Ejercicios - Taller 1

Diego Alejandro Gómez Parra
diego.gomezp@javeriana.edu.co

Luis Manuel Peñaranda Ramirez
penaranda-lm@javeriana.edu.co

Camilo Andrés Moreno Colorado
camilomoreno@javeriana.edu.co

23 de febrero de 2020

1. Evaluación de un Polinomio

1.1. Enunciado

Evaluar polinomios o funciones en general tiene muchos problemas, aún para el software profesional. Como se requiere poder evaluar el polinomio en las raíces encontradas, es necesario dedicarle un momento a los detalles. Sea $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ un polinomio entonces, uno de los problemas que se enfrentan es evaluar el polinomio en valor dado x0 de la manera mas eficiente.

1.2. Implemente en R o Python el método de Horner para evaluar $f'(x_0)$, tenga en cuenta la precisión de la computadora o unidad de redondeo

Para este caso se realizó una función adicional la cual deriva el polinomio dando como resultado un vector con los coeficientes ya derivados. Así se toman estos valores para ser evaluados con la función de Horner.

Entrada:

- coeficiente = 2, 0, -3, 3, -4. coeficientes del polinomio.

- $x_0 = -2$. Valor evaluado.

Salida:

- derivada = 8, 0, -6, 3. coeficientes derivados.
- Resultado = 10. El numero mínimo de operaciones es 8, y es de 4 sumas y 4 multiplicaciones.

1.3. Implemente el método de Horner si se realiza con números complejos, tenga en cuenta la precisión

Para este segundo caso solo fue necesario el uso de una función llamada complex, para poder determinar una variable con una parte real y una imaginaria, no fue necesario realizar cambios adicionales ya que con esto es suficiente y realiza las operaciones como normalmente lo hace.

Entrada:

- coeficiente = 2, 0, -3, 3, -4. coeficientes del polinomio.
- $x_0 = 2 + 1i$. Valor evaluado.

Salida:

- Resultado $= -21 + 39i$. El numero mínimo de operaciones es 8, y es de 4 sumas y 4 multiplicaciones.

2. Óptima Aproximación Polinómica

2.1. Enunciado

La implementación de punto flotante de una función en un intervalo a menudo se reduce a una aproximación polinómica, siendo el polinomio tıpicamente proporcionado por el algoritmo Remez. Sin embargo, la evaluación de coma flotante de un polinomio de Remez a veces conduce a cancelaciones catastróficas.El algoritmo Remez es una metodología para localizar la aproximación racional mínima a una función. La cancelaciones que también hay que considerar en el caso de del método de Horner, suceden cuando algunos de los coeficientes polinómicos son de magnitud muy pequeña con respecto a otros. En este caso, es mejor forzar estos coeficientes a cero, lo que también reduce el recuento de operaciones. Esta técnica, usada clásicamente para funciones pares o impares, puede generalizarse a una clase de funciones mucho mas grande.

2.2. Aplique una aproximación de Taylor

Para realizar este punto se utilizo la libreria llamada Pracma, esta tiene una implementacion de Taylor. Además, como nos dan un intervalo, se particiona en 10 partes, para poder evaluarlo en cada uno.

Entrada:

- $f(x) = sin(x)$. Funcion a evaluar.
- $(\frac{-\pi}{64}, \frac{\pi}{64})$. Intervalo.

Salida:

Taylor	Seno	Error Relativo
-0.04906767	-0.04906767	$2{,}372496 \times 10^{-9}$
-0.03925981	-0.03925982	$7{,}770807 \times 10^{-10}$
-0.02944817	-0.02944817	$1{,}842764 \times 10^{-10}$
-0.01963369	-0.01963369	$2{,}426765 \times 10^{-11}$
-0.009817319	-0.009817319	$7{,}984568 \times 10^{-13}$
0	0	0
0.009817319	0.009817319	$-7{,}984568 \times 10^{-13}$
0.01963369	0.01963369	$-2{,}426765 \times 10^{-11}$
0.02944817	0.02944817	$-1{,}842764 \times 10^{-10}$
0.03925981	0.03925982	$-7{,}770807 \times 10^{-10}$

  Cuadro 1: Resultados aproximación Taylor vs. Seno

- Por cada punto dentro del intervalo se realizaban 8 operaciones para obtener el calculo.

2.3. Implemente el método de Remez

El algoritmo de Remez se usa para producir un polinomio óptimo P(x) que se aproxima a una función dada f(x) en un intervalo dado. Es un algoritmo iterativo que converge a un polinomio que tiene una función de error con N+2 niveles extremos. Según el teorema anterior, este polinomio es óptimo. El algoritmo de Remez utiliza el hecho de que se puede construir un polinomio de grado N-ésimo que conduce a niveles y valores de error alternos, dados los N+2 puntos de referencia. Dados N+2 puntos de referencia $x_1, x_2, ..., x_{N+2}$, donde $x_1 y x_{N+2}$ son presumiblemente los puntos finales del intervalo de aproximación, estas ecuaciones deben resolverse:

$$P(x_1) - f(x_1) = +\epsilon$$

$$P(x_2) - f(x_2) = -\epsilon$$

$$P(x_3) - f(x_3) = +\epsilon$$

$$\cdots$$

$$P(x_{N+2}) + f(x_{N+2}) = \pm\epsilon$$

Los lados de la derecha se alternan en señal, es decir

$$P_0 + P_1 x_1 + P_2 x_1^2 + P_3 x_1^3 + \cdots + P_N x_1^N - f(x_1) = +\epsilon$$

$$P_0 + P_1 x_2 + P_2 x_2^2 + P_3 x_2^3 + \cdots + P_N x_2^N - f(x_2) = +\epsilon$$

$$\cdots$$

Dado que $x_1, ..., x_{N+2}$ son datos dados, todas sus potencias son conocidas, y $f(x_1), ..., f(x_{N+2}$ también son conocidos. Eso significa que las ecuaciones anteriores son solo N+2 ecuaciones lineales en las N+2 variables $P_0, P_1, ..., P_N$ y ϵ. Dados los puntos de referencia $x_1, ..., x_{N+2}$se puede resolver este sistema para obtener el polinomio P y el número ϵ.

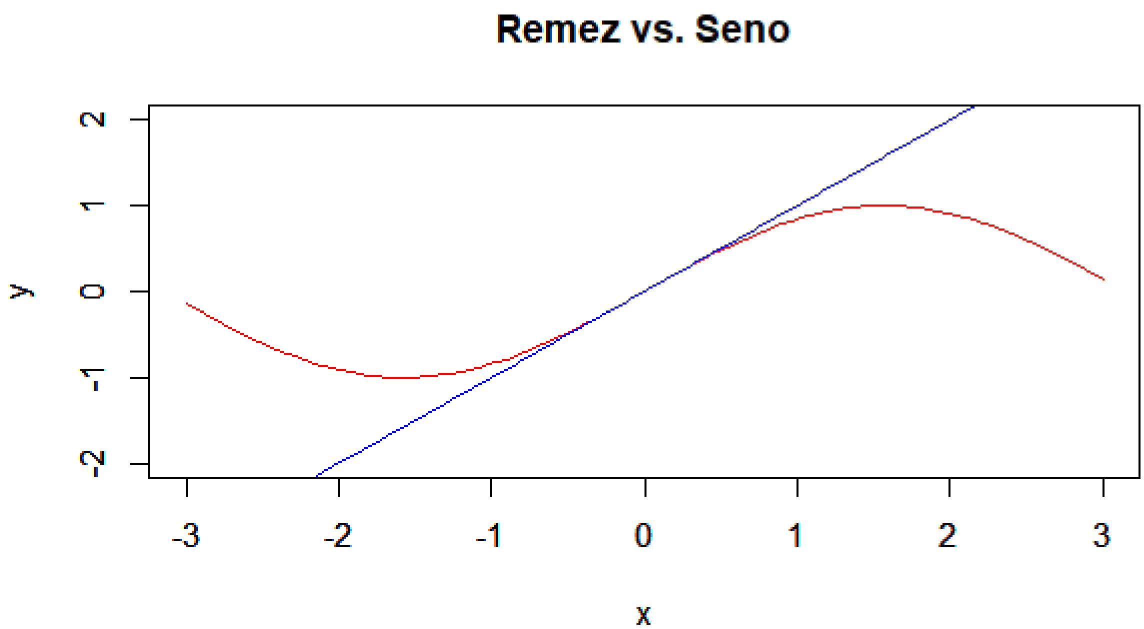
Para el desarrollo de este punto, se realizo la aproximación con dos polinomios de grados distintos, de forma que se podía evidenciar de una mejor forma la veracidad del método.

Entrada:

- $f(x) = sin(x)$. Funcion a evaluar.
- $(\frac{-\pi}{64}, \frac{\pi}{64})$. Intervalo.
- 1 y 3. el grado del polinomio aproximado.
- Error $= 1 \times 10^{-8}$

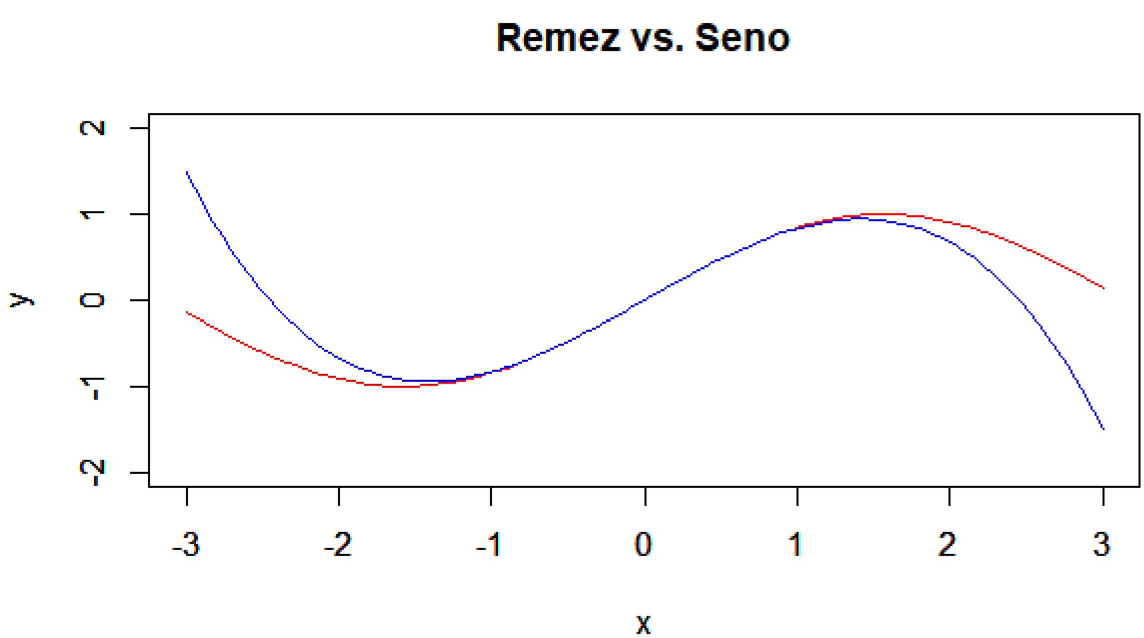
Salida:

- grado 1 polinomio:



Gráfica 1: Gráfica Remez de grado 1 vs. Seno.

- grado 3 polinomio:



Gráfica 2: Gráfica Remez de grado 3 vs. Seno.