día | mes | año

Taller 1

Sección 1.4.5

3 Considere lo expuesto en la seccion 1.4.3 y demuestre que:

$$A^{i'}_{k}\tilde{A}^{j}_{i'}=\delta^{j}_{k}$$

y además como un caso especial establecer la relacion con los cosenos directores que satisfacen

$$\cos(\alpha)^2+\cos(\beta)^2+\cos(\gamma)^2=1$$

De la seccion 1.4.3 podemos considerar

$$a^{i'}=A^{i'}_{k}a^{k} \quad y \quad a^{k}=\tilde{A}^{j}_{i'}a^{i'}$$

al reemplazar.

$$a^{i'}=A^{i'}_{k}(\tilde{A}^{j}_{i'}a^{i'})=a^{k}=\tilde{A}^{j}_{i'}(A^{i'}_{k}a^{k})$$

Al ser $A^{i'}_{k}$ la matriz para cambiar la base y $\tilde{A}^{j}_{i'}$ la inversa logramos llegar a la igualdad

$$\boxed{\tilde{A}^{k}_{i'}A^{i'}_{j}=\delta^{k}_{j}} \quad y \quad \boxed{A^{i'}_{j}\tilde{A}^{k}_{i'}=\delta^{k}_{j}}$$

día mes año

Caso Cosenos directores

tenemos $A^{i'}_{k} \bar{A}^{j}_{i'} = \delta^{j}_{k}$

Si consideramos $j = k$

$\Rightarrow A^{i'}_{k} \bar{A}^{k}_{i'} = \delta^{k}_{k} = 1$

para una columna fija k hay 3 componentes

$A^{1}_{k}, A^{2}_{k}, A^{3}_{k}$

Si los angulos α, β, γ son los que forma el vector columna con los ejes x, y, z, tenemos

$\cos\alpha = A^{1}_{k}$, $\cos\beta = A^{2}_{k}$, $\cos\gamma = A^{3}_{k}$

los podemos reemplazar en

$$\sum_{i'=1}^{3} A^{i'}_{k} A^{k}_{i'} = 1$$

tendriamos

$$\boxed{\cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2 + \cos(\gamma)^2 = 1}$$

día mes año

4 Considere el radio Vector Posición

$r = x^i \hat{\imath}_i \equiv x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ en dos dimensiones, dado

el conjunto de transformaciones que se indican a continuación, demuestre en cuáles casos las componentes de r transformar como verdaderos componentes de vectores.

tenemos $r = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$r' = Tr$ para que sean verdaderos componentes se debe cumplir:

$$\|r'\|^2 = \|r\|^2 \quad \forall r$$

$$\Rightarrow (r')^T (r' = r^T r$$

al sustituir $r' = Tr$ tenemos

$$(T\cdot r)^T (Tr) = r^T (T^T T) r$$

para que sea igual $r^T r$ se necesita

$$T^T T = I$$

Si T es ortogonal

$$\det(T^T T) = \det(I) \Rightarrow \det(T)^2 = 1$$

día mes año

ahora al aplicarlo a las transformaciones tenemos

1) $(x, y) \rightarrow (-y, x)$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_1^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_1^T T_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det_{T_1} = 1$ Da Verdaderas Componentes

2) $(x, y) \rightarrow (x, -y)$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow T_2^T T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det T_2 = -1$ Da Verdaderas componentes

3) $(x, y) \rightarrow (x - y, x + y)$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow T_3^T T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{2I}$$

$\det T_3 = 2$ No da verdaderas componentes.

4) $(x,y) \to (x+y, x-y)$

$T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow T_4^T T_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$

$\det T_4 = 2$ No da verdaderas Componentes.

Seccion 1.5.7

2 Considere que

$r = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} = x^i \hat{\imath}_i$

$a = a(r) = a(x,y,z) = a^i(x,y,z)\hat{\imath}_i$

$b = b(r) = b(x,y,z) = b^i(x,y,z)\hat{\imath}_i$

$\phi = \phi(r) = \phi(x,y,z)$

$\psi = \psi(r) = \psi(x,y,z)$

a) Demuestre

$\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$

Sean ϕ y ψ funciones escalares.

las Componentes del gradiente son.

$[\nabla(\phi\psi)]_i = \partial_i(\phi\psi)$ al usar la regla del producto

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_i(\phi\psi)_i &= \phi\partial\psi + \psi\partial\phi \\ &= \nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi \end{aligned}}$$

día mes año

2d la divergencia del rotacional

$$\nabla\cdot(\nabla\times a) = \partial_i(\varepsilon_{ijk}\partial_j a_k) = \varepsilon_{ijk}\partial_i\partial_j a_k$$

tenemos una simetría en $\partial_i\partial_j$
pero hay una antisimetría con ε_{ijk} por lo que se anula

$$\nabla\cdot(\nabla\times a) = 0$$

2f

$$[\nabla\times(\nabla\times a)] = \nabla(\nabla\cdot a) - \nabla^2 a.$$

$$= \varepsilon_{ijk}\partial_j(\varepsilon_{klm}\partial_l a_m) =$$

$$= \boxed{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}}\partial_j\partial_l a_m =$$

$$= \delta_i^l\delta_j^m - \delta_i^m\delta_j^l \Rightarrow (\delta_i^l\delta_j^m - \delta_i^m\delta_j^l)\partial_j\partial_l a_m$$

$$= \delta_i^l\delta_j^m\partial_j\partial_l a_m - \delta_i^l\delta_j^m\partial_j\partial_l a_m$$

$$= \partial_j\partial_i a_j \qquad -\partial_j\partial_j a_i$$

$$\rightarrow [\nabla\times(\nabla\times a)]_i = \partial_i(\partial_j a_j) - \partial_j\partial_j a_i$$

ahora

$\underbrace{\nabla(\nabla\cdot a)}_{\downarrow} - \nabla^2 a =$

$[\nabla(\nabla\cdot a)]_i = \partial_i(\partial_j a_j) = \partial_i \partial_j a_j$

$-\nabla^2 a = \partial_x \partial_x a_i = \partial_j \partial_j a_j$

$\Rightarrow \nabla(\nabla\cdot a) - \nabla^2 a = \partial_i \partial_j a_j - \partial_j \partial_j a_i$

Por tanto queda demostrado la igualdad

Seccion 1.6.6

2 Demuestre

a $\cos(3\alpha) = \cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha)\,\text{sen}^2(\alpha)$

$\cos(3\alpha) = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos(2\alpha)\cos\alpha - \text{sen}(2\alpha)\,\text{sen}(\alpha)$

$= \cos(\alpha+\alpha)\cos\alpha - \text{sen}(\alpha+\alpha)\,\text{sen}\,\alpha)$

$= (\cos^2\alpha - \text{sen}^2(\alpha))\cos\alpha - (2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha)\,\text{sen}\,\alpha$

$= \cos^3\alpha - \text{sen}^2\alpha\cos\alpha - 2\,\text{sen}^2\alpha\cos\alpha)$

$\boxed{= \cos^3\alpha - 3\,\text{sen}^2\alpha\cos\alpha}$

día mes año

b

$\operatorname{Sen}(3\alpha) = 3\cos^2(\alpha)\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}^3(\alpha)$

$\operatorname{Sen}(3\alpha) = \operatorname{sen}(2\alpha+\alpha) = \operatorname{sen}(2\alpha)\cos(\alpha) + \cos(2\alpha)\operatorname{sen}(\alpha)$

$\operatorname{Sen}(2\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha+\alpha) = 2\operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)$

$\cos(2\alpha) = \cos(\alpha+\alpha) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

$\Rightarrow \operatorname{sen}(3\alpha) = (2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)\cos\alpha + (\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha)\operatorname{sen}\alpha$

$= 2\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}^3\alpha$

$= \boxed{3\cos^2\alpha\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}^3\alpha}$

5) a $\sqrt{2i}$

$z = 2i;\quad |z| = \sqrt{2}\quad \theta = \frac{\pi}{2}\quad n = 2$

Solucione

$w_0 = 2^{1/4}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right),\quad w_1 = 2^{1/4}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right)$

$w_0 = 2^{-1/4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$w_1 = 2^{1/4}\left(\frac{\cos\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b. $\sqrt{1-\sqrt{3}i}$

$z = 1-\sqrt{3}i,\quad |z| = 2,\quad \theta = \frac{\pi}{3}\quad n = 2$

$w_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi/3}{2} + i\operatorname{sen}\frac{-\pi/3}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

día | mes | ano

$$\omega_1 = \sqrt{2}\, e^{i5\pi/6} = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

C

$(-1)^{1/3}$

$z=-1, \quad |z|=1 \quad \theta=\pi \quad n=3$

$$\omega_k = \cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right), \quad k=0,1,2$$

$$\omega_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \omega_1 = e^{i\pi} = -1 \qquad \omega_2 = e^{\frac{i5\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

D $8^{1/6}$

$z=8, \quad |z|=8, \quad \theta=0, \quad n=6$

$$\omega_c = 8^{1/6}\left[\cos\left(\frac{2k\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2k\pi}{6}\right)\right] \quad k=0,1,2,3,4,5.$$

6 raices.

$$\boxed{\omega_c = 8^{1/6} e^{\frac{i2\pi k}{6}}}$$

Esta cada $\pi/3$ dentro del circulo con radio. $r=\sqrt{2}$

F $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}\,i}$

$z=-8-8\sqrt{3}\,i \quad |z|=16, \quad \theta=\frac{4\pi}{3} \quad n=4$

$$\omega_k = 2\left[\cos\left(\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)\right]$$

con $k=0 \qquad \omega_0 = 2e^{i\pi/3} = 1 + i\sqrt{3}$

con $k=1 \qquad \omega_1 = 2e^{i5\pi/6} = -\sqrt{3} + i$

$K=2 \qquad w_2 = -1 - i\sqrt{3}$

$K=3 \qquad w_3 = \sqrt{3} - i$

6 $\log z =$ Demuestre

a $\log(-ie) = 1 - \frac{\pi}{2} i$

Si $z = -ie \Rightarrow |z| = e$

y su argumento $Arg(-i) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ por tanto

$\log(-ie) = \ln e + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1 + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$

Cuando $n=0$

$$\boxed{\log(-ie) = 1 - \frac{\pi}{2} i}$$

b $\log(1-i)$

$z = 1-i \qquad |z| = \sqrt{2} \qquad \arg(1-i) = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$

$\Rightarrow \log(1-i) = \ln\sqrt{2} + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) = \frac{1}{2}\ln(2) + i(\ldots$

$= \frac{1}{2}\ln(2) + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$

Si $n=0 \Rightarrow \boxed{\log(1-i) = \ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} i}$ ✓

día mes año

c $\log(e)$

como $e>0$, $|e|=e$ $\arg(e)=0+2\pi n$

$\Rightarrow \log(e)=\ln e+i(0+2\pi n)=1+2\pi n i$

d $\log(i)$

$|i|=1$ $\arg(i)=\frac{\pi}{2}+2\pi n$

$\Rightarrow \log(i)=\ln 1+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$

$=\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi i$