Desarrollo tarea sobre solución, modelamiento de LP.s

Por

Camilo Enrique Farelo Paresso.
CC. 1093793316.

Katherin Johana Henao Henao.
CC. 1036953583.

David Alejandro Betancur Granados.
CC. 98603489.

Jacksson Lozano Durango.
CC. 1039687970.

Profesor: Juan Felipe Botero

Universidad de Antioquia

2019

Problema 1

Una empresa que vende mesas de 5 patas tiene en el mercado 2 referencias: la mesa básica y la mesa de lujo. La mesa básica toma 54 minutos para ensamblarse y tiene mesón, mientras que la mesa de lujo toma 96 minutos ya que tiene mesón de cristal. Thomas, un ingeniero de sistemas de la universidad de Antioquia que pertenece al área de finanzas de la empresa, caracterizó la ecuación que rige las ganancias de cada mesa y descubrió que la ganancia obtenida de la mesa básica es directamente proporcional en un factor de e^{α} al número de mesas vendidas de dicho tipo. Por su parte, la mesa de lujo es directamente proporcional en un factor de e^{β} al número de mesas vendidas de ese tipo, donde α y β dependen del proveedor. Para la semana siguiente la empresa tiene 300 patas de mesa, 50 mesones de madera y 35 de cristal y 67 horas de ensamblaje disponibles.
Sabiendo que todas las mesas producidas se venderán y que gracias a un nuevo proveedor $\alpha=5,3$ y $\beta=5,86$.
¿Cuántas mesas de cada tipo deben ser ensambladas para generar la máxima ganancia? (se puede aproximar a 2 decimales)

- Realizar la formulación del problema y resolver de manera gráfica.

Parámetros: 300 patas, 50 mesón de madera, 35 mesón de cristal, 67 horas de ensamblaje disponibles, 54 min para mesa básica, 96 min para mesa de lujo;

Variables: x_1: Número de mesas básicas/semana.
x_2: Número de mesas de lujo/semana.

Función Objetivo máximizar $x_1 e^{\alpha} + x_2 e^{\beta}$

Sujeto A:

$$\begin{cases} 54x_1 + 96x_2 \leq 4020 & (1) \\ x_1 + x_2 \leq 60 & (2) \\ x_1 \leq 50 & (3) \\ x_2 \leq 35 & (4) \\ x_1, x_2 \geq 0 & (5) \end{cases}$$

la restriccion (1) es porque el tiempo de ensamblaje de los mesones basicos más el tiempo de ensamblaje de los mesones de lujo no puede superar al tiempo disponible, que es 67 horas ó lo que es lo mismo 4020 minutos.

La restricción ② indica que solo se pueden construir 60 mesones en total, esto porque solo hay 300 patas que solo alcanzan para 60 mesas.

La restricción ③ es por la cantidad de mesones de madera disponibles.
La restricción ④ es porque solo hay 35 mesones de lujo disponibles.

La restriccion ⑤ es la de no negatividad, necesaria siempre.

Ahora, para la solución gráfica evaluaremos cada una de las restricciones, haciendo cada una de las variables cero para despejar la otra:

de ①: Si $X_1=0 \rightarrow X_2 = 41{,}88. \longrightarrow (0, 41{,}88)$
Si $X_2=0 \rightarrow X_1 = 71{,}44. \longrightarrow (71{,}44, 0)$

de ②: si $X_1=0 \rightarrow X_2 = 60 \longrightarrow (0,60)$
Si $X_2=0 \rightarrow X_1=60 \longrightarrow (60,0)$

Ahora anadiendo las restricciones ③, ④ y ⑤ obtenemos la región factible.
Para buscar los puntos extremos de esta región factible que no conocemos, lo hacemos analizando la intersección entre las respectivas rectas:

puntos:
1. $(0,0)$
2. $(0,35)$
3. $(12{,}22, 35)$ ← si $X_2=35 \leftrightarrow X_1 = 4020-(96*35)/54 = 12.22$
4. $(41.43, 18.57)$ ← $X_2 = 60 - X_1 = (4020-54X_1)/96$
5. $(50,10)$

$X_1 = \dfrac{5760-4020}{42} = 41.43$ y $X_2 = 18.57$

$X_1=50 \rightarrow X_2 = 60 - X_1 = 10.$

Para encontrar el punto óptimo evaluamos la función objetivo en los anteriores puntos y se elije el de mayor valor, ya que buscamos maximizar

1. (0-0) $\longrightarrow$ f.0 = 0
2. (0-35) $\longrightarrow$ f.0 = 12275.34504.
3. (12,22-35) $\longrightarrow$ f.0 = 14723.46086.
4. (41.43-18.57) $\longrightarrow$ f.0 = 14812.90139. $\longrightarrow$ Punto óptimo!!
5. (50-10) $\longrightarrow$ f.0 = 13524.08194.

$X1 = 41.43 \simeq 41$
$X2 = 18.59 \simeq 18$
} se deben ensamblar 41 mesas básicas y 18 mesas de lujo para generar la máxima ganancia.

Problema 2.

Una reconocida cadena de comidas rápidas "los perritos", quiere sacar al mercado una nueva salchicha saludable, una combinación entre carne de vaca y carne de pollo. La nueva salchicha debe pesar por lo menos 0,125 Kg, debe tener a lo sumo 350 calorías, 0.015 Kg de grasa y 360 miligramos de sodio. Cada gramo de carne de vaca usada contiene 2.5 calorías, 0,0002 Kg de grasa y 3,5 miligramos de sodio. La carne de pollo por gramo contiene 1.8 calorías, 0.0001 Kg de grasa y 2.5 miligramos de sodio. Los perritos quiere encontrar la mezcla que cumpla todos los requerimientos y maximice el peso.

- Realizar la formulación del problema y resolver de manera gráfica

Primeramente se deben hacer las conversiones de unidades.

Carne de Vaca {
2.5 calorías
0.0002 kg grasa $\longrightarrow$ 0,2 g grasa.
3.5 mg sodio $\longrightarrow$ 3.5×10^{-3} g sodio.

Carne de pollo {
1.8 calorías
0.0001 kg grasa $\longrightarrow$ 0.1 g grasa.
2.5 mg sodio $\longrightarrow$ 2.5×10^{-3} g sodio.

Nueva Mezcla {
- mínimo peso 0.125 kg $\longrightarrow$ 125 g.
- máxima grasa 0.015 kg $\longrightarrow$ 15 g.
- máximo sodio 360 mg $\longrightarrow$ 0.36 g

Parámetros: ° cantidad de calorías en gramo de carne de vaca, de pollo y en la nueva mezcla, ° cantidad de grasa en la gramo de carne de vaca, de pollo y en la nueva mezcla, ° cantidad de sodio en carne de vaca, de pollo y en la nueva mezcla y el peso mínimo en la nueva mezcla.

Variables: X_1: Gramos de carne de res en la nueva mezcla.
X_2: Gramos de carne de pollo en la nueva mezcla.

función Objetivo: $\begin{cases} X_1 + X_2 \\ \text{maximizar} \end{cases}$

Sujeto A: $\begin{cases} 2.6X_1 + 1.8X_2 \leq 350 & (1) \\ 0.2X_1 + 0.1X_2 \leq 15 & (2) \\ 0.0035X_1 + 0.0025X_2 \leq 0.36 & (3) \\ X_1 + X_2 \geq 125 & (4) \\ X_1; X_2 \geq 0 & (5) \end{cases}$

la restricción 1 es por el requerimiento de calorías máxima; la restricción 2 es por el requerimiento de maxima grasa; la restricción 3 es por la restricción de la cantidad de sodio máxima; la restricción 4 es por el peso mínimo exigido y la restricción 5 es la de no negatividad, necesaria.

Ahora para la solución gráfica se evalua en cada restricción haciendo cada una de las variables cero y hallando la otra para poder encontrar los puntos y trazar la recta:

de 1 si $X_1=0 \rightarrow X_2 = 194.44 \rightarrow (0-194,44)$
si $X_2=0 \rightarrow X_1 = 140 \rightarrow (140-0)$

de 2 si $X_1=0 \rightarrow X_2 = 150 \rightarrow (0-150)$
si $X_2=0 \rightarrow X_1 = 75 \rightarrow (75-0)$

de 3 si $X_1=0 \rightarrow X_2 = 144 \rightarrow (0-144)$
si $X_2=0 \rightarrow X_1 = 102,86 \rightarrow (102,86-0)$

de 4 si $X_1=0 \rightarrow X_2 = 125 \rightarrow (0-125)$
si $X_2=0$ $X_1 = 125 \rightarrow (125-0)$

Añadiendo las restricción en el gráfico, obtenemos la región factible, para encontrar los puntos extremos de esta región se analiza el punto en el que se intersectan las rectas respectivas

1. (0-125)
2. (0-144)
3. (10-130) → intersección $0.2X_1 + 0.1X_1 = 15$ y $0.0035X_1 + 0.0025X_2 = 0.36$
4. (25-100)

$X_2 = \frac{15-0.2X_1}{0.1} \rightarrow 0.0035X_1 + 0.0025\left(\frac{15-0.2X_1}{0.1}\right) = 0.36$

$0.0035X_1 + 0.375 - 0.005X_1 - 0.36 = 0$

$X_1 = 10$ y $X_2 = 130$

↓

intersección

$0.2X_1 + 0.1X_2 = 15$ y $X_1 + X_2 = 125$

$X_2 = 125 - X_1 \rightarrow 0.2X_1 + 0.1(125 - X_1) = 15$

$0.2X_1 + 12.5 - 0.1X_1 - 15 = 0$

$X_1 = \frac{15-125}{0.1} \rightarrow X_1 = 25$ y $X_2 = 100$

Para encontrar el punto óptimo se evalua la función objetivo en los puntos extremos de la región factible y se elije el punto en que dé de mayor valor, ya que se desea maximizar.

1. (0-125) ⟶ f.O = 125
2. (0-144) ⟶ F.O = 144
3. (10-130) ⟶ F.O = 140
4. (25-100) ⟶ F.O = 125

La solución gráfica indica que lo ideal es usar solo carne de pollo (144g) para cumplir con los requerimientos y maximizar el peso.

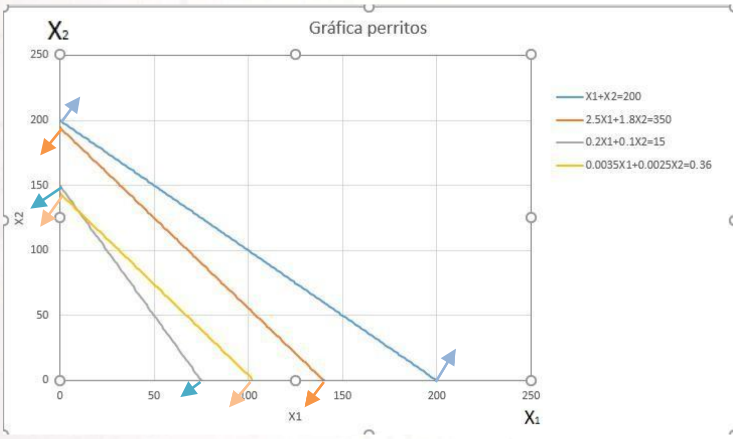
¿Qué pasa si se aumenta la mínima cantidad de gramaje de la salchicha de 125 a 200? Demuestre

Cambiaría la restricción 4 por: $X_1+X_2 \geq 200$

$$\text{F.O}\begin{cases} & X_1+X_2 \\ \text{maximizar} & \end{cases}$$

$$\text{S.A}\begin{cases} 2.6X_1+1.8X_2 \leq 350 & ①' \\ 0.2X_1+0.1X_2 \leq 15 & ②' \\ 0.0035X_1+0.0025X_2 \leq 0.36 & ③' \\ X_1+X_2 \geq 200 & ④' \end{cases}$$

y con ese cambio la región factible deja de existir, pues no hay puntos que cumplan con las anteriores restricciones a la vez.



Problema 3.

Una fábrica de semillas de Maíz, llamada Pi Hybrids, tiene 20 instalaciones que producen 25 variedades de semillas a partir de Maíz y las distribuyen a los consumidores en 30 regiones diferentes. Después de una larga investigación la empresa logró recaudar información y pudo definir los siguientes parámetros:

- El costo de producir un costal de cada semilla en cada instalación.
- La capacidad de procesar Maíz en cada instalación por kilo.
- El número de kilos de Maíz que deben ser procesados

Para hacer un costal de cada variedad de semillas
- El número de costales de cada variedad de semilla exigido en cada región
- El costo de enviar un costal de cada variedad de semilla de cada instalación a cada región

La compañía quiere saber como llevar a cabo la distribución y producción al menor costo

- Realizar la fórmulación del problema

i: Variedad de semilla, $i = 1, 2, 3, \dots, 25$.
j: Instalación en la que se producen las semillas $j = 1, 2, \dots, 20$.
k: Región a la que se va a distribuir los costales de semillas. $k = 1, 2, \dots, 30$.

z_{ij} = Capacidad de procesar la semilla i en instalación j.
x_{ijk}: El número de costales de semilla de la variedad i producidos en la instalación j para distribuir a la región k.
n_{ijk}: Número de kilos procesados de maiz i en instalación j para región k.
c_{ijk}: Costo de producir un costal de semilla de la variedad i en la instalación j para la región k.
a_{ik}: Número de costales exigidos de la variedad i en la región k.
e_{ijk}: Costo de envio de un costal de la variedad i de la instalación j para la región k.

Función Objetivo minimizar

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{30}\sum_{j=1}^{20}\sum_{i=1}^{25} c_{ijk}\,x_{ijk}}_{\text{Costo de producción}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{30}\sum_{j=1}^{20}\sum_{i=1}^{25} e_{ijk}\,x_{ijk}}_{\text{Costo de envio}}$$

Sujeto A:

$$\sum_{j=1}^{20} x_{ijk} \geq a_{ik} \qquad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{30} h_{ijk} \leq z_{ij} \qquad (2)$$

t_{ij} = Número de kilos procesados que caben en un costal de la semilla de variedad i en la instalación j

La restricción (1) se refiere a que la producción debe ser por lo menos la cantidad exigida.

la restricción ② se refiere a que lo que se va a producir de la semilla de la variedad i en la instalación j para la región k no debe superar la capacidad de producción de maiz de la variedad i en la instalación j.

Problema 4.

Una empresa de Telecomunicaciones está escogiendo tiplos de cables para una nueva línea telefónica de 1600metros. la siguiente tabla muestra los diámetros, el costo, la resistencia y la atenuación asociados a cada tipo de cable. la compañía desea escoger la combinación con menos costo y que proporcione una nueva línea con por lo menos 1600 Ω de resistencia y 8.5 decibeles de atenuación como máximo

Diametro(0.1mm)	Costo($/m)	Resistencia(ohms/m)	Atenuacion(dB/m)
4	0,092	0,279	0.00175
5	0.112	0.160	0.00130
6	0.141	0.120	0.00161
9	0.420	0.065	0.00095
12	0.719	0.039	0.00048

Asuma que la resistencia y la atenuación crecen linealmente con la cantidad de cable usado.

• Realizar la formulación del problema.

Parámetros: Diámetro en cada tipo de cable (D). (en mm)
Costo de producción de cada tipo de cable (c) por metro.
Resistencia (Ω) en cada tipo de cable por m
Atenuacion (dB) en cada tipo de cable.
Atenuación nueva línea (8.5 dB máximo)
Resistencia (Ω) nueva línea (1600 Ω)

Variables: X_i : Cantidad de metros de cable tipo $i = 1,2,3,4,5$.

Donde, el tipo i:1 ⇒ Cable de diámetro de 0.4mm
i:2 ⇒ Cable de diámetro de 0.5mm
i:3 ⇒ Cable de diámetro de 0.6mm
i:4 ⇒ Cable de diametro de 0.9mm
i:5 ⇒ Cable de diametro de 0.12 mm

función Objetivo $\begin{cases} 0.092X_1 + 0.112X_2 + 0.141X_3 + 0.42X_4 + 0.719X_5 \\ \text{minimizar} \end{cases}$

Sujeto A:

$$\begin{cases} 0.279X_1 + 0.16X_2 + 0.12X_3 + 0.065X_4 + 0.039X_5 \geq 1600\ \Omega & (1) \\ 0.00175X_1 + 0.0013X_2 + 0.00161X_3 + 0.00095X_4 + 0.00048X_5 \leq 8.5\ dB & (2) \\ X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \leq 1600 \text{ metros} & (3) \\ X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0 & (4) \end{cases}$$

la restriccion (1) es por la condición para la nueva línea que exige un mínimo de 1600 Ω de resistencia.

la restriccio (2) indica que el máximo de atenuacion/m debe ser 8.5 dB.

la restricción (3) es por la longitud máxima deseada para la línea nueva, y la restricción (4) es no negatividad.

Problema 5

El servicio forestal de la reserva natural cañon del rio quiere construir 3 torres para vigilar incendios en 8 montañas diferentes. El costo de construirlas es diferente para cada torre y además se deben cumplir restricciones impuestas por el ministerio de medio ambiente colombiano.

¿Dónde deben ubicarse las torres para minimizar costo y cumplir las restricciones?

- Por lo menos 2 de las primeras 5 montañas deben ser seleccionadas
- No se puede construir en la torre 3 y en la 8 al mismo tiempo.
- Una torre solo puede ser construida en la montaña 4 si es una construida en la montaña 1.
- Solo se puede seleccionar la montaña 7 si las otras montañas son construidas en números primos.
- La suma de las distancias entre las torres y el centro del parque no debe superar el parámetro D, sabiendo que se tiene el vector de distancia centro-montaña.

• El 1 no se considera número primo mientras que el 2 sí.

• Realizar la formulación del problema.

Debido a las características del problema decidimos usar para las restricciones un módelo de "permutación" usando variables binarias para la construcción o no de la torre en dicha montaña

$$M_i \begin{cases} 0 & \text{Se construye torre.} \\ 1 & \text{no se construye torre.} \end{cases}$$

con $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Para la construcción de la tabla se tomarón todos los posibles casos de instalar las 3 torres en las 6 montañas y se fueron eliminando algunas opciones según las restricciones.

$$\begin{cases} \Sigma\, \bar{d}_1 x_{ij} + \bar{d}_2 x_{ij} + \bar{d}_3 x_{ij} + \cdots + \bar{d}_8 x_{ij} \leq D \\ \end{cases}$$

donde $\bar{d}_i$ = Vector de distancia de centro-montaña de la montaña i, con $i = 1, 2, \ldots, 8$.

$$\sum_{i=1}^{8} \bar{d}_i x_{ij} \leq \bar{D}$$

M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8
0	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0