Ejercicios

Módulo 18

1. La población de una cierta variedad de peces aumenta de manera que el crecimiento en cualquier año es el doble del crecimiento en el año anterior. Si inicialmente se tenían 50 peces y después del primer año se contabilizaron 70 peces:

   a. Encuentre el tamaño de la población de peces en cualquier año.
   b. Encuentre el tamaño de la población después del quinto año.
   c. Encuentre el año en que la población de peces alcanza 2800 individuos.

2. Suponga que hay tres centros principales de camiones «múdese usted mismo». Cada mes, la mitad de los que están en Boston y en Los Ángeles van a Chicago, la otra mitad permanece donde está y los camiones de Chicago se dividen igualmente entre Boston y Los Ángeles. Si inicialmente la compañía tenía x_0, y_0, z_0 camiones en Boston, Chicago y Los Ángeles, respectivamente,

   a. Encuentre la distribución de camiones de la compañía en las tres ciudades, para cada mes.
   b. Determine cuál será a largo plazo la distribución de camiones de la compañía.

3. Cada año 1/10 de la gente de Estados Unidos que vive fuera de California se muda dentro y 2/10 de la gente que vive dentro de California se muda fuera. Si inicialmente y_0 y z_0 eran los tamaños de las poblaciones fuera y dentro de California:

   a. Encuentre, para el k-ésimo año, el tamaño de la población que vive fuera (dentro) de California.
   b. ¿Puede modelar este problema como un proceso de Markov?
   c. Encuentre la probabilidad de que un individuo de Estados Unidos, elegido al azar, viva fuera (dentro) de California en el k-ésimo año.
   d. Encuentre la distribución de la población americana a largo plazo.

4. Suponga que hay una epidemia en la que cada mes se enferma la mitad de los que están sanos y muere la cuarta parte de los que están enfermos. Suponga que inicialmente había s_0 y e_0 individuos sanos y enfermos, respectivamente, y ningún individuo había muerto.

   a. Encuentre la distribución de la población para el k-ésimo mes y diga cuál es la probabilidad en ese mes, para cada uno de los siguientes eventos: estar sano, estar enfermo, estar muerto.
   b. ¿Puede modelar este problema como un proceso de Markov?
   c. Encuentre la distribución de la población a largo plazo.

5. Un curso de Química se imparte en dos secciones. Si cada semana dejan el curso $1/4$ de los que están en la sección A y $1/3$ de los que están en la sección B, y 1/6 de cada sección se transfiere a la otra:/

   a. A largo plazo, ¿cuál será la distribución de alumnos?
   b. ¿Puede modelar el problema como un proceso de Markov?

Para resolver *a* y *b* suponga que inicialmente tenían x_0 e y_0 estudiantes en las secciones A y B y ningún estudiante fuera del curso.

6. El crecimiento de un cultivo de bacterias en un medio nutritivo se observa cada dos horas y cada vez se encuentra que la población ha crecido 30% con respecto a la vez anterior.

   a. Denote por P_n la población de bacterias después de $2n$ horas y describa este proceso de crecimiento por medio de una ecuación.
   b. Dado que la población inicial es 1000 bacterias, determine P_2 y P_4.

7. En un estudio de enfermedades infecciosas se mantiene un registro de brotes de sarampión en un colegio particular. Se estima que la población P_n infectada en la n-ésima semana está dada por la ecuación $P_{n+2} = P_{n+1} - 1/5 P_n$. Si $P_0 = 0$ y $P_1 = 1000$:

   a. Encuentre la población de infectados en la n-ésima semana.
   b. ¿Se puede modelar el problema como un proceso de Markov?
   c. ¿Cuántos infectados se tendrán después de transcurridas seis semanas?

8. Una población de conejos criados en un laboratorio tiene las siguientes características:

   - La mitad de los conejos sobrevive el primer año. De éstos, la mitad sobrevive el segundo año. La duración de la máxima vida es tres años.

   - Durante el primer año los conejos no producen descendencia. El número medio de descendencia es seis durante el segundo año y ocho durante el tercer año.

Clase de primera edad	$0 \leq \text{edad} < 1$
Clase de segunda edad	$1 \leq \text{edad} < 2$
Clase de tercera edad	$2 \leq \text{edad} \leq 3$

   Si actualmente la población consta de 24 conejos en la clase de la primera edad, 24 en la clase de la segunda edad y 20 en la tercera edad, ¿cuál será la distribución de conejos cuando hayan transcurrido diez años?

9. Una compañía de robótica quiere fabricar un brazo que deberá recoger partes de una banda transportadora para colocarlas en otra banda. Ocasionalmente el brazo falla, pero el robot está diseñado para que en caso de falla se activen circuitos secundarios. En las observaciones se descubre que si el brazo falla en una ocasión, tendrá éxito la siguiente vez 97% de las veces. Si el brazo tiene éxito en cierto intento, los circuitos secundarios se desactivarán y el brazo fallará la siguiente vez apenas 2% de las veces. ¿Cumplirá el brazo con el requerimiento del cliente de que trabaje exitosamente 98% de las veces?

10. En un día dado, un estudiante está sano o bien está enfermo. De los estudiantes que están sanos hoy, 95% estará sano mañana. De los estudiantes que están enfermos hoy, 55% estará enfermo mañana.

   a. ¿Cuál será la matriz para esta situación?
   b. Suponga que el lunes 20% de los estudiantes está enfermo. ¿Qué fracción o porcentaje de los estudiantes es probable que esté enfermo el miércoles?
   c. Si un estudiante está bien hoy, ¿cuál será la probabilidad de estar bien dentro de dos días?
   d. ¿Cuál es la probabilidad de que después de muchos días una persona dada esté enferma?