



EA RECHERCHE

13 janvier 2023

Thomas Oudard, Jesus Dibi, Atcho Nogbou
Encadré par M. Fontana Claudio



TABLE DES MATIÈRES

1	Introduction	2
2	Modélisation stochastique du spread	3
2.1	Résolution de l'EDS vérifiée par le spread : Méthode Euler	4
2.2	Résolution de l'EDS vérifiée par le spread : Méthode classique	5
2.3	Resolution numérique	5
3	Mise en place de la stratégie d'échange de 2 actifs	7
3.1	Première approche : Utilisation de barrières locales	7
3.1.1	Calcul du profit and loss	8
3.1.2	Distribution et analyse du PnL	9
3.1.3	Variante avec PnL positifs uniquement	10
3.2	Deuxième approche, utilisation de barrières d'équilibre	11
3.2.1	Calcul du profit and loss	13
3.2.2	Distribution du PnL	14
3.2.3	Analyse du PnL	15
3.3	Comparaison des deux approches	17
3.3.1	Conclusion Première approche	17
3.3.2	Conclusion deuxième approche	17
4	Modèle avec changement de régime	18
4.1	Modélisation du Spread	18
4.2	Mise en place de la stratégie dans ce modèle	20
4.2.1	Changement de régime multiple avec stratégie adaptée	20
4.2.2	Changement de régime unique avec changement des paramètres	21
4.2.3	Calcul du Pnl	23
4.2.4	Analyse du PnL	24
5	Application avec des données réelles	26
5.1	Methode de cointegration sur les actions pepsi et coca cola	26
5.2	Détermination des estimateurs de μ , σ et α	27

1

INTRODUCTION

La stratégie de négociation par les pairs, est une stratégie qui repose sur une forte corrélation historique positive entre deux actifs risqués. Le principe de la stratégie est la suivante :

- Rechercher deux actifs sur les différents marchés dont les corrélations historiques sont très proches de 1,
- Prendre des positions longues sur l'actif le moins valorisé et vendre à découvert le plus valorisé des deux actifs en fonction du positionnement de l'écart logarithmique du prix des deux actifs par rapport à sa moyenne d'équilibre.

Dans cet projet nous essayons d'étudier différentes stratégies de pairs trading à partir d'une modélisation du spread par un processus stochastique en se basant sur des observations du marché.

La première partie du projet a consisté à faire une modélisation stochastique de ce spread en supposant qu'il s'agit d'un processus qui revient à sa moyenne d'équilibre. ensuite vient la mise en œuvre de manière dynamique des dites stratégie sur une période donnée. Dans la suite de nos travaux, le modèle se complexifie en introduisant des changements de régime de marché via une chaîne de markov à deux états ce qui permettra de poser les bases d'une généralisation de la stratégie non pas à deux actifs mais à un panier d'actifs. Enfin, la stratégie pourra être implémenté au regard des données réelles, c'est à dire qu'on s'aide de certains modèles économétriques pour le choix d'une mesure du spread (méthodes de cointégration), puis on estime les parametres du modèle à partir des données historiques.

2

MODÉLISATION STOCHASTIQUE DU SPREAD

On modélise le spread par un processus d'Ornstein Uhlenbeck avec comme paramètres :

- La volatilité du spread σ
- La moyenne du spread à long terme μ
- la vitesse de convergence α vers la moyenne

La dynamique du spread s'écrit :

$$dS_t = \alpha(\mu - S_t)dt + \sigma dW_t \quad (E)$$

La raison du choix d'un tel modèle repose essentiellement sur la capacité du spread à revenir à sa moyenne de long terme avec un certain rythme, en raison de la forte corrélation qui existe entre l'évolution des prix des deux actifs soumis au pairs trading ; d'où l'expression du drift :

$$\alpha(\mu - S_t)dt.$$

la modélisation tient aussi compte de la nature des fluctuations aléatoires imprévisibles dues à l'évolution du marché par un terme de brownien couplé à une certaine volatilité dont l'expression est donnée par le terme de volatilité :

$$\sigma dW_t.$$

Le modèle du spread étant postulé, il importe de savoir s'il a tendance à refléter la réalité. L'inquiétude peut être justifiée par le fait qu'il existe toujours une question de choix des paramètres à intégrer dans un modèle. Pour des fins de pricing d'option par exemple comme dans le modèle de Black-Scholes, il se pose la question du choix de la "bonne" volatilité puisque la volatilité historique ne permet pas de retrouver les valeurs exactes des actifs dérivés. C'est pour cette raison que la dernière partie de ce rapport présente une méthodologie concernant l'estimation des paramètres du modèle.

Resultat d'existence et d'unicité :

Posons $b(t, X_t) = \alpha(\mu - X_t)$ et $\sigma(t, X_t) = \sigma$.

Nous vérifions la condition de Lipschitz qui nous permet ensuite d'établir le résultat d'existence et d'unicité d'une solution de l'équation différentielle stochastique.

Les fonctions $b(t, 0) = \alpha(\mu - X_0)$ et $\sigma(t, 0) = \sigma$ sont intégrables.

De plus on a :

$$\begin{aligned} &\text{pour } x, y \in \mathbb{R} \text{ et } t \in [0, T] \text{ pour } T > 0, \\ &|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| = \alpha\mu|x - y| + 0 \end{aligned}$$

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq \alpha \mu |x - y|$$

d'où la vérification de l'hypothèse de lipschitsiennité.

D'après le théorème 8.3 du poly, il existe une unique forte solution pour l'équation d'Orstein Ulhenbeck.

2.1 RÉOLUTION DE L'EDS VÉRIFIÉE PAR LE SPREAD : MÉTHODE EULER

Pour pouvoir implémenter facilement la stratégie de trading entre pairs, nous devons passer par une étape très importante qui est la résolution de l'EDS (E). Bien que les trajectoires du spread soient continues dans le temps, en pratique, le trading se fait en temps discret ; cette raison motive fortement cette première approche naturelle qui consiste à utiliser le schéma d'Euler en temps discret tout en étant rassuré que nous avons une convergence vers la solution explicite qui existe et est unique.

Pour ce faire, considérons une date d'expiration T à laquelle toutes les positions ouvertes seront fermées, indépendamment des pertes subies ; la stratégie est mise en œuvre entre le temps 0 et T : dans l'intervalle de temps $[0, T]$

On partitionne l'intervalle $[0, T]$ en n intervalles arbitrairement petit d'échéances intermédiaires :

$$(t_i^n)_{0 \leq i \leq n} \text{ avec } t_0^n = 0, \quad t_n^n = T \text{ et } t_i = i \frac{T}{n}.$$

On peut alors discrétiser l'EDS de la manière suivante :

$$S_{t_{i+1}}^n = S_{t_i}^n + \alpha(\mu - S_{t_i}^n)(t_{i+1}^n - t_i^n) + \sigma(W_{t_{i+1}}^n - W_{t_i}^n)$$

Resultat de convergence :

la convergence de la solution S_t^n vers l'unique solution de l'équation différentielle stochastique (E) repose essentiellement sur la définition de l'intégrale stochastique et la continuité du brownien. en effet d'un côté,

$$\sum_{t_i \leq t} \sigma(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

converge dans un ensemble bien convenable vers,

$$\int_0^t \sigma dW_s$$

De l'autre côté, en considérant la propriété de continuité du brownien qui induit l'uniforme continuité sur un compact en occurrence le segment $[0, T]$ et de plus, si on voit S_t comme une fonction de t et W_t ; notons $f(t, W_t)$ on peut alors reprendre l'approche de Riemann-Lebesgue pour le calcul de l'intégrale et conclure qu'on a bien une convergence de $S_{t_i \leq t}^n$ vers S_t quand n tend vers $+\infty$.

2.2 RÉOLUTION DE L'EDS VÉRIFIÉE PAR LE SPREAD : MÉTHODE CLASSIQUE

Nous présentons ici une autre approche de résolution qui consiste à appliquer la formule d'Itô à la fonction :

$$F(t, S_t) = \exp(\alpha t) S_t$$

afin d'obtenir une expression de S_t en fonction d'une intégrale stochastique qui peut être implémenter plus simplement.

La solution de l'EDS est donnée par l'expression :

$$S_t = S_0 e^{-\alpha t} + \mu(1 - e^{-\alpha t}) + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s$$

Démonstration. Cette équation différentielle stochastique se résout formellement en faisant le changement $Y_t = S_t e^{\alpha t}$.

Par la formule d'Itô, on a que : $dY_t = \alpha S_t e^{\alpha t} dt + e^{\alpha t} dS_t$

$$dY_t = e^{\alpha t} \alpha \mu + \sigma e^{\alpha t} dW_t$$

en intégrant de 0 à t , on a que :

$$S_t e^{\alpha t} = S_0 + \int_0^t e^{\alpha u} \alpha \mu du + \int_0^t \sigma e^{\alpha u} dW_u$$

On peut donc voir que :

$$S_t = S_0 e^{-\alpha t} + \mu(1 - e^{-\alpha t}) + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-u)} dW_u$$

□

2.3 RESOLUTION NUMÉRIQUE

On considère l'algorithme du Schéma d'Euler :

Algorithme Schéma d'Euler des temps discrets

Input : $S_0, \alpha, \mu, \sigma, n$: nombre de discretisation

Initialisation : création d'une liste : $S \leftarrow [S_0]$, puis on calcule le pas Δt

Itérer : Loop for ;

Calcul : $S_{t_{i+1}}^n \leftarrow S_{t_i}^n + \alpha(\mu - S_{t_i}^n)\Delta t + \sigma(W_{t_{i+1}}^n - W_{t_i}^n)$

Puis $S \leftarrow [S_{t_{i+1}}^n]$

Output : Un array numpy `np.array(S)`

Sur le résultat visualisé à travers la figure 1, on remarque au moins 5 retours à la moyenne du Spread ce qui peut être un indicateur d'une bonne mise en œuvre du schéma et une observation de la convergence déjà annoncée plus haut. Un autre point remarquable est l'observation qu'à l'échéance T , le spread peut ne pas revenir à sa moyenne d'équilibre (problème lié à la notion d'infini), il faut pouvoir en tenir compte au niveau de la mise en œuvre de la stratégie, afin de voir ensuite l'influence sur le PnL.

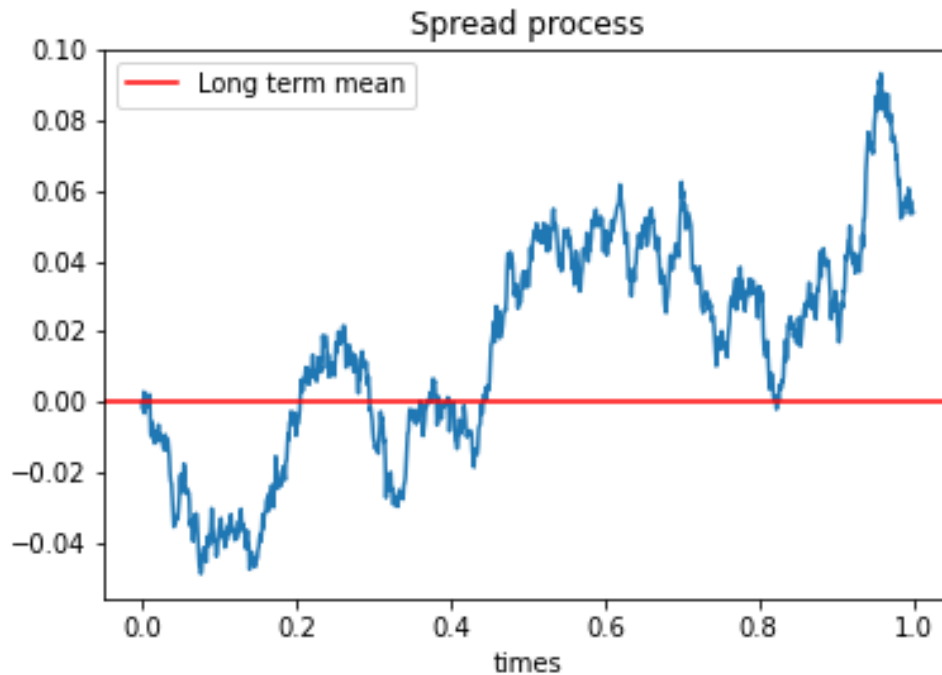


FIGURE 1 – Spread evolution with $\alpha = 0.1$, $\sigma = 0.1$ et $\mu = 0.0$

L'implémentation du spread peut aussi être faite en utilisant la formule donnée dans la solution classique. Il s'agit d'une implémentation de intégrale stochastique d'une fonction déterministe. La convergence du schéma d'Euler garantit qu'avec un très grand nombre d'itérations, l'erreur d'estimation est minimale, nous pouvons donc rester sur un schéma d'Euler classique.

3

MISE EN PLACE DE LA STRATÉGIE D'ÉCHANGE DE 2 ACTIFS

3.1 PREMIÈRE APPROCHE : UTILISATION DE BARRIÈRES LOCALES

Dans cette approche, on considère une stratégie faisant appel au calcul de grandeurs sur des "rolling windows", c'est-à-dire des fenêtres temporelles de longueur fixe se déplaçant au cours du temps au fil de l'évolution de la trajectoire.

On définit une fenêtre par le nombre de valeurs utilisées pour le calcul des données du signal. Classiquement, on définit un signal (d'achat ou de vente) comme étant le croisement entre la trajectoire de l'actif étudié (ici le spread entre X et Y) et les courbes de moyenne sur la fenêtre, à laquelle on ajoute ou on retranche un certain nombre entier d'écarts-types.

Par exemple, on peut décider que le spread est "localement trop haut" s'il dépasse sa moyenne locale + 2 écarts-types, et que le spread est "localement trop bas" s'il plonge sous sa moyenne locale - 2 écarts-types. Notons que les écarts-types sont eux aussi calculés localement selon la variance des données de la "rolling window".

Algorithme Création des limites de trading selon une "Rolling window"

Input : le spread S , la largeur l , le nombre d'écarts types $etype$, t_{actuel}

Initialisation :

Window $\leftarrow []$, liste vide pour enregistrer les spreads récents.

$i \leftarrow 0$

Itérer : Loop while($t_{actuel} - i \geq 0$ and $i \leq \text{largeur} - 1$)

Fenetre $\leftarrow [S[t_{actuel} - i]]$

$i += 1$

End Loop

$esp = \text{np.mean}(\text{Fenetre})$ $var = \text{np.var}(\text{Fenetre})$

Output : La valeur de la limite haute

return $esp + etype * var$

Cette stratégie présente d'avantage de ne considérer que des moyennes locales. Ainsi, si le spread reste très inférieur à sa moyenne à long terme pendant une longue durée, la moyenne locale s'ajustera, ce qui permettra de mettre en oeuvre la stratégie dès que le spread remontera vers sa moyenne à long terme. Sans l'utilisation d'une "rolling window", si le spread reste très

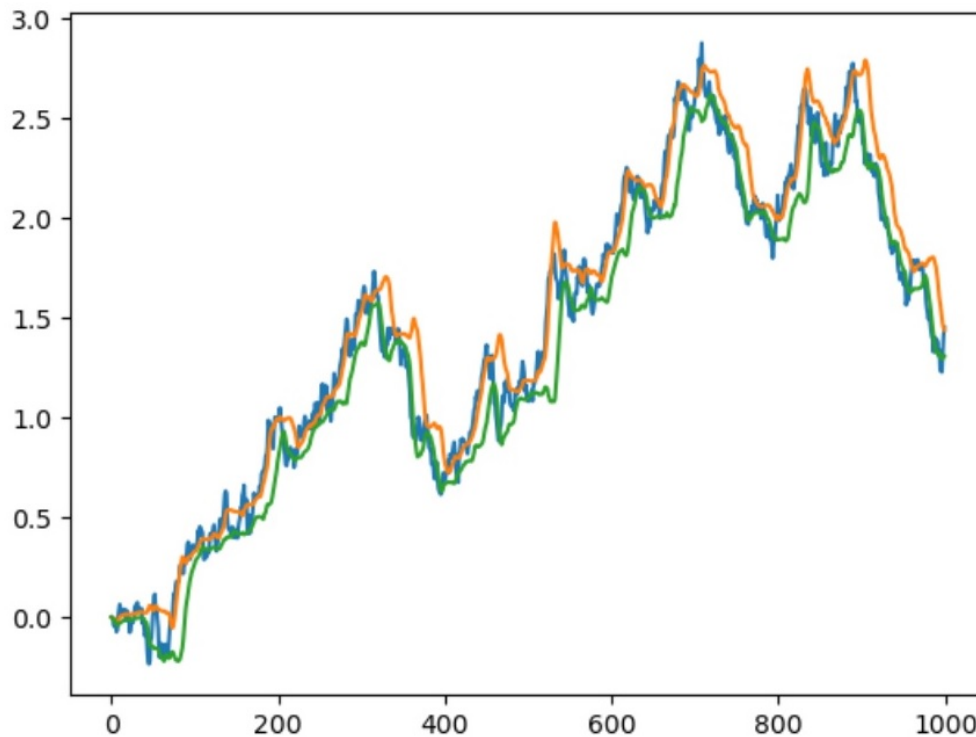


FIGURE 2 – Courbe de la trajectoire et des signaux d'achat et de vente (moyenne locale ± 5 écarts-types pour une meilleure visualisation)

inférieur à sa moyenne à long terme pour une longue durée, il peut être très difficile d'atteindre la courbe de signal d'achat/vente, et on risque de ne pas profiter des opportunités provenant d'un mouvement du spread, qui reste très inférieur à sa moyenne à long terme.

3.1.1 • CALCUL DU PROFIT AND LOSS

Dans le cadre de nos simulations, nous avons dans un premier temps considéré le PnL réalisé par la stratégie sans condition particulière, avec une liquidation du portefeuille à la fin de la trajectoire. Nous avons commencé à travailler avec la valeur de ± 2 écarts-types, et nous vendons notre position seulement à l'instant où le signal opposé de celui de la prise de position est atteint.

Algorithme Calcul du PnL par l'application de la stratégie online (les données du spread sont obtenues au fur et à mesure)

Initialisation :

Position $\leftarrow [0, 0]$, liste ayant deux composantes, la première égale à -1, 0 ou 1 en fonction de la position actuelle, la deuxième étant égale à la valeur du spread lors de la dernière prise de position (rappel : une seule prise de position à la fois dans ce modèle).

PnL $\leftarrow 0$; PnL nul au départ

Z \leftarrow liste de taille N de tirages de loi normale (0,1)

Itérer : Loop for i;

Calcul de LimiteHaute et LimiteBasse;

instruction :

If Spread[i] > LimiteHaute ET Spread[i-1] < LimiteHaute :

on vend et on enregistre le profit si on avait la position 1 et on prend la position -1;

PnL + $\leftarrow Spread[i] - Position[1]$

on prend position en position -1 si on avait la position 0;

on ne fait rien si on avait la position -1;

elif Spread[i] < LimiteBasse ET Spread[i-1] > LimiteBasse :

Idem mais à l'inverse!

PnL + $\leftarrow Spread[T] - Position[1]$:on liquide le portefeuille à la fin

Output : pnl; il s'agit du pnl issu de la dernière itération

3.1.2 • DISTRIBUTION ET ANALYSE DU PNL

On voit que le PnL moyen de la stratégie est de 0.519 pour 10000 essais réalisés. C'est un profit très faible, la distribution des PnL est gaussienne et présente une faible variance. Ainsi, la stratégie est peu risquée mais elle rapporte peu.

0.5190337800256425

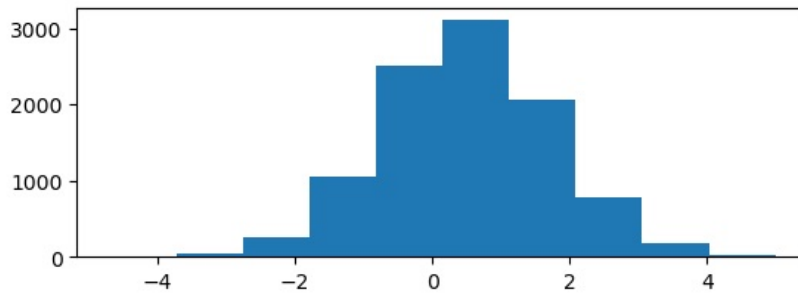


FIGURE 3 – Distribution du PnL, largeur rolling window = 20, nombre d'écart types = 2, M=10000 essais

3.1.3 • VARIANTE AVEC PnL POSITIFS UNIQUEMENT

Une variante est de ne considérer que des PnL positifs. Ainsi, si vendre notre position nous donnerait un PnL négatif, nous décidons à la place de ne pas vendre, et d'attendre le prochain signal de vente. Les résultats de cette modification, couplés à la "rolling window", sont bien supérieurs en moyenne à une stratégie autorisant des PnL négatifs.

1.0613691154397862

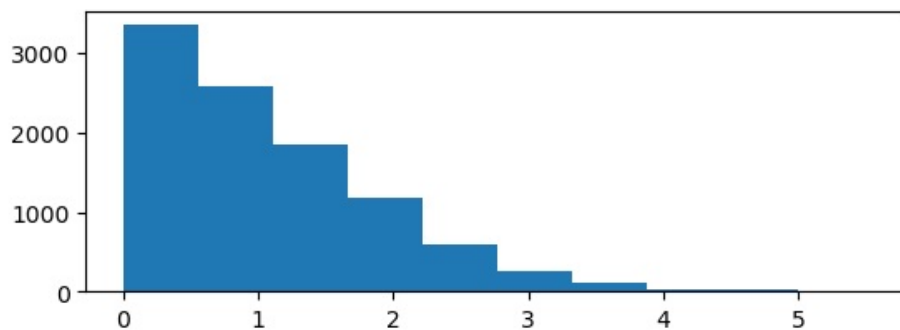


FIGURE 4 – Distribution du PnL, largeur rolling window = 20, nombre d'écart types = 2, M=10000 essais

Cependant, cet ajustement n'est utile que si l'on connaît le mouvement grossier du mouvement sur lequel on spéculé. Ici, on sait que le spread a tendance à revenir à sa moyenne à long terme, ce qui est favorable à l'attente de meilleures opportunités. Un actif dont la valeur baisserait continuellement n'autoriserait jamais de vente, même en attendant longtemps. Il serait alors plus judicieux de vendre tôt pour limiter les pertes.

3.2 DEUXIÈME APPROCHE, UTILISATION DE BARRIÈRES D'ÉQUILIBRE

Dans cette approche, nous construisons un portefeuille qui est autofinancé, puisque la valeur de ce portefeuille n'est pas influencée par l'ajout ou le retrait d'aucune somme d'argent venant de l'extérieur.

En effet, pour construire un tel portefeuille, nous ouvrons une position (longue et courte) au-dessus d'un certain seuil de déclenchement, c'est-à-dire que nous achetons l'actif le moins cher et vendons à découvert l'actif le plus cher sur la base d'un écart minimum du spread par rapport à sa moyenne à long terme.

Le portefeuille est ensuite liquidé (la position est cette fois fermée) dès que le spread revient à sa moyenne à long terme.

L'un des points notables de cette approche est la détermination des déclencheurs, en relation infirme avec les coûts de transaction, qui influence le calcul du PnL d'une telle stratégie.

Si on considère deux actifs X^1 et X^2 dont le spread s'écrit :

$$S_t = X^1 - X^2$$

La stratégie est la suivante :

- Quand $S_t < \mu - 2 \Sigma$ on prend une position longue sur l'actif 1 et une position courte sur l'actif 2
- Quand $S_t > \mu + 2 \Sigma$ alors on prend une position longue sur l'actif 2 et une position courte sur l'actif 1
- Si $S_t = \mu$ ou $t = T$, on liquide le portefeuille en réalisant l'opération inverse à l'ouverture et on récupère le profit

Le paramètre μ représente bien la moyenne à long terme du spread et Σ représente sa variance à long terme dans cette approche comme on peut le constater les paramètres du seuil de déclenchement ne sont pas dynamiques ; ils représentent plutôt les caractéristiques de long terme du spread. Le coefficient 2 ajouté à la variance est à titre indicatif, il permet de tenir compte des coûts de transactions des opérations ; lesquels pourraient biaiser le rendement effectif de la stratégie.

Le pseudo code pour l'implémentation de la stratégie est le suivant :

Algorithme Stratégie définie à chaque instant par la fonction $Go(.,.)$

Input : Le spread S , μ , Σ , et l'instant : i

Instruction :

if $(S_i > \mu - 2 \Sigma)$: renvoyer 1

if $(S_i < \mu - 2 \Sigma)$: renvoyer -1

renvoyer 0

Output : Le type de position ;

1 : position longue sur X^2 et courte sur X^1

-1 : position longue sur X^1 et courte sur X^2

0 : Ne rien faire ou liquider toutes les positions

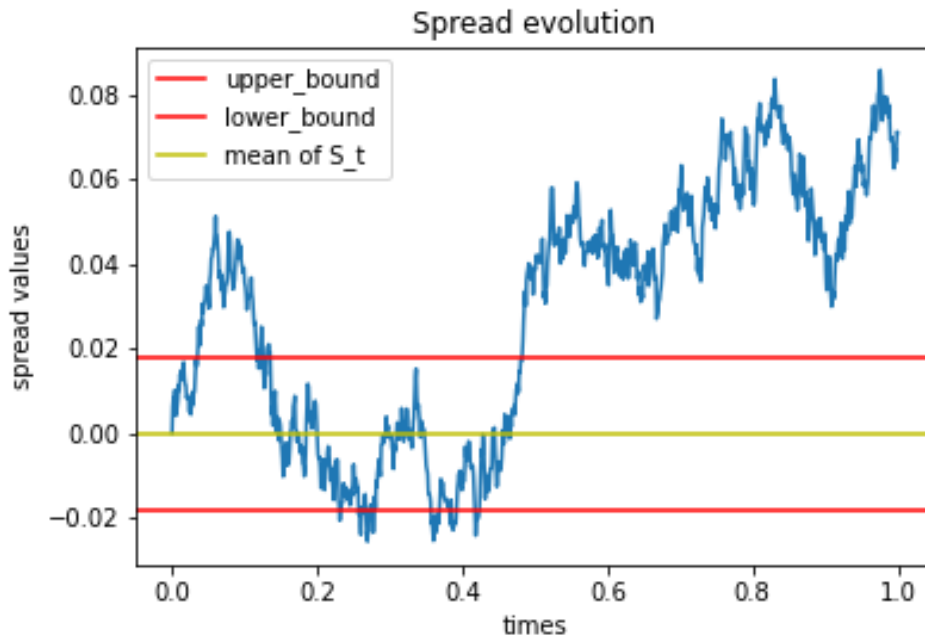


FIGURE 5 – Spread with bounds, $\alpha = 0.1$, $\sigma = 0.1$ et mean = $\mu = 0.0$, var = 0.018

La figure 3 permet d'illustrer l'idée de la stratégie ; on voit dans ce cas précis que la prise de position 1 sera la plus effective par rapport à celle de -1, et les liquidations de portefeuille ont lieu bien avant des prises de position massives, qui se concluent par une liquidation obligatoire du portefeuille à maturité, engendrant quelques pertes puisque qu'on relève une absence de retour à la moyenne du spread. Pour mieux illustrer ce fait, nous faisons une analyse du rendement de la stratégie par un calcul de profit and loss.

3.2.1 • CALCUL DU PROFIT AND LOSS

Le calcul du PnL est basé sur l'idée suivante : dès qu'une position est ouverte, elle engendre automatiquement un profit qu'on va qualifier de profit apparent qu'on peut mesurer à l'aide de S_t (la nature des liquidations de portefeuille permettra de le rendre effectif ou non) . Le profit effectif sera ensuite mesuré concrètement lorsque qu'on sera à l'échéance T . Après chaque retour à la moyenne du spread, tous les profits apparents précédemment générés automatiquement deviennent des profits effectifs intermédiaires PnL_i car on liquide toutes les positions prises. La dernière phase du calcul a lieu entre le dernier instant de retour à la moyenne T_j et la maturité T , c'est à ce niveau que des pertes peuvent être enregistrées ; le profit intermédiaire à ce niveau est presque sûrement la somme :

$$PnL_T = \sum_{T_j < t_k < T} (S_{t_k} - S_T)$$

où S_{t_k} est au-delà d'un seuil et l'expression représente la somme de différences observées entre les différents profit éphémère enregistrés et la valeur du spread à maturité. le PnL final est alors la somme des profits intermédiaires :

$$PnL = PnL_T + \sum_i PnL_i.$$

Le pseudo code qui permet d'implémenter le calcul est le suivant :

Algorithmme Calcul du PnL par la fonction profitLoss

Input : le spread S , μ , Σ

Initialisation :

Profit $\leftarrow []$, liste vide pour enregistrer les profits apparents.

pnl $\leftarrow 0$; pnl nul au départ

Itérer : Loop for j ;

instruction :

If ($\text{Go}(S, \mu, \Sigma) \neq 0$) :

on prend position et on enregistre le profit ;

Profit $\leftarrow \text{abs}(S_j - \mu)$

elif(on constate un retour à la moyenne ou une atteinte de la maturité) :

pnl : pnl \leftarrow pnl + $\text{sum}(\text{array}(\text{Profit}) - \text{abs}(S_j - \mu))$:on met à jour le pnl

Profit $\leftarrow []$:on vide pour marquer la liquidation du portefeuille

Output : pnl ; il s'agit du pnl issu de la dernière itération

3.2.2 • DISTRIBUTION DU PnL

La loi de distribution du PnL n'est à priori pas connue. On tente alors de visualiser une distribution en réalisant $M = 1000$ expériences indépendantes résultant d'une simulation de $M = 1000$ trajectoires du spread. Cette distribution permettra d'analyser le risque d'une telle stratégie, et pourra confirmer le fait qu'il s'agit bien d'une stratégie d'arbitrage. Pour se faire il nous faut calculer l'espérance de la distribution, en étant presque sûre que la loi de distribution du PnL est intégrable. Nous faisons donc appel aux méthodes simples de Monte-Carlo.

L'estimation de Monte Carlo au sens de la loi forte des grands nombres, laisse paraître de prime abord que le PnL semble avoir une espérance non nulle, ce qui est cohérent avec le fait que nous avons construit une stratégie d'arbitrage. Cependant, en observant la répartition des valeurs prises par le PnL, il semble que l'écart-type de la distribution soit relativement grand par rapport à son espérance; ce qui implique que nous sommes face à une stratégie dont le risque de perte est relativement grand.

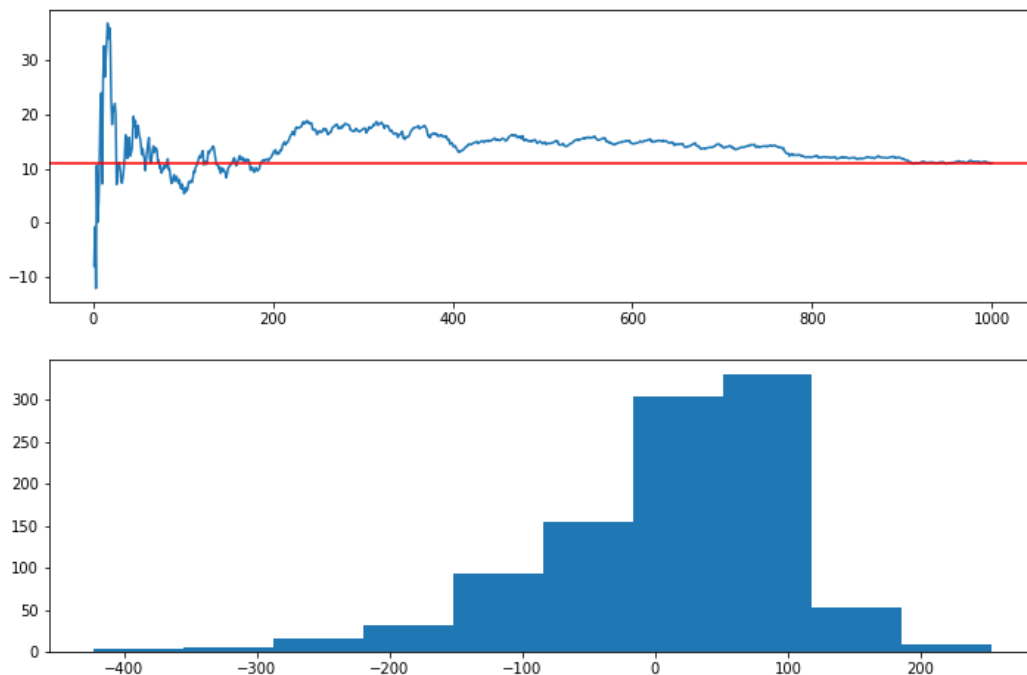


FIGURE 6 – Observation de la distribution du PnL

3.2.3 • ANALYSE DU PnL

La nature du risque observé dernièrement pousse à étudier son évolution vis à vis des paramètres du modèle (de S_t) qui peuvent théoriquement avoir une influence sur le PnL ; il s'agit entre autre de la vitesse de convergence α et de la volatilité σ .

Evolution du risque en fonction de la vitesse de retour α

On constate qu'à volatilité constante, le risque de perte diminue lorsque la vitesse de convergence augmente, ce qui est bien cohérent. En effet, la perte dans notre cas est directement liée au non-retour à la moyenne du spread lorsqu'on atteint la maturité T. Ainsi plus on a un retour avec un rythme relativement élevé plus la perte est atténuée.

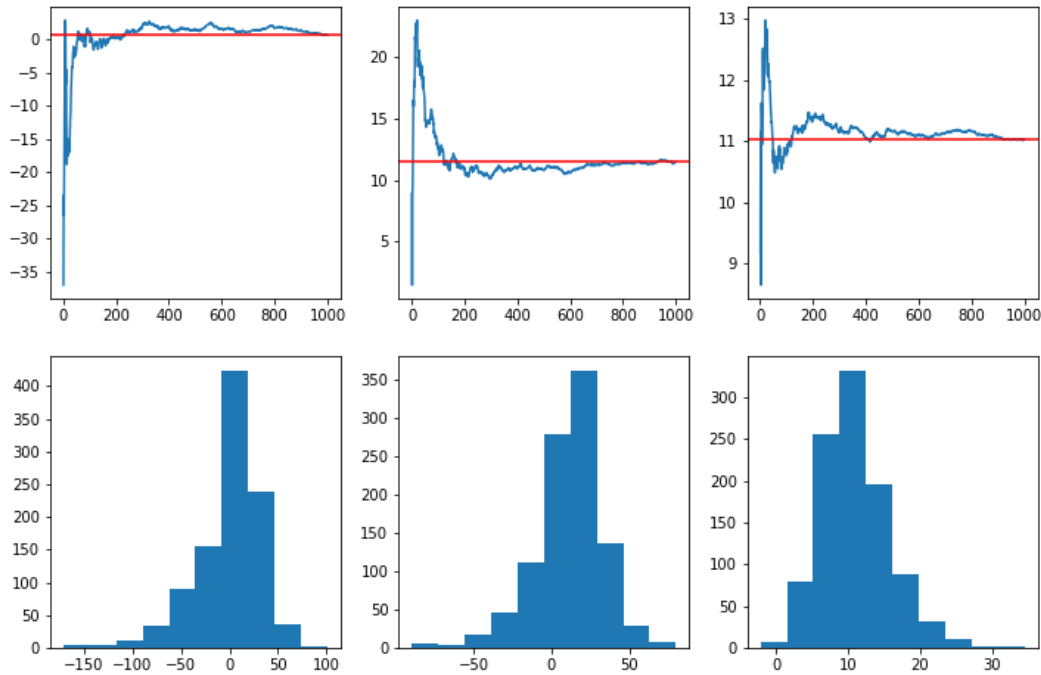


FIGURE 7 – Evolution du risque en fonction de , $\alpha = 0.1, 1, 10$

Evolution du risque en fonction de la volatilité σ

A ce niveau, on constate qu'à vitesse de retour à la moyenne du spread donnée, le risque de perte augmente lorsque la volatilité augmente ce qui est encore cohérent car la perte étant liée au non-retour à la moyenne du spread à la maturité T , plus le spread est volatile plus ses trajectoires sont imprévisibles et moins il est dominé par un retour à la moyenne. Ainsi il sera plus cohérent dans la réalité de voir que la volatilité et la vitesse de retour à la moyenne du spread soient simultanément, soit relativement grand, ou relativement petit.

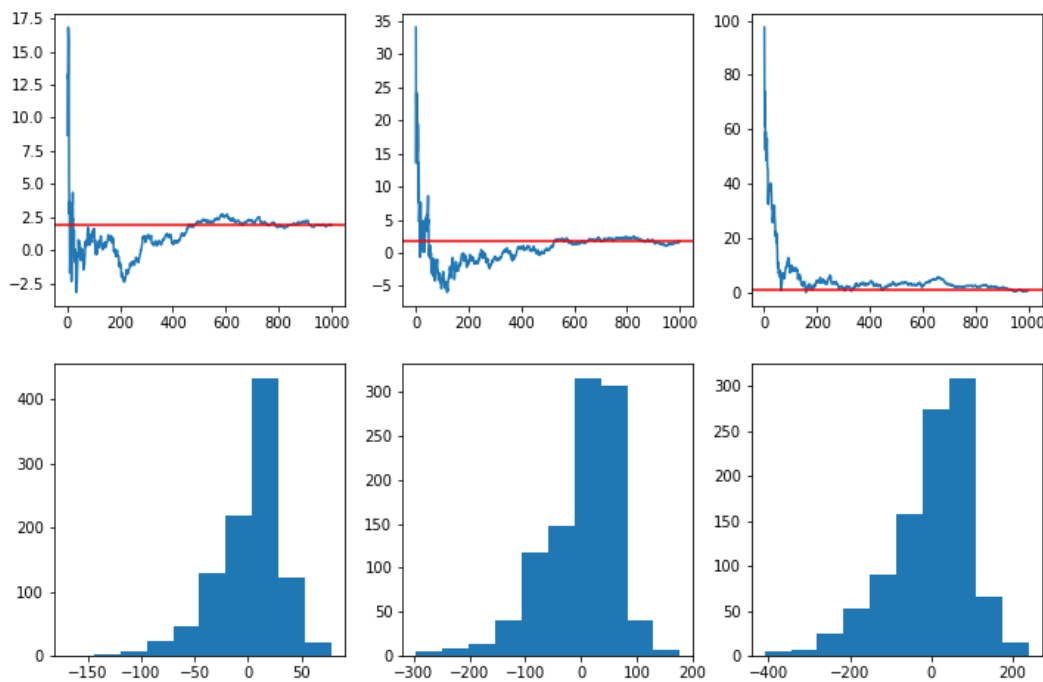


FIGURE 8 – Evolution du risque en fonction de , $\sigma = 0.1, 0.5, 0.9$

3.3 COMPARAISON DES DEUX APPROCHES

3.3.1 • CONCLUSION PREMIÈRE APPROCHE

La première approche permet un trading avec une espérance de gain légèrement positive et des pertes éventuelles très faibles. En revanche, nous n'avons pas considéré dans notre modèle les coûts de transaction qui, une fois considérés, auraient certainement fait plonger la rentabilité de la stratégie.

Il faut donc chercher des stratégies plus rentables.

Une première modification était de ne considérer que les PnL positifs. Autrement, il faut s'intéresser à des stratégies plus risquées comme celle développée dans la deuxième approche.

3.3.2 • CONCLUSION DEUXIÈME APPROCHE

Nous pouvons conclure à ce stade, au regard des analyses faites pour la deuxième approche que la stratégie mise en place présente un risque non négligeable. D'autant plus qu'il s'agit d'un risque lié à la nature des fluctuations imprévisibles du marchés modélisées ici à travers un terme du brownien et une volatilité σ , il faut donc prendre en compte la nature de cette caractéristique qui influence parfois négativement le retour à la moyenne de long terme du spread, dans le choix d'une telle stratégie. Néanmoins dans le meilleur des cas, elle est la stratégie la plus rentable des deux approches.

4

MODÈLE AVEC CHANGEMENT DE RÉGIME

Les marchés financiers ne se comportent pas toujours de la même manière, la relation historique entre deux actions d'une paire peut se rompre et s'écarter de manière significative de son équilibre historique. Par exemple, lorsqu'une entreprise d'une paire publie ses rapports financiers trimestriels avant une autre, cela peut conduire à un élargissement temporaire de l'écart. D'autres exemples de changement de régime temporaire peuvent être une crise financière, une période de récession économique ou un krach boursier ; d'où l'introduction d'un changement de régime dans le modèle.

Pour introduire un changement de régime, les auteurs suggèrent d'utiliser un processus de commutation de Markov à deux états avec une moyenne et une variance de commutation.

Les hypothèses sont les suivantes :

- Nous supposons qu'il n'y a que deux regimes possibles.
- La probabilité de l'état suivant dépend uniquement de l'état actuel et est indépendante de tous les états précédents.

4.1 MODÉLISATION DU SPREAD

On considère une chaîne de Markov $(Etat_t)_{t \in [0, T]}$ où $Etat_t$ est valeurs dans $\{1, 2\}$ qui designe les deux états de la chaîne de Markov.
Le spread peut être alors modélisé par :

$$dS_t = \begin{cases} \alpha_1(\mu_1 - S_t)dt + \sigma_1 dW_t & Etat_t = 1 \\ \alpha_2(\mu_2 - S_t)dt + \sigma_2 dW_t & Etat_t = 2 \end{cases}$$

Dans cette partie encore du projet on reste sur le schémas classique d'Euler, dont on est sûr de la convergence. Pour déterminer l'état courant, nous utilisons les probabilités de transition calculées comme suit :

$$Prob[Etat_t = 1 | Etat_{t-1} = 1] = p = \frac{\exp(p_0)}{1 + \exp(p_0)}$$

$$Prob[Etat_t = 2 | Etat_{t-1} = 2] = q = \frac{\exp(q_0)}{1 + \exp(q_0)}$$

q_0 et p_0 sont calculé en entrainant les données sur les models historiques. Pour la modélisation en vu de l'étude il est plus judicieux d'utiliser des parametres q_0 et p_0 pour lesquels le changement

de regime n'a lieu qu'en un nombre très petit de fois (4 fois au maximum)

Algorithme Spread avec changement de régime

Input : $S_0, \alpha_1, \alpha_2, \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$ et le nombre d'itération N

Initialisation : p_0, q_0 : choix de paramètres de probabilité

$bts \leftarrow []$: on initialise les breaks points

$S \leftarrow [S_0]$: initialisation du spread

$means \leftarrow [\mu_1]$: on initialise une liste des moyennes de régime

calcul du pas Δ_t

$condition \leftarrow (Z==1)$: on initialise arbitrairement l'état de la chaine de markov a 1 et on la met dans un boolean variable

$count \leftarrow 0$: pour compter les changements de régime

Itérer : Boucle for ;

instruction :

if(on était dans le régime 1)

on reste dans le regime 1 avec une probabilité $\frac{\exp(p_0)}{1+\exp(p_0)}$

dans le regime en question, on calcul la valeur de S_{t_i}

on met à jour S, means

si il y a changement de régime, on met en plus à jour les variables count et bts

else : si on était dans le régime 2

on reste dans le regime 2 avec une probabilité $\frac{\exp(q_0)}{1+\exp(q_0)}$

dans le regime en question, on calcul la valeur de S_{t_i}

on met à jour S, means

si il y a changement de régime, on met en plus à jour les variables count et bts

Output : liste(S, means, bts, count)

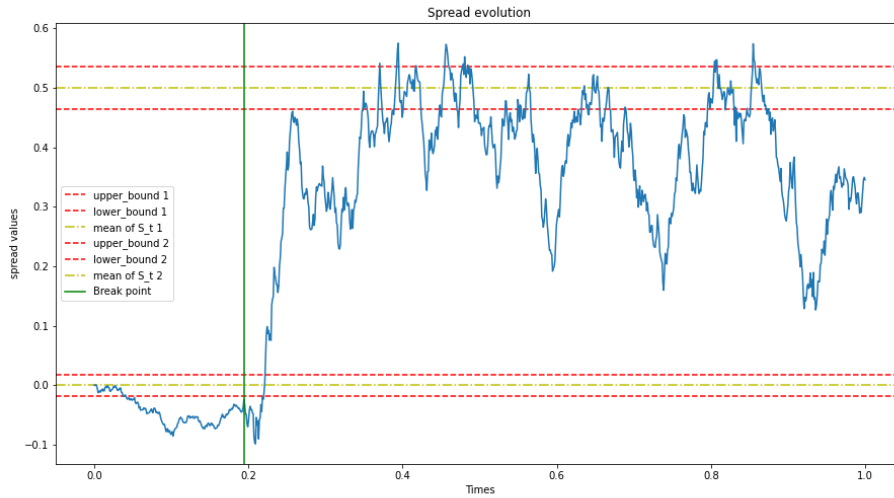


FIGURE 9 – Evolution du spread avec changement de régime

4.2 MISE EN PLACE DE LA STRATÉGIE DANS CE MODÈLE

4.2.1 • CHANGEMENT DE RÉGIME MULTIPLE AVEC STRATÉGIE ADAPTÉE

Dans cette première section, on discute d'une adaptation de la stratégie basée sur les "rolling windows" lors d'un changement de régime.

On considère que le changement de régime peut se réaliser à n'importe quel instant avec une probabilité constante.

Lorsque le changement de régime se produit, on adapte les paramètres de la stratégie (taille de la fenêtre, nombre d'écart-types par rapport à la moyenne locale à considérer pour la définition des barrières). Par exemple, si la volatilité devient plus importante, on s'attend à croiser plus souvent les barrières hautes et basses, on suppose donc qu'on peut éloigner un peu ces barrières pour augmenter le profit.

Pour que la stratégie soit dynamique, il faudrait définir les paramètres de largeur de fenêtre et de nombre d'écart types comme des fonctions de sigma.

En comparant les PnL obtenus par des méthodes de Monte-Carlo (10000 essais), on peut en déduire si la stratégie d'adaptation des paramètres est efficace ou non pour ce cas de figure.

La comparaison des résultats obtenus est synthétisée dans le tableau suivant.

On voit que modifier la barrière en fonction de sigma a peu d'influence sur le PnL par rapport à la stratégie de base (largeur = 20, nombre d'écart-type = 2). Le paramètre qui influence grandement le PnL est la largeur de la fenêtre, plus la fenêtre est large, plus le PnL est important.

On peut en déduire que la stratégie de "rolling window" est moins efficace que la stratégie

Sigma = 0,1 ou 1	Nombre d'écart types (achat)	Largeur fenêtre	Revente (moyenne ou -Nombre écart types)	PnL moyen (10000 essais)
	$4\sqrt{\sigma}$		20	0,49
	$3\sqrt{\sigma}$		20	0,48
	$2\sqrt{\sigma}$		20	0,52
	$\sqrt{\sigma}$		20	0,48
	$1/2\sqrt{\sigma}$		20	0,49
	$1/3\sqrt{\sigma}$		20	0,47
	$1/\sqrt{\sigma}$		20	0,49
		1	20	0,48
		2	20	0,52
		3	20	0,5
		4	20	0,51
	$2\sqrt{\sigma}$		2	0,12
	$2\sqrt{\sigma}$		5	0,26
	$2\sqrt{\sigma}$		10	0,35
	$2\sqrt{\sigma}$		30	0,57
	$2\sqrt{\sigma}$		50	0,65
	$2\sqrt{\sigma}$		100	0,72

FIGURE 10 – Comparaison du PnL obtenu en adaptant la stratégie

utilisant les données long terme.

Cela est dû au fait que le processus est assuré de revenir à la moyenne au bout d'un certain temps.

Ces résultats permettent d'invalider l'utilisation d'une "rolling window". Cependant, on voit qu'il y a un optimum à atteindre en ce qui concerne l'éloignement des barrières d'achat et vente.

Cet optimum semble être atteint pour des barrières situées à ± 2 écarts-types, ou, dans le cas de la présence d'un changement de régime, $2\sqrt{\sigma}$.

Dans tous les cas, le rendement de la stratégie est faible et le risque est faible.

4.2.2 • CHANGEMENT DE RÉGIME UNIQUE AVEC CHANGEMENT DES PARAMÈTRES

La stratégie pour un changement de régime diffère de celle des approches précédentes par le simple ajout d'un "break point", pour marquer le changement de régime. Ainsi, pour construire le portefeuille dans ce cas il va falloir prendre en compte ce aspect. La littérature propose une stratégie qui fait intervenir une probabilité d'activation ; cette probabilité permet de prendre une décision en fonction du régime dans lequel on se trouve. Dans notre cas, la stratégie va s'appuyer sur celle du régime simple déjà implémentée, en ajoutant un cas de gestion de la transition. Dans cette approche nous considérons des seuils de déclenchement fixe à travers une fixation des variables qui les déterminent.

Les paramètres du model sont :

- μ_1 : moyenne à l'équilibre dans le premier régime
- μ_2 : moyenne à l'équilibre dans le second régime
- Σ_1 : écart-type à l'équilibre dans le premier régime
- Σ_2 : écart-type à l'équilibre dans le second régime

Dans le régime faible :

- si $S_t > \mu_1 + 2\Sigma_1$ and $P(Etat_t = 1|S_t) \geq \rho$ alors prendre une position courte sur l'actif 1 et une position longue sur l'actif 2
- si $S_t = \mu_1$ and $t = T$ alors liquider le portefeuille en effectuant l'opération inverse.
- si $S_t < \mu_1 - 2\Sigma_1$ alors prendre une position courte sur l'actif 2 et une position longue sur l'actif 1.

Dans le régime fort :

- si $S_t > \mu_2 + 2\Sigma_2$ alors prendre une position courte sur l'actif 1 et une position longue sur l'actif 2.
- si $S_t = M_{high}$ and $t = T$ alors liquider le portefeuille en effectuant l'opération inverse.
- si $S_t > \mu_2 + 2\Sigma_2$ and $P(Etat_t = 2|S_t) \geq \rho$ alors prendre une position courte sur l'actif 2 et une position longue sur l'actif 1.

le paramètre ρ est ici la probabilité seuil qui permet de s'assurer qu'on est bien dans le regime en question.

Au niveau de la transition, la stratégie doit être un peu différente et s'adapter non seulement au profile du spread avant l'atteinte du "break point", mais encore aux parametres des régimes. Dans notre cas, on suppose que le premier régime, est un régime lent c'est à dire que la dynamique du spread est moins évolutif que celle du spread de l'autre régime. Cela signifie que le passage du premier régime au deuxième peut dans certains cas etre favorable à la mise en place d'une stratégie gagnante ;

- Si à la fin du régime 1 le spread se trouve au dessus de la borne supérieure de déclenchement, on liquide directement le portefeuille après détection de changement.
- Si à la fin du régime 1 le spread se trouve en dessous de la borne inférieure de déclenchement, on conserve les positions pour les liquidés dans le régime 2.

4.2.3 • CALCUL DU PNL

Le calcul du pnl repose sur l'idée précédente qu'on peut traduire par l'algorithme suivant :

Algorithme calcul pnl

Input : paramètres des régime, Spread et break point

Initialisation : $\text{Porf1} \leftarrow []$: liste des positions pour le regime 2

$\text{Porf2} \leftarrow []$: liste des positions pour le regime 2

$\text{pnl} \leftarrow 0$: pour le calcul du pnl

$\text{cumulpnl} \leftarrow []$: pour l'enregistrement des pnl cumulé

Itérer : boucle for :

Instruction

if(on est dans le régime 1) :

on enregistre une position dans le régime 1 en fonction du profil du spread à l'aide la fonction $\text{Go}(\text{paramètres régimes1})$

on met à jour Porf1

on met à jour pnl quand le portefeuille est liquidé

else(on est dans le régime 2) :

on regarde avant s'il faut liquidé le portefeuille du régime 1 et mettre à jour pnl

sinon :

on enregistre une position dans le régime 1 en fonction du profil du spread à l'aide la fonction $\text{Go}(\text{paramètres régimes1})$

on met à jour Porf2

on met à jour pnl lorsqu'on liquide les deux portefeuils

on enregistre pnl dans cumulpnl

Output : cumulpnl

L'évolution du profit cumulé est bien cohérent avec la figure 8 et permet de visualiser l'influence du changement de régime ; on observe un pnl qui explose après le passage du régime 1 au régime 2.

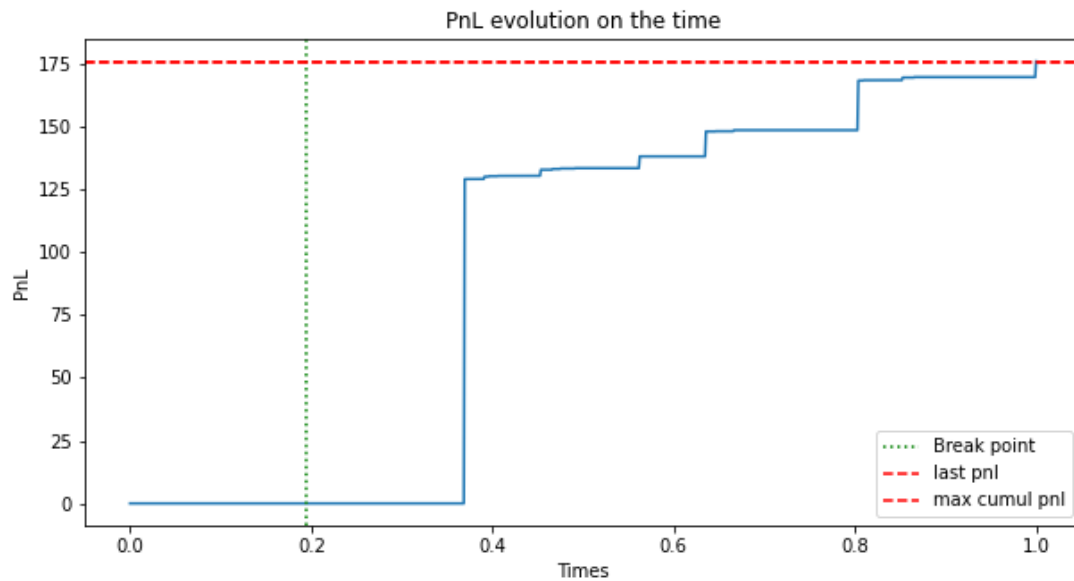


FIGURE 11 – Evolution du Pnl cumulé

4.2.4 • ANALYSE DU PNL

Comme cela a déjà été signifié, une telle stratégie présente un grand risque de perte. Ici on observe encore un risque de perte mais cette fois presque du même ordre que l'espérance des gains. Ceci peut s'expliquer par le changement de régime qui permet une énorme opportunité d'arbitrage au niveau de la transition des entre les régimes.

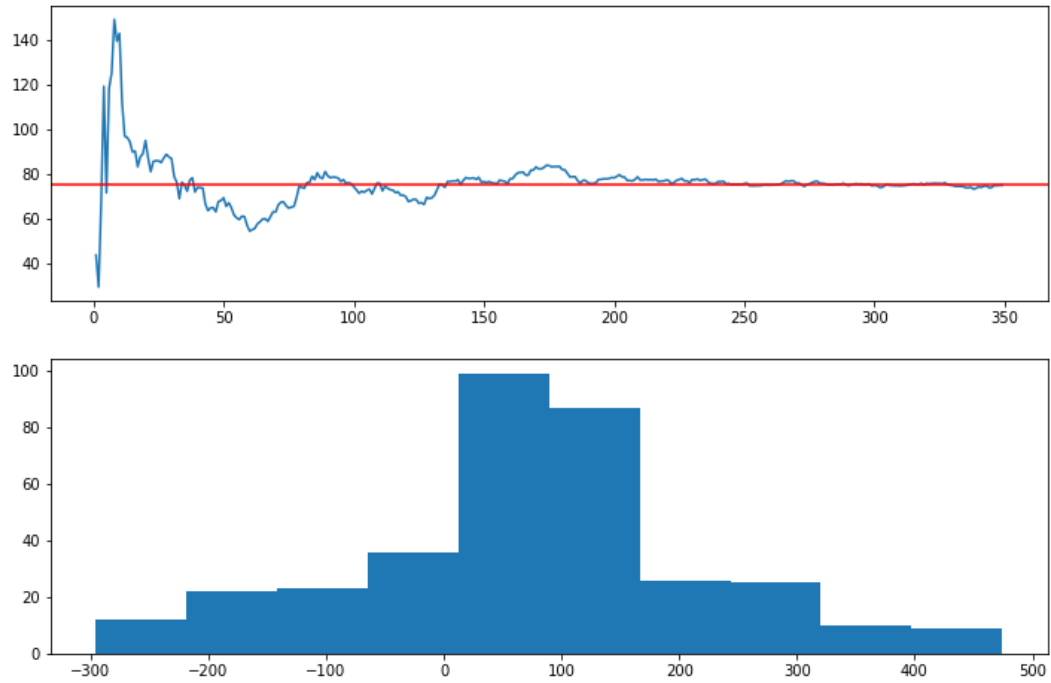


FIGURE 12 – Distribution du P_{nl}

5

APPLICATION AVEC DES DONNÉES RÉELLES

5.1 METHODE DE COINTEGRATION SUR LES ACTIONS PEPSI ET COCA COLA

Jusqu'ici, nous avons considéré des stratégies de trading sur les spreads absolus, c'est-à-dire que l'on échangeait une ou plusieurs paires d'actifs et on additionnait les variations de la différence de prix entre les deux actifs au fur et à mesure que l'on ouvrait et fermait des positions. Dans la réalité, nous disposerions d'un portefeuille d'une certaine valeur, et nous déciderions de maximiser le rendement en pourcentage de ce portefeuille. Ainsi, nous choisirions d'échanger non pas 1 actif X_1 et 1 actif X_2 , mais 1 actif X_1 et β actifs X_2 , de sorte que les positions prises sur X_1 et sur X_2 soient de valeurs opposées.

Afin d'appliquer la stratégie de trading par les pairs, il est nécessaire de sélectionner les actifs financiers à trader qui ont de très bonnes propriétés entre eux. L'une des propriétés indispensables est la cointégration. Nous devons nous assurer que les actifs sont cointégrés et ensuite déterminer leur coefficient de cointégration. Dans notre travail, nous ne nous attarderons pas sur les tests de cointégration des actions Pepsi et Coca Cola. Nous admettons qu'il existe une forte relation de cointégration entre ces actifs et nous déterminerons leur coefficient en utilisant une régression linéaire. Soit X_1 la variable représentant le prix ajusté à la fermeture de l'action coca-cola et X_2 la variable représentant le prix ajusté à la fermeture de l'action pepsi.

Recherche du coefficient de cointégration β

On détermine β tel que $\log(X_1(t)) = \beta \log(X_2(t)) + \epsilon_t$ avec ϵ_t qui est un processus de retour à la moyenne.

β est obtenu en expliquant linéairement le logarithme du prix de l'action coca-cola par rapport au logarithme du prix de l'action pepsi sur une base de données allant de janvier 2010 à novembre 2022.

Ainsi, le spread historique sur 11 ans est déterminé par $S_t = \log(X_1(t)) - \beta \log(X_2(t))$. Cet écart historique nous permettra de déterminer les paramètres de notre modèle, ce qui nous permettra d'appliquer la stratégie de trading par les pairs sur les actions pepsi et coca-cola.

Nous avons comme résultat $\beta = 0.53051807$

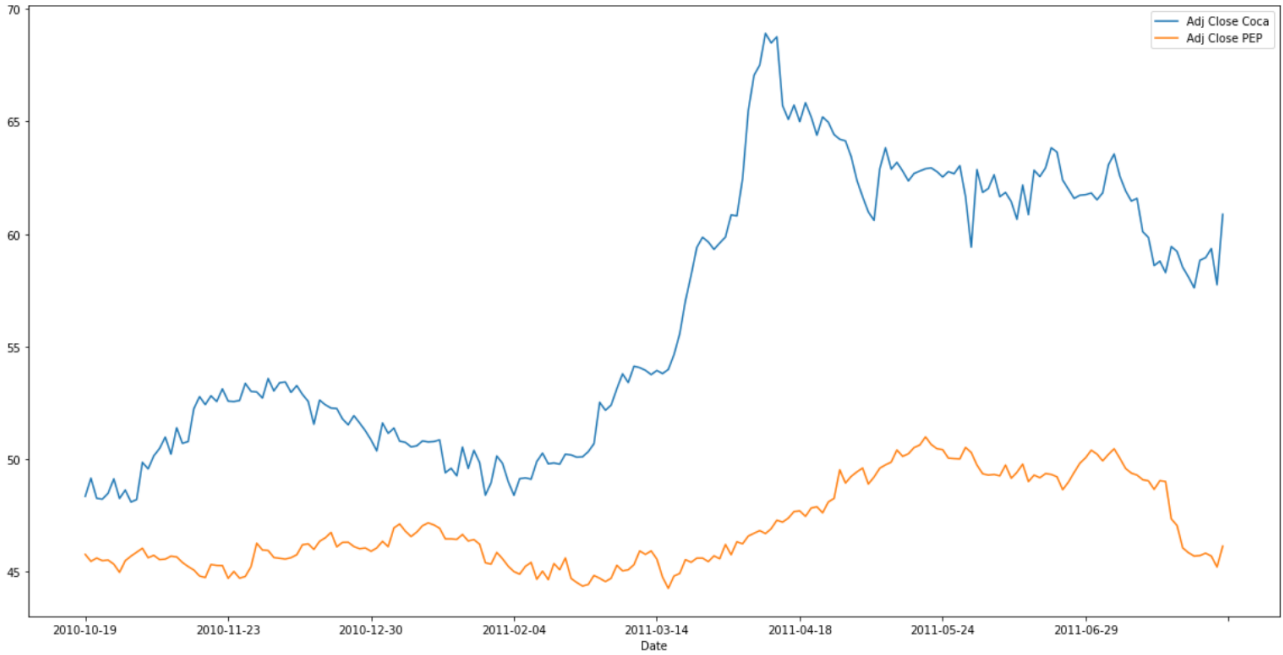


FIGURE 13 – Actions Coca-Cola et Pepsi entre Oct.2010 et Jun.2011

5.2 DÉTERMINATION DES ESTIMATEURS DE μ , σ ET α

Détermination de μ , et σ

μ est la moyenne d'équilibre de l'écart. Le modèle utilisé pour modéliser le spread indique qu'à l'infini, le spread tend vers une distribution normale dont la moyenne est μ et la variance $\frac{\sigma^2}{2\alpha}$

En considérant l'espace de temps entre le jour i et $i + 1$ très grand, on peut estimer μ , σ et α en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance :

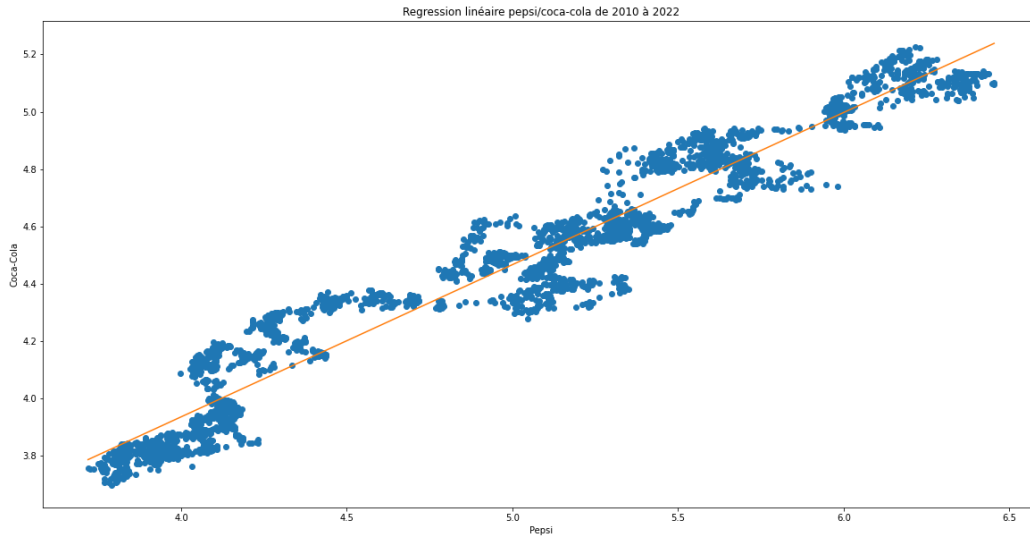
La vraisemblance vaut dans notre cas :

$$L(S_1, \dots, S_n, \mu, \alpha, \sigma) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\sigma^2}{2\alpha}}} e^{-\frac{\alpha(S_i - \mu)^2}{\sigma^2}}$$

Comme la fonction logarithme est croissante, nous allons plutôt maximiser la log-vraisemblance. Cette transformation en log-vraisemblance nous permet de calculer facilement les dérivées et dérivées secondes.

$$l(S_1, \dots, S_n, \mu, \alpha, \sigma) = \sum_{i=1}^n -\frac{\alpha(S_i - \mu)^2}{\sigma^2} - \frac{n}{2} \log\left(\frac{\sigma^2}{2\alpha}\right) + \text{constante}$$

Le calcul de la matrice Hessienne nous indique que cette fonction est concave en fonction de $\theta = (\mu, \alpha, \sigma)$

FIGURE 14 – Regression lineaire pour estimer β

On a donc que :

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i$$

$$\frac{\sigma_n^2}{2\alpha_n} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (S_i - \mu_n)^2$$

Détermination de α

Le paramètre α est la vitesse de retour à sa moyenne d'équilibre du spread. Elle peut être estimée par un estimateur de maximum de vraisemblance discrétisé :

$$\alpha_n = \frac{\sum_{i=0}^n (S_{t_{i+1}} - S_{t_i})^2}{2 \sum_{i=0}^n (S_{t_i} - \mu_n)^2}$$

Resultats

On obtient comme resultat :

$$\alpha_n = 0.007906841191553078$$

$$\sigma_n = 0.012747338115570033$$

$$\mu_n = 1.8140338580102002$$

Nous observons que nos estimations reflètent la réalité à l'exception d'une certaine erreur due à la variance de nos estimateurs.

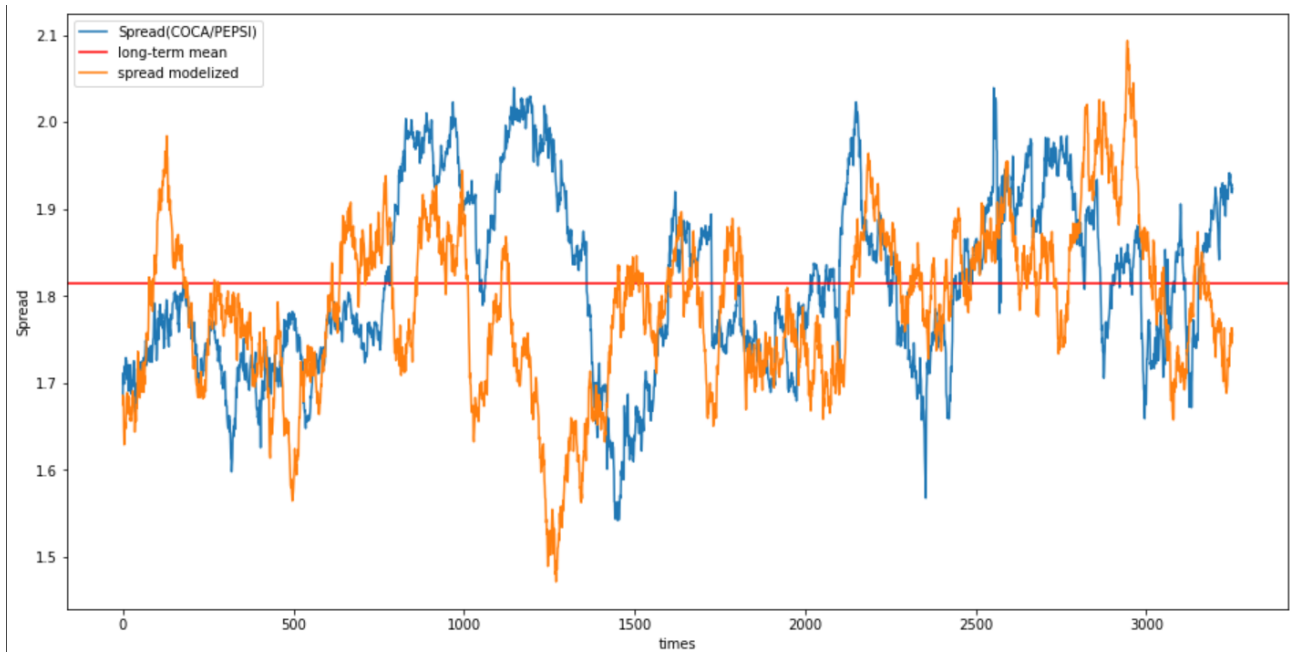


FIGURE 15 – Spread observé(Bleu) vs Spread modelisé avec les estimateurs(Orange)

RÉFÉRENCES

- [1] V.Genon Catalot. *Cours de statistique et diffusion*. 2008.
- [2] K.G. Rouwenhorst E. Gatev, W.N. Goetzmann. *Pairs trading : performance of a relative-value arbitrage rule*, *Review of Financial Studies*, 19 : 797-827. 2006.
- [3] S.-D. Shyu C.-C. Chang J.-W. Yang, S.-Y. Tsai. *Pairs trading : the performance of a stochastic spread model with regime switching-evidence from the SP 500*, *International Review of Economics and Finance*, 43 : 139-150. 2016.
- [4] R. Mestel M. Bock. *A regime-switching relative value arbitrage rule*, in B. Fleischmann et al. (eds.), *Operations Research Proceedings*, pp. 9-14, Springer. 2008.
- [5] Peter Tankov Nizar Touzi. *Calul stochastique en finance*. 2021.
- [6] R. Bradrania R.J. Elliott. *Estimating a regime switching pairs trading model*, *Quantitative Finance*, 18 : 877-883. 2008.
- [7] S.Ghosh S.Donadio. *Learn Algorithmic Trading*, Chap. 1 et 2, Packt. 2019.
- [8] G. Vidyamurthy. *Pairs Trading : Quantitative Methods and Analysis*, Wiley. 2004.