Ejercicios

Módulo 8

1. Verifique que las siguientes son bases ortogonales para $\mathbb{R}^3$. Obtenga bases ortonormales a partir de ellas.

   a. $\{(0,\ 0,\ 1),\ (-1,\ 1,\ 0),\ (1,\ 1,\ 0)\}$.

   b. $\{(0,\ 1,\ -1),\ (1,\ -1/2,\ -1/2),\ (1,\ 1,\ 1)\}$.

2. Utilice el proceso de Gram-Schmidt para transformar la base de un subespacio de $\mathbb{R}^3$, dada por $\{(1,\ 1,\ -1),\ (0,\ 1,\ -1)\}$, en una base ortonormal.

3. Igual que en el ejercicio 2, con la base $\{(1,\ -1,\ 0),\ (2,\ 0,\ 1)\}$.

4. Utilice el proceso de Gram-Schmidt para determinar una base ortonormal para el subespacio de $\mathbb{R}^4$ con base $\{(1,\ -1,\ 0,\ 1),\ (0,\ 0,\ 1,\ 0),\ (2,\ 0,\ 0,\ -1)\}$.

5. Sea $S=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Escriba el vector $(1,\ 2,\ -1)$ en esta base.

6. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^3$ con base ortonormal $\left\{(0,\ 1,\ 0),\ \left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ 0,\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\}$. Escriba el vector $\mathbf{v}=(1,\ 2,\ -1)$ como $\mathbf{p}+\mathbf{q}$ con $\mathbf{p}\in W$ y $\mathbf{q}\in W^{\perp}$.

7. Determine la distancia del punto $(2,\ 3,\ -1)$ al plano $3x-2y+z=0$. (Sugerencia: encuentre la proyección ortogonal de $(2,\ 3,\ -1)$ sobre el plano.)

8. Construya una base ortonormal para el espacio solución del sistema homogéneo:

$$
\begin{aligned}
x+3y-5z&=0\\
2x-y+z&=0\\
3x+2y-4z&=0
\end{aligned}
$$

9. Encuentre una base ortonormal en $\mathbb{R}^3$ que incluya los vectores $\mathbf{u_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ y $\mathbf{u_2} = (0, 1, 0)$.

En los ejercicios 10 a 12 se dan un subespacio H y un vector $\mathbf{v}$.

a. Calcule $\text{proy}_H\ \mathbf{v}$.

b. Encuentre una base ortonormal para $H^{\perp}$.

c. Escriba $\mathbf{v} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$ con $\mathbf{p} \in H$ y $\mathbf{q} \in H^{\perp}$.

10. $H = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 0 \right\}$; $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

11. $H = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 3x - 2y + 6z = 0 \right\}$; $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

12. $H = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x = 2y,\ w = -y \right\}$; $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

13. Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores de $\mathbb{R}^n$ tales que $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ para $\lambda \in \mathbb{R}$, demuestre que $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$.

14. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz pruebe la desigualdad triangular $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$.