Ejercicios

Módulo 2

En los ejercicios 1 a 12 se dan un espacio V y un subconjunto W. Determine si W es un subespacio.

1. $V = \mathbb{R}^2,\ W = \{(x, y) : x = y\}.$
2. $V = M_{nn},\ W = \{A \in M_{nn} : A \text{ es simétrica}\}.$
3. $V = \mathbb{R}^3,\ W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \text{ es perpendicular a } (a, b, c)\}.$
4. $V = \mathbb{P}_4,\ W = \{p \in \mathbb{P}_4 : p(0) = 0\}.$
5. $V = \mathbb{P}_4,\ W = \{p \in \mathbb{P}_4 : p(0) = 1\}.$
6. $V = \mathbb{P}_4,\ W = \{p \in \mathbb{P}_4 : \text{ grado de } p = 4\}.$
7. La traza de una matriz $A_{n\times n}$ se define como:

   $$\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

   Sean $V = M_{nn}$ y $W = \{A \in M_{nn} : \operatorname{tr} A = 0\}.$
8. $V = M_{22},\ W = \left\{A \in M_{22} : A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\right\}.$
9. $V = M_{23},\ W = \left\{A \in M_{23} : A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}, \text{ donde } a = 2c + 1\right\}.$
10. $V = M_{23},\ W = \left\{A \in M_{23} : A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ donde } b = a + c\right\}.$
11. $V = C[0, 1],\ W = \{f \in C[0, 1] : f(0) = f(1) = 0\}.$
12. $V = C[0, 1],\ W = \{f \in C[0, 1] : f(0) = 1\}.$
13. Sean $V = M_{23},\ W_1 = \left\{A \in M_{23} : A = \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\right\}$ y $W_2 = \left\{A \in M_{23} : A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & 0 \end{bmatrix} \text{ con } b = a + c\right\}.$
    a. Demuestre que W_1 y W_2 son subespacios.
    b. Describa el subconjunto $W = W_1 \cap W_2$ y demuestre que es un subespacio.

14. Sea $W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{X} = \mathbf{0},\ \text{con } A \in M_{m\times n}\}$.

Demuestre que W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. W se llama *espacio nulo* de la matriz A.

15. Sean $\mathbf{x} = (1,\ 2,\ 4)$ e $\mathbf{y} = (-3,\ 2,\ 0)$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$ y sea

$$W = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{u} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y},\ \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Demuestre que W es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

16. Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V.

Sea $W_1 + W_2 = \{\mathbf{v} : \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \text{ con } \mathbf{v}_1 \in W_1 \text{ y } \mathbf{v}_2 \in W_2\}$.

Demuestre que $W_1 + W_2$ es un subespacio de V.