UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803	**Universidad de Antioquia** Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Instituto de Matemáticas Cursos de Servicios programas virtuales Ingeniería	Cálculo Integral Taller 2

1. Sea $f : [0, 5] \to \mathbb{R}$ una funcion definida como sigue

$$f(x) = \begin{cases} 4x & si \quad 0 \leq x < 1 \\ k & si \quad 1 \leq x \leq 3 \\ x - 4 & si \quad 3 < x \leq 5 \end{cases},$$

donde k es una constante. Determine el valor de la constante k si se sabe que $\displaystyle\int_0^5 f(t)dt = 6$.

2. Determinar si las siguientes integrales son convergentes o divergentes. Evalue las integrales convergentes.

   a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} dx$

   b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{2}{x^2 + x - 2} dx$

3. Halle el valor de c que satisface el teorema del valor medio para integrales para la siguiente integral:

$$\int_1^4 (x^2 + 4x + 5)dx$$

4. Halle la siguiente integral indefinida mediante sumas de Riemann

$$\int_0^5 (2x + 1)dx$$

5. Halle la pendiente de la recta tangente en la abscisa $x = \frac{\pi}{2}$ a la curva de la función

$$h(x) = \int_{-1}^{\operatorname{sen} x} (t^3 - 1)\ dt$$

6. Calcule las siguientes integrales:

   a) Calcule $\displaystyle\int_2^3 \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} dx$

   b) $\displaystyle\int_1^5 \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

   c) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{1}{2 + \cos(x)} dx$

   d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sec^3(x)dx$

   e) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \cos^3(x) \operatorname{sen}^3(x)dx$

   f) $\displaystyle\int_1^{\pi} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$

   g) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}} dx$

   h) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx$

7. Dada la función $f(x) = x^2 + 2$, encuentre un valor C en el intervalo $[0, 3]$ que satisfaga el teorema del valor medio para integrales. Explique claramente su procedimiento.

8. Evalúe las siguientes integrales interpretándolas como un área.

   a) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$

   b) $\int_0^3 \left(\frac{1}{2}x - 1\right)dx$

9. Analice la convergencia o divergencia de las siguientes integrales impropias

   a) $\int_0^2 \frac{1}{x^2}dx$

   b) $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x}{x^2+4}\right)dx$

10. Demuestre que el teorema del valor intermedio garantiza que la ecuación $x^3 - 4x^2 + x + 3 = 0$ tiene una raíz real en el intervalo $[1, 2]$. Explique claramente su procedimiento.

11. Usar la definición de integral de Riemann para calcular la integral:

$$\int_0^3 (2x^2 + x + 1)dx$$

12. Pruebe que la función $F(x) = \int_{3x}^{5x} \frac{1}{t}dt$ es una función constante.

13. Determine el valor de las siguientes integrales o pruebe que divergen.

   a) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}dx$

   b) $\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{x^2+4x}\right)dx$

14. Responda falso o verdadero, justificando su respuesta

   a) Una partición de un intervalo puede ser vacia.

   b) Si $f(x) = f(-x)$ en el intervalo $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx = 0$

   c) Si $\int_a^b f(x)dx = 0$ entonces $f(x) = 0$ en $[a, b]$

   d) Si $\int_a^b f(x)dx$ existe, entonces $y = f(x)$ es una función continua en $[a, b]$

   e) $\frac{d}{dx}\left[\int_a^x e^{\tan^{-1}(3t)}\cos(t^3+1)dt\right] = e^{\tan^{-1}(3x)}\cos(x^3+1)$

15. Dada la función $f(x) = 6 - x$ halle usando sumas de Riemann, la integral definida en el intervalo $[1, 4]$

16. Utilice el primer teorema fundamental del calculo para hallar

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^{3x^2} \sqrt{3t^2+1}dt\right]$$

17. Halle el valor de la siguiente integral

$$\int_1^2 \frac{x^2}{(x^3+3)^4}dx$$

18. Analice la convergencia o divergencia de la siguiente integral

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^5}dx$$

19. Determinar si las siguientes integrales son convergentes o divergentes. Evalue las integrales convergentes.

a) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{1}{x\ln x}dx$

b) $\displaystyle\int_3^{10} \frac{dx}{\sqrt{x-3}}dx$

20. Evalúe las siguientes integrales intérpretandolas como un área.

a) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx$

b) $\displaystyle\int_0^3 \left(\frac{1}{2}x-1\right)dx$

21. Sea $I=[0,1]$ y sea $f: I \to \mathbb{R}$ continua. Supongase que

$$\int_0^x f(t)dt = \int_x^1 f(t)dt, \quad \text{para toda} \quad x \in I$$

Demostrar que $f(x)=0$ para toda $x \in I$

22. Evaluar la integral $\int_0^4 f(x)dx$, donde

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ x & \text{si} \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

23. Usar la definición de integral definida según Riemann para calcular la integral:

$$\int_0^3 (2x-1)dx$$

Taller de la notación sigma e integral definida

24. Encuentre el valor de cada suma:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} \frac{1}{k+1} \quad Rta: \tfrac{481}{280}$

b) $\displaystyle\sum_{m=1}^{8} (-1)^m 2^{m-2} \quad Rta: \tfrac{85}{2}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{6} n\cos(n\pi) \quad Rta: 3$

25. Encuentre el valor de cada suma telescópica

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{40} \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \quad Rta: \tfrac{40}{41}$

b) $\displaystyle\sum_{k=3}^{20} \left(\frac{1}{(k+1)^2}-\frac{1}{k^2}\right) \quad Rta: -\tfrac{16}{147}$

26. Utilice las fórmulas especiales para encontrar cada suma:

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} (3i-2) \quad Rta: 14950$

b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{10} (j^3-j^2) \quad Rta: 2640$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i^2-3i+1) \quad Rta: \tfrac{4n^3-3n^2-n}{6}$

27. Evalúe $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} f(w_i)\Delta x$ si $f(x)=3x, \quad w_i=\frac{i}{5}$ y $\Delta x = \frac{1}{5}$ $\quad Rta: \frac{33}{5}$

28. Demuestre la siguiente fórmula para una **suma geométrica**:

$$\sum_{k=0}^{n} ar^k = \frac{a-ar^{n+1}}{1-r} \; (r \neq 1)$$

29. Utilice la fórmula para una suma geométrica para calcular:

   a) $\sum\limits_{k=1}^{10}(\frac{1}{2})^k \quad Rta: 1-(\frac{1}{2})^{10}$

   b) $\sum\limits_{k=1}^{10}2^k \quad Rta: 2^{11}-2$

30. Obtenga una fórmula para la **suma aritmética**:

$$\sum_{k=0}^{n}(a+kd) = a+(a+d)+(a+2d)+...+(a+nd)$$

   Rta: $\dfrac{(n+1)(2a+nd)}{2} \quad (a, d\epsilon\Re)$

31. Utilice la identidad $(i+1)^4 - i^4 = 4i^3 + 6i^2 + 4i + 1$ para deducir la fórmula especial:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

32. Evalúe cada integral definida utilizando la definición:

   a) $\int\limits_0^2 (x+1)\,dx, \quad Rta: 4$

   b) $\int\limits_{-2}^1 (2x+\pi)\,dx, \quad Rta: 3\pi - 3$

   c) $\int\limits_0^5 (x+1)\,dx, \quad Rta: \frac{35}{2}$

33. Por medio de la propiedad aditiva de intervalos y las fórmulas adecuadas para áreas de la geometría plana, encuentre $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, donde a y b son los extremos izquierdo y derecho del intervalo donde f está definida. Empiece haciendo una gráfica de la función si:

   a) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ 2 & \text{si } 1 < x \le 2, \\ x & \text{si } 2 < x \le 5 \end{cases} \quad Rta: \frac{27}{2}$

   b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ x-1 & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$
   $Rta: \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$

   c) $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad -a \le x \le a \quad Rta: \frac{\pi}{2}a^2$

34. Se fugó aceite de un tanque a razón de $r(t)$ litros por hora. La razón disminuyó conforme avanzó el tiempo t y los valores de la razón en intervalos de dos horas son:

t	0	2	4	6	8	10
$r(t)$	8.7	7.6	6.8	6.2	5.7	5.3

   Halle las estimaciones inferiores y superiores para la cantidad de aceite total que se fugó.

35. Si A_n es el área de un polígono con n lados iguales, inscrito en un círculo de radio R. y al dividir el polígono en n triángulos congruentes con ángulo central $\frac{2\pi}{n}$,

   a) Demuestre que:

$$A_n = \frac{nR^2}{2}\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{n})$$

   b) Demuestre que:

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \pi R^2$$

Taller: teorema fundamental, teorema del valor medio e integrales impropias

36. En los siguientes ejercicios encuentre la derivada de $F(x)$.

    a) $F(x) = \int_1^x 2t\,dt, \quad Rta: 2x$

    b) $F(x) = \int_x^{\frac{\pi}{2}} (s-2)\cot(2s)\,ds, \ 0 < x < \pi,$
    $Rta: -(x-2)\cot(2x)$

    c) $F(x) = \int_1^{x^2} \operatorname{sen} t\,dt, \quad Rta: 2xsen\,(x^2)$

    d) $F(x) = \int_{-x^2}^{x} \dfrac{t^2}{1+t^2}\,dt, \quad Rta: \frac{2x^5}{1+x^4} + \frac{x^2}{1+x^2}$

37. Demuestre que la gráfica de $y = f(x)$ es cóncava hacia arriba en todas partes si:

$$f(x) = \int_0^x \frac{s}{\sqrt{a^2+s^2}}ds, \quad a \neq 0$$

38. Encuentre el intervalo en el que la gráfica de $y = f(x)$ es cóncava hacia arriba, si:

$$f(x) = \int_0^x \frac{1+t}{1+t^2}dt$$

39. Utilice el teorema fundamental del cálculo para encontrar el valor de cada integral definida:

    a) $\int_0^2 x^3 dx, \quad Rta: 4$

    b) $\int_5^8 \sqrt{3x+1}dx, \quad Rta: \frac{122}{9}$

    c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \operatorname{sen} x\,dx, \quad Rta: \frac{1}{3}$

    d) $\int_0^1 (x^2+2x)^2 dx, \quad Rta: \frac{38}{15}$

40. Encuentre el valor promedio de cada función en el intervalo dado:

    a) $f(x) = 4x^3, \ [1,3] \quad Rta: 40$

    b) $f(x) = 2 + |x|, \ [-2,1] \quad Rta: \frac{17}{2}$

    c) $f(x) = cos\,x, \ [0,\pi], \quad Rta: 0$

41. Use la regla de sustitución para integrales definidas y encuentre cada una de las siguientes integrales:

    a) $\int_0^1 \dfrac{x+2}{(x^2+4x+1)^2}\,dx, \quad Rta: \frac{5}{12}$

    b) $\int_0^1 x \operatorname{sen}(\pi x^2)\,dx, \quad Rta: \frac{1}{\pi}$

    c) $\int_0^1 x\cos^3(x^2)\operatorname{sen}(x^2)\,dx, \quad Rta: \frac{1-\cos^4 1}{8}$

42. Evalúe cada integral impropia o muestre que diverge:

    a) $\int_1^{\infty} 2xe^{-x^2}\,dx, \quad Rta: \frac{1}{e}$

b) $\int\limits_{9}^{\infty} \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad Rta: diverge$

c) $\int\limits_{e}^{\infty} \dfrac{1}{x\ln x}\,dx \quad Rta: diverge$

d) $\int\limits_{2}^{\infty} \dfrac{\ln x}{x^2}\,dx \quad Rta: \frac{1}{2}(\ln 2+1)$

e) $\int\limits_{-\infty}^{1} \dfrac{dx}{(2x-3)^3}\,dx \quad Rta: -\frac{1}{4}$

f) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{x^2+2x+10}\,dx \quad Rta: \frac{\pi}{3}$

43. Evalúe cada integral impropia o muestre que diverge:

a) $\int\limits_{1}^{3} \dfrac{dx}{(x-1)^{\frac{1}{3}}}, \quad Rta: \dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}$

b) $\int\limits_{0}^{1} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad Rta: \frac{\pi}{2}$

c) $\int\limits_{-1}^{3} \dfrac{1}{x^3}\,dx \quad Rta: diverge$

d) $\int\limits_{0}^{\ln 3} \dfrac{e^x\,dx}{\sqrt{e^x-1}} \quad Rta: 2\sqrt{2}$

e) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan(2x)\,dx \quad Rta: diverge$

f) $\int\limits_{1}^{e} \dfrac{dx}{x\ln x} \quad Rta: diverge$

EXITOS