Ejercicios

Módulo 7

En los ejercicios siguientes, todas las bases son bases ordenadas.

En los ejercicios 1 a 7 calcule el vector coordenado de **v** con respecto a la base B dada para el espacio vectorial V.

1. V es $\mathbb{R}^2$, $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$, $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

2. V es $\mathbb{R}^3$, $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$.

3. V es $\mathbb{R}^3$, $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$, $\mathbf{v}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$.

4. V es $\mathbb{P}_1$, $B=\{1+x,\ -1+2x\}$, $\mathbf{v}=3+4x$.

5. V es $\mathbb{P}_2$, $B=\{1,\ x-1,\ x^2-1\}$, $\mathbf{v}=1+2x-x^2$.

6. V es $\mathbb{P}_2$, $B=\{1-x+x^2, 1+x, 1+x^2\}$, $\mathbf{v}=3-2x+4x^2$.

7. V es M_{22}, $B=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\right\}$ $\mathbf{v}=\begin{bmatrix}2&0\\-1&3\end{bmatrix}$.

En los ejercicios 8 a 10, sean

$$B_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right\},\ B_2=\left\{\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\right\},\ B_3=\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right\},\ B_4=\left\{\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2\\1/2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/2\\\sqrt{3}/2\end{pmatrix}\right\}$$

bases para $\mathbb{R}^2$.

8. Halle las matrices de transición

   a. de B_1 y B_2.
   b. de B_2 y B_3.
   c. de B_1 y B_3.

   Multiplique las matrices de a y b en ambas formas. ¿Está alguno de estos productos relacionado con la matriz de c?

9. Sea $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Exprese $(\mathbf{x})_{B_1}$. Usando las matrices del ejercicio 8, calcule $(\mathbf{x})_{B_2},(\mathbf{x})_{B_3}$.

10. Calcule las matrices de transición de B_2 a B_4 y de B_4 a B_2.

En los ejercicios 11 a 13 calcule el vector $\mathbf{v}$ si el vector de coordenadas $[\mathbf{v}]_B$ está dado con respecto a la base B de V.

11. V es $\mathbb{R}^2$, $B=\left\{\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right\}$, $(\mathbf{v})_B=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

12. V es $\mathbb{P}_2$, $B=\left\{1-x,\ 1,\ 1+x+x^2\right\}$, $(\mathbf{v})_B=\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}$.

13. V es $\mathbb{P}_3$, $B=\left\{-1+x^2,\ 2+2x+x^3,\ 1+2x-x^2+3x^3,\ 2x^2+3x^3\right\}$, $(\mathbf{v})_B=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\\3\end{bmatrix}$.

14. Sean $B_1=\{(1,3),(-1,2)\}$, $B_2=\{(0,1),(-2,3)\}$ bases para $\mathbb{R}^2$, y sean $\mathbf{v}=(3,4)$, $\mathbf{w}=(-4,5)$.

   a. Determine los vectores de coordenadas de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ con respecto a la base B_2.
   b. Determine la matriz de transición $P_{B_1\leftarrow B_2}$ de la base B_2 en la base B_1.
   c. Determine los vectores de coordenadas de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ con respecto de B_1 utilizando $P_{B_1\leftarrow B_2}$.
   d. Determine los vectores de coordenadas de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ con respecto de S de manera directa.
   e. Determine la matriz de transición $P_{B_2\leftarrow B_1}$ de la base B_1 en la base B_2.
   f. Determine los vectores de coordenadas de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ con respecto de B_2 utilizando $P_{B_2\leftarrow B_1}$. Compare las respuestas con las del literal *a*.

15. Sean $B_1=\left\{1+x^2,\ -2+x,\ 3+x\right\}$ y $B_2=\left\{x+2x^2,\ 3+x^2+x,\ x\right\}$ bases para $\mathbb{P}_2$. Sean $\mathbf{v}=6-4x+8x^2$ y $\mathbf{w}=9-x+7x^2$. Responda los literales del ejercicio 14.

16. Sean $B_1=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$ y $B_2=\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2\}$ bases para $\mathbb{P}_1$, donde $\mathbf{w}_1=x$, $\mathbf{w}_2=1+x$. Si la matriz de transición de B_1 a B_2 es $\begin{bmatrix}2&3\\-1&2\end{bmatrix}$, determine B_1.

17. Sean $B_1=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ y $B_2=\{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3\}$ bases para $\mathbb{R}^3$, donde $\mathbf{v}_1=(1,0,1)$, $\mathbf{v}_2=(1,1,0)$, $\mathbf{v}_3=(0,0,1)$. Si la matriz de transición de B_2 en B_1 es $\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&1\\-1&-1&1\end{bmatrix}$, determine B_2.

Ejercicios del módulo 7

18. Sean $B_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ y $B_2 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ bases para $\mathbb{R}^2$, donde $\mathbf{v}_1 = (1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$. Si la matriz de transición de B_2 en B_1 es $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, determine B_2.

19. Suponga que los ejes x e y en el plano se rotan un ángulo θ en sentido antihorario generando nuevos ejes x', y'.

   a. Determine las coordenadas x, y de los vectores **i** y **j** rotados.

   b. Demuestre que la matriz de cambio de coordenadas está dada por $\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

En los ejercicios 20 a 24 determine si el conjunto de vectores dado es LI o LD.

20. En $\mathbb{P}_2 : 3 + 2x,\ 1 - x + x^2,\ 2x - x^2$.

21. En $\mathbb{P}_2 : -2 + 2x,\ 2x + x + 12x^2,\ x + 4x^2$.

22. En $M_{22} : \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

23. En $\mathbb{P}_n : \{p_1, p_2, ..., p_{n+1} : p_i(0) = 0,\ i = 1, ..., n+1\}$.

24. En $M_{mn} : \{A_1, A_2, ..., A_{mn}$: la primera componente de cada matriz es cero$\}$.