Universidad de Antioquia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas
Cursos de Servicios para Ingeniería

Materia: Cálculo integral	Código: 2555231	Grupo: 5	Parcial 1 (25 %)	**Nota**
Docente: Alejandro Piedrahita H.			Fecha: 26/01/2022	
Estudiante:			Documento:	

La evaluación consta de 4 *ejercicios para ser resueltos en un tiempo máximo de* 1 *hora y* 50 *minutos. Los procedimientos empleados para llegar a cada respuesta deben ser justificados y quedar registrados en las hojas de respuesta. No está permitido utilizar dispositivos electrónicos ni documentos o apuntes durante la prueba. Realice los procedimientos de forma clara y ordenada.*

1. $\boxed{30\,\%}$ Calcule la integral
$$\int x \tan^{-1} x \, dx.$$

2. $\boxed{20\,\%}$ Utilice una sustitución adecuada para evaluar la integral
$$\int x^5 \sqrt{x^3+1} \, dx.$$

3. $\boxed{30\,\%}$ Evalue la siguiente integral utilizando una sustitución trigonométrica adecuada
$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

4. $\boxed{20\,\%}$ Desde un globo que sube a razón de 15 m/s, cae un objeto cuando el globo se encuentra a un altura de 200 m. Suponga que la aceleración de la gravedad tiene un valor constante de 10 m/s^2 y halle:

   a) La velocidad del objeto en el tiempo t.
   b) La posición del objeto en el tiempo t.
   c) La altura máxima que alcanza el objeto.
   d) El tiempo que tarda el objeto en el aire.
   e) La velocidad del objeto cuando llega al suelo.

Solución

1. Utilizamos integración por partes con

$$u = \tan^{-1} x, \qquad dv = x\,dx$$

Entonces

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \qquad v = \frac{1}{2}x^2$$

y por tanto

$$\int x \tan^{-1} x\,dx = \int \overbrace{\tan^{-1} x}^{u}\ \overbrace{x\,dx}^{dv} = \overbrace{\tan^{-1} x}^{u} \cdot \overbrace{\frac{1}{2}x^2}^{v} - \int \overbrace{\frac{1}{2}x^2}^{v}\ \overbrace{\frac{1}{1+x^2}\,dx}^{du}$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$

Para la última integral hallamos la descomposición en fracciones parciales del integrando:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -x^2-1 & 1 \\ \hline -1 & \end{array} \quad \Longrightarrow \quad x^2 = (x^2+1)\cdot 1 - 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$$

Por consiguiente

$$\int x \tan^{-1} x\,dx = \frac{1}{2}x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\tan^{-1} x + c$$

$$= \frac{1}{2}(x^2+1)\tan^{-1} x - \frac{1}{2}x + c$$

$$= \frac{1}{2}\left[(x^2+1)\tan^{-1} x - x\right] + c$$

2. El integrando es de la forma

$$x^5\sqrt{x^3+1} = x^5(1+x^3)^{1/2} = x^m(1+x^n)^p$$

con $m=5$, $n=3$ y $p=\frac{1}{2}$, que corresponde a un binomio diferencial donde $\frac{m+1}{n} = \frac{5+1}{3} = \frac{6}{3} = 2$ es entero y por tanto empleamos la sustitución $u^2 = 1+x^3$. Entonces $2u\,du = 3x^2dx$ y

$$\int x^5\sqrt{x^3+1}\,dx = \int x^3\sqrt{x^3+1}\cdot x^2dx = \int (u^2-1)\cdot u\cdot \frac{2}{3}u\,du$$

$$= \frac{2}{3}\int (u^4-u^2)\,du = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{5}u^5-\frac{1}{3}u^3\right]+c$$

$$= \frac{2}{15}u^5-\frac{2}{9}u^3+c$$

$$= \frac{2}{15}(1+x^3)^{5/2}-\frac{2}{9}(1+x^3)^{3/2}+c$$

3. Sea $x = \operatorname{sen}\theta$, donde $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$. Entonces $dx = \cos\theta \, d\theta$,

$$\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{\cos^2\theta} = |\cos\theta| = \cos\theta,$$

y

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{\cos\theta}\cdot\cos\theta\,d\theta$$

$$= \int \operatorname{sen}^3\theta\,d\theta$$

$$= \int \operatorname{sen}^2\theta\,\operatorname{sen}\theta\,d\theta$$

$$= \int (1-\cos^2\theta)\,\operatorname{sen}\theta\,d\theta$$

$u = \cos\theta$

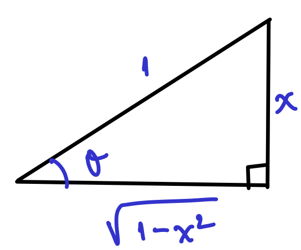
$du = -\operatorname{sen}\theta\,d\theta$

$$= \int (1-u^2)(-du)\,;$$

$$= \int (u^2-1)\,du$$

$$= \frac{1}{3}u^3 - u + C$$

$$= \frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta + C$$

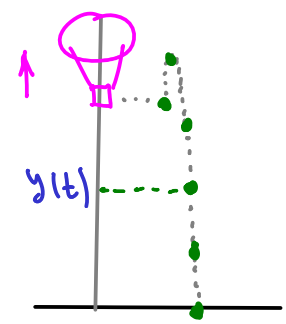


$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3 - \sqrt{1-x^2} + C$$

$$= \frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} - (1-x^2)^{1/2} + C$$

4.

Sea $y(t)$ la posición del objeto al tiempo t.



a) $\frac{dv}{dt} = a = -10\, m/s^2$ implica $v = \int a\,dt = -10t + c$. Como para $t=0$, $v=15$

$v(0) = c = 15$ y $v(t) = -10t + 15$.

b) $\frac{dy}{dt} = v = -10t+15$ implica $y = \int (-10t+15)\,dt = -5t^2+15t+c$. Como para $t=0$, $v=200$, entonces $v(0) = c = 200$ y $y(t) = -5t^2+15t+200$.

c) La altura máxima la alcanza el objeto cuando $v(t) = -10t+15 = 0$, es decir cuando $10t = 15$, $t = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$ seg. La altura máxima es

$$y(1.5) = -5(1.5)^2 + 15\times 1.5 + 200 = 211.25 \text{ m}$$

d) El objeto está en el aire hasta que $y(t) = 0$, es decir hasta que

$$y(t) = -5t^2 + 15t + 200 = -5(t^2 - 3t - 40) = -5(t-8)(t+5) = 0$$

Entonces $t=8$ o $t=-5$. Elegimos $t=8>0$ y por tanto el objeto durá en el aire 8 seg.

e) Por lo anterior el objeto llega al suelo cuando $t = 8$ seg y por tanto la velocidad con la que impacta el suelo el objeto es

$$v(8) = -10\cdot 8 + 15 = -80 + 15 = -65 \text{ m/s}.$$