Problema 1

A es una matriz de orden $m \times n$ donde m representa el numero de filas y n el numero de columnas

$$A = [a_{ij}] \qquad A^T = [a_{ji}]$$

donde $i = 1, 2, \ldots, n$ y $j = 1, 2, \ldots, n$

Simetria

$$B = A^T . A$$

$$B^T = (A^T . A)^T$$

$$B^T = A^T (A^T)^T$$

$$B^T = A^T . A$$

$$B^T = B$$

Por lo tanto se concluye que B es simetrica

Invertible

Supongamos por contradiccion que $A^T . A$ no es invertible. Esto significa que existe un vector no nulo x tal que $A^T . A \cdot x = \theta$ (el vector no nulo) Entonces, multiplicamos ambos lados por x^T

$$x^T \cdot (A^T . A) \cdot x = x^T . \theta = \theta$$

Ahora, usando la propiedad asociativa de la multiplicacion de matrices, obtenemos:

$$(A \cdot x)^T \cdot (A \cdot x) = \emptyset$$

Pero $A \cdot X$ es un vector no nulo porque A

DD / MM / AA

es de rango completo. Por lo tanto,

$(A\cdot X)^T\cdot(A\cdot X)$ es un producto no nulo, lo cual es una contradicción.

Concluimos que $A^T\cdot A$ es invertible.