Representación de Señales

Diana Patricia Tobón Vallejo, PhD

Tratamiento de Señales III
Facultad de Ingeniería
Universidad de Antioquia

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
Facultad de Ingeniería

Febrero, 2024

Material elaborado por: Hernán Felipe García Arias

Contenido

1 Procesamiento Digital de Señales

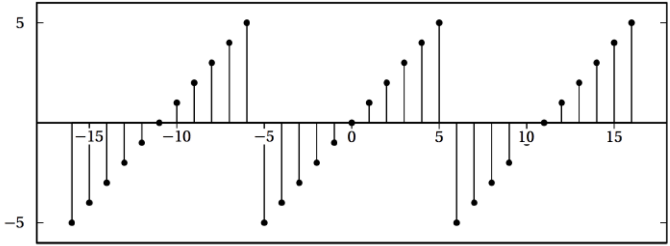
Notación básica

- Valores reales o complejos de señales discretas

$$x[n] : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}; \quad x[n] : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$$

$n \in \mathbb{Z}$, índice entero, e.g., tiempo discreto.

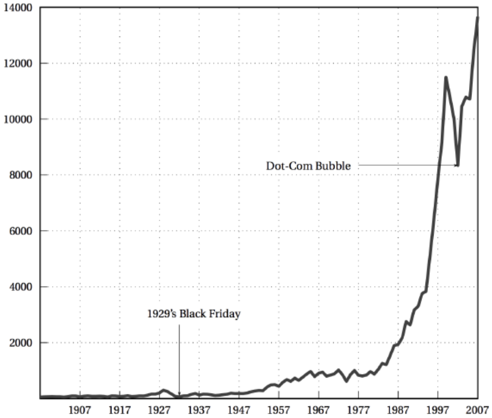
- Ejemplo: señal triangular $x[n] = ((n+5) \quad mod \quad 11) - 5$



Señal triangular de tiempo discreto

Notación básica

- Ejemplo: $x[n]$ = Promedio del índice Dow-Jones en un año n



Índice Dow-Jones

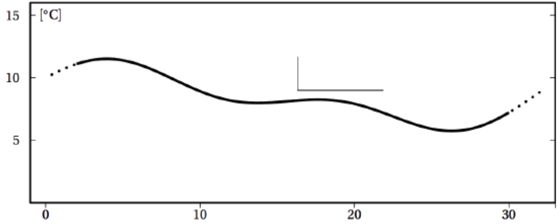
Notación básica

- Señal continua $x(t)$:

$$x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; \quad x(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

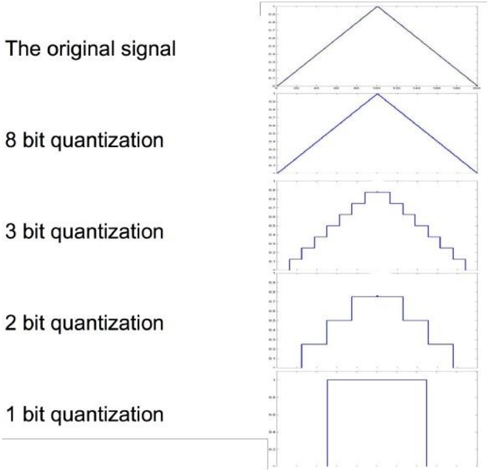
donde $t \in \mathbb{R}$ es un índice continuo, e.g., tiempo.

- Ejemplo: temperatura $x(t)$ en el tiempo t



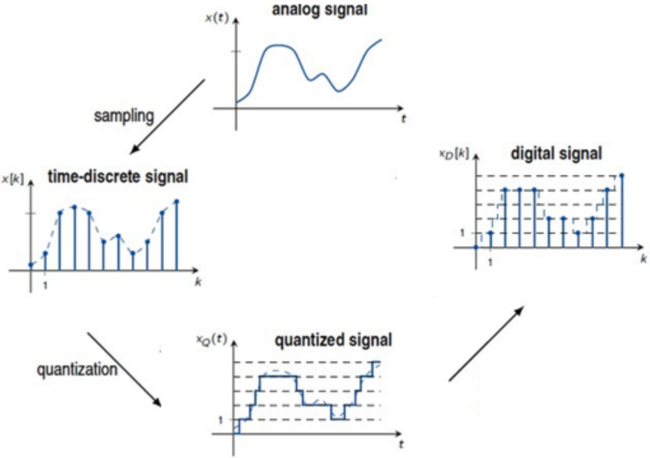
Función de temperatura en un modelo de tiempo-continuo

Cuantizar señales discretas en señales digitales

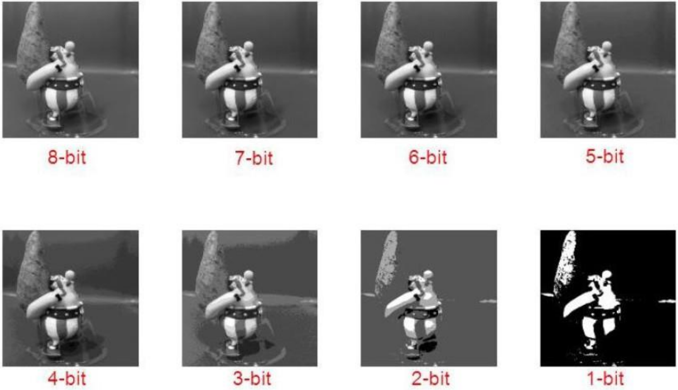


slide credit: B. Raj

Cuantizar señales discretas en señales digitales

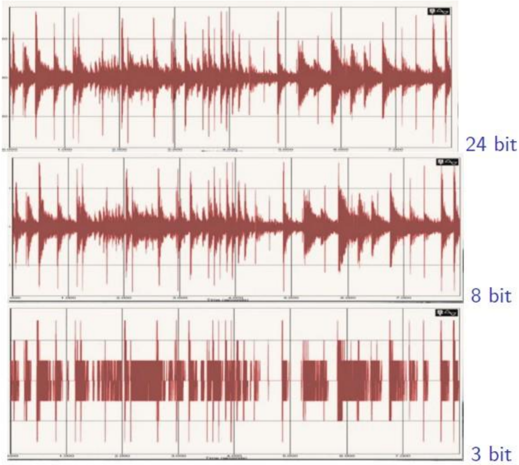


Cuantizar imágenes



slide credit: G. Anbarjafari

Cuantizar audio



slide credit: M. Mohan

Señales fundamentales

- Secuencia Delta:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \tag{1}$$

- Escalón unitario:

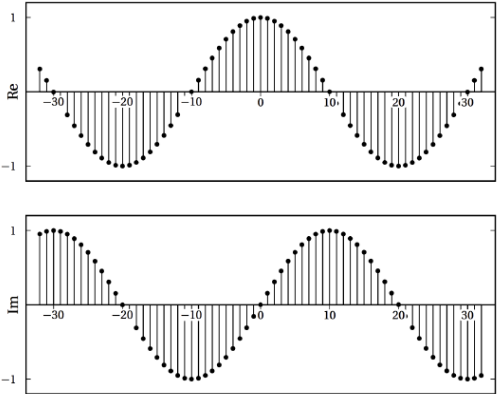
$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \tag{2}$$

- Exponencial decreciente:

$$\begin{aligned} & x[n] = a^n u[n] \\ & a \in \mathbb{C} \\ & |a| < 1 \end{aligned} \tag{3}$$

Señales fundamentales

- Exponencial compleja $x[n] = \exp j(w_0 n + \varphi)$, con w_0 como frecuencia y φ, fase.



Señal de tiempo discreto exponencial $x[n] = \exp j(\frac{\pi}{20} n)$ (real e imaginario)

Señales fundamentales

Periodicidad: Una señal es periódica si existe un $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}\,[n - n_0] \quad \text{for all } n$$

$\tilde{x}[n]$: notación de las señales periódicas.

Teorema: (Periodicidad de una señal sinusoide discreta)

Una señal senoidal de tiempo-discreto es periódica, sí y sólo sí su frecuencia w_0 es π veces un número racional, de tal modo que:

$$w_0 = \frac{M}{N}\pi, \quad M, N \in \mathbb{Z}$$

Muestreo de una función continua para obtener una función discreta

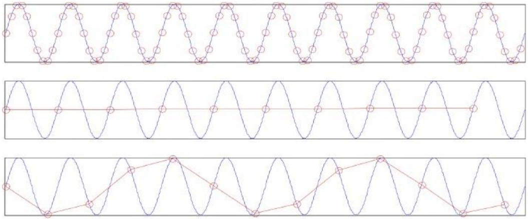
Si muestreamos una señal cada T segundos, luego el valor del n^{th} número en la secuencia es igual a:

$$x[n] = x_a(bT), \quad -\infty < n < \infty.$$

- T: periodo de muestreo
- $f_s = 1/T$: frecuencia de muestreo

Muestreo

- Teorema de muestreo de **Nyquist-Shannon**: Si $x(t)$ contiene frecuencias inferiores a f_s Hertz, es completamente determinada por sus muestras $x[n]$ en una serie de puntos espaciados por $T = 1/(2f_s)$.

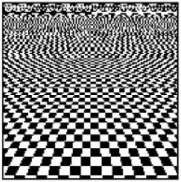


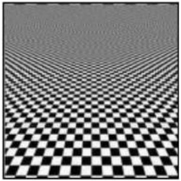
Aliasing

- Bajas tasas de muestreo: **Aliasing**
- Efecto de rueda de carro: La tasa de muestreo para el ojo humano es $T \approx 1/25$ segundos.

Aliasing en imágenes

- Filtro anti-aliasing:





Energía y Potencia

- **Energía**: La energía de una señal de tiempo-discreto:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \tag{4}$$

- La energía de una señal es finita sólo si la suma converge.
- **Potencia**: La potencia de una señal es la razón de la energía sobre el tiempo:

$$P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} |x[n]|^2 \tag{5}$$

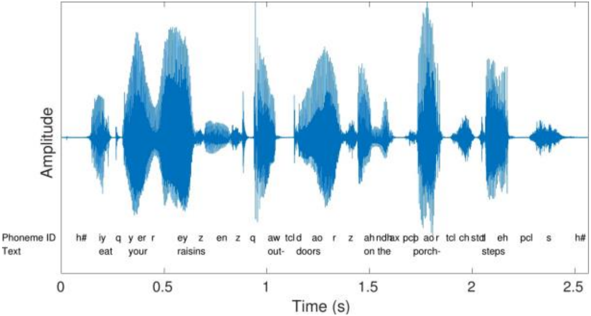
- Las señales de energía finita (i.e., señales cuadráticas) siempre tienen potencia cero.

¿Si una señal no es cuadrática, puede tener potencia finita?

Representación de señales

Enventanado

- Queremos extraer segmentos que sean lo suficientemente cortos como para que las propiedades de la señal (i.e. señal de voz) no tengan un cambio dentro de ese segmento.



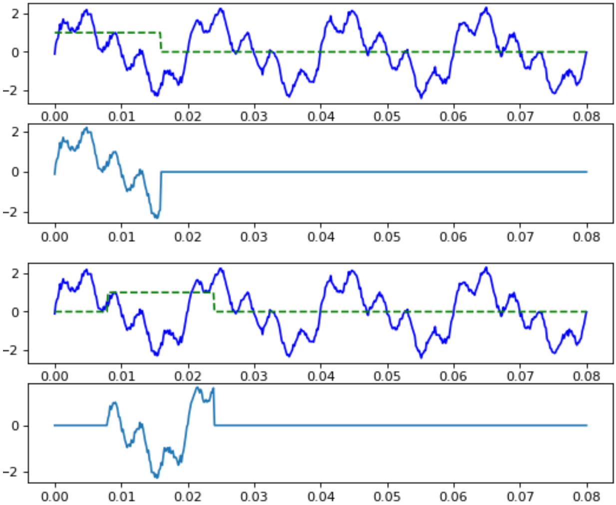
- El enventanamiento (*windowing*) es un método clásico en el procesamiento de señales y se refiere a dividir la señal de entrada en segmentos temporales.
- Las funciones de ventana son funciones suaves que van a cero en los bordes.

Enventanado

- Al multiplicar la señal de entrada con una función de ventana, la función de ventana también llega a cero en el borde, de modo que la discontinuidad en el borde se vuelve invisible.

- El uso de ventanas cambia la señal, pero el cambio está diseñado de manera que se minimice su efecto sobre las estadísticas de la señal.

Enventanamiento para aplicaciones de análisis

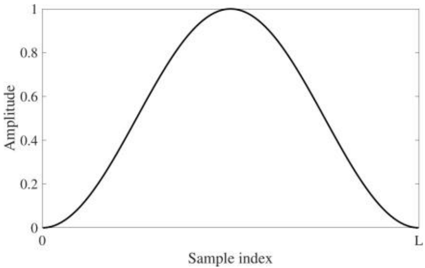


Ejemplo de un proceso de enventanado de una señal utilizando una ventana rectangular

Enventanamiento para aplicaciones de análisis

- Dada una señal de entrada x_k, definida para todo k , y una función de ventana w_k, definida en un rango limitado $k \in [0, L]$, podemos extraer una ventana de la señal como:

$$x_{k,n} = x_{n-k} w_n$$



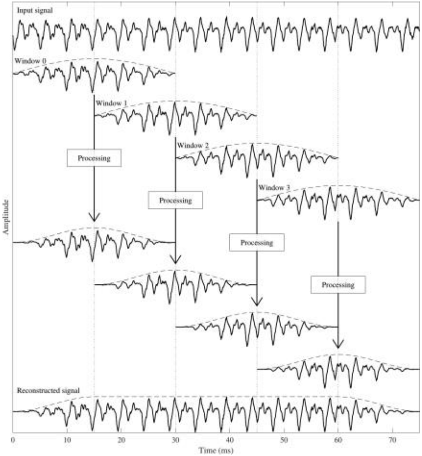
Ejemplo de una función de ventana *Hann-window* $w_n = [sin(\pi n/L)]^2$

Enventanamiento para aplicaciones de análisis

- El principal criterio de optimización al elegir las funciones de ventana es la distorsión espectral.
- Como la creación de ventanas es una multiplicación en el dominio del tiempo, corresponde a la convolución en el dominio de la frecuencia.
- Al observar el espectro de la función de ventana, podemos determinar cuanta dispersión de picos en la frecuencia se producirá cuando apliquemos la función de ventana.

Superponer-agregar (*Overlap-add*)

- Extraemos ventanas superpuestas de la señal, aplicamos algo de procesamiento y reconstruimos creando ventanas por segunda vez y luego agregando segmentos superpuestos.



Resumen

- La creación de ventanas con superposición-adición (*overlap-add*) es una herramienta básica y de uso común en el procesamiento de voz.
- Permite que los algoritmos modifiquen secciones de la señal de manera que las modificaciones no provoquen discontinuidades en la señal.
- Un sistema de ventanas diseñado adecuadamente para superposición-adición no causa en sí mismo distorsiones y la señal original se puede reconstruir perfectamente desde las ventanas.

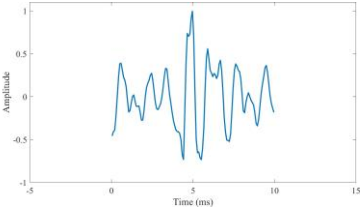
Resumen

- La única desventaja notable de la superposición de ventanas es que las superposiciones causan redundancia.

- La información que aparece en una región de superposición entre las ventanas k y $k + 1$, siempre se incluirá en los cálculos tanto en la ventana k como en la $k + 1$.

Autocorrelación y autocovarianza

- Las señales de voz suelen tener una estructura tal que las muestras cercanas en el tiempo son similares en amplitud. Esta estructura se denomina a menudo estructura temporal a corto plazo.



Segmento corto de señal de voz

Autocorrelación y autocovarianza

- Las muestras de la señal se correlacionan con las muestras anterior y siguiente. Tales estructuras se encuentran en estadísticas medidas por covarianza y correlación, definidas para las variables de media cero x e y como:

$$\text{covariance:}\sigma_{xy} = E[xy]$$
$$\text{correlation:}\rho_{xy} = \frac{E[xy]}{\sqrt{E[x^2]E[y^2]}},$$

donde $E[]$ es el **operador valor esperado**.

- Para una señal de voz x_n, donde k es el índice de tiempo, nos gustaría medir la correlación entre dos índices de tiempo x_n y x_h.
- Dado que la estructura que nos interesa aparece cuando n y h están cerca, es mejor medir la correlación entre x_n y x_{n-k}.
- El escalar k se conoce como retraso.

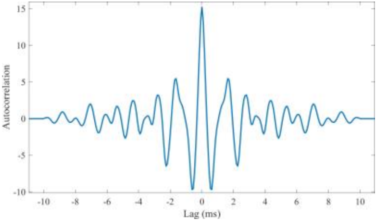
Autocorrelación y autocovarianza

- Además, podemos suponer que la correlación es uniforme en todo n dentro del segmento.
- La autocorrelación y las covarianzas, conocidas como autocorrelación y autocovarianza, se definen como:

$$\text{autocovariance:} r_k = E_n[x_n x_{n-k}]$$

$$\text{autocorrelation:} c_k = \frac{E_n[x_n x_{n-k}]}{E_n[x_n^2]} = \frac{r_k}{r_0}$$

Autocorrelación y autocovarianza



Autocovarianza de un segmento de voz

Podemos ver que se conservan las correlaciones a corto plazo; a pequeña escala, la autocovarianza se parece a la señal de voz original. La estructura oscilante también se conserva con precisión.

Autocorrelación y autocovarianza

- A menudo es más fácil trabajar con notación vectorial en lugar de escalares, por lo que necesitamos las definiciones correspondientes para las autocovarianzas. Asumamos:

$$x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}$$

Autocorrelación y autocovarianza

- Entonces podemos definir la matriz de autocovarianza como:

$$
\begin{aligned}
R_x := E[xx^T] &= \begin{bmatrix} E[x_0^2] & E[x_0 x_1] & \dots & E[x_0 x_{N-1}] \\ E[x_1 x_0] & E[x_1^2] & \dots & E[x_1 x_{N-1}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[x_{N-1} x_0] & E[x_{N-1} x_1] & \dots & E[x_{N-1}^2] \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & \dots & r_{N-1} \\ r_1 & r_0 & \dots & r_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{N-1} & r_{N-1} & \dots & r_0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$