

Tarea 2:
La masa y el radio de Jeans
Ciencias Planetarias

Camilo Ospinal
Agosto, 2023

1 Introducción

El universo está repleto de estrellas, que a nuestra vista en el cielo nocturno es lo más apreciable, y para el ojo de la humanidad han estado ahí por siempre. Las estrellas no surgieron espontáneamente, son el resultado de distintas etapas de formación con sus propias características. Para que se forme una estrella es necesario tener el material, este material se encuentra en el medio interestelar (Interstellar Medium o ISM por sus siglas en inglés), que recolecta los elementos químicos suficientes que conllevan al surgimiento de una estrella. Se ha encontrado que los elementos que conforman una estrella son los mismos que conforman el medio interestelar, siendo sus porcentajes de masa similares, recogiendo el 98% de esta el Hidrogeno y el Helio, y el 2% los demás elementos catalogados en astrofísica como "metales".

El medio interestelar es el espacio "vacío" entre estrellas. Se dice "vacío" puesto que su densidad de partículas es de 1 átomo por centímetro cúbico. Ciertas regiones del ISM logran acumular una mayor cantidad de elementos, formando nubes interestelares, de las cuales, para este caso, solo nos enfocaremos en las nubes difusas moleculares¹ y las nubes moleculares gigantes (GMC). Las primeras, en general, están conformadas principalmente por hidrogeno atómico, mientras que las segundas por hidrogeno molecular, H_2 . Si bien ambas pueden tener otros elementos y moléculas, en especial las GMC, para nuestros cálculos consideraremos la anterior suposición.

Las nubes tienen una energía interna que logra hacerle frente a fuerza gravitacional generada por su masa, se dice que están en equilibrio hidrostático, la presión es igual a la fuerza gravitacional. En ciertos casos, sobre todo para las nubes densas, la presión del gas dependiente de la temperatura de la nube, no es capaz de contrarestrar la atracción gravitacional de su masa hacia el centro. Cuando tenemos la masa crítica que supera la presión, la llamamos *Masa de Jeans*, M_J , dada por la siguiente ecuación.

$$M_J = \left(\frac{5 k T}{G \mu m_H} \right)^{3/2} \left(\frac{3}{4\pi \rho_0} \right)^{1/2}$$

Donde $k = 1,380649 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$ es la constante de Boltzmann, T es la temperatura del gas en Kelvin, G es la constante gravitacional, μ es el peso molecular promedio del gas, m_H la masa del átomo que forma el gas en cuestión y $\rho_0 = \mu m_H n$ la densidad siendo n la densidad de partículas.

Antes de avanzar, entendamos lo que significa μ . Este número adimensional es la masa promedio de un elemento medida respecto a la masa del hidrogeno. Por ejemplo, un gas compuesto totalmente con H tiene $\mu = 1$, un gas compuesto totalmente con He tiene $\mu = 4$, debido a que la masa del helio es aproximadamente de 4 u por tener 2 protones y dos neutrones. Teniendo esto en cuenta, un gas compuesto totalmente de H_2 , al estar conformado por dos átomos de hidrogeno

¹Las nubes difusas también pueden ser atómicas. Se producen cuando el gas está totalmente expuesto a la radiación y casi todas las moléculas son rápidamente destruidas por fotodisociación. Su principal componente es HI. Ver referencia 1.

tiene $\mu = 2$. Esta relación simple se quiebra cuando un gas está conformado por distintos elementos en distintas cantidades y estados (como de ionización), y el cálculo de μ no es tan trivial. En referencias podrá encontrar más acerca del tema, donde, además, se calcula el valor de μ para el Sol teniendo en cuenta su distribución de elementos en su masa.

El mismo criterio en base al radio de la nube, conocido como *Radio de Jeans*, viene dado por la ecuación:

$$R_J = \left(\frac{15kT}{4\pi G \mu m_H \rho_0} \right)^{1/2}$$

Si es de interés del lector en el Apendice 1 encontrará una explicación de la masa y radio de Jeans, debido a que considero que las explicaciones en internet carecen de la suficiente claridad al momento de explicar el fenómeno físico.

2 Cálculos

A continuación, las masas y radios de Jeans para una nube molecular difusa y una nube molecular gigante.

Nube de H difusa:

Temperatura: $T = 50K$

Densidad de partículas: $n \sim 5 \times 10^8 \text{ m}^{-3}$

Mean Molecular Weight: $\mu = 1$

Masa atómica: $m_H = 1,67 \times 10^{-27} kg$

Masa de Jeans:

$$M_J = \left(\frac{5k(50K)}{G(1)(1,67 \times 10^{-27} kg)} \right)^{3/2} \left(\frac{3}{4\pi(1,67 \times 10^{-27} kg)(5 \times 10^8 \text{ m}^{-3})} \right)^{1/2}$$

$$= 2,91 \times 10^{32} kg \approx 1465 M_\odot$$

Radio de Jeans:

$$R_J = \left(\frac{15k(50K)}{4\pi G(1)(1,67 \times 10^{-27} kg)^2(5 \times 10^8 \text{ m}^{-3})} \right)^{1/2}$$

$$= 9,41 \times 10^{16} m \approx 3 pc$$

Nube molecular gigante de H:

Temperatura: $T = 10K$

Densidad de partículas: $n \sim 1 \times 10^{10} \text{ m}^{-3}$

Mean Molecular Weight: $\mu = 2$

Masa atómica: $m_H = 1,67 \times 10^{-27} kg$

Masa de Jeans:

$$M_J = \left(\frac{5k(10K)}{G(2)(1,67 \times 10^{-27} kg)} \right)^{3/2} \left(\frac{3}{4\pi(1,67 \times 10^{-27} kg)(1 \times 10^{10} \text{ m}^{-3})} \right)^{1/2}$$

$$= 1,46 \times 10^{31} kg \approx 7,32 M_\odot$$

Radio de Jeans:

$$R_J = \left(\frac{15k(10K)}{4\pi G(4)(1,67 \times 10^{-27} kg)^2(1 \times 10^{10} m^{-3})} \right)^{1/2} \approx 31449.77 \text{ ua}$$

Tiempo nuclear del Sol: Finalmente, hablemos del tiempo nuclear del Sol. En breve, cuando una estrella se encuentra en la secuencia principal, esta empieza a consumir el hidrogeno disponible en helio, en algún momento este proceso finaliza, dando fin a una etapa de la estrella. El intervalo de tiempo en el que ocurre esto se conoce como *tiempo nuclear estelar*, es el tiempo que tarda la estrella en convertir toda la masa de hidrogeno que tenga disponible en helio y, por ende, energía. La tasa a la que libera energía es, en teoría, constante:

$$\frac{dE}{dt} = L$$

Resolviendo la ecuación diferencial,

$$E(t) - E(t_0) = L(t - t_0)$$

t_0 es igual a 0 evidentemente, $E(t_0)$ también es igual a 0 debido a que en el momento inicial no hay liberación de energía. L corresponde a la luminosidad solar $L_\odot = 3,828 \times 10^{26} W$. Luego, $E = M_\odot c^2$. Así escribimos

$$\tau = \frac{M_\odot c^2}{L_\odot}$$

Para facilitar los cálculos, como siempre, suponemos lo más simple, tal que la masa inicial del Sol es completamente hidrogeno. Suponemos, además, que solo el 10% de la masa del Sol llega a ser lo suficientemente caliente para convertir hidrogeno en helio, y se puede demostrar también que el 0.7% de la masa del hidrogeno se convertirá en energía al formar helio (ver referencia 8). Por ende

$$\tau = \frac{(0.007)(0.1)(1,989 \times 10^{30} kg)(299792458 ms^{-1})^2}{3,828 \times 10^{26} W} = 3,269 \times 10^{17} s = 1,036 \times 10^{10} yr$$

3 Conclusiones

Para poderse dar el nacimiento de estrellas deben haber unas condiciones específicas básicas que dependen de la masa de la nube interestelar de donde surja la estrella. Realizando una simplificación de las características de la nube, obviando sus propiedades rotativas, electromagnéticas, forma y de composición exacta, el planteamiento de una nube esférica, estática y únicamente compuesta de hidrogeno, nos permite obtener valores de propiedades del sistema con una aproximación que coincide bien con lo observado.

En estas condiciones el criterio de la masa de Jeans es un punto de equilibrio inestable, debido a que es una igualdad exacta cualquier masa superior a esta masa crítica produciría, en teoría, que la gravedad colapse la nube y cualquier masa menor llevaría a que la presión mantenga la nube

en su estado inicial. Es evidente que la interacción electromagnética entre partículas supondría que la masa de Jeans sea menor si es que es atractiva o mayor si es que es repulsiva. La energía rotacional causaría los mismos efectos, sin embargo, en base, la igualación de la energía del gas con la energía potencial funciona para obtener una idea del funcionamiento de la etapa antecesora al surgimiento de una estrella.

4 Apéndice 1

¿Por qué cuando aumentas la densidad la masa de Jeans disminuye? Tiene sentido que cuando la temperatura de las partículas aumenta la masa aumente, pues al elevar la temperatura su energía aumenta y por lo tanto la presión también, por lo tanto, para contrarrestar esta expansión es necesario aumentar la masa. Si dejamos la masa constante y la temperatura aumentando, no hay equilibrio hidrostático y la nube se expande, se diluye, si aumentamos la masa y dejamos la temperatura constante la nube colapsa. Un aumento de masa implica un aumento de temperatura que logre mantener el equilibrio.

La relación no es tan obvia cuando hablamos de la masa y la densidad, si aumentamos la densidad según la fórmula, entonces la masa disminuye y viceversa. ¿Por qué? Si aumento densidad, significa que estoy incrementando el número de partículas, por lo tanto la masa aumenta. Por otro lado se podría pensar que si aumento la densidad es que estoy conteniendo el mismo número de partículas en un espacio más pequeño, pero la masa no cambia.

La explicación a la anterior cuestión es la siguiente: Suponga que tiene un espacio de una dimensión cualquiera, en ella coloca tres bolitas (densidad baja) que se mueven a una velocidad constante (tienen una temperatura dada), en principio, no hay paredes ni nada que las contenga, así que terminaran escapando del espacio. La fuerza de atracción entre ellas no es lo suficientemente fuerte para detenerlas, así que usted coge otro espacio del mismo tamaño al lado del espacio original con tres bolitas en las mismas condiciones (agrega una misma cantidad de masa en un volumen igual, misma densidad), y sigue realizando el mismo procedimiento hasta construir un volumen conformado por cientos de espacios con tres bolitas cada uno, hasta el punto en el que la atracción entre todas esas bolitas es la suficiente como para contrarrestar la expansión que tenían. Vemos como para una baja densidad fue necesario aumentar la masa para que las bolitas no se dispersaran. Ahora, suponga que tiene un espacio inicial mucho más pequeño que el anterior con cientos de bolitas (mayor densidad) con las mismas condiciones anteriores, como las bolitas están más cerca (la distancia disminuye) la atracción que experimentan entre ellas es menor, así que no hay que agregar tantos espacios llenos de bolitas como en el anterior caso para que la atracción entre ellas logre contener su expansión, entonces al aumentar la densidad no fue necesario aumentar la masa.

Utilizando lo anterior es fácil ver como funciona el radio de Jeans. Para bajas densidades el radio aumenta, lo que tiene sentido, porque tuve que poner muchos espacios llenos de tres bolitas para lograr la masa de jeans, lo que implica tener un radio muy grande. Mientras que con muchas bolitas en el mismo espacio, tuve que colocar menos espacios vecinos con lo que el radio disminuyó.

References

- [1] Snow, T. P., & McCall, B. J. (2006). Diffuse Atomic and Molecular Clouds. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 44(1), 367–414. doi:10.1146/annurev.astro.43.072103.150624 10.1146/annurev.astro.43.072103.150624
- [2] Wooden, D. H., Charnley, S. B., & Ehrenfreund, P. (2004). Composition and evolution of interstellar clouds. En *University of Arizona Press eBooks* (pp. 33-66). <https://doi.org/10.2307/j.ctv1v7zdzq5.10>.
- [3] Lovell, C. (2016, 26 abril). Deriving the Jean's Mass. Christopher Lovell. <https://www.christopherlovell.co.uk/blog/2016/04/26/jeans-mass.html>
- [4] Pettini, M. (s. f.). Structure and Evolution of Stars - Lecture 11: How do Stars Form?. <https://people.ast.cam.ac.uk/~pettini/Stellar%20Structure%20Evolution/Lecture11.pdf>

- [5] http://astronomy.nmsu.edu/jasonj/565/docs/09_03.pdf
- [6] Gary, D. E. (s. f.). Astronomy Lecture Number 7. <https://web.njit.edu/~gary/321/Lecture7.html>
- [7] The Jeans Mass. (s. f.). <http://icc.dur.ac.uk/~tt/Lectures/Galaxies/TeX/lec/node37.html>
- [8] http://www.mit.edu/8901_2019A/lec011.pdf