

Simulación 1: Movimiento parabólico

Profesor: Julián Rincón

Autor: J.R.

Nota: Estas notas están basadas en el capítulo uno y dos del libro “An Introduction to Computer Simulations Methods: Applications to Physical Systems” de H. Gould, J. Tobochnik, W. Christian.

1.1. Introducción

En este laboratorio de simulación estudiaremos numéricamente la cinemática de una partícula que se mueve con aceleración constante. En este caso, esa aceleración constante vendrá del campo gravitacional que ejerce la tierra sobre algún objeto (cuerpo o partícula). La trayectoria de un objeto cuando es únicamente influenciada por la acción de la gravedad es, en general, curva. Adicionalmente, cuando el movimiento del objeto es cercano a la superficie terrestre, este se conoce como *movimiento parabólico*.

Como mostramos en clase, partiendo de la definición de aceleración, como la variación de la velocidad con respecto al tiempo, es posible mostrar que el movimiento de una partícula es una parábola —de ahí el nombre. En este contexto, movimiento se refiere a la posición $\mathbf{r}(t)$ de la partícula como función del tiempo.

Restringiendo el movimiento del proyectil a dos dimensiones espaciales, las ecuaciones cinemáticas bajo aceleración constante son:

$$\begin{aligned} a_x &= 0 & a_y &= -g \\ v_x &= v_{0x} + a_x t & v_y &= v_{0y} + a_y t \\ x &= x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 & y &= y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \end{aligned}$$

donde el sistema coordenado tiene el eje $\hat{\mathbf{y}}$ en la misma dirección de la gravedad g y el eje $\hat{\mathbf{x}}$ es perpendicular a este. El significado de las variables es estándar y puede encontrarse en el libro guía. A partir de estas ecuaciones podemos saber, dado un tiempo t , cual es la posición, velocidad y aceleración de la partícula. Por lo tanto, podemos determinar de forma determinista la trayectoria del objeto en presencia del campo gravitacional terrestre.

Con estas ecuaciones podemos calcular el movimiento de un objeto bajo la acción de la gravedad, que se puede considerar constante si el movimiento es cercano a la superficie de la tierra. (Más adelante veremos cómo se corrige esto y qué impacto tiene sobre el movimiento.) Cantidades importantes que se pueden calcular son: (a) el tiempo de vuelo, (b) la altura máxima, y (c) el alcance horizontal, entre otros.

A continuación, vamos a describir los temas que van a ser explorados en este laboratorio de simulación. El objetivo principal del laboratorio es realizar una simulación numérica del movimiento de un proyectil, dadas unas condiciones iniciales. Como objetivos secundarios podemos mencionar (1) entender más profundamente el significado y alcance de las ecuaciones cinemáticas, (2) reforzar el conocimiento del lenguaje de programación Python, y finalmente, (3) aprender a hacer animaciones en Python usando librerías estándar.

1.2. Tiempo de vuelo

El tiempo de vuelo total del proyectil, o tiempo vuelo, se define como el tiempo total durante el cual el proyectil permanece en el aire.

1. ¿Cuál es el criterio más apropiado para calcular el tiempo de vuelo total de un proyectil?

2. Usando las ecuaciones cinemáticas de movimiento bajo aceleración constante, calcule de forma algebraica el tiempo de vuelo de un proyectil que tiene como condiciones iniciales una rapidez v_0 y ángulo de lanzamiento θ . La expresión final debe estar en términos de g , v_0 y θ únicamente.
3. ¿Para qué ángulo se obtiene el mayor tiempo de vuelo? ¿Para qué rapidez se logra el mayor tiempo de vuelo?

1.3. Altura máxima

La altura máxima que un proyectil puede alcanzar es el máximo alcanzado durante su movimiento, que es parabólico. En otras palabras el máximo de la parábola.

1. ¿Cuál es el criterio más apropiado para calcular la altura máxima en el movimiento de un proyectil?
2. Usando las ecuaciones cinemáticas de movimiento bajo aceleración constante, calcule de forma algebraica la altura máxima que un proyectil puede alcanzar con unas condiciones iniciales dadas por la rapidez v_0 y el ángulo de lanzamiento θ . La expresión final debe estar en términos de g , v_0 y θ únicamente.
3. ¿Para qué ángulo se obtiene la mayor altura máxima? ¿Para qué valor de g se logra la mayor altura máxima?

1.4. Alcance horizontal

El alcance horizontal, o rango, de un proyectil se define como la distancia horizontal máxima que alcanza un proyectil dada v_0 y θ .

1. ¿Cuál es el criterio más apropiado para calcular el alcance horizontal de un proyectil en movimiento?
2. Usando las ecuaciones cinemáticas de movimiento bajo aceleración constante, calcule de forma algebraica el alcance máximo que un proyectil puede alcanzar con unas condiciones iniciales dadas por v_0 y θ . La expresión final debe estar en términos de g , v_0 y θ únicamente.
3. ¿Para qué ángulo se logra el mayor alcance horizontal? ¿Cuál es la relación entre el alcance horizontal y la altura máxima?

1.5. Simulación numérica: Animación

Por último, realice una animación en dos dimensiones espaciales, usando `matplotlib`, del movimiento parabólico de un proyectil. Las características específicas de la animación son como las mostradas en clase. Para realizar la simulación que genera la animación implemente dos clases: `Projectile` y `Animator`. Para cada clase: ¿cuáles métodos cree necesarios para generar correctamente la animación?

La clase `Projectile` representa un proyectil: una pelota o una bala, por ejemplo. Este proyectil está descrito por su posición, velocidad, tiempo, etc., junto con algún método que calcula el movimiento del proyectil. Note que la animación mostrada en clase define más de una instancia de esta clase.

La clase `Animator` es implementada como una interfaz que conecta la trayectoria del proyectil —calculada por algún método de la clase `Projectile`— con el animador de `matplotlib`. Como la animación genera varios proyectiles, una variable de instancia de esta clase puede ser un vector de `Projectiles`.

El método de animación que usaremos es `matplotlib.animation.FuncAnimation`. Para más información y ejemplos consulte la documentación de `matplotlib` correspondiente.