UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803	**Universidad de Antioquia** Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Instituto de Matemáticas Cursos de Servicios programas virtuales Ingeniería	Álgebra Lineal Taller-Parcial 1

1. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. En cada caso justifique cada respuesta con una demostración para las verdaderas y un contrajemplo para las falsas.

   - Sean $V = \mathbb{P}_3$ y $B = \{1-x, 2+x-x^2, x^2-1\}$ un conjunto de vectores en V. El conjunto B es linealmente independiente.
   - $V = \mathbb{R}^3$ y $B = \{(1,2,3),(4,8,2),(-1,-2,-8)\}$. El conjunto B es una base de V.
   - Si $\{p(x), q(x), r(x)\}$ forma una base para $P_3(x)$, entonces $\{p(x), r(x)\}$ es un conjunto L.I.
   - Es posible encontrar un par de vectores L.D que hagan parte de una base para $\mathbb{R}^4$.
   - Si v es un vector no nulo, entonces el conjunto $\{v, 3v\}$ es L.I.
   - Si v_1, v_2, v_3 generan a $\mathbb{R}^2$ entonces v_1, v_3 también.
   - Si u, v sin L.D. entonces $3u+v, 2u-v$ también.
   - El conjunto $\beta = \{1+x, 1-x^2\}$ es una base para $\mathbb{P}_2(x)$.
   - Si $\{u, v\}$ es base para un espacio vectorial V, entonces sin importar $x \in V$, se tiene $\{x+u, x+v\}$ también es base para V .
   - 4 vectores en $\mathbb{R}^3$ son L.I.
   - Si v es un vector no nulo entonces el conjunto $\{v\}$ es L.I.
   - Si u, v sin L.D. entonces $u, u+v$ también.
   - Si $p(x), q(x), r(x)$ son L.I. en $P_3(x)$ entonces son una base para $P_3(x)$.
   - 4 vectores en $\mathbb{R}^3$ son L.I.
   - Si v es un vector no nulo entonces el conjunto $\{v\}$ es L.I.
   - Si v_1, v_2, v_3 generan a $\mathbb{R}^2$ entonces v_1, v_2 también.
   - Si u, v sin L.D. entonces $u, u+v$ también.
   - El conjunto $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ genera a $\mathbb{R}^2$.
   - Una base para $\mathcal{P}_1$ esta dada por $\varepsilon = \{1+x, 1-x^2\}$
   - $W = gen \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ entonces $dimW = 3$
   - Si $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ es base para un $E.V\ V$ entonces sin importar $\overrightarrow{x} \in V$, $\{\overrightarrow{x}+\overrightarrow{u}, \ \overrightarrow{x}+\overrightarrow{v}\}$ también es base para V .
   - El conjunto $M = \{A \in M_{nxn} : \ A \ \text{ no es invertible}\}$ es un subespacio de M_{2x2}.

2. En los numerales siguientes determine si H es subespacio del espacio vectorial V.

   - $V = \mathbb{M}_{2\times 2}$, $H = \{A \in \mathbb{M}_{2\times 2}/A \quad \text{es simétrica}\}$.
   - $V = \mathbb{M}_{2\times 2}$, $H = \{A \in \mathbb{M}_{2\times 2}/A \quad \text{es antisimétrica}\}$.
   - $V = \mathbb{M}_{2\times 2}$, $H = \big\{A \in \mathbb{M}_{2\times 2}/A \quad \text{es idempotente, i.e, } A^2 = I\big\}$.
   - $V = \mathbb{P}_2(x)$, $H = \big\{p = ax^2 + bx + c \mid b^2 - 4ac \geq 0\big\}$.
   - $V =$ matrices cuadradas de orden 2, $H = \{A \in M_{22} \mid A^2 = A\}$
   - $V = P_2(x)$, $H = \big\{p = ax^2 + bx + c \mid 2ax + b \geq 0\big\}$.
   - $V = M_{2x2}$, $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2x2} : ab - cd \geq 0 \right\}$
   - $V = M_{mxm}$, $H = \{A \in M_{mxm} : \ A^T + A = 0\}$

3. Sea V un $E.V.$ Si $\{v_1, v_2\}$ es una base para V, demuestre que $\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$ también es base para V.

4. Sea $W = gen\{p(x), q(x), r(x)\}$ donde $p(x) = x^2 + 2x,\ q(x) = 3x + 1$ y $r(x) = 2 - 3x^2$. Determine si alguno de los vectores $f(x) = 4(x^2 - x - 1)$, $g(x) = x^2 + 2$ son combinaciones lineales de $p(x), q(x)$ y $r(x)$. Si es el caso, escriba dicha combinación.

5. Determine si $\{-2x, x + 3x^2, x + 2\}$ forma una base para P_2. En caso afirmativo encuentre las coordenadas con respecto a esa base de $p(x) = x^2 + 3x - 5$

6. Para que valores de α los vectores $u = (1, 2, 1)$, $v = (2\alpha, 3, -1)$ y $w = (4, 7, \alpha)$ son L.I. ?

7. Determine si las siguientes matrices son base para el espacio vectorial de las matrices simétricas de orden 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

8. Determine si $\{-x, -4x + x^2, 3x+\}$ forma una base para P_2. En caso afirmativo encuentre las coordenadas con respecto a esa base de $p(x) = 2x^2 - x$

9. Demuestre que el conjunto de matrices antisimetricas de orden n es un espacio vectorial.

10. Determine si las siguientes matrices son base para el espacio vectorial de las matrices antisimetricas de orden 3.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 8 \\ 1 & -8 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -4 \\ -6 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. Demostrar si el conjunto dado, junto con las operaciones dadas, es un espacio vectorial. Si no lo es, mencione al menos un axioma que no cumple.
    - $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = 0,\ x,\ y\ \in \mathbb{R}\}$ con las operaciones usuales de $\mathbb{R}^3$.
    - $W = \{M_{n\times n}/M_{n\times n}$ es una matriz invertible$\}$ con la operación usual de matrices.

12. Sea $\mathbb{P}_n$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menos o igual a n.
    - Demostrar que $V = \{p(x) \in \mathbb{P}_n / p(0) = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_n$.
    - Demostrar que $W = \{p(x) \in \mathbb{P}_n / p(0) = 2\}$ no es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_n$.

13. Sea $A \in M_{n\times n}$ espacio de matrices $n \times n$.

    Definamos $V = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = 0\}$ el cual se llama el *espacio nulo* de la matriz A. Demostrar que V es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

14. Sean $x = (1, 2, 4)$ y $y = (-3, 2, 0)$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$.

15. Definamos $W = \{u \in \mathbb{R}^3 / u = \alpha x + \beta y$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$. Demostrar que W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

16. Demostrar que cualquier cuatro polinomios en $\mathbb{P}_2$ son linealmente dependientes.

17. Sea $V = \{M_{3\times 3}/M_{3\times 3}$ es una matriz simétrica$\}$. Calcular:
    - Una base para V.
    - La dimensión de V.

18. Considere el subespacio $\mathfrak{F} = \{A \in M_{2x2} :\ AB = BA\}$ donde $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
    - Muestre que $\mathfrak{F} \neq \varnothing$ justificando que hay por lo menos tres matrices distintas que estan en $\mathfrak{F}$.
    - Halle la dimensión de $\mathfrak{F}$.

19. Sea $W = gen\{p(x), q(x), r(x)\}$ donde $p(x) = x^2 + 2x,\ q(x) = 3x + 1$ y $r(x) = 2 - 3x^2$. Determine si alguno de los vectores $f(x) = 4(x^2 - x - 1)$, $g(x) = x^2 + 2$ son combinaciones lineales de $p(x), q(x)$ y $r(x)$. Si es el caso, escriba dicha combinación.

20. Sea V un $E.V.$ Si $\{v_1, v_2\}$ es una base para V, demuestre que $\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$ también es base para V.

21. Determinar si el conjunto H dado en cada literal es un espacio vectorial.

a) H es el conjunto de todos los vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ con $x \geq y$, con la suma vectorial y la multiplicación por un escalar usuales.

b) Considere una matriz A de orden $m \times n$. El conjunto H consta de todos los vectores $X \in \mathbb{R}^n$ tales que $AX = 0$.

22. Encuentre una base y la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, y diga que representa este subespacio geométricamente.

23. Determinar si los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ conforman un conjunto LI ó LD. Si es LD, escribir alguno de ellos como combinación lineal de los otros vectores.

24. Determine si el conjunto $B = \left\{x + 1, x^2 + x, x^2 - 1\right\}$ es una base para el espacio de polinomios P_2.

25. En cada literal determinar si el conjunto B es una base para el espacio vectorial V dado. Si es una base debes demostrarlo, y si no es una base debes explicar por qué no lo es.

    a) $V = \mathbb{R}^3$ y $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

    b) $V = \mathbb{R}^2$ y $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

26. Determinar si el conjunto H dado en cada literal es un espacio vectorial.

    a) H es el conjunto de todos los vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ con $x \geq y$, con la suma vectorial y la multiplicación por un escalar usuales.

    b) Considere una matriz A de orden $m \times n$. El conjunto H consta de todos los vectores $X \in \mathbb{R}^n$ tales que $AX = 0$.

27. Demostrar si el conjunto dado, junto con las operaciones indicadas, es un espacio vectorial. Si no lo es, mencione al menos un axioma que no cumple.

    a) Sea $V = \mathbb{R}^3$ con la operación de suma usual y la operación producto por un escalar definido por $\alpha \odot (x, y, z) = (x, 1, z)$.

    b) $W = \{M_{n\times n}/M_{n\times n}$ es una matriz no invertible$\}$ con la operación usual de matrices.

    c) $W = \{p(x) \in \mathbb{P}_n/p(0) = 0\}$ Con las operaciones definidas en $\mathbb{P}_n$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_n$.

28. Sea $V = \{x \in \mathbb{R}/x > 0\}$ con la suma y la multiplicación por escalar definidas de la siguiente forma: $x \oplus y = xy$ y $\alpha \odot x = x^\alpha$. Demostrar que V es un $\mathbb{R}$ espacio vectorial.

29. *a*) Sea $A \in M_{n\times n}$ espacio de matrices $n \times n$.
    Definamos $V = \{x \in \mathbb{R}^n/Ax = 0\}$ el cual se llama el *espacio nulo* de la matriz A. Demostrar que V es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

    b) Sean $x = (1, 2, 4)$ y $y = (-3, 2, 0)$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$.
    Definamos $W = \left\{u \in \mathbb{R}^3/u = \alpha x + \beta y \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$. Demostrar que W es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

30. Demostrar que cualquier cuatro polinomios en $\mathbb{P}_2$ son linealmente dependientes.

31. Sea $V = \{M_{3\times 3}/M_{3\times 3}$ es una matriz simétrica$\}$. Calcular:

    - Una base para V.
    - La dimensión de V.

32. Demostrar si el conjunto dado, junto con las operaciones indicadas, es un subespacio vectorial del espacio vectorial dado. Si no lo es, decir que propiedad no se cumple.

    - Sea $W = \{A \in \mathbb{M}_{3x3}/$A es una matriz triangular superior$\}$
    - Sea $W = \{A \in \mathbb{M}_{3x3}/$ A es una matriz invertible$\}$

- Sea $W = \{A \in \mathbb{M}_{3x3}/\text{A es una matriz triangular superior e invertible}\}$
- Sea $W = \{A \in \mathbb{M}_{3x3}/\text{A es una matriz diagonal e invertible}\}$
- $V = \mathbb{P}_n$ y $W = \{p(x) \in \mathbb{P}_n/p(0) = 0\}$ Con las operaciones definidas en $\mathbb{P}_n$.

33. Definamos a $V = \{x \in \mathbb{R}/x > 0\}$ en el cual se definen las operaciones de la siguiente manera.

    Suma entre vectores: $x \oplus y = xy$ Donde xy es la multiplicación en los reales.

    Multiplicación por escalar : $\alpha \odot x = x^{\alpha}$. para $\alpha \in \mathbb{R}$ y $x \in V$.

    Demostrar que V es un $\mathbb{R}$ espacio vectorial.

34. Sea $V = \{M_{3\times 3}/M_{3\times 3} \text{ es una matriz triangular superior}\}$. Calcular:
    - Una base para V.
    - La dimensión de V.