Taller 2 Met Mat 1

Sección 2.1.5

10 Sea P_n el conjunto de todos los polinomios de grado n, en x, con coeficientes reales

$$|P_n\rangle \rightleftharpoons p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

(a) Demostrar que P_n es un espacio vectorial, respecto a la suma de polinomios y a la multiplicación por un escalar real.

Si tenemos

$$|P_n\rangle = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

$$|q_n\rangle = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

I Existencia del cero

necesitaríamos $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ para formar al polinomio nulo.

II Suma.

$$|P_n\rangle + |q_n\rangle = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots (a_n + b_n)x^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + b_i x^i$$

$$= \boxed{\sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i}$$ Es cerrada bajo la suma.

III Producto por escalar. si $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\lambda |P_n\rangle = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + \dots + \lambda a_n x^n = \boxed{\lambda \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} \lambda a_i x^i}$$

Es cerrada bajo el producto por escalar.

Powered by CamScanner

(b) Si los coeficientes a_i son enteros, ¿ P_n será un espacio vectorial? ¿Por qué?

$a_i \in \mathbb{Z} \Rightarrow |P_n\rangle + |q_n\rangle$ se cumple,

pero al analizar el producto por un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda |P_n\rangle$ no siempre se cumple la condicion. por ejemplo, si

$\lambda = \frac{1}{2}$ ya puedo lograr que algunos terminos ya no sean enteros

No es espacio vectorial

(c)

I El polinomio cero y todos los polinomios de grado $n-1$

El cero ya esta

la suma $|P_{n-1}\rangle + |q_{n-1}\rangle = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + \ldots + (a_{n-1}+b_{n-1})(x^{n-1})$

Se cumple

y el producto por escalar $\lambda \in \mathbb{R}$

$\lambda |P_{n-1}\rangle = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + \ldots + \lambda a_{n-1} x^{n-1}$ Se cumple

Sí es espacio vectorial

II el polinomio cero y todos los polinomios de grado par.

$|P_{2n}\rangle + |q_{2n}\rangle = (a_0 + b_0) + (a_2+b_2)x^2 + (a_4+b_4)x^4 + \ldots + (a_{2n}+b_{2n})x^{2n}$

Se cumple.

$\lambda |P_{2n}\rangle = \lambda a_0 + \lambda a_2 x^2 + \ldots + \lambda a_{2n} x^{2n}$ cumple.

Sí es espacio vectorial.

Powered by CamScanner

III Todos los polinomios que tienen a x como factor grado $n>1$

$\Rightarrow$ cero

$$|P_{n>1}\rangle = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n>1} x^{n>1} = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$$

$$a_1 = a_2 = a_n = 0$$

Suma

$$|P_{n>}\rangle + |q_{n>1}\rangle = (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x + (a_n + b_n)x^n = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)x^i$$

Producto

$$\lambda |P_{n>1}\rangle = \lambda \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)x^i$$ cumple, sí es espacio vectorial.

IV Todos los polinomios que tienen a $x-1$ como Factor.

Sección 2.2.4

6 $|a\rangle = a^\alpha |q_\alpha\rangle = a^0 + a^i |q_i\rangle = a_0 + a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$

$\alpha = 0, 1, 2, 3$ $\quad i = 1, 2, 3$

$|q_j\rangle \odot |q_j\rangle = -1$ $\quad$ $|b\rangle^{*} = b^0 |q_0\rangle - b^i |q_i\rangle$ conjugado

Suma $\rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} |a\rangle = a^\alpha |q_\alpha\rangle \\ |b\rangle = b^\alpha |q_\alpha\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow |c\rangle = c^\alpha |q_\alpha\rangle = |a\rangle + |b\rangle = (a^\alpha + b^\alpha)|q_\alpha\rangle$

$\Rightarrow c^\alpha = (a^\alpha + b^\alpha)$

$\alpha |c\rangle = \alpha c^\alpha |q_\alpha\rangle$ producto.

(a) Compruebe si los cuaterniones $|a\rangle$, forman un espacio vectorial respecto a esa operación suma y esa multiplicación por escalar análoga a la de los vectores en $\mathbb{R}^3$ en coordenadas cartesianas.

Si tenemos

$$|a\rangle = \sum_{\alpha=0}^{3} a^\alpha |q_\alpha\rangle \qquad |b\rangle = \sum_{\alpha=0}^{3} b^\alpha |q_\alpha\rangle$$

$$\Rightarrow |a\rangle + |b\rangle = \sum_{\alpha=0}^{3} (a^\alpha + b^\alpha)|q_\alpha\rangle$$

y si $\quad 0\,|q_\alpha\rangle = 0 \quad \Rightarrow$ tenemos el cero.

$$\lambda a^\alpha |q_\alpha\rangle = \lambda a^\alpha |q_\alpha\rangle = \lambda a^0 + \lambda a^1 q_1 + \lambda a^2 q_2 + \lambda a^3 q_3$$

Forma un espacio vectorial.

(b) Dados dos cuaterniones cualesquiera.

$|b\rangle \equiv (b^0, b)$ y $|r\rangle \equiv (r^0, r)$ y su tabla de multiplicación

muestre que el producto entre esos dos cuaterniones

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle = (b^0 + (b\cdot q))(r^0 + (r\cdot q))$$

$$= b^0 r^0 + b^0 r\cdot q + r^0 b\cdot q + (b\cdot q)(r\cdot q)$$

$$= b^0 r^0 + b^0 \sum_j r^j q_j + r^0 \sum_i b^i q_i + \sum_j \sum_i r^j b^i q_j q_i$$

Donde podemos reemplazar.

$$= b^0 r^0 + b^0 r^j q_j + r^0 b^i q_i + r^j b^i (-\delta_{ij}\, 1 + \varepsilon_{ijk} q_k)$$

$$= b^0 r^0 + b^0 r^j q_j + r^0 b^i q_i + \underbrace{r^j b^i (-\delta_{ij} 1)} + \underbrace{r^j b^i \varepsilon_{ijk} q_k}$$

ahí podemos ver las partes vectoriales y escalares

$$b^0 r^0 - b\cdot r + r^0 b + b^0 r + b\times r.$$

C Ahora con indices: dados $|b\rangle = b^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle$ y $|r\rangle = r^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle$ compruebe

$|b\rangle \odot |r\rangle$ puede ser escrito como

$$a|q_o\rangle + S^{(\alpha j)}\delta_{\alpha}^{o}|q_j\rangle + A^{[jk]i} b_j r_k |q_i\rangle$$

Donde a representa un número $S^{(\alpha j)}\delta_{\alpha}^{o}$, donde $S^{(ij)}$ indica $S^{ji} = S^{ij}$ y S^{ij} es simetrica y por tanto

$(S^{\alpha j}\delta_{\alpha}^{o} + S^{j\alpha}\delta_{\alpha}^{o})|q_j\rangle$

mientras $A^{[jk]i}$ representa un conjunto de objetos antisimétricos en j y k

$$A^{[jk]i} \rightarrow A^{jki} = -A^{kji} \rightarrow (A^{jki} b_j r_k - A^{kji} b_j r_k)|q_i\rangle$$

$$\Rightarrow \quad b^{\alpha} r^{\beta}(|q_{\alpha}\rangle |q_{\beta}\rangle)$$

$$= b^o r^o |q_o q_o\rangle + b^o r^j |q_j\rangle + b^i r^o |q_i\rangle + b^i r^j(-\delta_{ij}|q_o\rangle + \varepsilon_{ijk}|q_k\rangle),$$

donde obtenemos.

$a = b^o r^o - b^j r_j$; $d^i = b^o r^i + r^o b^i + \varepsilon_{jk}^{i} b^j r^k$

$S^{(oj)} = b^o r^j + r^o b^j$; $A^{[jk]i} b_j r_k = \varepsilon_{jki} b^j r^k$

$$\Rightarrow |d\rangle = a|q_o\rangle + S^{(\alpha j)}\delta_{\alpha}^{o}|q_j\rangle + A^{[jk]i} b_j r_k |q_i\rangle$$

D identifique las cantidades: a, $S^{(ij)}$ y $A^{[jk]i}$ en términos de las componentes de los cuaterniones

¿El producto de cuaterniones $|d\rangle = |a\rangle \odot |r\rangle$ será un vector, pseudo vector o ninguno. ¿por qué?

$a = b^o r^o - b^j r_j \rightarrow$ escalar

$S^{(oj)} = b^o r^j + r^o b^j \rightarrow$ Parte simetrica

$A^{[jk]i} = \varepsilon_{jk}^{i} b^j r^k$ – Parte antisimétrica

Obtenemos un pseudovector por el comportamiento antisimetrico

e) para que sean base se necesitan independencia lineal, por lo tanto

$$\alpha\sigma_1 + \beta\sigma_2 + T\sigma_3 + \lambda\sigma_4 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\beta i \\ \beta i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & -T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} T+\lambda & \alpha-\beta i \\ \alpha+\beta i & \lambda-T \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda + T = 0 \Rightarrow \lambda = -T$$

$$\alpha + \beta i = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta i$$

$$\alpha - \beta i = 0 \qquad \alpha = \beta i$$

$$\lambda - T = 0 \qquad \lambda = T$$

Para la matriz 2x2 se toma la relación

$$|b\rangle = \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|b\rangle = \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T+\lambda & \alpha-\beta i \\ \alpha+\beta i & \lambda-T \end{pmatrix}$$

$z = T + \lambda$

$w = \alpha - \beta i$

$-w^* = \alpha + \beta i$

$z^* = \lambda - T$

- $z^* = \lambda - (z - \lambda)$
- $\lambda = \dfrac{z^* + z}{2}$
- $z = T + (z^* + T)$

$$T = \frac{z - z^*}{2}$$

- $-\omega^* = \alpha + (\alpha - \omega)$

$$\alpha = \frac{\omega - \omega^*}{2}$$

- $\omega = (-\omega^* - \beta i) - \beta i$

$$\beta = \frac{i(\omega + \omega^*)}{2}$$

7 Para mostrar que es una posible representación para la base de cuaterniones analizamos la independencia lineal

$$\alpha|q_1\rangle + \beta|q_2\rangle + \tau|q_3\rangle + \lambda|q_4\rangle = 0$$

$$\alpha\begin{bmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix} + \tau\begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\lambda&\alpha&-\tau&-\beta\\-\alpha&\lambda&-\beta&\tau\\\tau&\beta&\lambda&\alpha\\\beta&-\tau&-\alpha&\lambda\end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$ donde se puede notar

$\lambda = 0$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\tau = 0$

9 $\langle a|b\rangle = |a\rangle^* \odot |b\rangle$

① $\langle a|a\rangle = |a\rangle^* \odot |a\rangle$

$= (a^0 - a^i|q_i\rangle)(q^0 + a^i|q_j\rangle)$

$= a^0a^0|q_0\rangle|q_0\rangle + q^0a^i|q_0\rangle|q_j\rangle - a^0a^i|q_i\rangle|q_j\rangle - q^iq^i|q_i\rangle|q_j\rangle$

③ $\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^*$

$\langle a|b\rangle = |a\rangle^* \odot |b\rangle = |b\rangle \odot |a\rangle^*$

$= (a^0|q_0\rangle - a^i|q_i\rangle)(b^0|q_0\rangle + b^j|q_j\rangle)$

$= a^0b^0|q_0\rangle|q_0\rangle + a^0b^j|q_0\rangle|q_j\rangle - b^0a^i|q_0\rangle|q_i\rangle - a^ib^j|q_i\rangle|q_j\rangle$

$= a^0 b^0 + a^0 b^j |q_j\rangle - b^0 a^i |q_i\rangle - a^i b^j |q_j\rangle |q_i\rangle$

3. $\langle a | \alpha b + \beta c\rangle = \alpha\langle a|b\rangle + \beta\langle a|c\rangle$

$= |a\rangle^* \odot |\alpha b + \beta c\rangle = \alpha\langle a|b\rangle + \beta\langle a|c\rangle$

$= \alpha a^0 (b^0 + b^j |q_j\rangle) + \beta a^0 (c^0 + c^m |q_m\rangle) - \alpha a^i |q_i\rangle (b^0 + b^j |q_j\rangle) + \beta a^i |q_i\rangle (c^0 + c^m |q_m\rangle)$

$= \alpha a^0 b^0 + \alpha a^0 b^j |q_j\rangle + \beta a^0 c^0 + \beta a^0 c^m |q_m\rangle - \alpha b^0 a^i |q_i\rangle - \alpha a^i b^j |q_i\rangle |q_j\rangle - \beta c^0 a^i |q_i\rangle - \beta a^i c^m |q_i\rangle |q_m\rangle$

$= (\alpha a^0 b^0 + \alpha a^0 b^j |q_j\rangle - \alpha b^0 a^i |q_i\rangle - \alpha a^i b^j |q_i\rangle |q_j\rangle + (\beta a^0 c^0 + \beta a^0 c^m |q_m\rangle - \beta a^i c^m |q_i\rangle |q_m\rangle)$

$= \alpha (a^0 b^0 + a^0 b^j |q_j\rangle - b^0 a^i |q_i\rangle - a^i b^j |q_i\rangle |q_j\rangle) + \beta (a^0 c^0 + a^0 c^m |q_m\rangle - c^0 a^i |q_i\rangle - a^i c^m |q_i\rangle |q_m\rangle)$

$= \alpha\langle a|b\rangle + \beta\langle a|c\rangle$

4. $\langle \alpha a + \beta b | c\rangle = \alpha^* \langle a|c\rangle + \beta^* \langle b|c\rangle$

$= \langle \alpha a + \beta b | c\rangle = |\alpha a + \beta b\rangle^* \odot |c\rangle$

$= (\alpha^* (a^0 - a^i |q_i\rangle) + (\beta^* (b^0 - b^j |q_j\rangle)) (c^0 + c^m |q_m\rangle)$

$= \alpha^* a^0 c^0 - \alpha^* c^0 a^i |q_i\rangle + \beta^* c^0 b^0 - \beta^* c^0 b^j |q_j\rangle + \alpha^* a^i c^m |q_i\rangle |q_m\rangle + \beta^* b^0 c^m |q_m\rangle - \beta^* b^j c^m |q_j\rangle |q_m\rangle$

$$(\alpha^* a^0 c^0 - \alpha^* c a^1 |q_1\rangle + \alpha^* a^0 c^m |q_m\rangle - \alpha^* a^1 c^m |q_1\rangle|q_m\rangle) + (\beta^* c^0 b^0 - \beta^* c^0 b^1 |q_1\rangle + \beta^* b^0 c^m |q_m\rangle - \beta^* b^1 c^m |q_1\rangle|q_m\rangle)$$

$$= \alpha^* (a^0 c^0 - c a^1 |q_1\rangle + a^0 c^m |q_m\rangle - a^1 c^m |q_1\rangle|q_m\rangle) + \beta^* (c b^0 - c b^1 |q_1\rangle + b^0 c^m |q_m\rangle - b^1 c^m |q_1\rangle |q_m\rangle)$$

$$= \alpha^* \langle a|c\rangle + \beta^* \langle b|c\rangle$$

⑤ $\langle a|0\rangle = |a\rangle^{*} \odot |0\rangle$

$$= (a^0 - a^1 |q_1\rangle)(0)$$

$$= 0a^0 - 0a^1 |q_1\rangle$$

$$= 0 - 0$$

$$= 0$$

$\langle 0|a\rangle = |0\rangle^{*} \odot |a\rangle$

$$= (0)(a^0 + q^1 |q_1\rangle)$$

$$= 0q^0 + 0q^1 |q_1\rangle$$

$$= 0 + 0$$

$$= 0$$

n) $\langle a|b\rangle = \frac{1}{2}[\langle a|b\rangle - |q_1\rangle \odot \langle \widetilde{\overline{a}|b}\rangle \cdot |q_1\rangle]$

$$= \frac{1}{2}[|a\rangle^{*} \odot |b\rangle - |q_1\rangle \odot |a\rangle^{*} \odot |b\rangle \odot |q_1\rangle]$$

$$= \frac{1}{2}[(a^0 - a^1 |q_1\rangle)(b^0 + b^2 |q_2\rangle) - |q_1\rangle \odot (a^0 - q^1 |q_1\rangle)(b^0 + b^2 |q_2\rangle) \odot |q_1\rangle]$$

$$= \frac{1}{2}[a^0 b^0 + a^0 b^2 |q_2\rangle - b^0 a^1 |q_1\rangle + a^1 b^2 |q_1\rangle|q_2\rangle - |q_1\rangle (a^0 b^0 + a^0 b^2 |q_2\rangle - b^0 a^1 |q_1\rangle - a^1 b^2 |q_1\rangle|q_2\rangle |q_1\rangle]$$

$$\frac{1}{2}\{a^0b^0 + a^0 b^2|q_2\rangle - b^0a^1|q_1\rangle - a^1b^2|q_1\rangle|q_2\rangle + a^0b^0 + a^0b^2|q_2\rangle$$
$$- b^0a^1|q_1\rangle - a^1b^2|q_1\rangle|q_2\rangle\}$$

$$\frac{1}{2}[2a^0b^0 + 2a^0b^2|q_2\rangle - 2b^0a^1|q_1\rangle - 2a^1b^2|q_1\rangle|q_2\rangle]$$

$$[a^0b^0 + a^0b^2|q_2\rangle - b^0a^1|q_1\rangle - a^1b^2|q_1\rangle|q_2\rangle]$$

$$= a^0b^0 + a^0b^2|q_2\rangle - b^0a^1|q_1\rangle - a^1b^2|q_1\rangle|q_2\rangle$$

(b) $\langle a|a\rangle = \||a\rangle\|^2$

$$\langle a|a\rangle = \frac{1}{2}[\widetilde{\langle a|a\rangle} - |q_1\rangle \odot \langle \widetilde{a}|a\rangle \odot q_1\rangle]$$

$$= \frac{1}{2}[|a\rangle^{*} \odot |a\rangle - |q_1\rangle \odot (|a\rangle^{*} \odot |a\rangle) \odot q_1\rangle]$$

$$= \frac{1}{2}[(a^0 - a^1|q_1\rangle)(a^0 + a^1|q_1\rangle) - |q_1\rangle \odot (a^0 - a^1|q_1\rangle)(a^0 + a^1|q_1\rangle) \odot |q_1\rangle]$$

$$= \frac{1}{2}[a^0a^0 + a^0a^1|q_1\rangle - a^0a^1|q_1\rangle - a^1a^1|q_1\rangle|q_1\rangle - |q_1\rangle \odot (a^0a^0 + a^0q_1|q_1\rangle$$
$$- a^1a^1|q_1\rangle|q_1\rangle \odot |q_1\rangle]$$

$$=\frac{1}{2}\left[a^0a^0+q^1q^1-|q_1\rangle\odot(a^0q^0+q^1q^1)\odot|q_1\rangle\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[a^0a^0+a^1a^1+q^0q^0+q^1q^1\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[2a^0a^0+2a^1a^1\right]$$

$$=\left[(a^0)^2+(a^1)^2\right]=(a^0)^2+(a^1)^2$$

h. 21 $\langle a|b\rangle=\langle b|a\rangle^*$

$$\frac{1}{2}\left[(\widetilde{\langle b|a\rangle}\right]-|q_1\rangle\odot(\widetilde{\langle b|a\rangle})^*\odot|q_1\rangle]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(b^0+b^1|q_1\rangle)(a^0-a^2|q_2\rangle)-|q_1\rangle\odot(b^0+b^1|q_1\rangle)(a^0-a^2|q_2\rangle)\odot|q_1\rangle\right.$$

$$=\frac{1}{2}\left[b^0a^0-b^0a^2|q_2\rangle+a^0b^1|q_1\rangle-a^2b^1|q_2\rangle|q_1\rangle-|q_1\rangle\odot(b^0a^0-b^0a^2|q_2\rangle+a^0b^1|q_1\rangle\right.$$
$$\left.-a^2b^1|q_2\rangle|q_1\rangle)\odot|q_1\rangle\right]$$

$$=\frac{1}{\cancel{2}}\left[\cancel{2}(b^0a^0)-2(b^0a^2|q_2\rangle)+2(a^0b^1|q_1\rangle)-2(a^2b^1|q_2\rangle|q_1\rangle)\right.$$

$$=\left[b^0a^0-b^0a^2|q_2\rangle+a^0b^1|q_1\rangle-a^2b^1|q_2\rangle|q_1\rangle\right]$$

$$=b^0a^0-b^0a^2|q_2\rangle+a^0b^1|q_1\rangle-a^2b^1|q_2\rangle|q_1\rangle$$

$i)\ n(|b\rangle) = \| |a\rangle \| = \sqrt{\langle a|a\rangle} = \sqrt{|a\rangle^{*} \circledast |a\rangle}$

$= \sqrt{(a^0 - a^i|q_i\rangle)(a^0 + q^j|q_j\rangle)}$

$= \sqrt{q^0q^0 + q^0q^i|q_j\rangle - a^0q^i|q_j\rangle - q^iq^0|q_i\rangle|q_j\rangle}$

$= \sqrt{q^0q^0 + q^iq^i}$

$= \sqrt{(q^0)^2 + (q^i)^2}$

Se cumple.

- $\| |a\rangle \| \geq 0$
- $\sqrt{(a^0)^2 + (q^i)^2} = k;\ k \in \mathbb{R}$
- Homogeneidad $\|\lambda q\| = \sqrt{(\lambda q^0)^2 + (\lambda q^i)^2} = |\lambda|\,\|a\|$
- desigualdad triangular

(j) $\overline{|a\rangle} = \dfrac{|q\rangle^{*}}{\| |q\rangle \|^2}$

$|a\rangle \odot \overline{|q\rangle} = (q^0 + q^i|q_i\rangle)\left(\dfrac{q^0 - q^j|q_j\rangle}{(q^0)^2 + (q^i)^2}\right)$

$= \dfrac{q^0q^0}{(q^0)^2 + (a^i)^2} - \dfrac{a^0q^j|q_j\rangle}{(a^0)^2 + (q^i)^2} + \dfrac{q^0q^i|q_i\rangle}{(q^0)^2 + (q^i)^2} - \dfrac{q^iq^j|q_i\rangle|q_j\rangle}{(a^0)^2 + (q^i)^2}$

$$= \frac{(a^0)^2}{(q^0)^2+(q)^2} \cdot \frac{+(q^1)^2}{(q^0)^2+(q^1)^2} = \frac{(q^0)^2+(q^1)^2}{(q^0)^2+(q^1)^2} = 1$$

k) $|a\rangle = q_0 + q \qquad |b\rangle = b_0 + b$

$$|a\rangle \odot |b\rangle = (a_0 b_0 - a_1 b_1\ a^0 b + b^0 a + a \times b) = (c_0, c) = |c\rangle \in \mathbb{H}$$

$$= |q\rangle = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 i & q_2 + q_3 i \\ -a_2 + a_3 i & q_0 - a_1 i \end{bmatrix} = \mu_1$$

$$|b\rangle = \begin{bmatrix} b_0 + b_1 i & b_2 + b_3 i \\ -b_2 + b_3 i & b_2 - b_1 i \end{bmatrix} = \mu_2$$

$$|d\rangle = \begin{bmatrix} d_0 + d_1 i & d_2 + d_3 i \\ -d_2 + d_3 i & d_0 - d_1 i \end{bmatrix} \mu_3$$

$$|a\rangle \odot (|b\rangle \odot |d\rangle) = (|q\rangle \odot |b\rangle \odot |d\rangle)$$

$$\mu_1(\mu_2 \mu_3) = (\mu_1 \mu_2)\mu_3$$

l) $|v'\rangle = \overline{|a\rangle} \odot |v\rangle \odot |q\rangle$

$$= \frac{|a\rangle}{\| |a\rangle \|^2} \odot |v\rangle \odot |a\rangle$$

$$= \left(\frac{(a^0 - q^i |q_i\rangle)}{(a^0)^2 + (q^i)^2} \right) (v^j |a_j\rangle) \odot |a\rangle$$

$$= \left(\frac{a^0 v^j |q_j\rangle - a^i v^i |q_i\rangle |q_j\rangle}{(a^0)^2 + (a^i)^2} \right) (a^0 + a^k |q_k\rangle$$

$$= \frac{a^0 a^0 v^j |q_j\rangle}{(a^0)^2 + (a^1)^2} - \frac{a^0 a^i v^j |q_i\rangle |q_j\rangle}{(q^0)^2 + (a^1)^2} + \frac{a^0 a^k v^j |q_i\rangle |q_k\rangle}{(a^0)^2 + (q^1)^2}$$

$$- \frac{a^i v^j q^k |q_i\rangle |q_i\rangle |q_k\rangle}{(q^0)^2 + (q^1)^2}$$

$$= \frac{(a^0)^2 v^j |q_j\rangle}{(q^0)^2 + q^1)^2} + \frac{(a^1)^2 v^j |q_j\rangle}{(a^0)^2 + (a^1)^2}$$

$$= \frac{((a^0)^2 + q^1)^2)}{(a^0)^2 + (a^1)^2} \left(v^j |q_j\rangle\right) = v^j |q_j\rangle$$

$$\cdot \|v^1\|^2 = ((v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2) =$$

$$c \cdot |P_n\rangle \rightleftharpoons P(x) =$$