Universidad del Rosario

Solución de ecuaciones de una variable

PhD José Alejandro Guerrero Vargas

Contenido

Contenido

Universidad del Rosario

Definiciones

- **Continuidad:** Supongamos que $f(x)$ está definida en un conjunto S de números reales y sea $x_0 \in S$. Se dice que f es continua en $x = x_0$ si:

  $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

  Se dice que $f(x)$ es continua en S si es continua en cada punto $x \in S$.
- **Raíz de una ecuación:** Supongamos que $f(x)$ es una función continua. Cualquier número r tal que $f(r) = 0$ se llama raíz de la ecuación $f(x) = 0$. También se dice que r es un cero de la función $f(x)$.
- **Teorema del valor intermedio:** (Teorema de Bolzano) Supongamos que $f \in [a, b]$ y que L es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$. Entonces existe un número c en (a, b) tal que $f(c) = L$.

Universidad del Rosario

Teoremas

- **Teorema de Rolle:** Suponga que $f \in C[a,b]$ y que f es derivable en (a,b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe un número c en (a,b) tal que $f'(c) = 0$.
- **Teorema del valor medio de la derivada:** Si $f \in C[a,b]$ y f es derivable en (a,b), entonces existe un número c en (a,b), tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

  Existe al menos algún punto c en el intervalo (a,b) tal que la tangente a la curva en c es paralela a la recta secante que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.
- **Teorema de los valores extremos:** Si $f \in C[a,b]$, entonces existen c_1 y $c_2 \in C[a,b]$ tal que $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$ para toda $x \in C[a,b]$. Además, si es derivable en (a,b), entonces los números c_1 y c_2 aparecen en los extremos de $C[a,b]$ o bien donde se anula $f'(x)$.

Encontrar el valor mínimo y máximo absolutos, en los intervalos $[0, 1]$ y $[1, 2]$ de:

$$f(x) = 2 - e^x + 2x$$

Si se deriva la función queda:

$$f'(x) = -e^x + 2$$

Si $f'(x) = 0$, entonces:

$$-e^x + 2 = 0 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow ln(e^x) = ln(2) \Rightarrow x = ln(2) = 0.69315$$

Teoremas

Cuando el intervalo es $[0,1]$, el extremo absoluto debe estar en $f(0)$, $f(ln(2))$ o en $f(1)$. Por lo que se tiene que:

$$f(0) = 2 - e^0 + 2(0) = 1$$
$$f(ln(2)) = 2 - e^{ln(2)} + 2ln(2) = 1.3863$$
$$f(1) = 2 - e^1 + 2(1) = 1.28172$$

Por lo que el mínimo en este intervalo está en $f(0)$ y el máximo en $f(ln(2))$. Cuando el intervalo es $[1,2]$, se sabe que $f'(x) \neq 0$ Por lo que los extremos absolutos se presentan en $f(1)$ y $f(2)$

$$f(1) = 2 - e^1 + 2(1) = 1.28172$$
$$f(2) = 2 - e^2 + 2(2) = -1.38906$$

Contenido

Método de Bisección

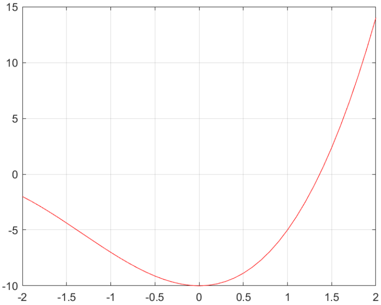
1. Empezar con un intervalo de partida $[a, b]$ en el que $f(a)$ y $f(b)$ tengan distinto signo. Entonces, por el teorema de Bolzano, la gráfica $y = f(x)$ cruzará el eje de las abscisas (OX) en un cero $x = r$ que está en dicho intervalo.
2. Tomar el punto medio del intervalo $c = (a + b)/2$
   - Si $f(a)$ y $f(c)$ tienen signos opuestos, entonces hay un cero en $[a, c]$.
   - Si $f(c)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces hay un cero en $[c, b]$.
   - Si $f(c) = 0$, entonces c es un cero.
3. Renombramos el nuevo intervalo más pequeño también como $[a, b]$ y repetimos el proceso hasta que el intervalo sea tan pequeño como deseemos.

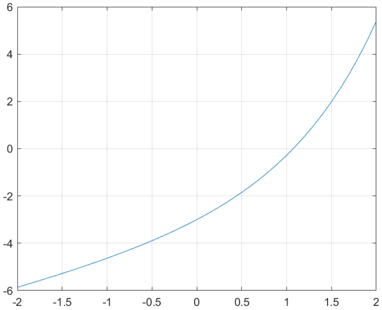
Método de Bisección

Encontrar la raíz de las siguientes ecuaciones aplicando el método de bisección en el intervalo $[1, 2]$:

1. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$
2. $f(x) = e^x - 4 + x$

Utilice como criterio de convergencia $E_r \leq 2\%$





Convergencia

Previo al inicio de la aplicación del método, se observa que el error absoluto está dado por:

$$E_a^0 = b - a = \Delta x^0$$

Calculando los errores después de la primera iteración se tendrá que:

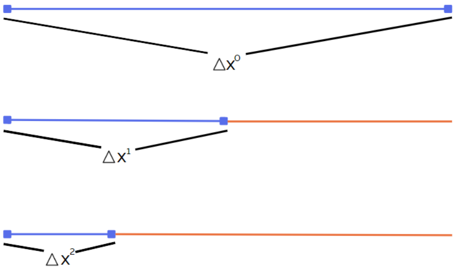
$$E_a^1 = \frac{\Delta x^0}{2} \quad E_a^2 = \frac{\Delta x^0}{2^2} \quad \cdots \quad E_a^n = \frac{\Delta x^0}{2^n}$$

Por lo tanto, para un valor de error deseado $E_{a,d}$, el número de iteraciones requerido será:

$$E_{a,d}^n = \frac{\Delta x^0}{2^n} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{log(\Delta x^0 / E_{a,d})}{log 2}$$

Se puede decir que le Método de Bisección tiene una razón de convergencia de:

$$p_n = p + O\left(\frac{1}{2^n}\right)$$



Contenido

Método de la falsa posición

También conocido como regula falsi. Supongamos que $f(a)$ y $f(b)$ tienen distinto signo. En el método de bisección se usa el punto medio del intervalo $[a, b]$ para llevar a cabo el siguiente paso, suele conseguirse una mejor aproximación usando el punto $(c, 0)$ en el que la recta secante L que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ cruza el eje de las abscisas (OX)

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad m = \frac{0 - f(b)}{c - b} \qquad \Rightarrow c = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b) - f(a)}$$

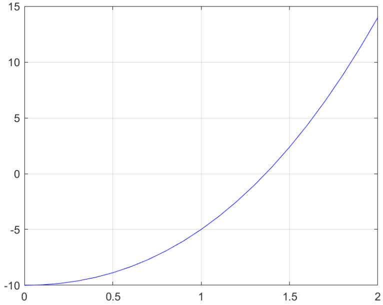
- Si $f(a)$ y $f(c)$ tienen signos opuestos, entonces hay un cero en $[a, c]$.
- Si $f(c)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces hay un cero en $[c, b]$.
- Si $f(c) = 0$, entonces c es un cero.

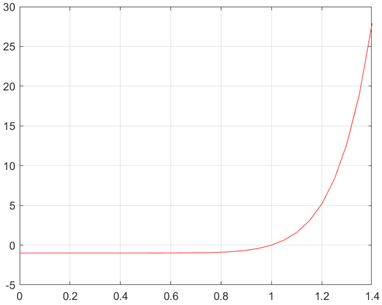
Se repite este proceso hasta que c converge a un cero r de la función.

Encontrar la raíz de las siguientes ecuaciones aplicando el método de falsa posición en el intervalo $[1, 2]$:

1. $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$
2. $f(x) = x^{10} - 1$

Utilice como criterio de convergencia $E_r \leq 10^{-5}$





Contenido

Universidad del Rosario

Iteración de punto fijo

Lo que se desea es encontrar el valor de x para el cual $f(x) = 0$. Para ellos se hará uso de los puntos fijos, valores de x cuya imagen son la misma x. Por ejemplo:

$$g(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad g(0) = 0^2 = 0 \quad g(1) = 1^2 = 1$$

Lo que se busca es partir de un valor x_0 para hacer el proceso iterativo:

$$\begin{aligned} g(x_0) &= x_1 \\ g(x_1) &= x_2 \\ g(x_2) &= x_3 \\ \ldots g(x_n) &= x_{n+1} \end{aligned} \qquad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

Iteración de punto fijo

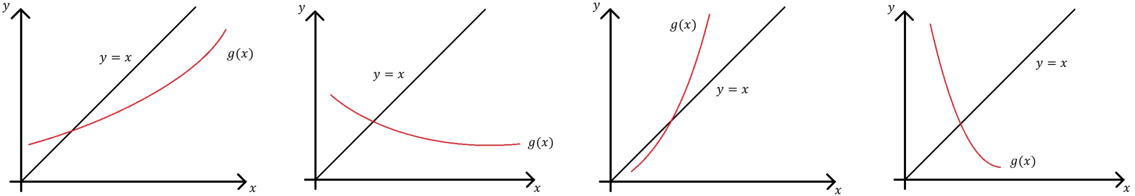
1. Tomar un valor inicial $x_0 \in [a, b]$, cercano a la raíz.
2. Se calcula el valor siguiente de la sucesión mediante $x_{n+1} = g(x_n)$
3. Se repite el proceso hasta que el criterio de convergencia sea alcanzado.
4. El valor de x_n para el cual se alcanzo el criterio de convergencia se le considera como la raíz α de la función $f(x)$.

Iteración de punto fijo

Encontrar la raíz de las siguiente ecuación aplicando el método de punto fijo en el intervalo $[1, 2]$:

1. $f(x) = e^x - 4 + x$
   1.1 $x = 4 - e^x$
   1.2 $x = e^x - 4 + 2x$
   1.3 $x = ln(4 - x)$

Utilice como criterio de convergencia $E_r \leq 2\%$



Universidad del Rosario

Iteración de punto fijo

1. $g(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$.
2. Solo se obtiene convergencia si $|g'(x)| < 1$. Lo que en términos numéricos significa que $|g'(x)| \leq K$ siendo $K < 1$ para todo $x \in [a, b]$.

Para el caso de aplicar la iteración simple de punto fijo con el propósito de encontrar una raíz, se debe cumplir que los valores a y b que establecen el intervalo $[a, b]$ sean tales que $f(a)$ y $f(b)$ tengan signos opuestos, garantizando que el punto fijo estará ubicado en la raíz de la función.

Iteración de punto fijo

Convergencia:

$$|x_n - \alpha| = |g(x_{n-1}) - g(\alpha)| \quad = |g'(C_n)| \cdot |X_{n-1} - \alpha| \\ \leq K \cdot |X_{n-1} - \alpha|$$

$$|x_{n-1} - \alpha| = |g(x_{n-2}) - g(\alpha)| \quad = |g'(C_{n-1})| \cdot |X_{n-2} - \alpha| \\ \leq K \cdot |X_{n-2} - \alpha|$$

Sucesivamente se tendrá:

$$|x_n - \alpha| \leq K|x_{n-1} - \alpha| \leq K^2|x_{n-1} - \alpha| \leq \cdots \leq K^n|x_0 - \alpha|$$

$$\lim_{n\to\infty} (|x_n - \alpha|) = \lim_{n\to\infty} (K^n|x_n - \alpha|) = 0$$

Contenido

Método de Newton - Raphson

Supongamos que la aproximación inicial p_0 está cerca de la raíz p. Definimos p_1 como el punto de intersección del eje de abscisas (x) con la recta tangente a la curva en el punto $(p_0, f(p_0))$. p_1 estará más cerca de p que de p_0.

Se puede encontrar p_1 en función de p_0 igualando ecuaciones de pendientes:

$$m = \frac{0 - f(p_0)}{p_1 - p_0} \qquad m = f'(p_0) \qquad \Rightarrow p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$$

Este proceso se puede repetir hasta que p_i converge a p:

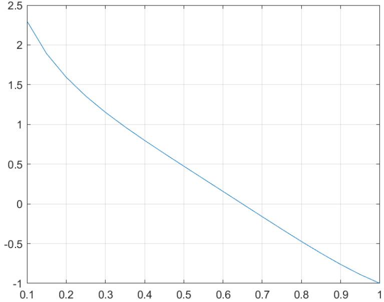
$$p_{k+1} = p_k - \frac{f(p_k)}{f'(p_k)}$$

Universidad del Rosario

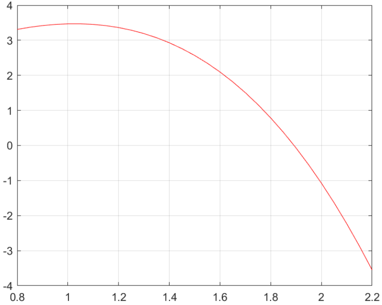
Método de Newton - Raphson

Encontrar la raíz de las siguientes ecuaciones aplicando el método de Newton - Raphson (Utilice como criterio de convergencia $E_r \leq 10^{-5}$):

1. $f(x) = x^5 - 2x^3 - ln(x)$
   1.1 $x_0 = 1$
   1.2 $x_0 = 1.15$



2. $e^x cos(x) - x^2 + 3x$
   2.1 $x_0 = 1.1$
   2.2 $x_0 = 2$
   2.3 $x_0 = 1$



Universidad del Rosario

Método de Newton - Raphson

- Condiciones necesarias:
    1. Los signos de $f(a)$ y $f(b)$ deben ser opuestos $(f(a)f(b) < 0)$.
    2. la función y su derivada deben ser continuas en el intervalo (a, b).
- Condiciones suficientes de Fourier:
    1. x_0 debe ser cercana a la raíz.
    2. $f'(0) \neq 0$ y $f''(0) \neq 0$ en el intervalo (a, b).
    3. $f''(0)$ no ser muy grande en (a, b).
    4. El signo de $f(x_0)$ debe ser igual al signo de $f''(x_0)$.
- Evitar valores iniciales cercanos a los extremos (mínimos o máximos).

Variante von Mises: a diferencia del método de Newton - Raphson tradicional, la variante von Mises mantiene constante el valor de la derivada que esta en el numerador de la fracción; haciendo que el método sea más lento pero da alternativas para funciones cuya derivada es compleja o engorrosa de calcular.

$$p_{k+1} = p_k - \frac{f(p_k)}{f'(p_0)}$$

Encontrar la raíz de las siguientes ecuaciones aplicando el método de bisección en el intervalo $[1, 2]$:

$$f(x) = e^x - 4 + x$$

Contenido

Universidad del Rosario

En el método de Newton - Raphson hay que evaluar 2 funciones en cada iteración, $f(p_{k-1})$ y $f'(p_{k-1})$. Hay muchas funciones dadas en forma no elemental (como integrales o sumas de series) para las que sería deseable disponer de un método que necesite evaluaciones únicamente de $f(x)$ y no de $f'(x)$.

Método de la secante: Se parte de 2 puntos iniciales $(p_0, f(p_0))$ y $(p_1, f(p_1))$ cercanos al punto $(p, 0)$, y se define p_2 como la abscisa del punto de intersección de la recta que pasa por estos dos puntos con el eje de las abscisas. p_2 estará más cerca de p que p_0 y que p_1.

Método de la secante

- Pendiente de la recta que pasa por los dos puntos iniciales:

$$m = \frac{f(p_1) - f(p_0)}{p_1 - p_0}$$

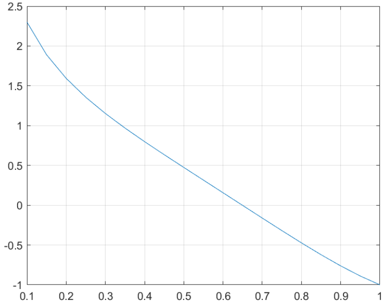
- Pendiente de la recta que pasa por p_1 y la intersección con el eje:

$$m = \frac{0 - f(p_1)}{p_2 - p_1}$$

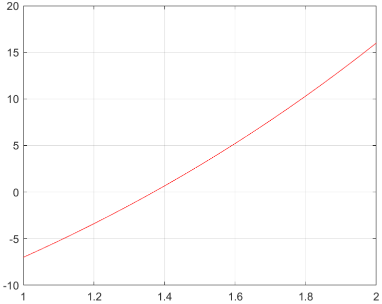
$$\Rightarrow p_{k+1} = p_k - \frac{f(p_k)(p_k - p_{k-1})}{f(p_k) - f(p_{k-1})}$$

Encontrar la raíz de las siguientes ecuaciones aplicando el método de la secante (Utilice como criterio de convergencia $E_r \leq 10^{-5}$):

1. $f(x) = x^5 - 2x^3 - ln(x)$
   1.1 $x_0 = 0$
   1.2 $x_1 = 1$



2. $x^3 + 2x^2 + 10x - 20$
   2.1 $x_0 = 1$
   2.2 $x_1 = 2$



Contenido

Universidad del Rosario

Criterio de paro

Dada una ecuación $f(x) = 0$, existe una sucesión de números tal que:

$$\{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$$

Converge a la raíz de la función α. Para saber en qué momento detener el proceso iterativo se puede recurrir a dos opciones:

- $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$.
- $|f(x_n)| < \varepsilon$

La segunda opción solo es posible cuando el valor absoluto de la derivada de la función sea mayor a uno para garantizar que la pendiente no genere un falso criterio de parada.

Orden y radio de convergencia

Suponga que $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión que converge a p, con $p_n \neq p$ para todas la n. Si existen constantes positivas λ y α con:

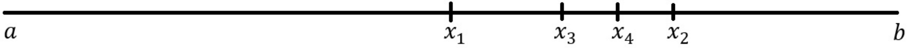
$$\lim_{n \to \infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^{\alpha}} = \lambda$$

Entonces $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge a p de orden α con constante de error asintótica (radio) λ.

- α es lo que permite que el límite sea finito.
- $0 < \lambda < 1$
- $\alpha = 1$ y $\alpha = 2$ significan convergencia lineal y cuadrática, respectivamente.

Orden y radio de convergencia

Para el caso de bisección el orden de convergencia es de 1 y se puede demostrar que el radio de convergencia es 0.5.



$$|x_1 - p| \leq \frac{1}{2}(b-a)$$

$$|x_2 - p| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{2}(b-a)$$

$$|x_3 - p| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}(b-a)$$

$$|x_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

Si por simplicidad se tiene que para cada n:

$$\frac{|p_{n+1}|}{|p_n|} \approx 0.5 \qquad \frac{|\tilde{p}_{n+1}|}{|\tilde{p}_n|^2} \approx 0.5$$

Por lo que para la convergencias lineal se tendrá:

$$|p_n - 0| = |p_n| \approx 0.5|p_{n-1}| \approx (0.5)^2|p_{n-2}| \approx \cdots \approx (0.5)^n|p_0|$$

Y para la convergencia cuadrática se tendrá:

$$|\tilde{p}_n - 0| = |\tilde{p}_n| \approx 0.5|\tilde{p}_{n-1}|^2 \approx (0.5)[0.5|\tilde{p}_{n-2}|^2]^2 = (0.5)^3|\tilde{p}_{n-2}|^4$$

$$\approx (0.5)^3[0.5|\tilde{p}_{n-3}|^2]^4 = (0.5)^7|\tilde{p}_{n-3}|^8 \approx \cdots \approx (0.5)^{2^n-1}|\tilde{p}_0|^{2^n}$$

Orden y radio de convergencia

Si $|p_0| = |\tilde{p}_0| = 1$ la velocidad relativa de las sucesiones en 0 serían:

	Convergencia lineal $(0.5)^n$	Convergencia cuadrática $(0.5)^{2^n-1}$
1	5.0000×10^{-1}	5.0000×10^{-1}
2	2.5000×10^{-1}	1.2500×10^{-1}
3	1.2500×10^{-1}	7.8125×10^{-3}
4	6.2500×10^{-2}	3.0518×10^{-5}
5	3.1250×10^{-2}	4.6566×10^{-10}
6	1.5625×10^{-2}	1.0842×10^{-19}
7	7.8125×10^{-3}	5.8775×10^{-39}

- Para un método de punto fijo que converge cuadráticamente, es necesario que $g(p) = p$ y que $g'(p) = 0$.
- Si $f(p) = 0$ y $f'(p) \neq 0$, entonces para los valores suficientemente cercanos a p, el método de Newton-Raphson convergerá por lo menos cuadráticamente.

¡Gracias!

joseal.guerrero@urosario.edu.co