

# Construcción de las ecuaciones de Movimiento para un vaso que desliza espontaneamente sobre una mesa.

**Camilo Serrano\*, David Ortiz,\*\***  
*Universidad Industrial de Santander*  
*Calle 9 # 27*

10/03/2025

## Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. ¿Qué se hizo?</b>	<b>2</b>
<b>3. Resultados</b>	<b>3</b>
3.1. Velocidad del vaso de plástico. . . . .	3
3.2. Velocidad de los vasos de cartón . . . . .	4
3.3. Influencia del lubricante . . . . .	6
3.4. Comparación y efectos de temperatura . . . . .	6
<b>4. Construcción de las ecuaciones de movimiento</b>	<b>7</b>
4.1. Solucion para vasos de cartón. . . . .	7
4.1.1. Fuerzas involucradas . . . . .	7
4.1.2. Significado de las variables y constantes . . . . .	8
4.1.3. Comportamiento de la solución . . . . .	8
4.2. Solucion para para vaso de plastico. . . . .	9
4.2.1. Segunda Ley de Newton . . . . .	9
4.2.2. Ecuación de movimiento . . . . .	10
4.2.3. Solución de la ecuación diferencial . . . . .	10
4.2.4. Solución completa ajustada . . . . .	11
4.2.5. Interpretación de los términos . . . . .	11
<b>5. Analisis y Discusión de resultados.</b>	<b>12</b>

---

\* e-mail: camiloserrano545@gmail.com

\*\* e-mail: dortizsanguino@gmail.com

## 6. Conclusiones.

13

### Resumen

Se ha observado que un vaso colocado boca abajo sobre una superficie mojada, ya sea plana o inclinada, puede desplazarse de manera espontánea. Este estudio tiene como objetivo analizar la velocidad de desplazamiento del vaso en función de diversos parámetros físicos, tales como el material del vaso, la tensión superficial del líquido, las propiedades de los materiales en contacto, la temperatura tanto del vaso como de la superficie, y el tipo de lubricante presente entre ambas.

Para ello, se desarrolló un modelo teórico complementado con una serie de experimentos sistemáticos, que permitieron identificar los parámetros que garantizan el inicio del movimiento. Asimismo, se halló una ecuación teórica que permite aproximar con buena precisión el comportamiento dinámico observado experimentalmente.

Los resultados obtenidos buscan contribuir a una mejor comprensión de la dinámica de cuerpos rígidos en presencia de fluidos con propiedades lubricantes.

## 1. Introducción

En diversas ocasiones, al colocar un vaso boca abajo sobre una superficie mojada[Bhushan, 2013], se observa que este se mueve sin intervención externa aparente. Este fenómeno, aunque cotidiano, tiene implicaciones en la comprensión de la dinámica de fluidos, la mecánica de contacto y los efectos de la presión y la tensión superficial. Entender este comportamiento no solo tiene interés académico, sino que también puede aportar conocimientos útiles para áreas como los microfluidos, la ingeniería de superficies y la optimización de sistemas basados en presión diferencial.

Este estudio pretende analizar cuantitativamente este fenómeno, identificando los parámetros que influyen en la velocidad del vaso y proponiendo un modelo físico que permita predecir su comportamiento.

## 2. ¿Qué se hizo?

El presente estudio se llevó a cabo mediante una serie de experimentos diseñados para analizar el movimiento de vasos colocados boca abajo sobre una superficie inclinada y mojada, con el fin de identificar los factores físicos que influyen en su desplazamiento. La superficie experimental consistió en una mesa inclinada, cuyo ángulo se ajustó en diferentes valores (incluyendo 5 grados como valor base) para evaluar el efecto de la pendiente en la dinámica del movimiento.

Se emplearon vasos de distintos materiales y masas, incluyendo un vaso de plástico de 73 gramos y vasos de papel de 3 y 7 gramos. En cada caso, los vasos fueron probados bajo dos condiciones térmicas: a temperatura ambiente y tras ser calentados previamente a diferentes temperaturas. Para

cada configuración experimental (tipo de vaso, masa y temperatura), se grabaron al menos 10 videos, los cuales fueron posteriormente analizados.

El análisis de movimiento se realizó utilizando el software Tracker, mediante el cual se extrajeron gráficas de posición y velocidad en función del tiempo, permitiendo una caracterización precisa del desplazamiento en cada situación.

Además de variar la inclinación, se exploró el efecto del tipo de lubricante presente en la superficie de contacto. Se llevaron a cabo pruebas utilizando distintos líquidos: agua, jabón líquido, jabón en polvo y aceite, con el objetivo de comparar sus efectos sobre la facilidad de deslizamiento.

Por otra parte, en el caso específico de los vasos de papel, se realizaron ensayos adicionales para determinar la masa límite a partir de la cual estos dejaban de moverse, tanto a temperatura ambiente como al ser calentados. Para ello, se fue añadiendo masa de forma progresiva sobre cada vaso hasta que se observó la interrupción total del desplazamiento, registrando dicho umbral para cada condición.

Finalmente, se desarrolló un modelo teórico para describir el comportamiento del sistema. A partir de este modelo, se obtuvo una ecuación de movimiento para cada tipo de vaso y cada condición térmica, con el objetivo de aproximar el movimiento real observado experimentalmente y comparar los resultados teóricos con los datos obtenidos mediante análisis en Tracker.

### 3. Resultados

Los experimentos realizados permitieron observar de manera clara cómo distintos factores físicos influyen en la dinámica del deslizamiento de los vasos colocados boca abajo sobre superficies lubricadas. A continuación, se presentan los resultados organizados por tipo de vaso, condición térmica y tipo de lubricante.

#### 3.1. Velocidad del vaso de plástico.

En la Figura 1 se muestran las curvas de velocidad correspondientes a cinco repeticiones experimentales realizadas con el vaso de plástico bajo condiciones que permitieron su desplazamiento. Se observa que, en general, el vaso alcanza velocidades máximas cercanas a  $0,35m/s$  en los primeros 1,5 segundos, seguido de una disminución progresiva o fluctuaciones más irregulares.

Este tipo de vaso no mostró movimiento alguno cuando se encontraba a temperatura ambiente. Solo al calentarlo entre  $55C$  y  $60C$  se logró observar su desplazamiento, lo que sugiere una fuerte dependencia con la temperatura del material. Un fenómeno notable observado en estos ensayos fue la formación de numerosas burbujas en la base del vaso, visibles al momento de colocarlo sobre la

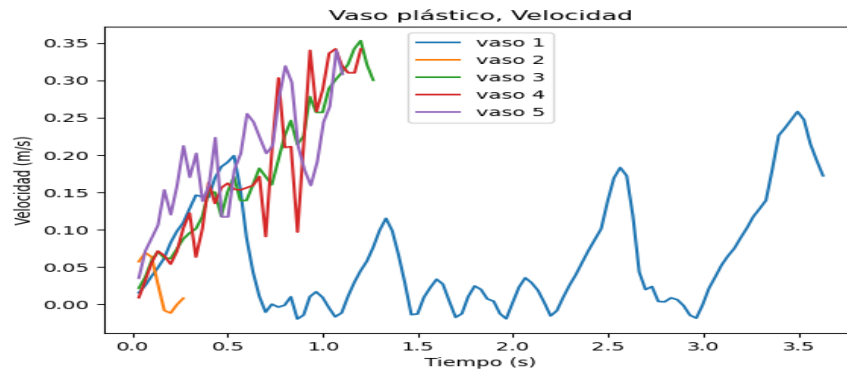


Figura 1: Gráfica velocidades obtenidas usando el software de tracker para el vaso de plástico a  $55.8^{\circ}\text{C}$ . Aquí un video de una de las gráficas: <https://www.youtube.com/shorts/r9zH7rd5L3o>

superficie mojada. Esta formación de burbujas parece estar asociada al calor transferido al agua atrapada bajo el vaso, posiblemente generando gradientes de presión que contribuyen al inicio del movimiento [López, 2025]. El calentamiento parece modificar la interacción entre el vaso, el agua y la superficie, posiblemente al suavizar ligeramente el material o que las burbujas esten levantando levemente el vaso disminuyendo su area de contacto y con ello su coeficiente de rozamiento, generando esto movimiento.

### 3.2. Velocidad de los vasos de cartón

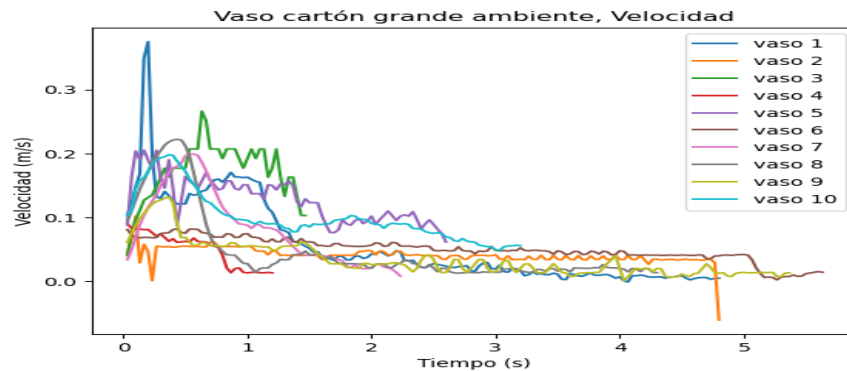


Figura 2: Gráfica velocidades obtenidas usando el software de tracker para el vaso de cartón grande a temperatura ambiente ( $24.3^{\circ}\text{C}$ ).

En la Figura 2 se presentan los resultados para diez repeticiones del experimento usando un vaso de cartón grande (de aproximadamente 7 gramos). A diferencia del vaso de plástico, este tipo de vaso sí se desplazaba a temperatura ambiente, aunque con un comportamiento más irregular. Las curvas de velocidad presentan una fase de aceleración inicial, seguida por una desaceleración más

rápida en comparación con los ensayos realizados con el vaso caliente.

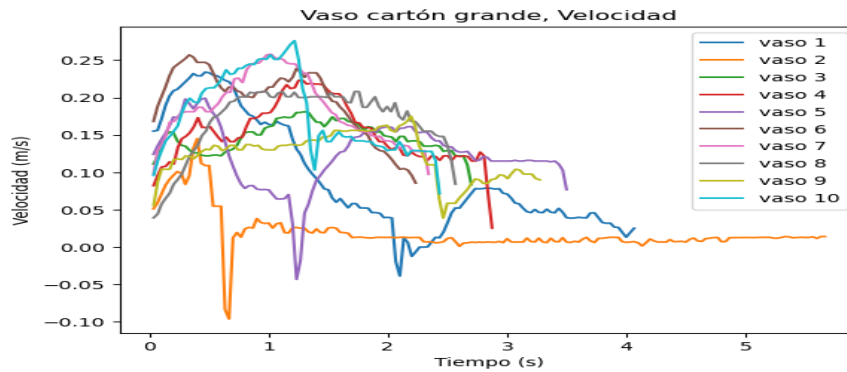


Figura 3: Gráfica velocidades obtenidas usando el software de tracker para el vaso de cartón grande a 54.7°C.

Cuando se calentó el vaso de cartón antes del experimento, se puede observar en la figura 3 que, en general, alcanzaba velocidades más altas y su decaimiento era más suave y sostenido, lo que sugiere que la temperatura favorece la estabilidad del movimiento. Este comportamiento podría estar relacionado con la menor rigidez del cartón caliente, que facilita la generación de una capa de fluido más estable entre el vaso y la superficie.

De forma similar que para el vaso grande se puede ver en las figuras 4 y 5 que a temperatura ambiente la velocidad decae más rápido. Además, se puede notar que el vaso pequeño tiene picos de velocidad menores que los del vaso grande, esto puede estar relacionado con la masa del vaso, afectando los picos de velocidad que alcanzan los vasos.

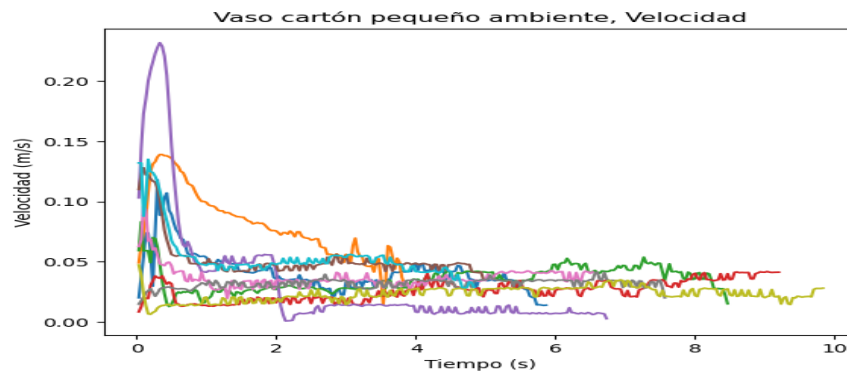


Figura 4: Gráfica velocidades obtenidas usando el software de tracker para el vaso de cartón pequeño a temperatura ambiente (24.3°C).

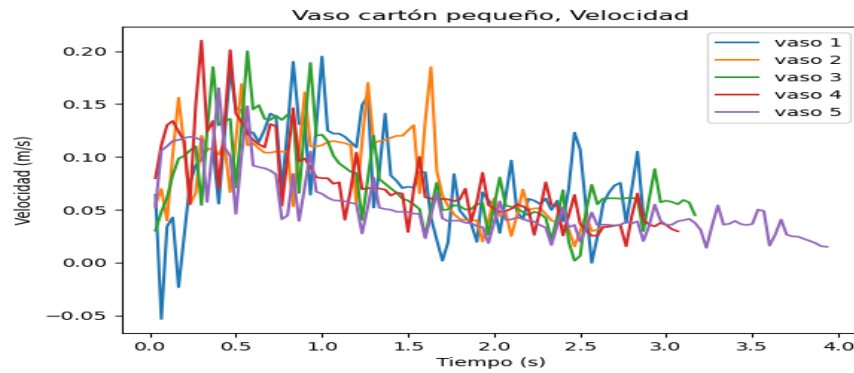


Figura 5: Gráfica velocidades obtenidas usando el software de tracker para el vaso de cartón pequeño a 54.92°C.

### 3.3. Influencia del lubricante

Un aspecto clave observado en el estudio fue la influencia crítica del tipo de lubricante presente en la superficie. Si bien con agua se logró movimiento en todos los casos (bajo condiciones adecuadas de masa y temperatura), con jabón líquido, jabón en polvo y aceite, los vasos no se desplazaban de forma espontánea en ningún intento, incluso al aplicar calor o variar el ángulo de inclinación.

Esto podría explicarse por las diferencias en tensión superficial y viscosidad. Mientras que el agua tiene una alta tensión superficial y baja viscosidad, lo que favorece la formación de una delgada película que actúa como lubricante dinámico, los otros fluidos tienden a formar películas más gruesas y pegajosas, que posiblemente aumentan la fricción y dificultan la rotura de simetría necesaria para iniciar el movimiento [MISUMI, 2025].

### 3.4. Comparación y efectos de temperatura

Los resultados muestran que la temperatura del vaso es un parámetro fundamental para inducir el movimiento. En el caso del vaso de plástico, el desplazamiento únicamente ocurrió tras el calentamiento. Para los vasos de papel, el calentamiento también mejoró notablemente la duración y estabilidad del movimiento, como se refleja en las gráficas de velocidad.

Adicionalmente, al comparar las velocidades de los vasos de cartón en ambas condiciones térmicas, se observó que a temperatura ambiente la velocidad decae más rápidamente, mientras que al calentarlos, el vaso mantiene una velocidad más alta durante mayor tiempo, lo cual se asocia a una reducción de resistencia al avance.

## 4. Construcción de las ecuaciones de movimiento

### 4.1. Solucion para vasos de cartón.

Este movimiento inicia con una aceleración rápida, alcanza una velocidad máxima y luego se desacelera progresivamente hasta detenerse. El objetivo de este modelo es describir teóricamente esta dinámica usando principios de la mecánica clásica.

#### 4.1.1. Fuerzas involucradas

Aplicamos la segunda ley de Newton al vaso en movimiento:

$$\sum F = m \frac{dv}{dt}$$

Las fuerzas relevantes en el sistema son:

- **Fuerza impulsora por presión:** Cuando el vaso está caliente y se coloca sobre una superficie mojada, y se genera una presión interna (por vaporización o expansión del aire atrapado). Esta presión produce una fuerza hacia un lado que pone el vaso en movimiento.

Llamamos a esta fuerza:

$$F_{\text{impulso}}(t)$$

Y asumimos que disminuye con el tiempo, porque:

- El aire/burbujas se escapan,
- La presión se equilibra,
- El sistema disipa energía.

La disipación de energía para los vasos de carton es muy notoria, puesto que este material pierde temperatura muy rapidamente. Una forma común de modelar esa disminución es con una exponencial decreciente:

$F_{\text{impulso}}(t) = F_0 e^{-\lambda t}$  causada por la expansión del aire debido al calor del vaso. Esta fuerza disminuye exponencialmente con el tiempo:  $F_{\text{impulso}}(t) = F_0 e^{-\lambda t}$

- **Fuerza de resistencia viscosa:** debida al contacto con la película de agua entre el vaso y la superficie, proporcional a la velocidad [López, 2025]:  $F_{\text{resistencia}} = -kv$

Sustituyendo ambas en la ecuación de Newton:

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \theta + F_0 e^{-\lambda t} - kv$$

**Resolución de la ecuación diferencial**

Reorganizamos:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g \sin \theta + \frac{F_0}{m}e^{-\lambda t}$$

Esta es una ecuación diferencial lineal de primer orden. Usamos el método del factor integrante:

$$\begin{aligned} \text{Sea } \mu(t) &= e^{\int \frac{k}{m} dt} = e^{\frac{k}{m}t} \\ e^{\frac{k}{m}t} \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} e^{\frac{k}{m}t} v &= g \sin \theta e^{\frac{k}{m}t} + \frac{F_0}{m} e^{(\frac{k}{m}-\lambda)t} \\ \frac{d}{dt} \left( v e^{\frac{k}{m}t} \right) &= g \sin \theta e^{\frac{k}{m}t} + \frac{F_0}{m} e^{(\frac{k}{m}-\lambda)t} \end{aligned}$$

Integramos ambos lados:

$$v(t) e^{\frac{k}{m}t} = \int g \sin \theta e^{\frac{k}{m}t} dt + \int \frac{F_0}{m} e^{(\frac{k}{m}-\lambda)t} dt + C$$

Resolviendo la integral y despejando  $v(t)$ , se obtiene la solución general:

$$v(t) = \frac{m}{k} g \sin \theta + \frac{F_0}{k - m\lambda} \left( e^{-\lambda t} - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$$

**4.1.2. Significado de las variables y constantes**

- $v(t)$ : Velocidad del vaso en función del tiempo [m/s]
- $t$ : Tiempo transcurrido [s]  $\Rightarrow 3,5$
- $m$ : Masa del vaso [kg]  $\Rightarrow 0,007$
- $F_0$ : Valor inicial de la fuerza impulsora debida a presión [N]  $\Rightarrow 0,12$
- $k$ : Coeficiente de resistencia viscosa [kg/s]  $\Rightarrow 0,3$
- $\lambda$ : Tasa de disipación de la presión (o burbujeo) [1/s]  $\Rightarrow 1$

**4.1.3. Comportamiento de la solución**

La función  $v(t)$  modela correctamente el comportamiento observado en los experimentos:

- Una fase inicial de aceleración debido a la presión creciente.
- Un punto de velocidad máxima.
- Una desaceleración progresiva a medida que la fuerza impulsora disminuye y domina la resistencia.



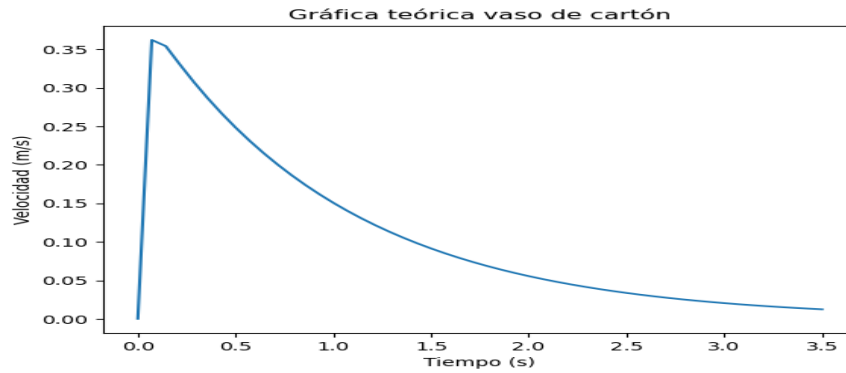


Figura 6: Gráfica de la velocidad usando la ecuación de la velocidad hallada.

## 4.2. Solucion para para vaso de plastico.

Se observa que un vaso de plástico ubicado boca abajo sobre una superficie de vidrio inclinada comienza a deslizarse solo si se encuentra a temperaturas elevadas (aproximadamente entre 50 °C y 60 °C). A temperaturas menores, el vaso permanece en reposo. Durante el experimento, se evidencia la formación de burbujas en la base del vaso cuando se calienta, lo cual parece estar vinculado con el inicio y la aceleración del movimiento. Este modelo teórico busca describir el movimiento del vaso considerando fuerzas constantes y pulsantes asociadas a este fenómeno.

### 4.2.1. Segunda Ley de Newton

Partimos de la segunda ley de Newton aplicada al vaso de plástico sobre una superficie inclinada:

$$\sum F = m \frac{dv}{dt}$$

Las fuerzas que actúan sobre el vaso son:

- **Componente del peso sobre el plano inclinado:** [OpenStax, 2020]

$$F_{\text{peso}} = mg \sin(\theta)$$

- **Fricción viscosa:** causada por la interacción con vapor o película delgada de agua entre el vaso y la superficie [Zapata, 2020]:

$$F_{\text{fricción}} = -\gamma v$$

- **Fuerza inducida por pulsos térmicos (burbujeo):**

$$F_{\text{burbuja}}(t) = F_0 \sin(\omega t) e^{-\alpha t}$$

Donde  $\omega$  Es la frecuencia angular de las oscilaciones generadas por los pulsos térmicos (por ejemplo, burbujas de vapor). Se mide en radianes por segundo y determina cuán rápido ocurren estas oscilaciones en el tiempo y  $\alpha$  es el coeficiente de decaimiento exponencial. Controla cuán rápido se amortiguan (desaparecen) los efectos de los pulsos térmicos.

Estos datos se han tomado como valores fijos donde  $\omega = 0,8$  radianes por segundo y  $\alpha = 0,8 \text{ s}^{-1}$

Los valores numéricos adoptados para el modelo ajustado tienen sentido físico y experimental. En particular, se eligió  $\omega = 8 \text{ rad/s}$  para representar una frecuencia angular moderadamente alta, compatible con la observación de oscilaciones rápidas pero no caóticas en la velocidad del vaso, posiblemente inducidas por la generación intermitente de burbujas de vapor bajo su base. Este valor permite reproducir varias oscilaciones dentro de los primeros segundos del movimiento, como se ve en los datos experimentales. Por otro lado, se tomó  $\alpha = 0,5 \text{ s}^{-1}$  como coeficiente de amortiguamiento, lo que significa que la contribución de los pulsos térmicos disminuye notablemente en los primeros 4 a 6 segundos, consistente con la disipación progresiva del calor en el sistema. Estos parámetros permiten modelar con realismo tanto la aparición inicial de impulsos térmicos como su atenuación en el tiempo, sin que dominen el comportamiento general del movimiento.

Entonces la ecuación de movimiento es:

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin(\theta) - \gamma v + F_0 \sin(\omega t) e^{-\alpha t}$$

#### 4.2.2. Ecuación de movimiento

Dividimos entre  $m$ :

$$\frac{dv}{dt} = g \sin(\theta) - \frac{\gamma}{m} v + \frac{F_0}{m} \sin(\omega t) e^{-\alpha t}$$

Definimos:

$$\begin{aligned} a &= g \sin(\theta) \quad (\text{aceleración por la pendiente}) \\ b &= \frac{\gamma}{m} \quad (\text{coeficiente de fricción viscosa}) \\ f(t) &= \frac{F_0}{m} \sin(\omega t) e^{-\alpha t} \quad (\text{fuerza oscilante por burbujas}) \end{aligned}$$

La ecuación se reescribe:

$$\frac{dv}{dt} = a - bv + f(t)$$

#### 4.2.3. Solución de la ecuación diferencial

La ecuación diferencial es lineal de primer orden no homogénea. Su solución general es la suma de:

- Solución homogénea:

$$v_h(t) = Ce^{-bt}$$

- Solución particular constante (por la fuerza constante  $a$ ):

$$v_p(t) = \frac{a}{b}$$

- Solución debida al término oscilante (forma asumida por ajuste):

$$v_{\text{oscilante}}(t) = A \sin(\omega t) e^{-\alpha t}$$

#### 4.2.4. Solución completa ajustada

La combinación de todos los términos da como resultado la ecuación ajustada:

$$v(t) = \left(\frac{a}{b}\right) (1 - e^{-bt}) + A \sin(\omega t) e^{-\alpha t}$$

#### 4.2.5. Interpretación de los términos

- El primer término representa el crecimiento de velocidad debido a la inclinación y la fricción.
- El segundo término representa los impulsos térmicos (burbujeo) que provocan pequeñas oscilaciones amortiguadas en la velocidad.

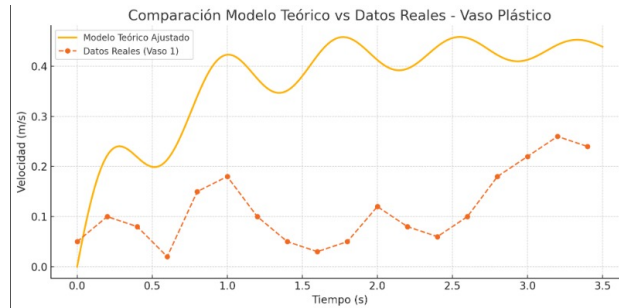


Figura 7: Comparación modelo teórico con el caso experimental.

Esta ecuación logra describir el comportamiento observado en el experimento: un aumento general de la velocidad con perturbaciones oscilantes, replicando los efectos térmicos observados en los datos del vaso de plástico.

## 5. Analisis y Discusión de resultados.

Los resultados experimentales muestran una clara dependencia del movimiento espontáneo del vaso respecto a la temperatura, la masa, el tipo de material y el lubricante utilizado. En particular, el vaso de plástico, siendo el de mayor masa (73 g), presentó los picos de velocidad más altos, pero solo cuando fue previamente calentado a temperaturas superiores a 55°C. Esta sensibilidad térmica está relacionada con la capacidad del plástico de retener calor y con su menor conductividad térmica frente al cartón, permitiendo que se mantenga una diferencia de temperatura mayor entre el vaso y la película de agua en contacto, lo que favorece la generación de burbujas.

El calor específico del material es un factor crítico en esta dinámica. El plástico tiene un calor específico menor que el del cartón, lo que implica que alcanza temperaturas elevadas con menos energía térmica, facilitando la formación de gradientes térmicos que generan presión por vaporización o expansión del aire atrapado. Estas burbujas actúan como fuerzas impulsoras [López, 2025], representadas teóricamente mediante términos exponenciales o sinusoidales amortiguados

(e.g.,  $F_0 e^{-\lambda t}$  o  $F_0 \sin(\omega t) e^{-\alpha t}$ ), ajustados según el comportamiento observado en las gráficas experimentales.

En contraste, los vasos de cartón, con menor masa (3g y 7g), también mostraron movimiento a temperatura ambiente, aunque menos sostenido. Al aplicarles calor, su comportamiento mejoró significativamente: alcanzaron mayores velocidades y mantuvieron el movimiento por más tiempo. Esto puede explicarse por una reducción en la rigidez estructural del cartón al calentarse, lo cual permite una mayor adaptación al perfil de la superficie, reduciendo la fricción efectiva e incrementando la estabilidad de la película lubricante de agua.

Una coincidencia relevante entre el modelo teórico y los resultados experimentales es la forma funcional de las curvas de velocidad: ambas presentan una fase de aceleración inicial seguida de una desaceleración progresiva. Sin embargo, en los experimentos se observan fluctuaciones no modeladas directamente, que podrían corresponder a efectos como inestabilidades locales en la capa de agua, imperfecciones en la superficie, o incluso variaciones en la cantidad de burbujas generadas.

El modelo para el vaso de cartón, basado en una fuerza de impulso decreciente  $F_0 e^{-\lambda t}$ , predice adecuadamente el perfil de velocidad observado, mientras que el modelo del vaso de plástico incorpora una componente oscilatoria que refleja el efecto de las burbujas intermitentes inducidas por el calor, lo cual se alinea bien con las perturbaciones empíricas observadas.

Finalmente, al comparar entre materiales, el cartón caliente mostró una curva de velocidad más continua y sostenida en el tiempo respecto al mismo vaso en frío, lo que refuerza la hipótesis de que la temperatura no solo actúa como un generador de presión sino también como un modificador de la interacción mecánica entre vaso y superficie. Estas observaciones están en consonancia con los principios de dinámica de sistemas lubricados y de transferencia de calor en materiales de diferente capacidad térmica.

## 6. Conclusiones.

Los resultados obtenidos permiten concluir que el deslizamiento espontáneo de vasos boca abajo sobre superficies mojadas es un fenómeno fuertemente influenciado por la temperatura del vaso, el tipo de material y las propiedades del lubricante. El calentamiento del vaso, especialmente en materiales como el plástico con bajo calor específico, facilita la formación de burbujas por diferencias de presión, lo que induce el movimiento. Los modelos teóricos desarrollados, que incorporan fuerzas impulsoras decrecientes u oscilantes amortiguadas, lograron describir adecuadamente las curvas de velocidad observadas experimentalmente, validando la influencia de la masa, la rigidez del material y la resistencia viscosa en la dinámica del sistema. El cartón, aunque más ligero, mostró mejoras significativas al calentarse, evidenciando que no solo la masa sino también la capacidad térmica y la interacción mecánica influyen en el desplazamiento. El agua se confirmó como el único lubricante capaz de sostener el fenómeno, lo cual resalta la importancia de la tensión superficial y la viscosidad en la generación de movimiento espontáneo.

El tipo de movimiento observado (suave, sin sacudidas) es más consistente con una resistencia proporcional a la velocidad. Los modelos matemáticos resultantes describen mejor los datos experimentales y permiten introducir fácilmente las fuerzas impulsoras térmicas.

## Referencias

- [Bhushan, 2013] Bhushan, B. (2013). *Introduction to Tribology*. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 2 edition.
- [López, 2025] López, J. (2025). Cavitación: Cómo entender este fenómeno y sus efectos en bombas industriales.
- [MISUMI, 2025] MISUMI (2025). Determinación experimental de coeficientes de fricción y valores de fricción.
- [OpenStax, 2020] OpenStax (2020). 5.4 inclined planes.
- [Zapata, 2020] Zapata, F. (2020). Fricción viscosa (fuerza): coeficiente y ejemplos.