Ejercicios

Módulo 15

1. Sea $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que:

$$T\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$T\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Demuestre que T es una isometría.

2. Considere la transformación lineal $T: M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ para la cual

$$T\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2\end{bmatrix}, \qquad T\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2\\ -1/2 & -1/2\end{bmatrix},$$

$$T\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2 & -1/2\\ 1/2 & -1/2\end{bmatrix}, \qquad T\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2 & -1/2\\ -1/2 & 1/2\end{bmatrix}.$$

Compruebe que T es una isometría.

3. Determine el vector $(a,\ b)\in\mathbb{R}^2$ tal que la transformación $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ para la cual $T(1,0)=\left[1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2}\right]$, $T(0,1)=(a,b)$ sea una isometría.

4. Sea $B=\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Determine una isometría $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ para la cual

$$T(\mathbf{v}_1)=\frac{1}{3}(2\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+2\,\mathbf{v}_3),\quad T(\mathbf{v}_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2).$$

5. Dé un ejemplo de una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que preserve los ángulos y no sea una isometría.

6. Sea $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ una isometría y sea $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Demuestre que $S(\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{x}$ es una isometría.