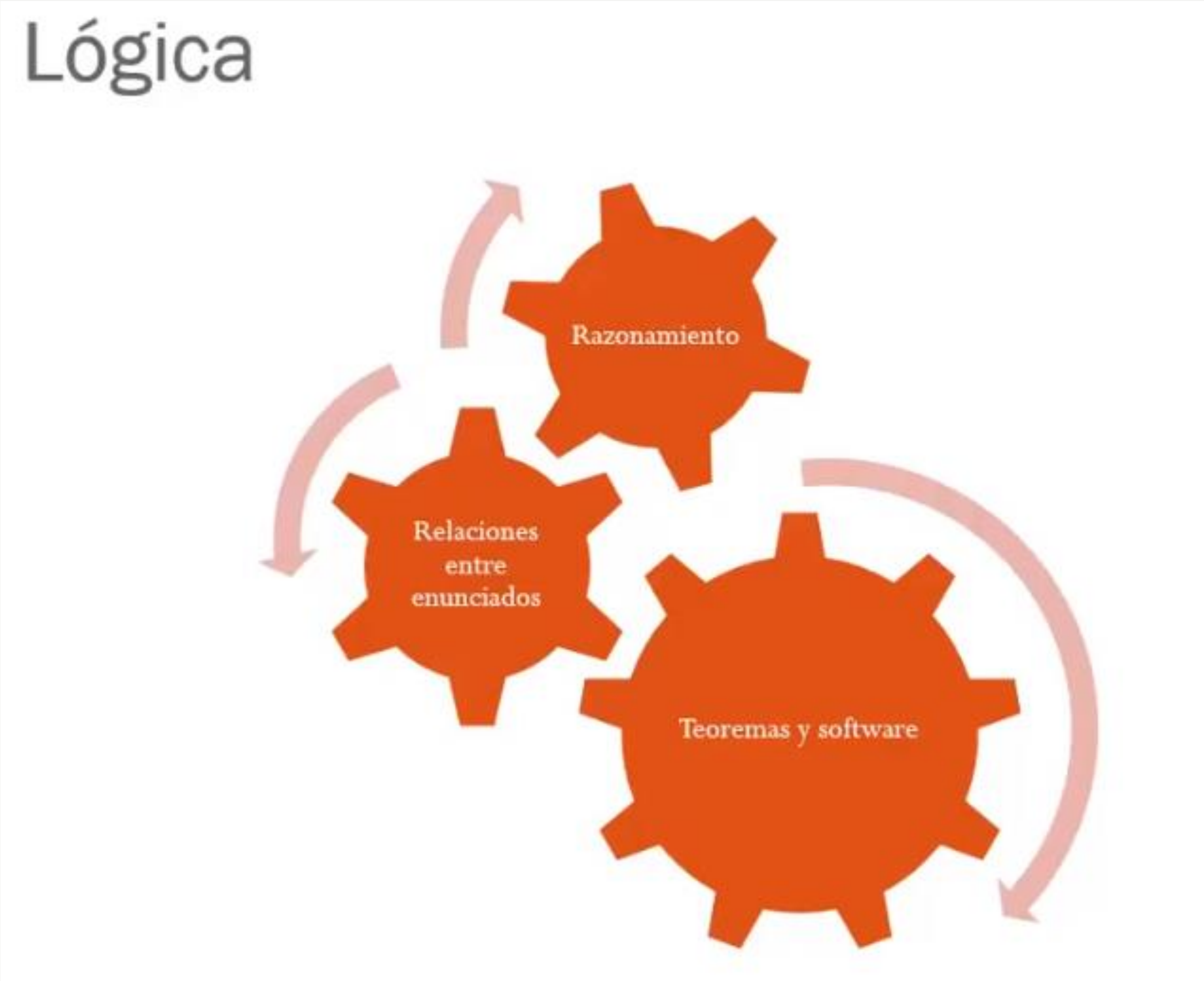
PROPOSICIONES

LÓGICA PROPOSICIONAL

LA LOGICA


Lógica
Razonamiento
Relaciones entre enunciados
Teoremas y software

EJEMPLO DE RAZONAMIENTO LOGICO

Lógica

Todos los matemáticos utilizan sandalias.
Cualquier persona que utilice sandalias es algebrista.
Por tanto, todos los matemáticos son algebristas.

LÓGICA PROPOSICIONAL

Proposiciones

¿Cuál de los siguientes enunciados en falso o verdadero (pero no ambos)?

- Los únicos enteros positivos que dividen al 7 son 1 y el propio 7.
- El equipo de fútbol pumas fue campeón la temporada pasada.
- Para todo entero positivo n, existe un número primo mayor que n.
- La Tierra es el único planeta en el universo que tiene vida.
- Compré un boleto para el concierto del viernes.

LÓGICA PROPOSICIONAL

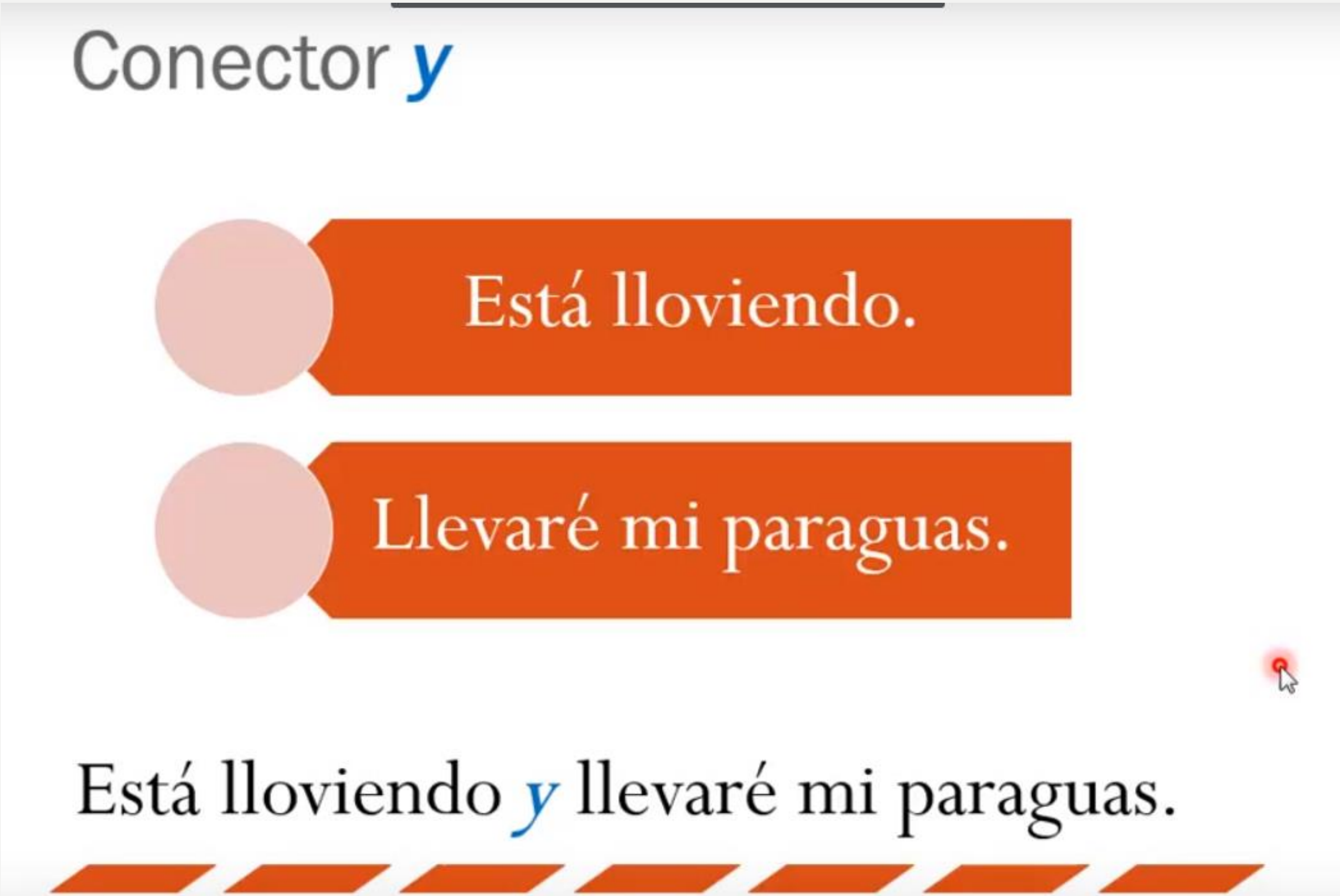
Proposiciones

- Afirmación verdadera o falsa.
- No pregunta u orden.
- Minúsculas: p,q,r.
- p: 1 + 1 = 3

CONECTORES
CONJUNCIÓN, DISYUNCIÓN Y NEGACIÓN

LÓGICA PROPOSICIONAL

CONECTOR –Y-


Conector y
Está lloviendo.
Llevaré mi paraguas.
Está lloviendo y llevaré mi paraguas.

CONECTORES –Y-   -O-

Conectores

Sean p y q proposiciones:

La **conjunción** de p y q se denota por:

$$p \wedge q$$

Sean p y q proposiciones:

La **disyunción** de p y q se denota por:

$$p \vee q$$

EJEMPLO CONECTORES

Si

p: $1 + 1 = 3$

q: Un decenio tiene 10 años.

Entonces la **conjunción** de p y q es:

$p \wedge q$: $1 + 1 = 3$ **y** un decenio tiene 10 años.

Entonces la **disyunción** de p y q es:

$p \vee q$: $1 + 1 = 3$ **o** un decenio tiene 10 años.

TABLAS DE VERDAD - CONJUNCIÓN

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Si

p: $1 + 1 = 3$

q: Un decenio tiene 10 años.

Entonces p es **falsa** y q es **verdadera** y la conjunción:

$p \wedge q$: $1 + 1 = 3$ y un decenio tiene 10 años.

TABLAS DE VERDAD EJEMPLOS

Tablas de verdad - Ejemplos

Si

p: 2 es un número primo.

q: 2 es un número par.

Entonces p es **verdadera** y q es **verdadera** y la conjunción:

$p \land q$: 2 es número primo **y** 2es un número par.

Es verdadera

Si

p: $1 + 1 = 3$.

q: Monterrey es un estado del norte de México.

Entonces p es **falsa** y q es **falsa** y la conjunción:

$p \land q$: 1+1=3 **y** Monterrey es un estado del norte de México.

Es Falsa

DISYUNCIÓN – TABLA DE VERDAD

El valor de verdad de la proposición compuesta $p \vee q$ se define mediante la tabla de verdad:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Si

p: $1 + 1 = 3$

q: Un decenio tiene 10 años.

Entonces p es **falsa** y q es **verdadera** y la disyunción:

$p \vee q$: $1 + 1 = 3$ **o** un decenio tiene 10 años.

Es verdadera

TABLAS DE VERDAD – EJEMPLOS - DISYUNCIÓN

Si

p: 2 es un número primo.
q: 2 es un número par.

Entonces p es **verdadera** y q es **verdadera** y la disyunción:

$p \lor q$**:** 2 es número primo **o** 2es un número par.

Es verdadera

Si

p: $1 + 1 = 3$.
q: Monterrey es un estado del norte de México.

Entonces p es **falsa** y q es **falsa** y la conjunción:

$p \lor q$**:** 1+1=3 **o** Monterrey es un estado del norte de México.

Es Falsa

TABLAS DE VERDAD - NEGACIÓN

La negación de p, es denotada por $\neg p$ es la proposición ***no p***:

El valor de verdad de la proposición $\neg p$ se define por la tabla de verdad:

p	$\neg p$
V	F
F	V

NEGACIÓN - EJEMPLO

Si

p: José María Morelos fue presidente de México.

La negación de p es la proposición:

$\neg p$: No es cierto que José María Morelos fue presidente de México.

Por lo tanto p **es Falsa**

y $\neg p$ **es verdadera**

EJEMPLO DE DISYUNCIÓN, NEGACIÓN Y CONJUNCIÓN

Sean

p: Blas Pascal inventó varias máquinas calculadoras.

q: La primera computadora digital completamente electrónica fue construida en el siglo XX.

r: $\boldsymbol{\pi}$ se calculó hasta un millón de cifras decimales en 1954.

Representar simbólicamente:

Blas Pascal inventó varias máquinas calculadoras y no es cierto que la primera computadora digital completamente electrónica fue construida en el siglo XX, o bien $\boldsymbol{\pi}$ se calculó hasta un millón de cifras decimales en 1954.

$$
\begin{aligned}
(p \wedge \neg q) \vee \mathrm{r} &= (V \wedge \neg V) \vee \mathrm{F} \\
&= (V \wedge \mathrm{F}) \vee \mathrm{F} \\
&= (F) \vee \mathrm{F} \\
&= \mathrm{F}
\end{aligned}
$$

MAS EJEMPLOS

$p = \mathbf{v}$ $\quad q = \mathbf{f}$ $\quad r = \mathbf{f}$

$$r \vee (p \wedge r) \quad = \quad f \vee (v \wedge f) \quad = \quad f \vee f \quad = \quad f$$

$$(q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q) \quad = \quad (f \wedge v) \vee (v \wedge v) \quad = \quad (f) \vee (v) \quad = \quad \mathbf{v}$$

EVALUACIÓN POR TABLAS DE VERDAD

p	q	r	$(p \vee q) \wedge r$
falso	falso	falso	
falso	falso	verdadero	
falso	verdadero	falso	
falso	verdadero	verdadero	
verdadero	falso	falso	
verdadero	falso	verdadero	
verdadero	verdadero	falso	
verdadero	verdadero	verdadero	

EVALUACIÓN POR TABLAS DE VERDAD

(falso) y verdadero

p	q	r	$(p \vee q) \wedge r$
falso	falso	falso	falso
falso	falso	verdadero	
falso	verdadero	falso	
falso	verdadero	verdadero	
verdadero	falso	falso	
verdadero	falso	verdadero	
verdadero	verdadero	falso	
verdadero	verdadero	verdadero	

EVALUACIÓN POR TABLAS DE VERDAD

p	q	r	$(p \vee q) \wedge r$
falso	falso	falso	falso
falso	falso	verdadero	falso
falso	verdadero	falso	
falso	verdadero	verdadero	
verdadero	falso	falso	
verdadero	falso	verdadero	
verdadero	verdadero	falso	
verdadero	verdadero	verdadero	

EVALUACIÓN POR TABLAS DE VERDAD

p	q	r	$(p \vee q) \wedge r$
falso	falso	falso	falso
falso	falso	verdadero	falso
falso	verdadero	falso	falso
falso	verdadero	verdadero	
verdadero	falso	falso	
verdadero	falso	verdadero	
verdadero	verdadero	falso	
verdadero	verdadero	verdadero	

EVALUACIÓN POR TABLAS DE VERDAD

p	q	r	(p ∨ q) ∧ r
falso	falso	falso	falso
falso	falso	verdadero	falso
falso	verdadero	falso	falso
falso	verdadero	verdadero	verdadero
verdadero	falso	falso	
verdadero	falso	verdadero	
verdadero	verdadero	falso	
verdadero	verdadero	verdadero	

EVALUACIÓN POR TABLAS DE VERDAD

p	q	r	$(p \vee q) \wedge r$
falso	falso	falso	falso
falso	falso	verdadero	falso
falso	verdadero	falso	falso
falso	verdadero	verdadero	verdadero
verdadero	falso	falso	falso
verdadero	falso	verdadero	
verdadero	verdadero	falso	
verdadero	verdadero	verdadero	

EVALUACIÓN POR TABLAS DE VERDAD

p	q	r	(p ∨ q) ∧ r
falso	falso	falso	falso
falso	falso	verdadero	falso
falso	verdadero	falso	falso
falso	verdadero	verdadero	verdadero
verdadero	falso	falso	falso
verdadero	falso	verdadero	verdadero
verdadero	verdadero	falso	
verdadero	verdadero	verdadero	

EVALUACIÓN POR TABLAS DE VERDAD

p	q	r	$(p \vee q) \wedge r$
falso	falso	falso	falso
falso	falso	verdadero	falso
falso	verdadero	falso	falso
falso	verdadero	verdadero	verdadero
verdadero	falso	falso	falso
verdadero	falso	verdadero	verdadero
verdadero	verdadero	falso	falso
verdadero	verdadero	verdadero	

EVALUACIÓN POR TABLAS DE VERDAD

p	q	r	$(p \vee q) \wedge r$
falso	falso	falso	falso
falso	falso	verdadero	falso
falso	verdadero	falso	falso
falso	verdadero	verdadero	verdadero
verdadero	falso	falso	falso
verdadero	falso	verdadero	verdadero
verdadero	verdadero	falso	falso
verdadero	verdadero	verdadero	verdadero

CONECTORES

CONDICIONAL Y BICONDICIONAL

LÓGICA PROPOSICIONAL

PROPOSICIÓN CONDICIONAL

El decano ha anunciado que:

Si el departamento de matemáticas obtiene $20,000.00 adicionales, entonces podrá contratar a un nuevo docente.

Si p y q son proposiciones, la proposición compuesta

si p entonces q

Es una proposición condicional y se denota por

$$p \rightarrow q$$

PROPOSICIÓN CONDICIONAL

El decano ha anunciado que:

Si el departamento de matemáticas obtiene $20,000.00 adicionales, entonces podrá contratar a un nuevo docente.

Si p y q son proposiciones, la proposición compuesta

si p entonces q

...a proposició... se denota por

$$p \rightarrow q$$

Hipótesis o antecedente

Conclusión o consecuente

PROPOSICIÓN CONDICIONAL – TABLA DE VERDAD

Si definimos:

p: El departamento de matemáticas obtiene \$20,000 adicionales.
q: El departamento de matemáticas contrata un nuevo docente.

$p \rightarrow q$: ***Si*** *el departamento de matemáticas obtiene \$20,000.00 adicionales,* ***entonces*** *podrá contratar a un nuevo docente.*

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

EJEMPLO

Sean

$$p: 1 > 2, \qquad\qquad q: 4 < 8$$

Entonces p es **falsa** y q **verdadera**.

Por lo tanto,

$$p \rightarrow q = \text{verdadera}$$

$$q \rightarrow p = \text{falsa}$$

MAS EJEMPLOS

Si p es verdadera, q es falsa y r es verdadera, determina el valor de verdad de cada proposición:

1. $(p \vee q) \to r$ $\quad (V \vee F) \to V \quad V \to V = V$
2. $(p \vee q) \to \neg r$
3. $p \wedge (q \to r)$
4. $p \to (q \to r)$

MAS EJEMPLOS

Si *p* es verdadera, *q* es falsa y *r* es verdadera, determina el valor de verdad de cada proposición:

1. $(p \vee q) \rightarrow r$ $\quad (V \vee F) \rightarrow V \quad V \rightarrow V = V$

2. $(p \vee q) \rightarrow \neg r$ $\quad (V \vee F) \rightarrow \neg V \quad V \rightarrow F = F$

3. $p \wedge (q \rightarrow r)$

4. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

MAS EJEMPLOS

Si p es verdadera, q es falsa y r es verdadera, determina el valor de verdad de cada proposición:

1. $(p \vee q) \rightarrow r$	$(V \vee F) \rightarrow V$	$V \rightarrow V = V$
2. $(p \vee q) \rightarrow \neg r$	$(V \vee F) \rightarrow \neg V$	$V \rightarrow F = F$
3. $p \wedge (q \rightarrow r)$	$V \wedge (F \rightarrow V)$	$V \wedge V = V$
4. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$		

MAS EJEMPLOS

Si p es verdadera, q es falsa y r es verdadera, determina el valor de verdad de cada proposición:

1. $(p \vee q) \rightarrow r$	$(V \vee F) \rightarrow V$	$V \rightarrow V = V$
2. $(p \vee q) \rightarrow \neg r$	$(V \vee F) \rightarrow \neg V$	$V \rightarrow F = F$
3. $p \wedge (q \rightarrow r)$	$V \wedge (F \rightarrow V)$	$V \wedge V = V$
4. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$V \rightarrow (F \rightarrow V)$	$V \rightarrow V = V$

PROPOSICIÓN RECIPROCA Y CONTRARRECÍPROCA

Dada la proposición condicional $p \rightarrow q$, su recíproca es la proposición condicional $q \rightarrow p$

Por ejemplo, la recíproca de

"Si la salida no va a la pantalla, entonces los resultados se dirigen a la impresora"

será

"Si los resultados se dirigen a la impresora, entonces la salida no va a la pantalla".

PROPOSICIÓN RECIPROCA Y CONTRARRECÍPROCA

Dada la proposición condicional $p \rightarrow q$, su contrarecíproca es la proposición condicional $\neg q \rightarrow \neg p$

Por ejemplo, la contrarecíproca de

"Si María estudia mucho, entonces es buena estudiante."

será

"Si María no es buena estudiante entonces no estudia mucho".

EJEMPLOS

Si llueve, no me voy.

Recíproca

Si no me voy, entonces llueve.

Contrarecíproca

Si voy, entonces no llueve.

Si tienes cien pesos, entonces puedes comprar un helado.

Recíproca

Contrarecíproca

PROPOSICIONES BIDIRECCIONALES

Ejemplos:

*Mario entrará en la universidad, **si y sólo si** apruebo el examen de admisión.*

*Habrá cosecha **si y sólo si** llueve.*

*Obtendré un 100 en el examen **únicamente si** lo contesto correctamente en su totalidad.*

Si p y q son proposiciones, la proposición compuesta

$$p \text{ si y sólo si } q$$

Es una proposición bicondicional y se denota por

$$p \leftrightarrow q$$

PROPOSICIONES BIDIRECCIONALES – TABLA DE VERDAD

Si definimos:

p: Mario entra a la universidad.
q: Mario aprueba el examen de admisión.
$p \leftrightarrow q$: Mario entrará en la universidad, **si y sólo si** aprueba el examen.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	**V**	V
V	**F**	F
F	**V**	F
F	**F**	V

EJEMPLO

Sean

$$p: 1 < 5, \qquad\qquad q: 2 < 8$$

Entonces p es **verdadero** y q **verdadera**.

Por lo tanto,

$$p \leftrightarrow q = \mathrm{V}$$

TAUTOLOGÍA, CONTRADICCIÓN Y CONTINGENCIA

p	q	$(p \vee q) \vee \neg q$
V	V	V v F = **V**
V	F	V v V = **V**
F	V	V v F = **V**
F	F	F v V = **V**

TAUTOLOGÍA

TAUTOLOGÍA, CONTRADICCIÓN Y CONTINGENCIA

p	q	$(p \wedge q) \wedge \neg q$
V	V	$V \wedge F =$ F
V	F	$F \wedge V =$ F
F	V	$F \wedge F =$ F
F	F	$F \wedge V =$ F

CONTRADICCIÓN

TAUTOLOGÍA, CONTRADICCIÓN Y CONTINGENCIA

p	q	$p \land \neg q$
V	V	V ∧ F = F
V	F	V ∧ V = V
F	V	F ∧ F = F
F	F	F ∧ V = F

CONTINGENCIA

EQUIVALENCIAS LÓGICAS

LÓGICA PROPOSICIONAL

RECORDAR

Antes de iniciar...

De aquí en adelante usaremos letras **minúsculas** (p, q, etc.) para referirnos a proposiciones **atómicas**, y las letras **mayúsculas** (*P*, *Q*, etc.) para referirnos a proposiciones **compuestas**.

BICONDICIONAL

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

TAUTOLOGÍA

EQUIVALENCIA LÓGICA

Cuando una **bicondicional** es una **tautología**, se dice que es una **equivalencia lógica**.

O dicho de otra forma: una proposición $\boldsymbol{P}$ es **equivalente** a otra $\boldsymbol{Q}$ ($P \leftrightarrow Q$), cuando las **tablas de verdad** en P y Q son **iguales**.

EJEMPLO

$$P = p \to \neg q, \qquad Q = q \to \neg p$$

Comprobar si, P y Q son lógicamente equivalentes ...

p	q	¬q	p → ¬q
V	V	F	
V	F	V	
F	V	F	
F	F	V	

EJEMPLO

$$P = p \to \neg q, \qquad Q = q \to \neg p$$

Comprobar si, P y Q son lógicamente equivalentes …

p	q	¬q	p → ¬q
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V

p	q	¬p	q → ¬p
V	V	F	
V	F	F	
F	V	V	
F	F	V	

EJEMPLO

$$P = p \to \neg q, \qquad Q = q \to \neg p$$

Comprobar si, P y Q son lógicamente equivalentes …

p	q	¬q	p → ¬q
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V

p	q	¬p	q → ¬p
V	V	F	F
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	V

EJEMPLO

$$P = p \rightarrow \neg q, \qquad Q = q \rightarrow \neg p$$

Comprobar si, P y Q son lógicamente equivalentes …

p	q	¬q	p → ¬q
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V

p	q	¬p	q → ¬p
V	V	F	F
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	V

$P \leftrightarrow Q$

EJEMPLO

$$P = p \rightarrow \neg q, \qquad Q = q \rightarrow \neg p$$

Comprobar si, P y Q son lógicamente equivalentes …

p	q	¬q	$p \rightarrow \neg q$
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V

p	q	¬p	$q \rightarrow \neg p$
V	V	F	F
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	V

$P \leftrightarrow Q$
V
V
V
V

EJEMPLO

$$P = p \rightarrow \neg q, \qquad Q = q \rightarrow \neg p$$

Comprobar si, P y Q son lógicamente equivalentes …

p	q	¬q	p → ¬q
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V

p	q	¬p	q → ¬p
V	V	F	F
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	V

$P \leftrightarrow Q$
V
V
V
V

$\boxed{P \leftrightarrow Q}$ $\qquad$ $\boxed{P \equiv Q}$