

Taller 2
Ciencias Planetarias
Camilo Ospinal
Septiembre, 2023

Problema 1

Calcule y grafique los perfiles de densidad, masa, aceleración gravitacional, presión y temperatura, en función del radio para un planeta tipo terrestre de cuatro capas: un núcleo solido interno, un núcleo líquido externo, un manto y una corteza, con las mismas características del planeta Tierra.

Solución:

Valencia et. al. 2006 modelan la estructura interna de planetas terrestres masivos, donde encuentran los distintos perfiles dependiendo del caso. Puesto que se basan en el modelo PREM para el estudio, los procedimientos aplicados en el artículo también son aplicables a la Tierra.

El modelo PREM (Preliminary Reference Earth Model) es un modelo teórico de la evolución tectónica y geodinámica de la Tierra, fue propuesto por Adam M. Dziewonski y Don L. Anderson en 1981, como parte de un intento de establecer un modelo estándar de la estructura de la Tierra, desde el centro hasta la superficie, definiendo las principales propiedades y discontinuidades con las cuales la comunidad científica pudiera trabajar en cualquier estudio sobre la estructura del planeta.

Las ecuaciones que presenta Valencia et. al. 2006 para la estructura interna son las siguientes:

$$\begin{aligned}\frac{d\rho(r)}{dr} &= -\frac{\rho(r)g(r)}{\phi(r)} \\ \frac{dg(r)}{dr} &= 4\pi G\rho(r) - \frac{2Gm(r)}{r^3} \\ \frac{dm(r)}{dr} &= 4\pi r^2\rho(r) \\ \frac{dP(r)}{dr} &= -\rho(r)g(r) \\ \frac{dT(r)}{dr} &= -\frac{\rho(r)g(r)T(r)}{K_S(r)}\gamma(r)\end{aligned}$$

Donde r es el radio, $\rho(r)$ es la densidad, $g(r)$ la aceleración de la gravedad, $\phi = \frac{K_S(r)}{\rho(r)}$ es el parámetro sísmico, $K_S(r)$ el modulo de densidad aparente, G la constante gravitacional, $m(r)$ la masa, $P(r)$ la presión, $T(r)$ la temperatura y $\gamma(r)$ el parámetro de Gruneisen. Debido a la extensa cantidad de pasos que hay que realizar para calcular K_S y γ , se utilizarán los datos brutos del PREM para estos parámetros¹, los datos los

¹Si el lector desea saber más acerca del procedimiento para calcular estos datos, puede redirigirse al artículo de Valencia et. al., 2006 que encontrará en referencias. Puede que el autor de este escrito anexe el procedimiento en futuras versiones de este trabajo... quizás.

puede encontrar en *Physics of the Earth* de Frank Stacey y Paul Davis.

Por lo tanto, para cada una de las 4 capas de la Tierra se tienen los siguientes perfiles:

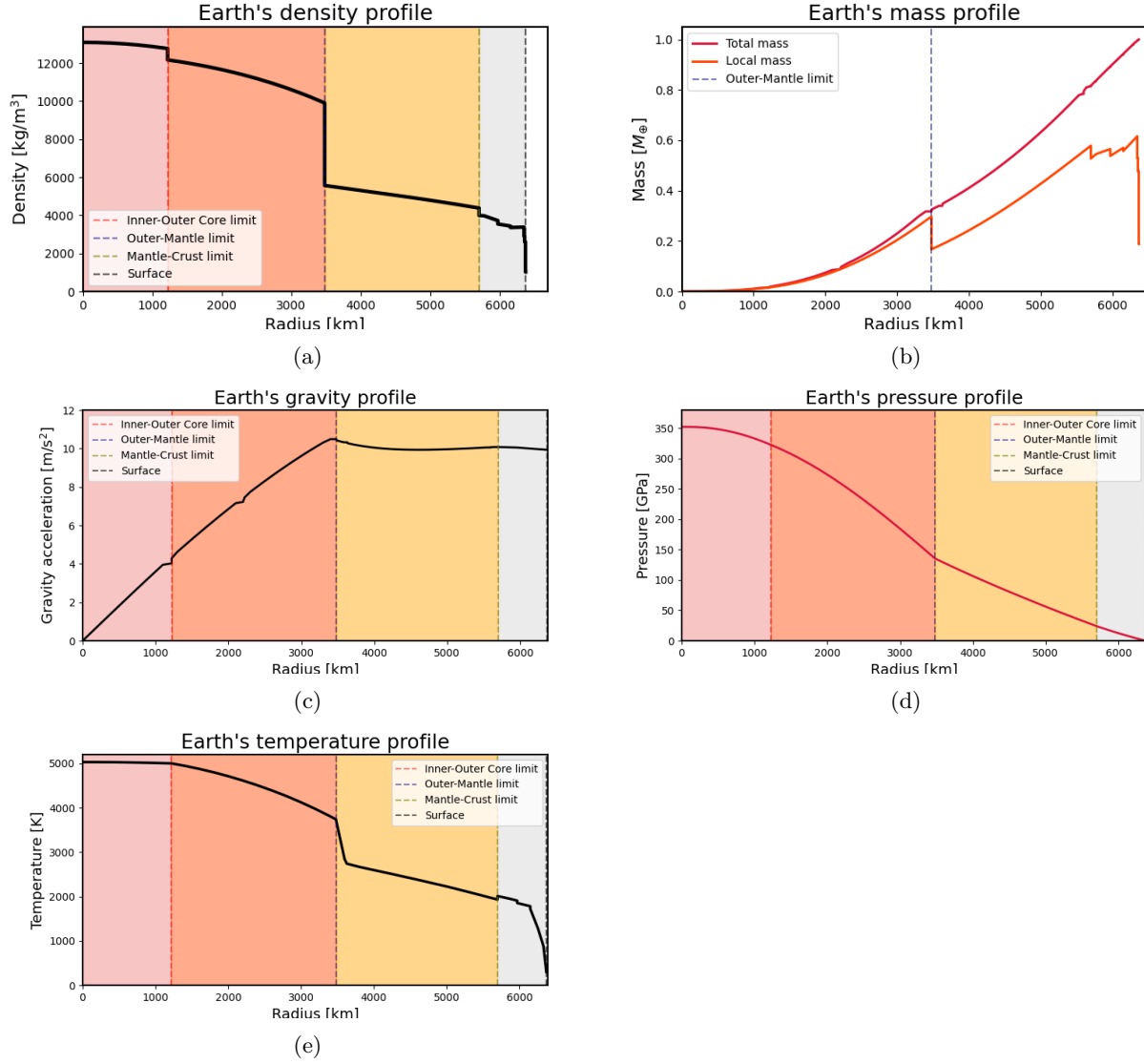


Figure 1: Perfiles en función el radio de distintas propiedades físicas de la Tierra basados en el modelo PREM. (a) es el perfil de densidad, (b) es el perfil de masa, (c) es el perfil de gravedad, (d) es el perfil de presión y (e) es el perfil de temperatura.

Es importante resaltar que para la gráfica de las primeras 4 tablas se debe proceder con cuidado al utilizar los métodos de integración, utilizar los mismos métodos para todos los cálculos numéricos causa errores, se supone que es debido a la precisión con la cual se calculan las integrales. Para este caso se encontró que los métodos más efectivos son los siguientes en respectivo orden: aplicar método de Simpson para la masa utilizando las densidades, utilizar método de sumas de Riemann para la gravedad utilizando las masas encontradas en el paso anterior, aplicar método trapezoidal para la presión utilizando las gravedades encontradas en el paso anterior. Se recomienda al lector probar distintos métodos numéricos a fin de encontrar los mejores resultados y, si se quiere, la explicación puntual de porque esta incongruencia entre métodos de integración. Para el interesado en saber como se construyó el código, puede encontrarlo en el *Apéndice 1*.

Problema 2

Calcule el tamaño de las magnetósferas de los planetas gigantes del Sistema Solar. Describa el modelo de viento solar que usará para los cálculos.

Solución:

Los vientos solares son provocados por eyección de plasma hacia el espacio, este material se compone principalmente de protones de hidrógeno, aunque también contiene partículas alpha y electrones. Los vientos solares fueron sugeridos por primera vez por L. Biermann en 1951 debido a la suposición de que algún tipo de fenómeno proveniente del Sol debía causar las colas radiales de los cometas. La actividad solar no es regular ni estable, por lo que en los momentos de menor actividad hay muy pocas manchas solares provocadas por las líneas de campo magnético abierto, mientras que durante la mayor actividad hay varias manchas solares de disitintos tamaños que aparecen en diferentes latitudes. Estas manchas tienen menor densidad y temperatura, es de aquí donde se producen los vientos solares más rápidos. Debido a su alta concentración de partículas cargadas, desgastan las superficies de los cuerpos del sistema estelar, así como las atmósferas de aquellos cuerpos que las posean. Entre más cerca esté un planeta de su estrella, mayor será la densidad de partículas que reciba gracias a las eyecciones corionales de masa y, por ende, mayor el daño en su atmósfera, arrancándola del planeta y erociionando el su reservorio de agua a través de procesos de perdida atmosférica no térmica. La perdida de agua afectaría la tectónica de placas del planeta, debido a que si este pierde la mayor parte de su agua, su litósfera no sería lo suficientemente deformable y no habría subducción de la corteza, lo que llevaría a que la corteza sea gruesa y una corteza delgada es necesaria para el buen funcionamiento de la tectónica de placas, debido a que esta ayuda a enfriar el interior de manera eficiente, no tan rápido, logrando generar un dínamo impulsado térmicamente como en la Tierra, generando un campo magnético alrededor del planeta que llamamos magnetósfera. Las magnenósferas propician la desviación de las partículas cargadas provenientes del Sol, resguardando la atmósfera del planeta y su superficie. Los vientos solares comprimen la magnetósfera reduciendo su tamaño, entre más alejado esté un planeta con magnetósfera del Sol, es de esperarse que esta sea más amplia debido a la reducción de densidad de protones.

A continuación, describimos el procedimiento para calcular el radio de una megnetósfera:

El tamaño de una magnetósfera se puede calcular asumiendo un equilibrio de presiones entre el viento solar, la presión térmica del viento estelar de electrones y protones, el campo magnético y la presión atmosférica. Esto nos permite encontrar la distancia de la magnétopausa, R_s (la magnétopausa es el limite de la magnétosfera).

$$p_s + p_T = p_p + \frac{1}{2\mu_0}(\mathbf{B}_p + \mathbf{B}_{mc})^2$$

Donde p_s es la presión del viento solar, p_T la presión térmica, p_p la presión atmosférica del planeta, y el término final a la presión de la magnétosfera, con \mathbf{B}_p el campo magnético del planeta y \mathbf{B}_{mc} el campo magnético de las corrientes de la magnétopausa². En Grießmeier et. al., (2004) se describe que para los "Júpiter Calientes" el tamaño de su atmósfera se encuentra en el mismo orden de su magnetósfera, por ende debe ser considerado (aunque, al final, lo obvian para su análisis). Esto debido a que la cercanía a la estrella comprime tanto la magnetósfera que la lleva a distancias de su atmósfera, como esto no sucede para los planetas gigantes del sistemas solar, aquí no se tendrá en cuenta. Tenemos que

$$p_p = mnv_{eff}^2$$
$$p_T = 2nk_B T$$

Donde n es la densidad de protones, m su masa, v_{eff} la velocidad efectiva del viento solar relativa al planeta, que se calcula como $v_{eff} = \sqrt{v^2 + v_{orbit}^2}$, con v la velocidad del viento solar; k_B es la constante de Boltzmann y T la temperatura de los protones, no trabajaremos con la temperatura de los electrones para simplificar

²Para saber más acerca de este tema ver *Handbook of Atmospheric Electrodynamics, Vol. II*

el problema. Se ha encontrado que esta temperatura varía con la distancia a la estrella y la velocidad del viento solar (Adhikari et. al., 2021; Shi et.al., 2023), por ende, será encontrada luego para cada caso.

El término de la presión de la magnetósfera se puede simplificar teniendo en cuenta que para este caso $\mathbf{B}_p + \mathbf{B}_{mc} = 3\mathbf{B}_p =: 2f_0\mathbf{B}_p$, siendo f_0 un factor de forma que depende de como asumamos la forma de la magnetósfera, si la magnetósfera es esférica, entonces $f_0 = 1.5$, nosotros asumiremos el caso más realista donde se modela la magnetósfera como un cilindro con una semiesfera en su tope, $f_0 = 1.16$. Luego, la magnitud del campo magnético es

$$B_p = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi R_s^3}$$

Donde μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío y \mathcal{M} el momento dipolar magnético planetario. Remplazando todo lo anterior en la ecuación de equilibrio encontramos la distancia de la magnétopausa:

$$R_s = \left(\frac{\mu_0 f_0^2 \mathcal{M}^2}{8\pi^2 (mnv_{eff}^2 + 2nk_B T)} \right)^{1/6}$$

Se deja la demostración al lector.

Solo basta introducir el modelo del viento solar a utilizar que nos permita hallar la velocidad de propagación de las partículas en el espacio. Se va a utilizar el modelo de Parker que, si bien este modelo utiliza aproximaciones del comportamiento real que derivan a inconsistencias con los datos observados, tales como la densidad de protones que llegan a la órbita terrestre, correcciones que han hecho modelos posteriores en base al de Parker, sirve en muy buena medida para describir el fenómeno en cuestión.

El modelo de Parker cuestiona la muy común sentencia de que "el Sol se encuentra en equilibrio hidrostático", de ser así, las ecuaciones que plantea este modelo presentan serias contradicciones con lo observado, por lo tanto, la primera asunción es que el Sol no se encuentra en equilibrio hidrostático y está perdiendo continuamente masa que es liberada al espacio. Se considera además a la corona como esférica y en movimiento constante, la influencia del campo magnético del Sol y su rotación se obvian, las ecuaciones tampoco dependen del tiempo, resultando en

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} \left(v^2 - \frac{2\mathcal{T}}{m} \right) = \frac{4\mathcal{T}}{mr} - \frac{GM_\odot}{r^2}$$

Donde v es la velocidad del viento solar, r la distancia radial y \mathcal{T} la temperatura de la corona. Esta ecuación tiene solución analítica cuando se considera la temperatura como constante, es decir, isotérmica. En la Fig. 2 se muestran las cuatro posibles soluciones, donde la curva de clase 2 muestra el comportamiento físico real del viento solar cuando la distancia aumenta.

Los vientos isotérmicos del hidrógeno ionizado tienen una velocidad de sonido constante dada por

$$v_0 = \left(\frac{2k_B T_0}{m} \right)^{1/2}$$

Con T_0 la temperatura de la corona. El viento solar alcanza esta velocidad cuando llega a un radio crítico o radio sónico, r_s

$$r_s = \frac{GM_\odot}{2v_0^2}$$

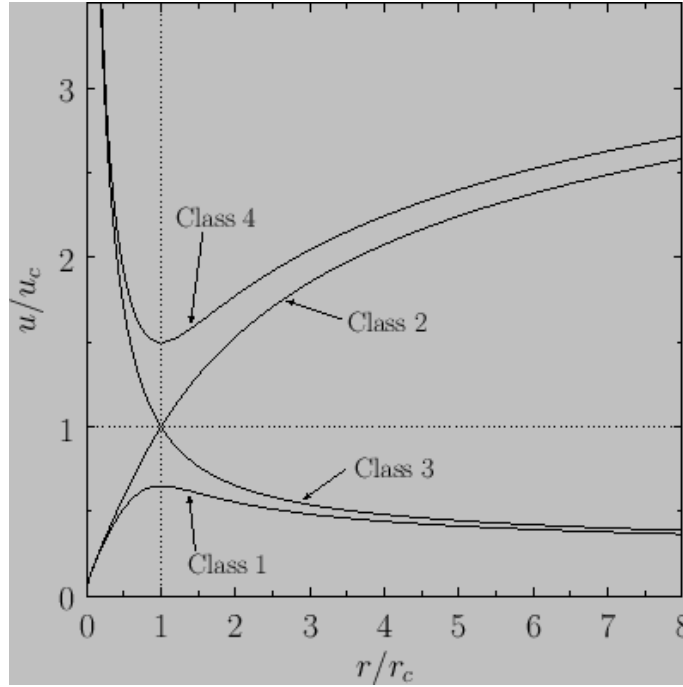


Figure 2: Las cuatro posibles soluciones a las ecuaciones que describen el viento solar. Aquí u es la velocidad del viento solar, u_c la velocidad del sonido, r la distancia radial y r_c el radio crítico. Las curvas de clase 3 y 4 muestran un comportamiento supersónico para el viento solar antes del radio crítico que no concuerdan con las observaciones. Las curvas de clase 1 y 2 muestran un comportamiento subsónico antes del radio crítico, sin embargo, la curva de clase 1 no concuerda con las observaciones cuando el radio tiende a infinito. La curva de clase 2 es la solución física real a la velocidad del viento solar. Tomado de <https://farside.ph.utexas.edu/teaching/plasma/Plasma/node90.html#e5.52>

Si imponemos condiciones de frontera tal que la velocidad sea la del sonido, $u = a_0$, en el radio crítico, $r = r_s$, la solución es:

$$\frac{v^2}{v_0^2} - \ln\left(\frac{v^2}{v_0^2}\right) = 4 \ln \frac{r}{r_s} + 4 \frac{r_s}{r} - 3$$

Cuando la distancia es lo suficientemente grande, la solución se aproxima a

$$v \approx 2v_0(\ln(r/r_s))^{1/2}$$

Y esta es la ecuación que utilizaremos para la velocidad del viento solar a las distancias de las órbitas de los planetas gigantes.

Sea la temperatura de la corona $T_0 = 2 \times 10^6 K$, entonces la velocidad del sonido y el radio crítico son

$$v_0 = 181707.45 m/s$$

$$r_s = 2.01 \times 10^9 m$$

Utilizando estos valores, como ejemplo, la velocidad del viento solar a 1 AU es $v = 754.44 km/s$, lo cual podría ser un inconveniente, puesto que las velocidades reales medidas en la Tierra son de $\sim 400 km/s$, y mayores velocidades hasta $800 km/s$ se consideran como vientos solares rápidos provocados por la alta actividad (Danesy et. al., 2005), no obstante, estos resultados son los que se obtienen con el modelo (Parker, 1958) que puede ver en la Fig. 3.

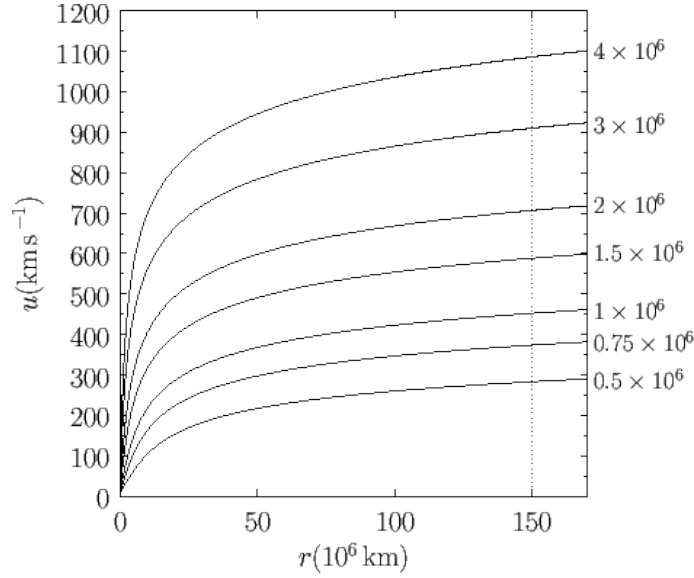


Figure 3: Soluciones del flujo de velocidades del viento solar para distintas temperaturas de la corona en Kelvin. La línea puntada indica 1 AU. Tomado de: <https://farside.ph.utexas.edu/teaching/plasma/Plasma/node90.html#e5.52>

Es necesario hallar la densidad de protones en función del radio, para esto necesitamos la tasa a la cual el Sol pierde masa, para el modelo estacionario de Parker la tasa es constante, y viene dada por

$$\frac{dM_{\odot}}{dt} = 4\pi r_s^2 n_0 m v_0$$

n_0 es la densidad de protones en el radio crítico. Se encuentra en varias de las referencias que la tasa de pérdida de masa del Sol es de $10^{-14} M_{\odot} \text{ yr}^{-1} = 6.31 \times 10^8 \text{ kg/s}$, resultado que, como habíamos mencionado anteriormente, varía con el de Parker, y que usaremos para nuestros cálculos. Por lo tanto, la densidad de protones en función del radio es

$$n(r) = \frac{1}{4\pi r^2 m v(r)} \frac{dM_{\odot}}{dt}$$

Finalmente, necesitamos la temperatura de los protones en función de la distancia, para ello, vamos a utilizar el modelo de Cranmer et. al. (2009)³,

$$\ln\left(\frac{T}{10^5 \text{ K}}\right) = 0.9711 - 0.7988 x + 0.07062 x^2$$

Con $x = \ln(r/1 \text{ AU})$. La Fig. 4 muestra el cambio de la temperatura desde la órbita terrestre hasta la órbita de Neptuno.

³Puede encontrar esta y más referencias del tema en las cuales basé el modelo realizado en este trabajo en la sección de Referencias organizada en orden de aparición de los problemas.

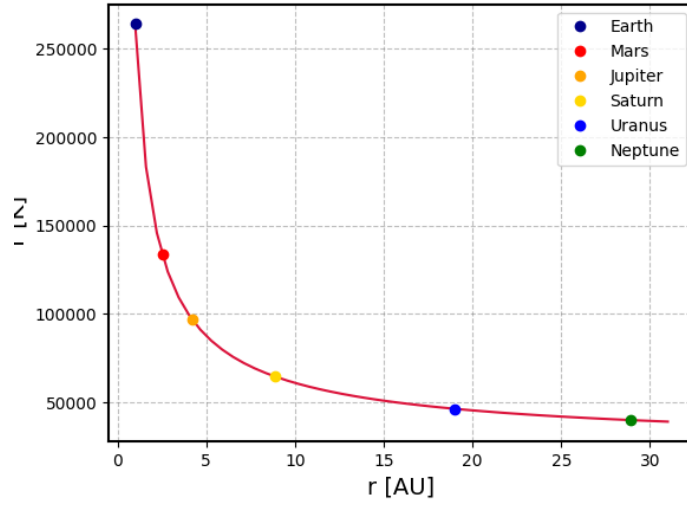


Figure 4: Caída de la temperatura en Kelvin del protón en el viento solar con el incremento de la distancia radial desde 1 AU hasta 30 AU. Cada punto representa un planeta un planeta del Sistema Solar.

Procedamos entonces a calcular la distancia de la magnetopausa de cada planeta gigante en términos del radio del planeta:

Júpiter:

- Distancia: $r = 4.21$ AU
- Momento dipolar: $1.58 \times 10^{27} \text{ Am}^2$
- Velocidad efectiva: $v_{eff} = 871344.43 \text{ m/s}$
- Densidad de protones: $n(r) = 86871.46 \text{ m}^{-3}$
- Temperatura de protones: $T(r) = 96925.93 \text{ K}$
- **$R_s = 39.19$**

Saturno:

- Distancia: $r = 8.87$ AU
- Momento dipolar: $4.74 \times 10^{25} \text{ Am}^2$
- Velocidad efectiva: $v_{eff} = 926040.42 \text{ m/s}$
- Densidad de protones: $n(r) = 18412.77 \text{ m}^{-3}$
- Temperatura de protones: $T(r) = 64662.93 \text{ K}$
- **$R_s = 18.33$**

Urano:

- Distancia: $r = 19.01$ AU
- Momento dipolar: $3.95 \times 10^{24} \text{ Am}^2$
- Velocidad efectiva: $v_{eff} = 978863.36 \text{ m/s}$
- Densidad de protones: $n(r) = 3792.23 \text{ m}^{-3}$

- Temperatura de protones: $T(r) = 46353.95$ K
- $R_s = 24.12$

Neptuno:

- Distancia: $r = 28.91$ AU
- Momento dipolar: 1.98×10^{24} Am²
- Velocidad efectiva: $v_{eff} = 1006739.47$ m/s
- Densidad de protones: $n(r) = 1594.28$ m⁻³
- Temperatura de protones: $T(r) = 39973.52$ K
- $R_s = 22.65$

Problema 3

Considere un impacto entre un meteorito rocoso ($\rho = 3.5$ g cm⁻³) contra la Tierra (El asteroide 99942-Apophis, tiene este tamaño y densidad, y cruzará a unos 30000 km de distancia de la Tierra en abril de 2029):

- Calcule la energía cinética involucrada en el impacto si el meteorito golpea a la Tierra a una velocidad de 27.5 km/s
- Exprese la energía del impacto en megatones (Mton) y en la escala de Richter (1 Mton = 4.18×10^{15} J).
- La bomba de "Castle-Bravo" probada por Estados Unidos en 1945 liberó 15 Mton, ¿cuántas bombas "Castle-Bravo" serían equivalentes a la energía de Apophis?
- Estime el tamaño del cráter formado por una colisión directa (90°) y el tamaño si la colisión se da con un ángulo de 40° con el horizonte local.
- Si las rocas excavadas del cráter tienen velocidades de eyección de unos 500 m/s, calcule ¿qué tan lejos del cráter pueden formarse cráteres secundarios formados por estas rocas?

Solución:

(99942) Apophis es un Near Earth Object que fue por primera vez avistado en 2004. Fue catalogado en un principio como un asteroide con alta probabilidad de colisión con la Tierra, con el paso de los años, mediante la observación, se fueron refinando los cálculos que permitieron obtener diferentes parámetros tales como su semieje mayor, excentricidad, distancia al perihelio, periodo de rotación o diámetro, encontrando que la probabilidad de impacto es demasiado baja, siendo borrado de los catálogos de impactos probables para pasar a ser un NEA (Small Body Dataset, JPL). Se estima que el diámetro de Apophis es de 0.34 ± 0.04 km y que este tendrá su aproximación más cercana, por el momento, en 2029, siendo el asteroide que más cerca pasaría de la Tierra en toda la historia a unos 31000 km de la superficie (Brozovic et. al., 2018), como comparación, las orbitas geoestacionarias están a ~ 35800 km. En la *Fíg. 4* se muestra la órbita de Apophis.

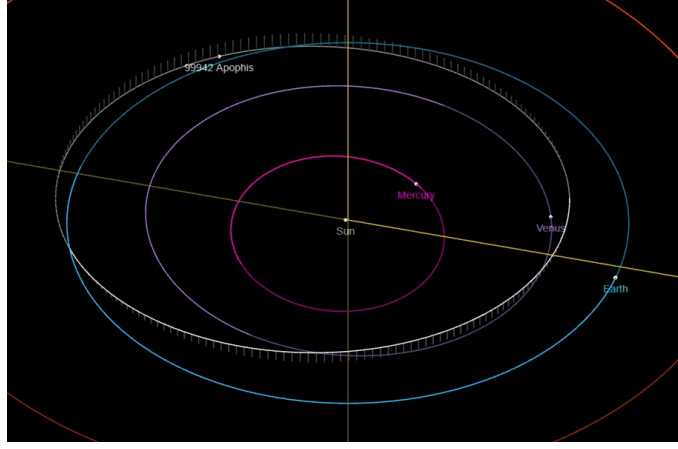


Figure 5: Órbita de (99942) Apophis junto a las trayectorias de los tres primeros planetas del Sistema Solar. La órbita de Apophis tiene un perihelio menor y un afelio mayor que el de la Tierra, lo que lleva a que su trayectoria corte en dos puntos la órbita de la Tierra. La imagen fue generada el 20 de septiembre de 2023 (Small Body Dataset, JPL).

Vallejo et. al., (2022) analizaron las características observacionales de Apophis en su paso cercano en 2029, encontraron que Apophis podría ser visto a simple vista desde Europa, África y el oeste de Asia. El mejor punto de observación serán las Islas Canarias. En la *Fig. 5* se muestra la trayectoria de Apophis sobre la superficie de la Tierra durante la ventana de acercamiento. El recorrido inicial de Apophis pasará por el territorio australiano en una Etapa 1, continuando su pasó hacia el oeste llegando a África con dirección a las Islas Canarias entre las 18:00 y las 23:00 UTC en la Etapa 2. Durante esta etapa, Apophis pasará de una distancia geocéntrica de 15 a 6 R_{\oplus} a las 21:45 UTC y finalmente a 7 R_{\oplus} al acabar la etapa. La Etapa 3 es un paso por Norte América durante el día, terminando en la Etapa 4 en el este de Asia. En la *Fig. 6* se marca con un punto rojo la zona de mayor aproximación.

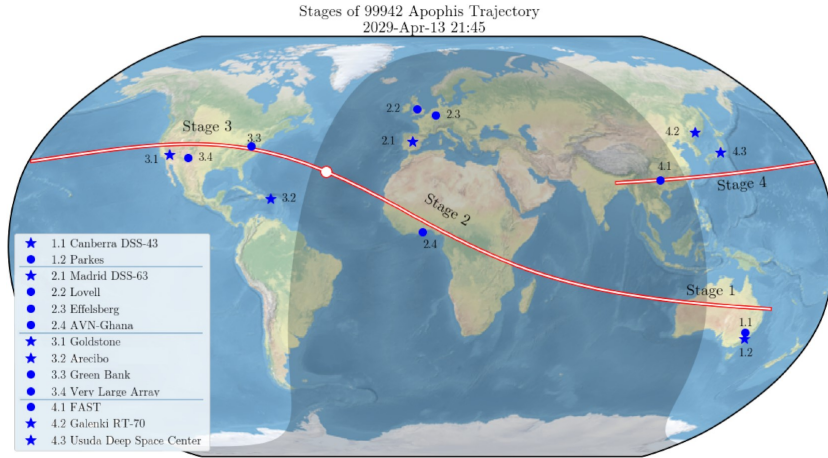


Figure 6: Trayectoria de (99942) Apophis sobre la superficie terrestre dividida en etapas. Los puntos y estrellas azules marcan los radio telescopios más importantes en el mundo. El punto rojo es el punto de mayor proximidad en la ventana de aproximación, a lon. 43.4°W, lat. 28.9°N y un radio de 6 R_{\oplus} .

Vamos a suponer que el sueño idílico de Agustín de ver el paso de Apophis⁴, el tan interesante asteroide que lo llevó a publicar el artículo, en las Islas Canarias, lastimosamente no se va a llevar a cabo, porque por alguna jugarreta del destino, del universo o del azar, la trayectoria de Apophis cambia drásticamente, pues vamos a confiar en que los astrónomos saben lo que hacen y hasta ahora los cálculos son certeros, y que antes

⁴Agustín Vallejo es Astrónomo de la Universidad de Antioquia con quien recientemente hablé de su deseo de viajar a las Islas Canarias en 2029 para ver el paso de Apophis.

de llegar al punto rojo mostrado en la gráfica Apophis se estrella contra algún lugar del continente africano (aunque sería mejor pegarle a los estadounidenses y dejar a Agustín morir feliz...). Además, vamos a suponer que el ángulo de impacto es de 90° , que si bien no es realista, nada en este ejemplo lo es, así que tenemos toda la potestad de apuntar a 90° a la Casa Blanca o donde queramos. La velocidad relativa de Apophis respecto a la Tierra será de $v_a = 27.5 \text{ km/s}$, su radio $r_a = 0.17 \text{ km}$ a partir de los datos de Brozovic et. al. (2018) y su densidad la de una condrita, $\rho_a = 3.5 \text{ g cm}^{-3}$.

- Para calcular la energía del impacto solo consideraremos la energía cinética de la velocidad relativa del asteroide tratandolo como esférico.

Su masa viene dada por

$$m = \rho_a \frac{4}{3} \pi r_a^3 \rightarrow m = 7.20 \times 10^{10} \text{ kg}$$

Por lo tanto, su energía cinética es

$$K = \frac{1}{2} m v_a^2 = 2.72 \times 10^{19} \text{ J}$$

- Puesto que $1 \text{ Mton} = 4.18 \times 10^{15} \text{ J}$, la energía del imapacto es igual a

$$E = \frac{2.72 \times 10^{19} \text{ J}}{4.18 \times 10^{15} \text{ J Mton}^{-1}} = 6507.18 \text{ Mton}$$

- El número de bombas Castle-Bravo a las cuales equivale el imapacto del asteroide se dan a continuación

$$n_{\text{Castle-Bravo}} = \frac{6507.18 \text{ Mton}}{15 \text{ Mton}} = 433.81$$

- Es evidente para todos en nuestra vida cotidiana que "entre más fuerte sea el impacto, más grande será el hueco que deje", en nuestro caso se traduce en "entre mayor sea la velocidad del asteroide, mayor energía cinética y, por ende, mayor el tamaño del cráter". De hecho, de *Planetary Sciences*, sección 5.4, se da que el diametro D es proporcional a la raíz cuarta de la energía E ($D \propto E^{1/4}$). Una ley de escalamiento más general, encontrada empíricamente, es:

$$D \approx 2 \rho_m^{0.11} \rho_p^{-1/3} g_p^{-0.22} R^{0.13} E_k^{0.22} (\sin \theta)^{1/3}$$

Donde ρ_m es la densidad del meteorito, ρ_p la densidad del planeta, g_p la gravedad del planeta, R el radio del proyectil, E_k la energía cinética de impacto y θ el ángulo de impacto del horizonte local. Por supuesto que ρ_p es la densidad del lugar del impacto, en este caso la corteza continental, así que $\rho_p = 2.83 \text{ g cm}^{-3}$ en promedio. Y tomando un valor de $g_p = 9.86 \text{ m s}^{-2}$, el impacto a 90° resulta en un cráter de

$$D \approx 7714.68 \text{ m} \approx 7.71 \text{ km}$$

Si el ángulo de impacto es de 40° , entonces

$$D \approx 6657.95 \text{ m} \approx 6.68 \text{ km}$$

- La distancia máxima, x_{max} , de las rocas despedidas se da en un ángulo de 45° y utilizando $x = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta$, si las rocas salen a una velocidad $V_0 = 500 \text{ m/s}$, entonces

$$x_{max} = 25.35 \text{ km}$$

Problema 4

De la lista de los mayores cráteres de impacto de la Tierra elija uno que tenga como mínimo 70 km de diámetro. Para el cráter elegido, calcular el tamaño del impactor suponiendo lo siguiente:

- Un impacto directo de un objeto proveniente del cinturón principal de asteroides. Esto supone asumir una densidad y una velocidad ajustada a dichos objetos.
- Un impacto directo de un objeto cometario que proviene de la nube de Oort. Esto supone asumir una densidad y una velocidad ajustada a dichos objetos.

Solución:

Cráter Acraman: El cráter Acraman es un cráter que se encuentra en el sur de Australia, su impacto se pudo haber dado hace 590 millones de años y su descubrimiento se dio en la década de los 80' luego de analizar la zona del lago que lleva su mismo nombre. Debido a las fenómenos naturales del lugar, se encuentra bastante erosionado, por lo que la medición del diámetro se tuvo que realizar de forma indirecta. Williams & Gostin (2005) encontraron un radio de 85 a 90 km. Aquí se utilizará el primer valor.

- Despejando el radio del impactor de la ecuación del diametro resultante de un impacto presentada en el problema 3, se tiene

$$R = D (2\rho_m^{0.11} \rho_p^{-1/3} g_p^{-0.22} E_k^{0.22} (\sin\theta)^{1/3})^{-0.13}$$

El problema radica en la suposición de las propiedades del asteroide en cuestión. Existen distintos tipos de asteroides con distintas propiedades físicas, para simplificar el planteamiento, supondremos la misma densidad escogida en el problema anterior, que es aproximadamente la densidad típica de una condrita. También debemos encontrar la energía cinética de impacto, para tal hazaña supondremos que se le sustrae la energía necesaria al asteroide para que realice una transferencia de una órbita aproximadamente circular del cinturón de asteroides a una órbita elíptica cuya distancia mayor al foco (el Sol) sea la misma distancia original, R_a , y la distancia menor al foco sea la órbita de la Tierra, R_e con el objetivo de que, por supuesto, impacte contra esta. En Kleppner (2014) se realiza la deducción de tales tipos de transferencias de órbita, encontrando que para una órbita elíptica la velocidad al cuadrado en función del radio vector es:

$$V^2 = \frac{2GMm}{\mu} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{A} \right)$$

Donde $\mu = \frac{mM}{m+M}$ es la masa reducida y $A = R_e + R_a$ el eje mayor. Reduciendo la expresión obtenemos

$$V^2 = 2G(M + m) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_e + R_a} \right)$$

Cancelándose m puesto que $m \ll M$ para cualquier estrella. Acá $R_e = 1AU$, $R_a = 2.7AU$ la distancia media del anillo del cinturón, G la constante gravitacional y $M = M_\odot$. Por lo tanto, la velocidad en el perihelio, es decir, cuando el asteroide pasa por la órbita terrestre es

$$V_p = 35986.84 \text{ m/s}$$

Ahora, el impacto se produce justo en el perihelio, cuando la velocidad tangencial es perpendicular al radiovector, esto significa que la Tierra y el asteroide pasarán por ese punto paralelos el uno del otro, lo que implica que, puesto que también supondremos que el suceso sucede en el mismo plano, el ángulo de impacto es de 90° y que al ser las velocidades paralelas, la velocidad relativa, en buena medida, la resta de los dos. La Tierra tiene una velocidad tangencial de 29788.44 m/s , entonces la velocidad relativa es

$$V_r = 6198.41 \text{ m/s}$$

Podrá parecer un impacto altamente aburrido por el modelo de transferencia utilizado, más interesante hubiera sido lanzar el asteroide de lleno dejándolo en caída libre hacía el Sol encontrándose en su camino con la Tierra, pero como vimos en el anterior problema, el tamaño del cráter es proporcional a la energía cinética, el cráter Acraman es muy grande, más grande que el de Apophis que tenía una velocidad mayor que nuestro asteroide hipotético, así que para generar un cráter de tal magnitud se debe cumplir que el impactor tenía que ser colosal.

La energía cinética del impacto es

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} m V_r^2 \\ &= \frac{2}{3} \rho_m \pi R^3 V_r^2 \end{aligned}$$

Remplazando en la ecuación para hallar el radio del asteroide llegamos a la expresión final,

$$R^{1.0858} = D (2 \rho_m^{0.11} \rho_p^{-1/3} g_p^{-0.22} (\frac{2}{3} \rho_m \pi V_r^2)^{0.22} (\sin \theta)^{1/3})^{-0.13}$$

Por lo que el radio del impactor es

$$R \approx 8.13 \text{ km}$$

Confirmando el gran tamaño del meteorito.

Podemos confirmar si nuestras aproximaciones son buenas comparando los datos reales del cráter. Se sabe por los restos encontrados que el asteroide era una condrita y que la energía del impacto fue de unos 5.2×10^6 Mton. Remplazando el radio encontrado en la ecuación de la energía cinética, obtenemos unos 3.62×10^7 Mton.

- A continuación se repite el procedimiento anterior suponiendo que el impactor provino de la nube de Oort.

La nube de Oort comprende un conjunto de distancias mayores a 2000 AU, nosotros supondremos que el cometa procede de una órbita de este valor. La densidad de los cometas también es variable, pero se estima con los datos disponibles que la densidad de los cometas a de los 0.5 a los 1.2 g cm⁻³, siendo el "mejor" valor 0.6 g cm⁻³ (Weissman et. al., 2004) el cual aquí se tomará.

La velocidad relativa en el perihelio es de

$$V_r = 12328.25 \text{ m/s}$$

El radio del impactor

$$R \approx 11.58 \text{ km}$$

Y la energía de impacto 7.09×10^7 Mton.

References

- [1] Página donde puede encontrar datos del PREM usando Python: <https://www.fatiando.org/rockhound/v0.2.0/gallery/prem.html>
- [2] Denson, M. E. (1952). Longitudinal waves through the Earth's core*. Bulletin of the Seismological Society of America, 42(2), 119-134. <https://doi.org/10.1785/bssa0420020119>
- [3] Dziewonski, A. M., & Anderson, D. L. (1981). Preliminary Reference Earth Model. Physics of the Earth and Planetary Interiors, 25(4), 297-356. [https://doi.org/10.1016/0031-9201\(81\)90046-7](https://doi.org/10.1016/0031-9201(81)90046-7)
- [4] Guliyev, H. H., & Javanshir, R. (2020). Once again on preliminary reference Earth model. Earth and Space Science, 7(3). <https://doi.org/10.1029/2019ea001007>
- [5] Stacey, F. D., & Davis, P. M. (2008). Physics of the Earth. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511812910>

Magnetósfera y viento Solar:

- [6] Solar wind speeds, fast and slow. (s.f.). BIRA-IASB. <https://www.aeronomie.be/en/encyclopedia/solar-wind-speeds-fast-and-slow>
- [7] Proceedings of the 11th European Solar Physics Meeting "The Dynamic Sun: Challenges for Theory and Observations" (ESA SP-600). 11-16 September 2005, Leuven, Belgium. Editors: D. Danesy, S. Poedts, A. De Groof and J. Andries. Published on CDROM.
- [8] Volland, H. (2017). Handbook of Atmospheric Electrodynamics (1995). En CRC Press eBooks. <https://doi.org/10.1201/9780203713297>
- [9] Shi, C., Velli, M., Lionello, R., Sioulas, N., Huang, Z., Halekas, J. S., Tenerani, A., Réville, V., Dakeyo, J., Maksimovic, M., & Bale, S. D. (2023). Proton and electron temperatures in the solar wind and their correlations with the solar wind speed. The Astrophysical Journal, 944(1), 82. <https://doi.org/10.3847/1538-4357/acb341>
- [10] Adhikari, L., Zank, G. P., Zhao, L., Nakanotani, M., & Tasnim, S. (2021). Modeling proton and electron heating in the fast solar wind. Astronomy and Astrophysics, 650, A16. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/202039297>
- [11] Parker, E. N. (1958). Dynamics of the interplanetary gas and magnetic fields. The Astrophysical Journal, 128, 664. <https://doi.org/10.1086/146579>
- [12] Russell, C. T., & Dougherty, M. K. (2010). Magnetic fields of the outer planets. Space Science Reviews, 152(1-4), 251-269. <https://doi.org/10.1007/s11214-009-9621-7>
- [13] Grießmeier, J., Stadelmann, A., Penz, T., Lammer, H., Selsis, F., Ribas, I., Guinan, E. F., Mutschmann, U., Biernat, H. K., & Weiss, W. W. (2004). The effect of tidal locking on the magnetospheric and atmospheric evolution of "Hot Jupiters". Astronomy and Astrophysics, 425(2), 753-762. <https://doi.org/10.1051/0004-6361:20035684>

Apothis:

- [14] Brozovic, M., Benner, L. A. M., McMichael, J. G., Giorgini, J. D., Pravec, P., Scheirich, P., Magri, C., Busch, M. W., Jao, J. S., Lee, C. G., Snedeker, L. G., Silva, M. A., Slade, M. A., Semenov, B., Nolan, M. C., Taylor, P. A., Howell, E. S., & Lawrence, K. (2018). Goldstone and Arecibo radar observations of (99942) Apophis in 2012–2013. Icarus, 300, 115-128. <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2017.08.032>
- [15] Datos de Apophis por el Small Body Database: https://ssd.jpl.nasa.gov/tools/sbdb_lookup.html#/?sstr=99942&view=VOPD
- [16] In depth — ApoPHIs - NASA Solar System Exploration. (2022). NASA Solar System Exploration. <https://solarsystem.nasa.gov/asteroids-comets-and-meteors/asteroids/apophis/in-depth/>

- [17] Vallejo, A. F., Zuluaga, J. I., & Molano, G. C. (2022). Conditions for high-resolution bistatic radar observations of Apophis in 2029. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 518(3), 4438-4448. <https://doi.org/10.1093/mnras/stac3046>

Impactos:

- [18] Weissman, P. R., Asphaug, E., & Lowry, S. C. (2004). Structure and density of cometary nuclei. En *University of Arizona Press eBooks* (pp. 337-358). <https://doi.org/10.2307/j.ctv1v7zdq5.27>
- [19] Williams, G.E.; Gostin, V.A. (2005). "Acraman-Bunyeroo impact event (Ediacaran), South Australia, and environmental consequences: twenty-five years on". *Australian Journal of Earth Sciences*. 52 (4-5): 607-620. doi:10.1080/08120090500181036.

Apéndice 1

```
import numpy as np
import pandas as pd
from google.colab import drive
import scipy.integrate as sp
import matplotlib.pyplot as plt
drive.mount('/content/drive') # Con esta linea se pretende subir los datos del PREM

# El archivo se obtuvo de la primera referencia del problema 1.
df = pd.read_csv('/content/drive/MyDrive/PREM_1s.csv')

# Los datos estan en el entorno de Pandas. A continuacin se extraen
depth = df.iloc[:,0].values #Valores del radio
depth = depth[::-1] #Se reordena la lista
density = df.iloc[:,2].values #Valores de la densidad
density = density[::-1]*1e6/1000 #Se reordena la lista y se deja en unidades del SI

# A continuacin se grafica la densidad:
plt.figure(figsize = (7,4))

plt.plot(depth, density, 'k', linewidth = 3)

x_start = [0, 1221.5, 3480, 5701]
x_end = [1221.5, 3480, 5701, depth[-1]]
colors = ['lightcoral', 'orangered', 'orange', 'lightgray']

# Rellenar el rea entre las lineas verticales con colores diferentes
for i in range(len(x_start)):
    plt.fill_betweenx([0,13900], x_start[i], x_end[i], color=colors[i], alpha=0.45)

plt.plot([1221.5,1221.5], [0,1.39e4], 'r', alpha = 0.5, linestyle = '--', label = 'Inner-Outer
Core limit')
plt.plot([3480, 3480], [0,1.39e4], 'navy', alpha = 0.5, linestyle = '--', label = 'Outer-Mantle
limit')
plt.plot([5701,5701], [0,1.39e4], 'olive', alpha = 0.6, linestyle = '--', label = 'Mantle-Crust
limit')
plt.plot([depth[-1],depth[-1]], [0,1.39e4], 'black', alpha = 0.6, linestyle = '--', label =
'Surface')

plt.xlabel('Radius [km]', fontsize = 14)
plt.ylabel('Density [kg/m3]', fontsize = 14)
plt.title("Earth's density profile", fontsize = 18)
```

```

ax = plt.gca()
ax.spines['top'].set_linewidth(1.5)
ax.spines['right'].set_linewidth(1.5)
ax.spines['bottom'].set_linewidth(1.5)
ax.spines['left'].set_linewidth(1.5)

plt.ylim(0,1.39e4)
plt.xlim(0)

plt.legend()
#plt.savefig('Earth_density_profile_PREM')
plt.show()

# A CONTINUACION LOS METODOS PARA EL PERFIL DE MASA:

Depth = depth*1000 #Se deja el radio en metros

def sol_dmass(r, density): #Se define la funcion para graficar la distribucion de masa local
    return (4/3*np.pi*r**3*density)

dm = 4*np.pi*Depth**2*density # Funcion a integrar para el perfil real de la masa
n = len(dm)
#I = np.array([np.trapz(dm[:i], x = Depth[:i]) for i in range(n)]) #Metodo trapezoidal, no da
    buenos resultados para este caso
I = np.array([sp.simps(dm[:i], x = Depth[:i]) for i in range(1,n)]) #Metodo de Simpson, da buenos
    resultados
Mass= I/I[-1] #Se normaliza la masa en terminos de masas terrestres

f = sol_dmass(Depth,density)
F = f/I[-1] #Se normaliza la distribucion de masa local

#A continuacion se grafica el perfil de masa:
plt.figure(figsize = (7,4))

plt.plot(depth[:-1], Mass, label = 'Total mass', color = 'crimson', linewidth = 2)
plt.plot(depth,F, label = 'Local mass', color = 'orangered', linewidth = 2)
plt.plot([3480, 3480], [0,1.1], 'navy', alpha = 0.5, linestyle = '--', label = 'Outer-Mantle
    limit')

plt.title("Earth's mass profile", fontsize = 18)
plt.xlabel('Radius [km]', fontsize = 14)
plt.ylabel('Mass [M_{oplus}]', fontsize = 14)

ax = plt.gca()
ax.spines['top'].set_linewidth(1.5)
ax.spines['right'].set_linewidth(1.5)
ax.spines['bottom'].set_linewidth(1.5)
ax.spines['left'].set_linewidth(1.5)

plt.xlim(0,depth[-1]+100)
plt.ylim(0,1.05)

plt.legend()
#plt.savefig('Earths_mass_profile')
plt.show()

# A CONTINUACION, LOS METODOS PARA EL PERFIL DE GRAVEDAD:

```

```

# Usando el metodo de Simpson para la masa y las sumas de Riemann para la gravedad se obtienen
    buenos resultados (por que?).

G = 6.67e-11

g = 0
grav = []

for i in range(1,len(Depth)-1): #Metodo de las sumas de Riemann
    g = g + 4*np.pi*G*density[i]*abs((Depth[i]-Depth[i-1])) -
        2*G*I[i]/Depth[i]**3*(Depth[i]-Depth[i-1])
    grav.append(g)

# A continuacion, se grafica el perfil de gravedad:
plt.figure(figsize = (8,4))

plt.plot(depth[0:len(depth)-2],grav, color = 'black', linewidth = 2)
plt.xlabel('Radius [km]', fontsize = 14)
plt.ylabel("Gravity acceleration [m/s$^2$]", fontsize = 14)
plt.title("Earth's gravity profile", fontsize = 18)

x_start = [0, 1221.5, 3480, 5701]
x_end = [1221.5, 3480, 5701, depth[-1]]
colors = ['lightcoral', 'orangered', 'orange', 'lightgray']

# Rellenar el rea entre las lineas verticales con colores diferentes
for i in range(len(x_start)):
    plt.fill_betweenx([0,13], x_start[i], x_end[i], color=colors[i], alpha=0.45)

plt.plot([1221.5,1221.5], [0,13], 'r', alpha = 0.5, linestyle = '--', label = 'Inner-Outer Core
    limit')
plt.plot([3480, 3480], [0,13], 'navy', alpha = 0.5, linestyle = '--', label = 'Outer-Mantle limit')
plt.plot([5701,5701], [0,13], 'olive', alpha = 0.6, linestyle = '--', label = 'Mantle-Crust limit')
plt.plot([depth[-1],depth[-1]], [0,13], 'black', alpha = 0.6, linestyle = '--', label = 'Surface')

ax = plt.gca()
ax.spines['top'].set_linewidth(1.5)
ax.spines['right'].set_linewidth(1.5)
ax.spines['bottom'].set_linewidth(1.5)
ax.spines['left'].set_linewidth(1.5)

plt.ylim(0,12)
plt.xlim(0,depth[-1]+10)

plt.legend()
plt.savefig('Earths gravity profile')
plt.show()

# A CONTINUACION, LOS METODOS DEL PERFIL DE PRESION:

dP = -density[1:-1]*grav #Funcion de la presion a integrar
Depth2 = Depth[1:-1] #Notara que al rango de los datos se le quitan dos valores, esto es debido
    a como hemos venido trabajando los metodos de integracion. Podra ver que ocurre lo mismo en
    los anteriores metodos.

P = np.array([352226265039.49774 + np.trapz(dP[:i], x = Depth2[:i]) for i in range(n)]) #Metodo
    trapezoidal

```



```

#np.trapz(dP, x = Depth2)

plt.figure(figsize = (8,4))

plt.plot(depth,P/1e9, color = 'crimson', linewidth = 2)
plt.xlabel('Radius [km]', fontsize = 14)
plt.ylabel('Pressure [GPa]', fontsize = 14)
plt.title("Earth's pressure profile", fontsize = 18)

l = 380
x_start = [0, 1221.5, 3480, 5701]
x_end = [1221.5, 3480, 5701, depth[-1]]
colors = ['lightcoral', 'orangered', 'orange', 'lightgray']

# Rellenar el rea entre las lneas verticales con colores diferentes
for i in range(len(x_start)):
    plt.fill_betweenx([0,1], x_start[i], x_end[i], color=colors[i], alpha=0.45)

plt.plot([1221.5,1221.5], [0,1], 'r', alpha = 0.5, linestyle = '--', label = 'Inner-Outer Core
    limit')
plt.plot([3480, 3480], [0,1], 'navy', alpha = 0.5, linestyle = '--', label = 'Outer-Mantle limit')
plt.plot([5701,5701], [0,1], 'olive', alpha = 0.6, linestyle = '--', label = 'Mantle-Crust limit')
plt.plot([depth[-1],depth[-1]], [0,1], 'black', alpha = 0.6, linestyle = '--', label = 'Surface')

ax = plt.gca()
ax.spines['top'].set_linewidth(1.5)
ax.spines['right'].set_linewidth(1.5)
ax.spines['bottom'].set_linewidth(1.5)
ax.spines['left'].set_linewidth(1.5)

plt.xlim(0,depth[-1]+10)
plt.ylim(0,1)

plt.legend()
#plt.savefig('Earths_pressure_profile')
plt.show()

#A CONTINUACION, SE GRAFICA EL PERFIL DE TEMPERATURA CON DATOS BRUTOS QUE PUEDE CONSEGUIR EN LA
    QUINTA REFERENCIA DEL PRIMER PROBLEMA.

T_core = [ 5030, 5029, 5027, 5023, 5017, 5010, 5001, 5000, 5000, 4946, 4877, 4799, 4711, 4614,
    4507, 4390, 4263, 4123, 3972, 3808, 3739]

T_mantle = [3739, 2838, 2740, 2668, 2596, 2525, 2452, 2379, 2302, 2227, 2144, 2060, 1974, 1931]

T_surface = [2010, 1985, 1948, 1907, 1853, 1817, 1780, 1719, 1282, 880, 880, 300]

R_core = [0, 200, 400, 600, 800, 1000, 1200, 1221.5, 1221.5, 1400, 1600, 1800, 2000, 2200, 2400,
    2600, 2800, 3000, 3200, 3400, 3480]

R_mantle = [3480, 3600, 3630, 3800, 4000, 4200, 4400, 4600, 4800, 5000, 5200, 5400, 5600, 5701]

R_surface = [5701, 5771, 5871, 5971, 5971, 6061, 6151, 6151, 6256, 6332, 6332, 6371]

T = T_core + T_mantle + T_surface
R = R_core + R_mantle + R_surface

plt.figure(figsize = (8,4))

```

```

plt.plot(R,T, linewidth = 2.5, color = 'black')
plt.xlabel('Radius [km]', fontsize = 14)
plt.ylabel('Temperature [K]', fontsize = 14)
plt.title("Earth's temperature profile", fontsize = 19)

l = 5200
x_start = [0, 1221.5, 3480, 5701]
x_end = [1221.5, 3480, 5701, depth[-1]]
colors = ['lightcoral', 'orangered', 'orange', 'lightgray']

# Rellenar el rea entre las lineas verticales con colores diferentes
for i in range(len(x_start)):
    plt.fill_betweenx([0,l], x_start[i], x_end[i], color=colors[i], alpha=0.45)

plt.plot([1221.5,1221.5], [0,l], 'r', alpha = 0.5, linestyle = '--', label = 'Inner-Outer Core
    limit')
plt.plot([3480, 3480], [0,l], 'navy', alpha = 0.5, linestyle = '--', label = 'Outer-Mantle limit')
plt.plot([5701,5701], [0,l], 'olive', alpha = 0.6, linestyle = '--', label = 'Mantle-Crust limit')
plt.plot([depth[-1],depth[-1]], [0,l], 'black', alpha = 0.6, linestyle = '--', label = 'Surface')

ax = plt.gca()
ax.spines['top'].set_linewidth(1.5)
ax.spines['right'].set_linewidth(1.5)
ax.spines['bottom'].set_linewidth(1.5)
ax.spines['left'].set_linewidth(1.5)

plt.xlim(0, R[-1]+20)
plt.ylim(0,5200)

plt.legend()
plt.savefig('Earths_temperature_profile')
plt.show()

```
