

Mecánica estadística

La evolución de Schramm-Loewner (SLE):

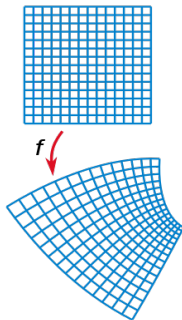
Johan Sebastian Moreno García
Daniel Alejandro García Hernández
Juan Esteban Agudelo Ortiz
Andrés Felipe Hernandez Valero
Jefferson David Garzón Linares
Andrés Camilo Fajardo Torres
Carlos Stevens Sierra Muñoz
Luisa María Giraldo Díaz

June 3, 2022



1. Introducción a las curvas SLE
2. Aplicaciones
3. Objetivos
4. Métodos Numéricos
 - 4.1 Determinación numérica de la función directora.
 - 4.2 Determinación numérica de la curva.
 - 4.3 SLE directo
 - 4.4 Winding angle
5. Avances

Una transformación conforme es una función que preserva ángulos





Consideremos una curva γ en el plano complejo que se une al eje real en el origen. Si denotamos como \mathbb{H} a la mitad superior del plano complejo, entonces existe un isomorfismo conforme $g_t(z)$ que va de $\mathbb{H} - \gamma \rightarrow \mathbb{H}$. Loewner demostró que este mapa satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dg_t(z)}{dt} = \frac{2}{g_t(z) - U(t)} \quad (1)$$

donde $U(t)$ es una secuencia de valores reales que sintetiza la curva, es decir que con la transformación inversa, $U(t)$ reconstruye la curva.



La transformación conforme $g_t(z)$ abre la curva como una cremallera y la extiende sobre el eje real.

Oded Schramm mostró que si la secuencia $U(t)$ es producida por movimiento Browniano con constante de difusión κ la curva resultante es un fractal con dimensión $d_f = 1 + \frac{\kappa}{8}$ para $\kappa \leq 8$.

$$\frac{dg_t(z)}{dt} = \frac{2}{g_t(z) - U(t)}$$

1

¹O. Schramm, Isr.J.Math. 188, 221 (2000).

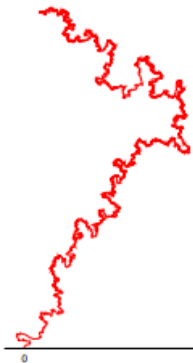
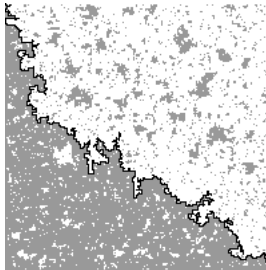


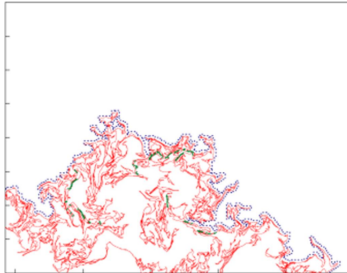
Figure: Ejemplo de SLE. Tomado de Tom Kennedy. Numerical Computation for the Schramm-Loewner. Univeristy of Arizona. Página 9 (2018)

Las curvas de evolución de Schramm-Löwner (SLE) se presenta en muchos fenómenos con transiciones de fase como por ejemplo:

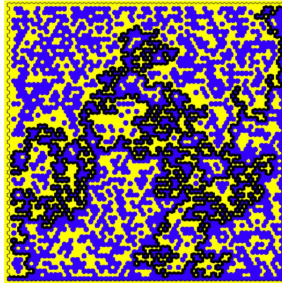
- En el modelo de Ising, la curva que separa los espines hacia arriba de los espines hacia abajo es una SLE



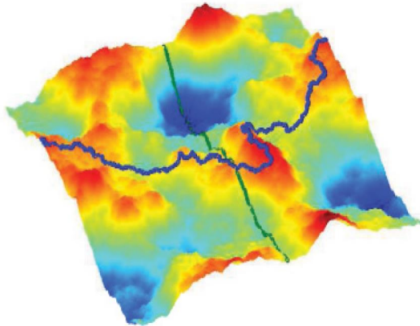
- La curva que separa el flujo libre del flujo turbulento



- La curva que separa los sitios libres de la percolación 2D cuando la probabilidad de llenado es la probabilidad crítica



- Modelos $O(n)$ para la interacción de espines en redes cristalinas. Este a su vez se puede usar como modelo de juguete en el Modelo Estándar.
- Superficies clasificadas



Objetivo General

- ▶ Comprender conceptualmente la teoría de la SLE y presentar su aplicaciones en física.
- ▶ Reproducir resultados computacionales relacionado con las curvas SLE.

Objetivos Específicos

- ▶ Realizar la transformación (y su inversa) descrita por la ecuación diferencial de Loewner de acuerdo con el método numérico descrito en el paper "Shortest Path and Schramm-Loewner Evolution".
- ▶ Realizar la transformación descrita por la transformación de Loewner a una curva con movimiento Browniano tal que obtengamos la evolución de Schramm-Loewner.
- ▶ Medir el Winding angle de una curva.
- ▶ Medir la dimensión fractal de una curva SLE generada por nosotros.
- ▶ Comprobar la relación entre la varianza de la función directora, determinada numéricamente, con la constante de difusión.

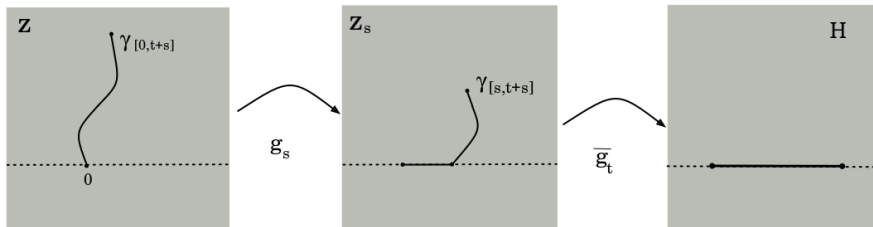
Métodos numéricos

Los métodos numéricos utilizados en este proyecto se basan en los siguientes trabajos:

- ▶ T. Kennedy. Numerical Computations for the Schramm-Loewner Evolution. J. Stat. Phys. 137, 839-856 (2009).
- ▶ W. Kager, B. Nienhuis and L. P. Kadanoff. Exact Solutions for Loewner Evolutions. J. Stat. Phys. 115:805-822 (2004)
- ▶ N. Posé, K.J. Schrenk, N.A.M. Araújo and H.J. Herrmann. Shortest path and Schramm-Loewner Evolution (2014)

Partición temporal

Consideremos los tiempos $t, s > 0$. El mapa g_{s+t} mapea $\mathbb{H}/\gamma[0, t+s]$ en \mathbb{H} . Este mapeo se puede hacer en dos partes. Primero aplicamos el mapa g_s , el cual mapea $\mathbb{H}/\gamma[0, s]$ en \mathbb{H} , y mapeamos $\mathbb{H}/\gamma[0, t+s]$ en $\mathbb{H}/\gamma[s, t+s]$. Finalmente, mediante el mapa \bar{g}_t mapeamos $\mathbb{H}/\gamma[s, t+s]$. Por lo tanto el mapa $g_{t+s} = \bar{g}_t \circ g_s$ mapea $\mathbb{H}/\gamma[0, t+s]$ en \mathbb{H} .



$$g_{s+t} = \bar{g}_t \circ g_s$$

Partición temporal

- Introduzcamos una partición del intervalo temporal $t_0 = 0, < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots < t_n$. Definiendo

$$\bar{g}_k = g_{tk} \circ g_{t_{k-1}}^{-1}$$

iterativamente se puede obtener que

$$g_{tk} = \bar{g}_k \circ \bar{g}_{k-1} \circ \bar{g}_{k-2} \circ \dots \circ \bar{g}_2 \circ \bar{g}_1 \quad (2)$$

es decir

$$U_{t_k} = g_{tk}(z_k) = \bar{g}_k \circ \bar{g}_{k-1} \circ \bar{g}_{k-2} \circ \dots \circ \bar{g}_2 \circ \bar{g}_1(z_k)$$

²T. Kennedy. Numerical Computations for the Schramm-Loewner Evolution. J. Stat. Phys. 137, 839-856 (2009).

Partición Temporal

- En base a esto es posible deducir que la transformación inversa tiene la forma

$$g_{tk}^{-1} = \bar{g}_1^{-1} \circ \bar{g}_2^{-1} \circ \bar{g}_3^{-1} \circ \dots \circ \bar{g}_{k-1}^{-1} \circ \bar{g}_k^{-1} \quad (3)$$

es decir

$$zk = g_{tk}^{-1}(U_{t_k}) = \bar{g}_1^{-1} \circ \bar{g}_2^{-1} \circ \bar{g}_3^{-1} \circ \dots \circ \bar{g}_{k-1}^{-1} \circ \bar{g}_k^{-1}(U_{t_k})$$

¿Como determinamos g_k y g_k^{-1} ?

1

¹T. Kennedy. Numerical Computations for the Schramm-Loewner Evolution. J. Stat. Phys. 137, 839-856 (2009).

Función directora constante.

La ecuación de Loewner genera continuamente nuevos puntos singulares de g_t que son mapeados por g_t en los puntos correspondientes $\xi(t)$ en el plano w .

Si $\xi(t)$ es suficientemente suave, esos puntos singulares $z_c(t)$ obedecen la relación :

$$g_t(z_c(t)) = \xi(t) \quad (4)$$

Esta curva es llamada la traza de la evolución de Loewner (también llamada la línea de singularidades).

Considerando que $\xi(t)$ es la función directora asociada a la curva $\gamma(t)$, entonces $z_c(t)$ corresponde a $\gamma(t)$.

Función directora constante

En el caso particular donde $\xi(t)$ es constante, $\xi(t) = U$, La ecuación de g_t tiene la siguiente solución:

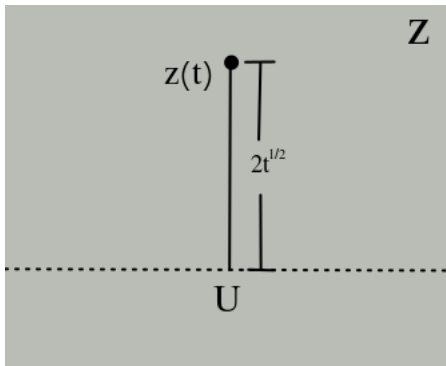
$$g_t(z) = U + \sqrt{(z - U)^2 + 4t} \quad (5)$$

A su vez, para este mismo caso el mapa inverso toma la forma

$$f_t(w) = U + \sqrt{(w - U)^2 - 4t} \quad (6)$$

En este caso particular, en el tiempo t la transformación adquiere una nueva singularidad en el punto

$$z_c(t) = U + 2i\sqrt{t} \quad (7)$$



Calculo numérico

- Dada una curva $\gamma(t)$, su función directora se encuentra numéricamente considerando que es constante en un intervalo de tiempo δt entonces el mapa estaria dado por

$$g_t(z) = \xi_t + \sqrt{(z - \xi_t)^2 + 4\delta t} \quad (8)$$

La iteración se inicia con $\xi_t = 0$ en $t = 0$ y con los puntos sobre la curva $\{z_0^0 = 0, z_1^0 = z_1, \dots, z_N^0 = z_N\}$ y se mapean recursivamente los puntos de la curva $\{z_i^{j-1}, \dots, z_N^{j-1}\}$, con $i > 0$, a los puntos $\{z_{i+1}^j = g_t(z_{i+1}^{j-1}), \dots, z_N^j = g_t(z_N^{j-1})\}$ a través del mapa g_t , enviando z_i^{j-1} eje real tomando $\xi_{ti} = \text{Re}\{z_i^{j-1}\}$ y $\delta t_i = (\text{Im}\{z_i^{j-1}\})^2 / 4$

a

^aN. Posé, K.J. Schrenk, N.A.M. Araújo and H.J. Herrmann. Shortest path and Schramm-Loewner Evolution (2014)

Calculo numérico

- En el caso inverso en el que conocemos la función directora, la curva $\gamma(t)$ se encuentra numéricamente mediante el mapa inverso

$$f_t(w) = \xi_t + \sqrt{(w - \xi_t)^2 - 4\delta t} \quad (9)$$

La iteración se inicia con $w_t = 0$ en $t = 0$ y con los puntos en el eje real $\{w_0^N = 0, w_1^N = \xi_1, \dots, z_N^N = \xi_N\}$ y se mapean recursivamente los puntos $\{w_{i+1}^{N-i}, \dots, w_N^{N-i}\}$, con $0 < i < N$, a los puntos $\{w_i^{N-i-1} = f_t(w_{i+1}^{N-i}), \dots, w_i^{N-i-1} = f_t(w_N^{N-i})\}$.

a

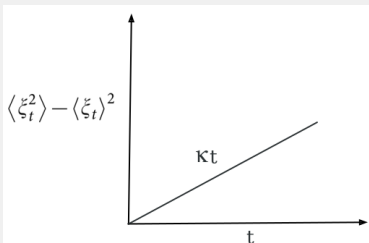
^aN. Posé, K.J. Schrenk, N.A.M. Araújo and H.J. Herrmann. Shortest path and Schramm-Loewner Evolution (2014)

Varianza de la función directora

- La varianza de la función directora de una curva propia de la SLE, se relaciona con la constante de difusión κ mediante

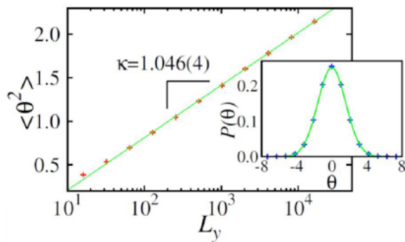
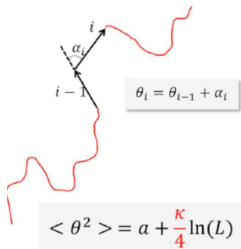
$$\langle \xi_t^2 \rangle - \langle \xi_t \rangle^2 = \kappa t \quad (10)$$

por lo tanto al hacer una gráfica de la varianza contra el tiempo, en el caso de que la curva sea de un SLE, se observaría una recta cuya pendiente correspondería a κ

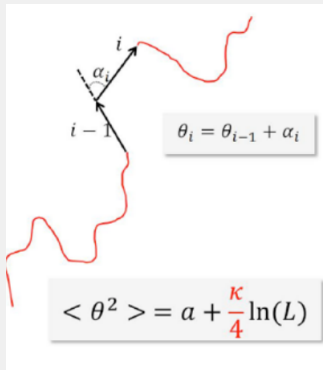


Winding angle

- ▶ De forma intuitiva, el winding angle mide que tanto gira la curva entre los pasos i y $i + 1$.
- ▶ Se calcula extendiendo la proyección de las rectas, tomando el ángulo como positivo si la curva gira hacia la derecha.
- ▶ Permite medir de forma indirecta la dimensión fractal



$$\kappa_{\text{winding}} = 1.046 \pm 0.004$$



- Con el Winding angle se puede medir de forma la dimensión fractal de la curva generada por SLE:

Si $\kappa \leq 8$:

$$d_f = 1 + \frac{\kappa}{8} \quad (11)$$

Si $\kappa > 8$, la curva γ se convierte en "space-filling" con probabilidad $P = 1$, por lo que $d_f = 2$

- ▶ Se ha realizado el proceso de evolución mediante la ecuación de Loewner para curvas como una línea recta, una parábola, un coseno trasladado, un seno hiperbólico y el valor absoluto de una función de Bessel de orden 1. Cabe aclarar que como no son curvas obtenidas mediante movimiento browniano, esta no es la evolución de Schramm-Loewner.
- ▶ Se logró aplicar la transformada inversa y reconstruir las curvas mencionadas en el ítem anterior.
- ▶ Se logró medir el winding angle, pero todavía no se ha verificado si se logran repetir los resultados teóricos al usar un modelo de SLE proporcionado por terceros.