A y cuál es la relación entre m y n?
    c. Si las columnas de A forman una base de $\mathbb{R}^m$, ¿cuál es la relación entre m y n?