UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA 1803	**Universidad de Antioquia** Facultad de Ciencias Exactas y Naturales Instituto de Matemáticas Cursos de Servicios programas virtuales Ingeniería	Cálculo Integral Taller 4

1. Responda Falso (**F**) o Verdadero (**V**) según sea el caso, **justifique su respuesta**.

   1.1 Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$ converge para $x=-1.1$, también converge para $x=7$.

   1.2 Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para $x=-2$, entonces también converge para $x=2$.

   1.3 La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^{\pi}}$ converge.

   1.4 si $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} b_n$ existe, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe.

   1.5 $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}$

   1.6 Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = N$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = M$ donde $M, N \in \mathbb{R}$, entonces la sucesión $\{a_n \cdot b_n\}$ es convergente.

   1.7 Una sucesión $\{a_n\}$ es estrictamente creciente si $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   1.8 Si a una serie se le suprime o añade un número finito de términos su carácter no se ve alterado.

   1.9 Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces $\{a_n\}$ es convergente.

2. Escriba los primeros cinco términos de $\{a_n\}$, determine si la sucesión converge o diverge; si converge halle $\lim_{n\to\infty} a_n$ si no, explique por qué diverge

   2.1 $a_n = \dfrac{n}{3n-1}$ Rta: $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$

   2.2 $a_n = \dfrac{4n^2+2}{n^2+3n-1}$ Rta: $\lim_{n\to\infty} a_n = 4$

   2.3 $a_n = \dfrac{n^3+3n^2+3n}{(n+1)^3}$ Rta: $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

   2.4 $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+2}$ Rta: $\{a_n\}$ diverge

   2.5 $a_n = \dfrac{\cos(n\pi)}{n}$ Rta: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

   2.6 $a_n = \dfrac{e^{2n}}{n^2+3n-1}$ Rta: $\{a_n\}$ diverge

   2.7 $a_n = \dfrac{(-\pi)^n}{5^n}$ Rta: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

   2.8 $a_n = 2 + (0.99)^n$ Rta: $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

   2.9 $a_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ Rta: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

   2.10 $a_n = \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{n/2}$ Rta: $\lim_{n\to\infty} a_n = e$

3. Encuentre una fórmula para el término n-ésimo de la sucesión, asumiendo que el patrón de formación en los primeros términos continua. Luego determine si la sucesión converge o diverge y si converge halle el límite.

3.1 $\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, ...\right\}$ Rta: $a_n = \left\{\frac{1}{2n-1}\right\}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

3.2 $\left\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, ...\right\}$ Rta: $a_n = \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

3.3 $\left\{2, 7, 12, 17, ...\right\}$ Rta: $a_n = \left\{5n-3\right\}$; $\{a_n\}$ diverge

3.4 $\left\{1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \frac{16}{81}, ...\right\}$ Rta: $a_n\left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

3.5 $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...\right\}$ Rta: $a_n\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

3.6 $\left\{-1, \frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, \frac{4}{7}, -\frac{5}{9}, ...\right\}$ Rta: $a_n = \left\{(-1)^n\frac{n}{2n-1}\right\}$; $\{a_n\}$ diverge

3.7 $\left\{1, \frac{2}{2^2-1^2}, \frac{3}{3^2-2^2}, \frac{4}{4^2-3^2}, ...\right\}$ Rta: $a_n = \left\{\frac{n}{2n-1}\right\}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$

3.8 $\left\{\operatorname{sen} 1, 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}, 3\operatorname{sen}\frac{1}{3}, 4\operatorname{sen}\frac{1}{4}, ...\right\}$ Rta: $a_n = \left\{n\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right\}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

3.9 $\left\{2, 1, \frac{2^3}{3^2}, \frac{2^4}{4^2}, \frac{2^5}{5^2}, ...\right\}$ Rta: $a_n = \left\{\frac{2^n}{n^2}\right\}$; $\{a_n\}$ diverge

4. Determine si la sucesión $\{a_n\}$ converge o diverge:

4.1 $a_n = e^{1/n}$ Rta: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

4.2 $a_n = \tan\left(\frac{2n\pi}{1+8n}\right)$ Rta: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

4.3 $a_n = \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}$ Rta: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

4.4 $a_n = \frac{e^n + e^{-n}}{e^{2n}-1}$ Rta: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

4.5 $a_n = \frac{\cos^2 n}{2^n}$ Rta: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

4.6 $a_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ Rta: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^2$

4.7 $a_n = \ln(2n^2+1) - \ln(n^2+1)$ Rta: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ln 2$

4.8 $a_n = \frac{n!}{2^n}$ Rta: $\{a_n\}$ diverge

5. Demuestre que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y $\{b_n\}$ está acotada, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$
¿Para qué valores de r converge la sucesión $\{nr^n\}$?

6. Demuestre que si $\{a_n\}$ converge y $\{b_n\}$ diverge, entonces $\{a_n + b_n\}$ diverge.

7. Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ divergen, ¿es cierto afirmar que $\{a_n + b_n\}$ diverge?

8. Considere la siguiente sucesión
$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}...$$

(a) Encuentre el término n-ésimo a_n

(b) Determine si la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ es convergente, convergente absolutamente, condicionalmente convergente o divergente.

9. Muestre que la sucesión $(-1)^{n+1}\frac{n^4}{2n+7n^6}$ es convergente.

10. Evaluar los siguientes límites de sucesiones

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n-3}{2^n}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-1)!}{(2n+1)!}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^n-e^{-n}}{e^{2n}-1}$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{\ln 2n}$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos^2 n}{2^n}$

11. Determine si la serie dada es convergente o divergente. Si es convergente, encuentre su suma

11.1 $3+2+\frac{4}{3}+\frac{8}{9}+\cdots$

11.2 $-3-4+\frac{16}{3}-\frac{64}{9}+\cdots$

11.3 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{n^2-1}$

11.4 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+2^n}{3^n}$

11.5 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)$

11.6 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{e^n}+\frac{1}{n(n+1)}\right)$

11.7 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}$

11.8 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+4n+3}$

11.9 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

11.10 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{(-9)^{n-1}}$

12. Determinar si la serie dada es convergente o divergente indicando el criterio utilizado.

12.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$

12.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n^2}$

12.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$

12.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n!}$

12.5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{n^2+1}$

12.6 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\arctan(n)}{n^2+1}$

12.7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{3^n-1}$

12.8 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log n}{n+1}$

12.9 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\log^2 n$

12.10 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n^2+1)}$

12.11 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$

12.12 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{5n+2}\right)^{n/2}$

12.13 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$

12.14 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)2^n}{n!}$

12.15 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{7n-3}$

12.16 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$

12.17 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$

12.18 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2n-1)}$

12.19 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+2)!}{10^n n!}$

12.20 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}}{5^{n-1}}$

13. Analice la convergencia absoluta, condicional o divergencia de las siguientes series:

13.1 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{5n}$

13.2 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n^3}{2^n}$

13.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{4}\right)^n$

13.4 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{\ln n}$

13.5 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{2n+1}$

13.6 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n}{2^n}$

13.7 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

13.8 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{4^n}$

13.9 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{n}{6n-5}$

13.10 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{2n+1}{n(n+1)}$

13.11 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{n^2+2}{(n+2)^2}$

13.12 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{\ln n}$

14. Hallar el intervalo y el radio de convergencia de las series dadas incluyendo el estudio de los puntos extremos:

14.1 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n$

14.2 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$

14.3 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2n)! \left(\frac{x}{2}\right)^n$

14.4 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)(n+2)}$

14.5 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-4)^n}{3^n}$

14.6 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{3^n \sqrt{n+1}\sqrt{n+2}}$

14.7 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+1)3^{n+1}}$

14.8 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)}$

14.9 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)}$

14.10 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

14.11 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots (2n+1)} x^{2n+1}$

14.12 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{n2^n}$

14.13 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)3^n}$

14.14 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3+1}$

14.15 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3.5)^n}{n^2 6^n}$

14.16 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x-3)^n}{4^n \sqrt{n}}$

15. Encuentre una representación como serie de potencias para la función y determine el intervalo de convergencia

15.1 $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$

15.2 $f(x) = \dfrac{2}{3-x}$

15.3 $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$

15.4 $f(x) = \dfrac{x}{9+x^2}$

16. Encuentre una representación como serie de Maclaurin para la función dada

16.1 $f(x) = e^x$

16.2 $f(x) = \operatorname{sen} x$

16.3 $f(x) = \cos x$

16.4 $f(x) = \tan^{-1} x$

16.5 $f(x) = e^{x^2}$

16.6 $f(x) = \ln(1+x)$

16.7 $f(x) = \sqrt{1+x}$

16.8 $f(x) = xe^{-x}$

16.9 $f(x) = \cosh x$

16.10 $f(x) = e^{2x}$

16.11 $f(x) = (1-x)^{-2}$

16.12 $f(x) = \operatorname{senh} x$

16.13 $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$

16.14 $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

16.15 $f(x) = \tan x$

16.16 $f(x) = e^x - e^{-x}$

16.17 $f(x) = x^2 \tan^{-1} x^2$

16.18 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

17. Encuentre una representación como serie de Taylor para cada función en el calor dado de c

17.1 $f(x) = e^x,\ c = 2$

17.2 $f(x) = \operatorname{sen} x,\ c = \frac{\pi}{4}$

17.3 $f(x) = \dfrac{1}{x},\ c = -3$

17.4 $f(x) = \ln(1 + x)$

17.5 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}},\ c = 9$

17.6 $f(x) = xe^{-x}$

17.7 $f(x) = \cosh x$

17.8 $f(x) = e^{2x}$

17.9 $f(x) = (1 - x)^{-2}$

17.10 $f(x) = \operatorname{senh} x$

17.11 $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$

17.12 $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

17.13 $f(x) = \tan x,\ c = \frac{\pi}{4}$

17.14 $f(x) = \dfrac{1}{x+1},\ c = 1$

18. Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{sen} \frac{k}{n}\right) \frac{1}{n}$ Sugerencia: Escriba una integral definida equivalente.
Rta: $1 - \cos 1$

19. Muestre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{1 + (k/n)^2}\right) \frac{1}{n} = \frac{\pi}{4}$

20. Utilice los criterios de convergencia de series, para determinar si la integral $\displaystyle\int_1^{\infty} x^2 e^{-x} dx$ converge o diverge.

21. Hallar la serie de Taylor para la función $f(x) = \ln(x)$ alrededor del punto $c = 1$ y halle el valor aproximado para $\ln(0,5)$.

22. Evalúe la integral indefinida como una serie infinita

22.1 $\displaystyle\int x \cos x^3 dx$

22.2 $\displaystyle\int \frac{\cos x - 1}{x} dx$

22.3 $\displaystyle\int \tan^{-1} x^3 dx$

22.4 $\displaystyle\int \frac{e^x - 1}{x} dx$

23. Utilice series para obtener un valor aproximado de la integral definida

23.1 $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) dx$

23.2 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1 + x^3} dx$

23.3 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx$

23.4 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + x^4} dx$

EXITOS