Ejercicios

Módulo 12

En los ejercicios 1 a 7 encuentre núcleo, imagen, rango y nulidad de la transforrmación lineal dada:

1. $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix}.$

2. $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ 5x+5y \\ x-y \end{bmatrix}.$

3. $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x+z \\ y+z \end{bmatrix}.$

4. $T:\mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_2,\; T(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3) = a_0+a_1+a_2x+a_3x^2.$

5. $T:\mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_3,\; T(p) = xp.$

6. $T:M_{3\times 3} \to \mathbb{R},\; T(A) = t_r A.$

7. $T:C[0,1] \to \mathbb{R},\; T(f) = f(1).$

8. Sea $D:\mathbb{P} \to \mathbb{P}$ ($\mathbb{P}$ es el espacio vectorial de todos los polinomios) dada por $D(p) = p'$ (la derivada del polinomio p). Describa el núcleo de D.

9. Sea $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal tal que $T(1,1) = (0,0)$ y $T(0,1) = (1,1)$. Demuestre que tanto el núcleo como la imagen de T son rectas en el plano xy que pasan por el origen. Encuentre las ecuaciones de estas rectas.

10. Sea $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $T(1,1,0) = T(0,2,1) = (0,0)$ y $T(-1,2,4) = \mathbf{v} \neq \mathbf{0}.$ Demuestre que el núcleo de T es un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen. Encuentre su ecuación.

11. Sea $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ la transformación lineal $T(\mathbf{X}) = A\mathbf{X}$, donde A es una matriz $m\times n$. ¿Qué relación guardan el núcleo de T y el espacio solución del sistema homogéneo de ecuaciones lineales $A\mathbf{X} = \mathbf{0}$?

12. Sea $T: M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ la transformación lineal $T(A) = AB - BA$ en donde $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Describa el núcleo de T.

13. Encuentre una transformación lineal T de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\text{nu}\, T = \{(x, y, z) : 2x - y + z = 0\}$.

14. Demuestre el teorema 3.

15. Muestre que $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por $T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, transforma el círculo unitario $x_1^2 + x_2^2 = 1$ en una elipse.

Ejercicios del módulo 12