Tarea 9:
Tiempo de bloqueo gravitacional
Ciencias Planetarias

Camilo Ospinal

Noviembre, 2023

Introducción

¿Por qué siempre miramos el mismo conejo en la Luna?

Los aztecas miraban un conejo sobre la Luna, los chinos un conejo y una rana, en Algeria las lagrimas de un niño, los incas un zorro [1]. ¿Por qué las culturas hallaban, muy creativamente, formas de cosas cotidianas sobre la superficie lunar? Encontrar patrones es algo que a la especie humana se le da bien y gustamos de encontrarlos hasta en cosas que carecen de estos, por supuesto, los cráteres de la Luna que forman las figuras que aquellas culturas y nosotros podemos ver sobre su superficie son aleatorios, sin embargo, la pareidolia y la apofenia nos conducen a este comportamiento. La anterior es una respuesta muy corta de la explicación de porque los antiguos observaron figuras en la Luna a través de un fenómeno psicológico. Nuestro interés, por otra parte, se encuentra en la astronomía, por lo que podemos modificar esta pregunta para responderla en base a nuestros conocimientos e introducir el tema de la presente tarea. Entonces, ¿por qué aquellos que nos precedieron siempre veían la misma figura sobre la Luna todos los días? Que es una forma fresca de cuestionarnos ¿por qué siempre hemos visto la misma cara de la Luna?.

Una vez se acepta que la Tierra es un cuerpo esférico a causa del equilibrio hidrostático que se mueve en medio del universo alrededor de una estrella a la que llamamos Sol y que la Luna es otro cuerpo esférico, un remanente de una posible colisión entre planetoides, es fácil comprender que la Tierra rota sobre sí misma, pero ¿lo hace la Luna si siempre vemos la misma cara? La respuesta rápida y, lamentablemente, equivocada en la que podríamos aterrizar sería ”no, debido a que si rotara, no veríamos el conejo sobre la Luna cada noche en la que aparezca”. La respuesta correcta es sí, y se puede entender analizando que, respecto al Sol, cuando la fase es de luna llena la cara visible está iluminada, mirando al Sol, cuando la fase es luna nueva, la cara visible ya no está iluminada, la zona iluminada es el otro hemisfério de la Luna, el que no podemos ver, cuando vuelva al mismo punto de partida volverá a estar en luna llena, habrá completado una rotación en el mismo tiempo que le demoró completar una órbita, lo anterior debido a las *fuerzas de marea* que se ejercen mutuamente junto a la Tierra.

Bloqueo gravitacional

Las fuerzas de marea aparecen entre dos cuerpos cuando, en virtud de que las masas ocupan un espacio y no son partículas, la fuerza gravitacional que percibe uno de ellos es mayor sobre la parte que esté más cercana al otro, recordando que la fuerza gravitacional varía con el inverso cuadrado de la distancia. Entonces, la cara visible de la Luna es atraída con mayor fuerza que la parte oculta y lo mismo ocurre para la Tierra, la superficie que esté viendo hacía la Luna en determinado momento experimenta más fuerza gravitacional de esta que la superficie opuesta. Si en Colombia estamos de noche a las 12:00 am viendo la Luna llena, sentiremos más atracción gravitacional que los paises asiáticos que estén de día. Como la Tierra rota más rápido de lo que la Luna nos orbita, para un intervalo de unas horas podemos suponer que la Luna está estática. A las 6:00 am Colombia estará a 90º de la Luna, experimentando una menor atracción gravitacional hacía la Luna, a causa de la rotación nos desplazamos en una dirección, pero la Luna nos jala en la otra, se está ejerciendo torque y, como con una llanta que es frenada, la Tierra también disminuye su periodo de rotación. Puede hacer la prueba usted mismo de este fenómeno, pegue la punta de un hilo a un balón y coloquelo a rotar, se encontrará que si usted sostiene la otra punta del hilo, el balón se frenará, lo mismo sucede con la Tierra, solo que la fuerza es ejercida sobre cada punto y en todo momento. El lector astuto estará preguntandose si acaso los paises que giren en dirección hacía la Luna, los que arrivan a la noche, no sienten la misma magnitud de la fuerza que los que saludan la madrugada y, por ende, el torque neto es cero. Esto es cierto siempre que el objeto sea rígido, una esfera inelastica, cosa que no es la Tierra, ni ningún planeta, ni rocoso ni gaseoso, ni satélites o demás cuerpos menores. En respueta, y por las fuerzas de marea, la Tierra es realmente un esferoide achatado en los polos, y puntos opuestos perciben distintas fuerzas. La Tierra constantemente está aumentando su periodo de rotación, cerca de 0,001 segundos por siglo [2]. Cuando la fuerza gravitacional sobre uno de los cuerpos del sistema es muy grande, es capaz de disminuir su velocidad de tal forma que quede *bloqueado gravitacionalmente*, su rotación no experimentará cambios durante su órbita. En otras palabras, por lo que se ha discutido, si el cuerpo orbitante gira muy rápido, será frenado y su rotación quedará bloqueada en un valor específico [3].

El bloqueo gravitacional se puede presentar en cualquier cuerpo que esté orbitando a otro, los dos primeros planetas del Sistema Solar han sido afectados por las fuerzas de marea del Sol significativamente debido a su corta distancia a este, produciendo un periodo de 59 días para Mercurio y de 243 días para Venus [3][4].

Resonancia orbital

El término de resonancia orbital se utiliza de varias formas, pero todas tienen que ver con la relación entre el movimiento de rotación o traslación entre varios cuerpos. En el tema que nos compete hace referencia a como se asocia el periodo de rotación de un planeta o sátelite con el periodo de órbita. A causa de las fuerzas de marea la Luna da un giro en una órbita, está bloqueada gravitacionalmente, así que su resonancia orbital con la Tierra se dice que es de uno a uno o 1:1. Mercurio da 3 rotaciones por cada 2 orbitas, está en una resonancia orbital con el Sol de 3:2. Venus tendría que estar bloqueado gravitacionalmente, un año venusiano dura 225 días terrestres, según explica Kane (2022), su periodo de rotación debería incrementarse, no obstante, no lo hace debido a los efectos de la gravedad solar sobre su compleja dinámica atmósferica[1] [5][6][7].

Tiempo de bloqueo

Es posible calcular el tiempo en el que ocurre un bloqueo gravitacional de un sátelite a causa de un planeta a partir de la siguiente ecuación[2]

$$t_{lock} = \frac{wa^6 IQ}{3Gm_p^2 k_2 R_s^5} \tag{1}$$

Donde w es la velocidad angular de rotación, a el semieje mayor, I es el momento de inercia, Q es el factor de calidad de marea, G es la constante gravitacional, m_p la masa del planeta, k_2 es el segundo número de Love o el número de Love de marea del sátelite [9], y R_s el radio medio del sátelite.

[1]Si el lector desea enfatizar más acerca del bloqueo gravitacional de Venus y de los exoplanetas con atmósferas, se recomienda leer el artículo de Stephen R. Kane que es de libre acceso, y la referencia [8] que corresponde a un artículo de Physics World.

[2]Parece ser que la primera vez que se propuso esta ecuación fue en *J. A. Burns, ed. (1977). Planetary Satellites* por S. J. Peale [10]

Nota: Los números de Love fueron introducidos a inicios de 1900 por A.E.H Love, un matématico y geofísico del Reino Unido que trabajó en la teoría de la elasticidad. Para entender su significado, piense en lo que implica la interacción descrita en parrafos anteriores para, por ejemplo, la Tierra. La respuesta a la marea provocada por la Luna no es instantanea, a la Tierra le toma tiempo deformarse debido a la atracción, y esta deformación es siempre cambiante en dirección debido al movimiento de traslación lunar. A esto se le suma la rigidez de las capas (corteza, manto,...) y la fuerza propia de gravedad. También se considera que la Tierra tiene una superficie cubierta de agua. Todos estos factores se caracterizan en los números de Love que analizan distintos tipos de deformación. En particular, k_2 hace referencia a la deformación de un objeto elipsoidal [11][12][13].

El factor de calidad de marea o también llamado *función de disipación espefífica*, Q,es otro párametro que da cuenta de las propiedades elasticas de un planeta o sátelite. Se define como la razón entre la energía gravitacional acumulada y la energía discipada por fricción en el momento en el cual, por fuerzas de marea, se genera un abultamiento de masa sobre el cuerpo. Q es una medida de la intensidad de la marea, puesto que es directamente proporcional al torque generado, si Q es alto la energía se acumula durante un periodo largo y no se discipa facilmente, si Q es bajo la energía se acumula durante un periodo corto y se discipa facilmente [13][14][15].

A continuación, se calculan los tiempos de bloqueo gravitacional de distintos sátelites del Sistema Solar.

Cálculos

La Luna

Quizás de los datos más difíciles de encontrar acerca de un cuerpo rocoso del sistema solar, es su rotación inicial. Difíciles en cuanto a que su valor concreto no está citado en las típicas entradas de internet y el acceso a este dato requiere una ardua investigación. Se podría pensar con que solo basta devolverse en el tiempo utilizando ecuaciones de mecánica, tal que tomemos los valores iniciales de momento de incercia y hagamos una suposición de como ha cambiado algún parámetro respecto a la etapa inicial considerada, no obstante, piense en el siguiente dilema: puede ser relativamente sencillo calcular el momentum angular de rotación de un planeta si se conocen algunas caracteristicas de su disco protoplanetario, podemos hacer una aproximación teniendo en cuenta su velocidad orbital alrededor de la estrella y su interacción con el gas circundante, pero de aquí en adelante no podemos tener seguridad del camino recorrido hasta la actualidad, puede que un planeta actual posea una rotación que haya nacido a partir de un número incierto de impactos, la interacción gravitacional entre la estrella y sus planetas vecinos si es el caso, o la adquisición de satelites que escaparon o cayeron por su posible interacción gravitacional inestable a lo largo de los miles de millones de años. Luego está el hecho de que el planeta tiene un proceso interno intrinseco de liberación de energía, la acreción de un planeta o cuerpo rocoso puede suceder en un estado frío o un estado caliente y de esto dependerá su subsecuente liberación de energía. el enfriamiento de su núcleo y el cambio de su momento de inercia [16]. Para la Tierra podemos tener estimados del cambio en el periodo de rotación, puesto que tenemos los recursos para obtener datos que nos permitan ver como ha cambiado la velocidad angular con el tiempo. Los registros geológicos son de mucha ayuda para saber la tasa de cambio de la duración de los días, encontrando que durante las diferentes etapas geológicas de la Tierra esta ha disminuido su velocidad angular a diferentes ritmos en cada una de ellas, por ejemplo, el Fanerozoico[16]. Estos cambios no solo se han debido a la interacción gravitacional con la Luna, sino también al crecimiento del núcleo terrestre. *Denis et. al, 2011*, la referencia 16 de este trabajo, presentan los resultados mencionados junto con un modelo para el cálculo de la longitud del día terrestre con los años, teniendo en cuenta factores como su metalicidad, radio inicial o densidad. Para resolver este problema de la velocidad angular inicial me basaré en el modelo de *Gladman et. al,* *1996* [9], en este se enuncia que la relación entre la tasa de giro del satelite ω, que es un valor adimensional, se relaciona mediante una transformación de coordenadas[3] con w, que también es la tasa de giro pero con unidades dimensionales, como rad/s por decir algo, está dada por $\omega = \frac{\mu}{S} w$, lo que permite llegar a

$$\mu = \frac{S \sin\theta \cos\theta}{w \sin(\theta - i)} \tag{2}$$

Donde θ es la inclinación del eje de rotación del satelite respecto al plano orbital, i la inclinación de la órbita respecto a la eclíptica, S es una de las dos aceleraciones angulares debidas al torque planetario en las deformaciones del cuerpo sólido del satélite y μ es la tasa de precesión orbital o la tasa de precesion nodal, estas variables están dadas por

$$S = \frac{3Gm_p}{2r^3} \frac{C - (A+B)/2}{C} \tag{3}$$

Siendo r el radio orbital del satelite, A, B y C son los momentos de inercia alrededor de los ejes principales, C especialmente es el momento de inercia alrededor del eje de rotación. Hay que recordar que el analísis de cuerpo rígido lleva, como en este caso, a definir tres ejes perpendiculares cuyo origen esté en el centro de masa del satelite. Esta expresión que relaciona los momentos de inercia puede ser encontrada a partir de

$$\frac{C - (A+B)/2}{C} = \frac{\left(a^2 + b^2\right)/2 - c^2}{a^2 + b^2}$$

$a > b > c$ son los radios axiales principales del satelite.

Antes de avanzar es necesario discutir acerca de μ, la precesión nodal es el fenómeno en el cual los nodos, los puntos de intersección de la orbita del satelite y el plano de la eclíptica, se mueven en el tiempo, esta es una de las causas por las cuales los eclípses lunares tienen sus caracteristicos periodos, dependen de la distancia al planeta y como es la interacción gravitacional entre los dos cuerpos, para calcularlos se puede utilizar, como buena aproximación, la ecuación (4), obtenida de *Elements of Spacecraft Design*, Brown C.D (2002) [17]. Si es curioso e intenta confirmar la veracidad de la ecuación con los datos de la Luna, encontrará que la tasa de precesión real actual $\mu = 0,054$ º/día difiere de la teórica $\mu_{teorica} = 5,85 \times 10^{-6}$ º/día, esto es debido a que, como dice *Gladman et. al, 1996*, la tasa de precesión de los nodos es dominada por las perturbaciones solares, así que aquí utilizaremos el valor real el cual se obtiene a partir de mediciones, puesto que Titán e Io orbitan a un gigante gaseoso, es de suponerse que no tendremos este inconveniente con la ecuación.

$$\mu = -\frac{3}{2} \frac{\eta R_p^2 J_2}{\left(r\left(1 - e^2\right)\right)^2} \cos i \tag{4}$$

Donde $\eta = \sqrt{Gm_p/r^3}$ es la velocidad angular orbital del satelite, a el semieje mayor de la órbita (tomaremos $r = a$), R_p el radio medio del planeta, e la excentricidad de la órbita y, finalmente, J_2 es el segundo factor dinámico de forma del cuerpo, no entraremos a detalle en lo que significa, pero es de esperarse que nos hagamos una idea de su relación con la forma del planeta, su achatamiento, y las mareas que causa esto. Para la Tierra $J_2 = 1.08262668 \times 10^{-3}$, y para otros

[3] Gladman et. al hacen un analísis matemático del problema donde podrá entender estas relaciones más a fondo

planetas lo podemos hallar a partir de

$$J_2 = \frac{2\varepsilon_p}{3} - \frac{R_p^3\omega_p^2}{3Gm_p}$$

Donde ε_p es el achatamiento del planeta y ω_p la velocidad angular de rotación de este. Como ya se ha de haber dado cuenta, tendremos problemas con los gigantes gaseosos, puesto que ¿cómo se define el achatamiento en un cuerpo cuya masa es prácticamente solo gas? Lo resolveremos en su momento.

Todo esto lo hemos construido para poder calcular el w cuando la Luna se formó, en el artículo no se da este valor, solo se modelan los estados actuales de diversas lunas, por lo que, a continuación, vamos a hacer algunas supocisiones con el objetivo de hallar este resultado.

1. Supondremos que cuando la Luna se formó hace 4,5 mil millones de años lo hizo a 4 radios terrestres de distancia [18].
2. Mientras la Luna se formaba siendo un esferoide de roca fundida, las interacciones gravitacionales iban afectando su rotación, de manera distinta, por supuesto, ya que no era un cuerpo rígido del todo, y la ecuación del tiempo de bloqueo ni el modelo asumen estos comportamientos, por lo tanto, supondremos que, en el tiempo dicho anteriormente, la Luna ya era un cuerpo solido.
3. Ya tenía su tamaño actual en ese momento, es decir, todo el disco de escombros resultantes del impacto con Theia habría sido limpiado.
4. Contaba con sus caracteristicas orbitales actuales.

Esto nos permite asumir que $[C-(A+B)/2]/C \simeq 5\times10^{-4}$ que es el valor de la Luna actualmente. Luego $r = 4R_T = 4(6371 \text{ km}) = 25484 \text{ km}$, $m_p = m_T = 5.972 \times 10^{24}$ kg, por lo tanto, usando la ecuación (3)

$$S = 1.805 \times 10^{-11}\, s^{-2}$$

Puesto que conserva sus caracteristicas orbitales, $e = 0.0549$, $i = 5,14^{\text{o}}$ y $\theta = 6,688^{\text{o}}$, calculando $\eta = 1,551 \times 10^{-4}\, s^{-1}$, y usando la ecuación 4

$$\mu = 1.577 \times 10^{-8}\, s^{-1}$$

Finalmente, despejando w de la ecuación (2), llegamos a

$$w = 4,899 \times 10^{-3}\, s^{-1}$$

Prosiguiendo con el objetivo de este trabajo, los parametros para utilizar en la ecuación (1) son $Q = 37,5,\ k_2 = 0,02405$ [19], el momento de inercia suponiendo a la Luna como una esfera con una masa $m_L = 7,349 \times 10^{22}$ kg y un radio $R_L = 1737,1$ km es

$$I_L = \frac{2}{5}m_L R_L^2 = 8.8702 \times 10^{34}\, kg\frac{m^2}{s}$$

Por lo que se tiene que

$$t_{lock} = \frac{16wR_T^6 I_L Q}{3Gm_T^2 k_2 R_L^5}$$

$$\boxed{t_{lock} = 52.135\, yr}$$

Io

Io es la luna de Júpiter más cercana a el planeta, está a una distancia de $r_{Io} = 421700$ km, tiene un radio de $R_{Io} = 1821,6$ km, una masa de $m_{Io} = 8,932 \times 10^{22}$ kg, una razón $k_2/Q = 0,015$ [19]. Haremos suposiciones similares como con la Luna, sus parametros orbitales $i = 2,213^{\text{o}}$ para θ no se encontró un valor exacto, así que se supondrá, muy arbitrariamente, que la inclinación del eje de rotación de Io no es muy grande, entonces $\theta = 5^{\text{o}}$, este valor es muy aceptable, puesto que cuando introducimos grados de alrededor de los 5^{o}, obtenemos valores del orden de 10^{-2} para el seno y valores muy cercanos a 1 para el coseno, así que la diferencia no es muy importante. El valor de S es un problema aún mayor, se necesita realizar un estudio detallado del comportamiento de Io para encontrar los momentos de inercia alrededor de los ejes principales, hay algunos artículos que hablan sobre estos detalles que encontrará en las referencias adicionales, no dan un valor explicito, pero quizás ayuda a calcular este valor, de todas formas, hemos enviado sondas a estos satelites que han realizado gravimetría, es de suponerse que es posible realizar estos cálculos, se deja su estudio para futuros trabajos. Entonces, vamos a hacer otra aproximación con la siguiente ecuación:

$$\gamma \equiv \frac{\mu\eta}{S}$$

γ es un parámetro fundamental que gobierna la evolución del giro del satelite, como comentan *Gladman et. al, (1996)*. Ellos en su artículo presentan una tabla que recoge este parámetro para distintas lunas del sistema solar, entre esas Io, siendo $\gamma = 0,0839$, también se da el valor de $\mu = 0,133\ ^{\text{o}}/\text{día}$ actual, lo que nos ahorra tiempo de cálculo, ya que para esta luna no calcularemos μ suponiendo una distancia orbital incial, puesto que para algunas lunas de Júpiter o Saturno, como el caso de Titán, hay hipótesis de migración de una órbita externa a una interna, a diferencia del sistema Tierra-Luna. Ha de entenderse que estas dinámicas de migración afectarán en distinta medida la evolución del giro. Cálculamos η utilizando r_{Io} y la masa de Júpiter $M_J = 1,898 \times 10^{27}$ kg tal que $\eta = 4,109 \times 10^{-5}\, s^{-1}$, de aquí podemos encontrar S si lo necesitacemos, no obstante, es más rápido notar que $\frac{S}{\mu} = \frac{\eta}{\gamma}$ y remplazando en la ecuación (2) despejando w:

$$w_{Io} = \frac{\eta \sin\theta\cos\theta}{\gamma\sin(\theta - i)} = 8,744 \times 10^{-4}\, s^{-1}$$

Similarmente como para la Luna, el momento de inercia de Io es $I_{Io} = 1.185 \times 10^{35}\, kg\frac{m^2}{s}$, y aplicando la ecuación del tiempo de bloqueo

$$t_{lock} = \frac{w_{Io} r_{Io}^6 I_{Io} Q}{3GM_J^2 k_2 R_{Io}^5}$$

$$\boxed{t_{lock} = 85.246\, yr}$$

Titán

Titán es un satelite de Saturno, tiene un mayor tamaño que Mercurio, se cree que se formó a partir de acreción de disco circundante al planeta y a partir de ahí migró a una órbita más cercana [20]. Está bloqueado por marea con un periodo de 15 días y 22 horas, su masa es $m_{titan} = 1.345 \times 10^{23}$ kg, el rádio orbital $r_{titan} = 1221870$ km, su rádio $R_{titan} = 2574,73$ km, $Q = 124$[4][21], $k_2 = 0.589$, teniendo en cuenta que la inclinación de Saturno respecto a la eclíptica es de 2,485$^{\text{o}}$ y que la inclinación de la órbita de Titán respecto al ecuador de Saturno es 0.33$^{\text{o}}$, se escoge $i = 2,815^{\text{o}}$. Realmente hay que ser más cuidadosos con la escogencia de estos ángulos, pues la teoría se hace en base al plano invariante del satelite, por lo que estos datos podrían cambiar radicalmente; de nuevo escogemos $\theta = 5^{\text{o}}$. También debemos utilizar γ otra vez, no obstante, este

[4]Aunque por astrometría también se ha medido un valor de $Q = 61$ (ver referencia 21)

valor no está referenciado por *Gladman et. al, (1996).* En este artículo se nos explica que para todos los satelites $\gamma << 1$ excepto para aquellos muy distantes o muy esféricos, siendo la Luna un ejemplo con $\gamma = 5,32$. Como Titán es el segundo satelite más distante de Saturno, relativo a los otros satelites está alejado, tomaremos $\gamma = 0,1$ de forma arbitraria, como la masa de Saturno es $M_S = 5,683 \times 10^{26}$ kg se tiene que $\eta = 4.558 \times 10^{-6}\, s^{-1}$, obteniendo una velocidad angular

$$w_{titan} = 1,038 \times 10^{-4}\, s^{-1}$$

Luego, $I_{titan} = 3,566 \times 10^{35}\, kg\frac{m^2}{s}$, por lo tanto,

$$t_{lock} = \frac{w_{titan} r_{titan}^6 I_{titan} Q}{3GM_S^2 k_2 R_{titan}^5}$$

$$\boxed{t_{lock} = 8,331 \times 10^5\, yr}$$

Conclusiones

El tiempo de bloqueo depende de forma importante de los parámetros orbitales y físicos del satelite, si bien la velocidad orbital inicial es un factor importante, puesto que, como es de esperarse, entre más rápido orbite un cuerpo, más torque se debe generar sobre él para que ocurra el bloqueo por marea. No obstante, la distancia orbital juega un papel mucho mayor en el incremento o disminución del tiempo de bloqueo, entre más cerca esté el satelite del planeta, mayor peso tendrá sobre el fenómeno tendrá la interacción gravitacional, la deformación sobre el satelite será mayor y más rápido ocurrirá la resonancia sincrónica. Note que la distancia de Titán afectó en gran medida este resultado, sin importar que la masa de Júpiter sea un orden de magnitud mayor que la de Saturno y la distancia orbital de Titán 3 veces más que la de Io. Por otra parte, confirmamos, como habiamos supuesto, que el hecho de que los satelites orbiten planetas tan masivos los libra de perturbaciones de marea solar, caso contrario al de la Luna, que varió mucho su evolución de giro con respeco a la mayoría de satelites, afectando en parte su tiempo de bloqueo. Otro aspecto importante a considerar sobre como se obtiene la velocidad angular inicial es los verdaderos sucesos que llevaron a los satelites a tener sus caracteristicas actuales, es imposible saber a ciencia cierta como Io o Titán terminaron en sus órbitas actuales, sin duda, la forma en la como se produjeron estos acontecimientos impactará rádicalmente la velocidad angular inicial, nuestros resultados son unas aproximaciones con el analísis de un modelo que nos permitió obtener unas velocidades angulares de rotación relativamente elevadas, nuestra Luna daba un giro en menos de una hora, la rotación de Io y Titán de unas cuantas horas, más las velocidades angulares reales pudieron haber sido muy diferentes. Como soporte a esta hipótesis de los efectos de la migración en el tiempo de bloqueo, puede revisar Lainey et. al, (2020). El hecho de la escogencia del modelo de la formación de la Luna también es un factor importante a considerar. Finalmente, no podemos realizar cálculos de conservación del momento angular que unicamente tengan en cuenta la traslación del satelite, su rotación y la rotación del planeta, en el caso de la Tierra es muy importante considerar también al Sol como actor principal, generando torques en la Tierra y la Luna. Para Io y Titán, un vecindario compartido con lunas casi igual de mascivas podría causar un efecto similar.

Apendice

Como nota final me gustaría comentar que la ecuación del tiempo de bloque es fácil de obtener partiendo de la ecuación (7) de *Goldreich y Peale (1966)* [22], donde el torque instantaneo de marea en un satelite rotante es

$$T = \frac{3k_2 G M_p^2 R^6}{2r^6} \sin 2\delta$$

Note que la ecuación es extremadamente similar, para llegar a ella hay que considerar que el torque es igual a

$$T = I\alpha = I\frac{dw}{dt}$$

Si se asume que la aceleración es constante $\alpha = w/t$. Luego, hay una relación en el artículo que explica que para unos ciertos ángulos ϵ_i se cumple

$$\sin \epsilon_i \simeq 1/Q$$

Por lo que $\sin 2\delta \simeq 1/Q$, pero si además $\delta << 1$, entonces $\sin 2\delta \approx 2\delta$. Remplazando en la ecuación del torque

$$I\frac{w}{t} = \frac{3k_2 G M_p^2 R^6}{r^6 Q}$$

Finalmente probamos que

$$t = \frac{wIr^6 Q}{3k_2 G M_p^2 R^6}$$

References

[1] https://www.lpi.usra.edu/education/explore/marvelMoon/tales/

[2] De Pater, I., & Lissauer, J. J. (2014). Planetary Sciences. https://doi.org/10.1017/cbo9781316165270

[3] IAU Office of Astronomy for Education. (2023). https://www.astro4edu.org/resources/glossary/term/484/

[4] https://phys.libretexts.org/Courses/HACC_Central_Pennsylvania's_Community_College/Astronomy_103%3A_Introduction_to_Planetary_Astronomy/10%3A_The_Terrestrial_Planets/10.01%3A_Mercury_and_Venus

[5] Why Venus rotates, slowly, despite sun's powerful grip. (2022, 20 abril). EurekAlert! https://www.eurekalert.org/news-releases/950160

[6] Kane, S. R. (2022). Atmospheric dynamics of a near tidally locked Earth-sized planet. Nature Astronomy, 6(4), 420-427. https://doi.org/10.1038/s41550-022-01626-x

[7] Dutfield, S. (2022, 28 abril). Why is a day on Venus longer than a year? The atmosphere may be to blame. Space.com. https://www.space.com/venus-atomphere-slows-down-rotation#:~:text=%22The%20gravity%20of%20the%20sun,%22%20Kane%20told%20Space.com.

[8] Croswell, K. (2015, 15 enero). Exoplanets could avoid "tidal locking" if they have atmospheres – Physics world. Physics World. https://physicsworld.com/a/exoplanets-could-avoid-tidal-locking-if-they-have-atmospheres/

[9] Gladman, B., Quinn, D. D., Nicholson, P., & Rand, R. H. (1996). Synchronous locking of tidally evolving satellites. Icarus, 122(1), 166-192. https://doi.org/10.1006/icar.1996.0117

[10] Peale, S.J. (1977) Rotational histories of the natural satellites. In: J.A. Burns (ed.), Planetary Satellites (pp. 87–112). University of Arizona Press, Tucson, AZ.

[11] https://astronomy.stackexchange.com/questions/48235/difference-between-fluid-love-number-and-tidal-love-number

[12] https://websites.pmc.ucsc.edu/ fnimmo/eart162_10/Week8.pdf

[13] Stacey, F. D., & Davis, P. M. (2008). Physics of the Earth. https://doi.org/10.1017/cbo9780511812910

[14] Auclair-Desrotour, P., Poncin-Lafitte, C. L., & Mathis, S. (2014). Impact of the frequency dependence of tidal Q on the evolution of planetary systems. Astronomy and Astrophysics, 561, L7. https://doi.org/10.1051/0004-6361/201322782

[15] https://userswww.pd.infn.it/∼marzari/eureka/FISICADEIPIANETI/DISPENSE/chap5.pdf

[16] Denis, C., Rybicki, K. R., Schreider, A. A., Tomecka-Suchoń, S., & Varga, P. (2011). Length of the day and evolution of the Earth's core in the geological past. Astronomische Nachrichten, 332(1), 24-35. https://doi.org/10.1002/asna.200811473

[17] Brown, C. D. (2002). Elements of spacecraft design. https://arc.aiaa.org/doi/pdf/10.2514/4.861796

[18] Mheslinga. (2023, 13 junio). How the Earth and moon formed, explained. University of Chicago News. https://news.uchicago.edu/explainer/formation-earth-and-moon-explained

[19] Lainey, V. Quantification of tidal parameters from Solar System data. Celest Mech Dyn Astr 126, 145–156 (2016). https://doi.org/10.1007/s10569-016-9695-y

[20] Tobie, G., Lunine, J. I., Monteux, J., Mousis, O., Nimmo, F. (s.f.). The Origin and Evolution of Titan. https://websites.pmc.ucsc.edu/f̃nimmo/website/Tobie_Titan.pdf

[21] Lainey, V., Casajus, L. G., Fuller, J., Zannoni, M., Tortora, P., Cooper, N. J., Murray, C. D., Modenini, D., Park, R., Robert, V., & Zhang, Q. (2020). Resonance locking in giant planets indicated by the rapid orbital expansion of Titan. Nature Astronomy, 4(11), 1053-1058. https://doi.org/10.1038/s41550-020-1120-5

[22] Goldreich, P., & Peale, S. J. (1966). Spin-orbit coupling in the solar system. The Astronomical Journal, 71, 425. https://doi.org/10.1086/109947

Referencias adicionales sobre Titán

En esta sección podrá encontrar algunos artículos que hablan sobre diversas cosas relacionadas sobre Titán que hemos tocado en este trabajo, agrego estas referencias con el objetivo de que el lector interesado en refinar los cálculos pueda, con más tiempo, leerlos y poder conseguir un desarrollo fructifero de estos. Estos artículos presentan modelos que seguramente ayudarán a mejorar el modelo utilizado aquí. He de agregar que la referencia 20 de este artículo presenta, al parecer, una discusión de los momentos de inercia de los ejes principales de Titán, el estudio de este artículo permitiría encontrar una mejor velocidad angular inicial y un mejor tiempo de bloqueo.

- Sohl, F., Solomonidou, A., Wagner, F., Coustenis, A., Hußmann, H., & Schulze-Makuch, D. (2014). Structural and tidal models of Titan and inferences on cryovolcanism. Journal of Geophysical Research: Planets, 119(5), 1013-1036. https://doi.org/10.1002/2013je004512
- Stiles, B., Kirk, R. L., Lorenz, R. D., Hensley, S., Lee, E., Ostro, S. J., Allison, M., Callahan, P. S., Gim, Y., Iess, L., Del Marmo, P. P., Hamilton, G., Johnson, W. L., & West, R. (2008). DETERMINING TITAN'S SPIN STATE FROMCASSINIRADAR IMAGES. The Astronomical Journal, 135(5), 1669-1680. https://doi.org/10.1088/0004-6256/135/5/1669
- Saillenfest, M., Lari, G., Boué, G., & Courtot, A. (2021). The past and future obliquity of Saturn as Titan migrates. Astronomy and Astrophysics, 647, A92. https://doi.org/10.1051/0004-6361/202039891

  El siguiente no hace referencia explicita a Titán, pero sí habla de los estados de rotación de los satelites planetarios.

- Melnikov, A., & Shevchenko, I. I. (2010). The rotation states predominant among the planetary satellites. Icarus, 209(2), 786-794. https://doi.org/10.1016/j.icarus.2010.04.022