# 2020年北京市朝阳区高三一模数学逐题解析

## 第一部分（选择题 共40分）

**一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。**

1. 已知集合 $A=\{1,3,5\}$， $B=\{x\in \mathbf{Z}\mid (x-1)(x-4)<0\}$，则 $A\cup B=$

A. $\{3\}$　　B. $\{1,3\}$

C. $\{1,2,3,5\}$　　D. $\{1,2,3,4,5\}$

【答案】C

【解析】由题可得 $B=\{2,3\}$，根据集合运算法则可得 $A\cup B=\{1,2,3,5\}$，故选 C.

2. 下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

A. $y=x^3$　　B. $y=-x^2+1$

C. $y=\log_2 x$　　D. $y=2^{|x|}$

【答案】D

【解析】对于 A： $y=x^3$，不为偶函数，故错误；

对于 B： $y=-x^2+1$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，故错误；

对于 C： $y=\log_2 x$ 不为偶函数，故错误；

对于 D： $y=2^{|x|}$ 为偶函数且在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，故正确；

故选 D.

3. 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_4=-8$，则$\{a_n\}$的前6项和为

A. $-21$　　B. $11$

C. $31$　　D. $63$

【答案】A

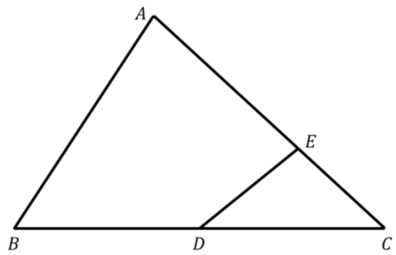
【解析】因为$\{a_n\}$为等比数列，$a_1=1$，$a_4=-8$，则$q=\sqrt[3]{\dfrac{a_4}{a_1}}=-2$，

$S_6=\dfrac{1\times[1-(-2)^6]}{1-(-2)}=-21$，故选 A.

4. 如图，在$\triangle ABC$中，点$D$，$E$满足$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{CA}=3\overrightarrow{CE}$，若$\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}\ (x,y\in\mathbf{R})$，则$x+y=$

A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. $-\dfrac{1}{3}$

C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{3}$




【答案】B

【解析】因为$\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BD}$，所以$\overrightarrow{DC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，

$\overrightarrow{CA}=3\overrightarrow{CE}$，所以$\overrightarrow{EC}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，

$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，

所以$\overrightarrow{DE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$，

解得$x=-\dfrac{1}{2},y=\dfrac{1}{6}$，$x+y=-\dfrac{1}{3}$，故选 B.

5. 已知抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点为$F$，准线为$l$，点$A$是抛物线$C$上一点，$AD\perp l$于$D$.若$AF=4$，$\angle DAF=60^\circ$，则抛物线$C$的方程为

A. $y^2=8x$

B. $y^2=4x$

C. $y^2=2x$

D. $y^2=x$

【答案】B

【解析】设$l$与$x$轴交于点$B$，在抛物线中$AD=AF$，且$\angle DAF=60^\circ$

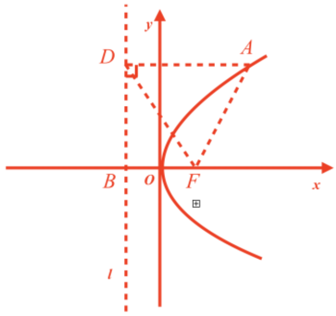
所以$\triangle ADF$为等边三角形

因为$AF=4$，$DF=4$

直角三角形$\triangle DBF$中$\angle BFD=60^\circ$，$BF=p$

所以$DF=2p$

$2p=4$，$p=2$，所以方程为$y^2=4x$，故选B.




6. 现有甲、乙、丙、丁、戊5种在线教学软件，若某学校要从中随机选取3种作为教师“停课不停学”的教学工具，则其中甲、乙、丙至多有2种被选取的概率为

A. $\dfrac{2}{3}$

B. $\dfrac{2}{5}$

C. $\dfrac{3}{5}$

D. $\dfrac{9}{10}$

【答案】D

【解析】设“甲、乙、丙至多有2种被选”为事件$A$，

则“甲、乙、丙都被选”为事件$\bar{A}$.

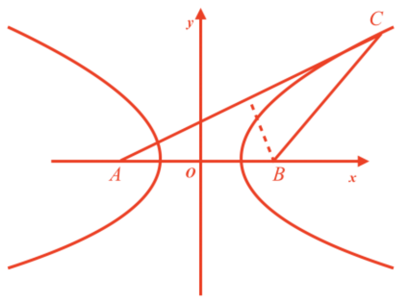
$P(\bar{A})=\dfrac{C_3^3}{C_5^3}=\dfrac{1}{10}$，

所以甲、乙、丙至多有2种被选的概率为$P(A)=1-P(\bar{A})=\dfrac{9}{10}$，故选D.

7. 在$\triangle ABC$中，$AB=BC$，$\angle ABC=120^{\circ}$，若以$A$，$B$为焦点的双曲线经过点$C$，则该双曲线的离心率为

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

C. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$　　D. $\sqrt{3}$




【答案】C

【解析】焦距$AB=2c$，所以$BC=2c$

$\triangle ABC$为顶角为$120^{\circ}$的等腰三角形，$AC=2\sqrt{3}c$

因为$2a=AC-BC=2\sqrt{3}c-2c$

所以$\dfrac{c}{a}=\dfrac{2}{2\sqrt{3}-2}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$，故选 C.

8. 已知函数$f(x)=\sqrt{3}\sin(\omega x-\varphi)(\omega>0)$的图象上相邻两个最高点的距离为$\pi$，则“$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$”是“$f(x)$的图象关于直线$x=\dfrac{\pi}{3}$对称”的

A.充分而不必要条件　　B.必要而不充分条件

C.充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】相邻两个最高点距离为一个周期，所以$T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}=\pi$，因为$\omega>0$，所以$\omega=2$.

所以$f(x)=\sqrt{3}\sin(2x-\varphi)$.

充分性：

若$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，$f(x)=\sqrt{3}\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$

当 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，代入 $f(x)$ 可得 $f(\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}\sin(\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}$，此时函数取得最大值，

所以 $x=\frac{\pi}{3}$ 是 $f(x)$ 的对称轴，所以具有充分性.

必要性：

若 $f(x)$ 关于 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称，则 $f(\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}\sin(\frac{2}{3}\pi-\varphi)=\pm\sqrt{3}$，$\frac{2}{3}\pi-\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$

$\varphi=-k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$，所以不具有必要性，

故选 A.

9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2ax+2a, & x\le 1.\\ 2x-a\ln x, & x>1.\end{cases}$ 若关于 $x$ 的不等式 $f(x)\ge\frac{a}{2}$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，则实数 $a$ 的取值范围为

A. $(-\infty,2\sqrt{e}]$　　B. $[0,\frac{3}{2}]$

C. $[0,2]$　　D. $[0,2\sqrt{e}]$

【答案】C

【解析】方法一：特值法+排除法

因为 $f(x)\ge\frac{a}{2}$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，

当 $a=-2$ 时，$\frac{a}{2}=-1$，$f(x)=\begin{cases}x^2+4x-4, & x\le 1.\\ 2x+2\ln x, & x>1.\end{cases}$

有 $f(-2)=4-8-4=-8<\frac{a}{2}$，矛盾，故排除 A 选项；

当 $a=2$ 时，$\frac{a}{2}=1$，$f(x)=\begin{cases}x^2-4x+4, & x\le 1.\\ 2x-2\ln x, & x>1.\end{cases}$

$x\le 1$ 时，$f(x)=x^2-4x+4$，对称轴直线 $x=2$，所以 $f(x)\ge f(1)=1$，

$x>1$时，$f(x)=2x-2\ln x$，$f'(x)=2-\dfrac{2}{x}>0$，所以$f(x)>f(1)=2$，

故在$\mathbf{R}$上$f(x)_{\min}=1$，所以$f(x)\ge\dfrac{a}{2}$恒成立，排除 B 选项；

当$a=4$时，$\dfrac{a}{2}=2$，$f(x)=\begin{cases}x^2-8x+8, & x\le 1.\\ 2x-4\ln x, & x>1.\end{cases}$

有$f(1)=1-8+8=1<\dfrac{a}{2}$，矛盾，故排除 D 选项；

故选 C.

方法二：

令$g(x)=x^2-2ax+2a, x\le 1$，对称轴为$x=a$.

当$a\le 1$时，$g(x)_{\min}=g(a)=-a^2+2a\ge\dfrac{a}{2}$，有$0\le a\le 1$，

当$a>1$时，$g(x)_{\min}=g(1)=1\ge\dfrac{a}{2}$，有$1<a\le 2$，

综上$0\le a\le 2$；

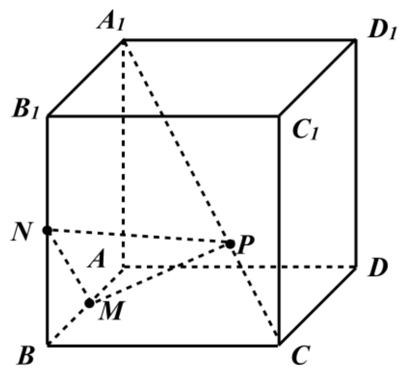
令$h(x)=2x-a\ln x, x>1$，$h'(x)=2-\dfrac{a}{x}, x>1$，

因为$g(1)\ge\dfrac{a}{2}$，所以$a\le 2$，有$h'(x)>0$恒成立，所以$h(x)$在$(1,+\infty)$递增，

所以$h(1)=2\ge\dfrac{a}{2}$，所以$a\le 4$；

取交集，得$0\le a\le 2$，故选 C.

10. 如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$M,N$分别是棱$AB,BB_1$的中点，点$P$在对角线$CA_1$上运动，当$\triangle PMN$的面积取得最小值时，点$P$的位置是




A.线段$CA_1$的三等分点，且靠近点$A_1$

B.线段$CA_1$的中点

C.线段$CA_1$的三等分点，且靠近点$C$

D.线段$CA_1$的四等分点，且靠近点$C$

【答案】B

【解析】建立以$A$为原点，以$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AA_1}$方向分别为$x,y,z$轴正方向的空间直角坐标系．设正方体的棱长为1，$P$为$A_1C$上动点，可设$P(\lambda,\lambda,1-\lambda)$，其中$0\le\lambda\le1$.

$M(\frac{1}{2},0,0)$，$N(1,0,\frac{1}{2})$

经计算$|PM|=\sqrt{(\lambda-\frac{1}{2})^2+\lambda^2+(1-\lambda)^2}=\sqrt{3\lambda^2-3\lambda+\frac{5}{4}}$，

$|PN|=\sqrt{(\lambda-1)^2+\lambda^2+(1-\lambda-\frac{1}{2})^2}=\sqrt{3\lambda^2-3\lambda+\frac{5}{4}}$，

所以$|PM|=|PN|$，$\triangle PMN$为等腰三角形，底边$|MN|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

设底边$MN$上的高为$h$，则有$h=\sqrt{|PM|^2-(\frac{|MN|}{2})^2}=\sqrt{|PM|^2-\frac{1}{8}}$，

而$3\lambda^2-3\lambda+\frac{5}{4}=3(\lambda-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$，在$\lambda=\frac{1}{2}$时最小，此时$P$为$CA_1$中点，故选 B.

## 第二部分（非选择题 共 110 分）

## 二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

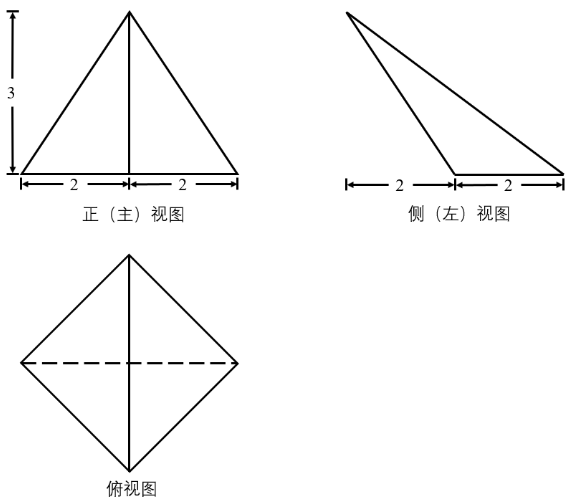
11. 若复数 $z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}$，则 $|\bar{z}|=$________.

【答案】$\sqrt{2}$

【解析】$z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{2(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=1-\mathrm{i}$，

$\bar{z}=1+\mathrm{i}\Rightarrow|\bar{z}|=\sqrt{2}$.

12. 已知某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的最长棱的长为_______，它的体积为________.



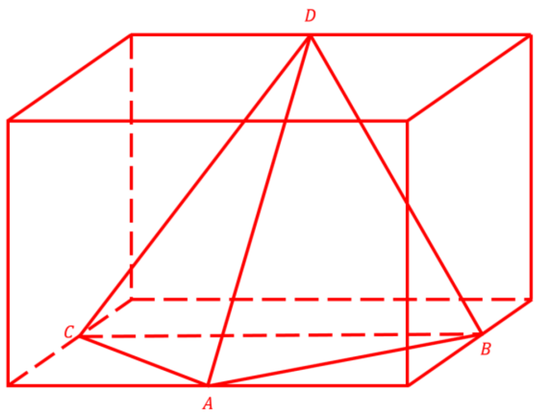

【答案】5；4

【解析】$AB=AC=2\sqrt{2},BC=4,$

$AD=\sqrt{3^2+4^2}=5,$

$BD=CD=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+3^2}=\sqrt{17}$

最长棱为 5，体积 $V=\dfrac{1}{3}\times4\times2\times\dfrac{1}{2}\times3=4$.



13. 某购物网站开展一种商品的预约购买，规定每个手机号只能预约一次，预约后通过摇号的方式决定能否购买到该商品.规则如下：（i）摇号的初始中签率为0.19；（ii）当中签率不超过1时，可借助“好友助力”活动增加中签率，每邀请到一位好友参与“好友助力”活动可使中签率增加0.05.为了使中签率超过0.9，则至少需要邀请______位好友参与到“好友助力”活动.

【答案】15

【解析】设需$x$位好友，

$0.19+0.05x>0.9, x\in \mathbf{N}$，

$x>14.2$，

所以$x=15$.

14. 已知函数$f(x)=x\cos\frac{\pi x}{2}$. 数列$\{a_n\}$满足$a_n=f(n)+f(n+1)\,(n\in \mathbf{N}^*)$，则数列$\{a_n\}$的前 100 项和是______.

【答案】100

【解析】因为$a_n=f(n)+f(n-1)=n\cos\frac{n\pi}{2}+(n+1)\cos\frac{(n+1)\pi}{2}$，

所以$a_{4n-3}=(4n-3)\sin(2n\pi)-(4n-2)\cos(2n\pi)$，

$a_{4n-2}=-(4n-2)\cos(2n\pi)+(4n-1)\sin(2n\pi)$，

$a_{4n-1}=(4n-1)\sin(n\pi)+(4n)\cos(2n\pi)$，

$a_{4n}=(4n)\cos(2n\pi)-(4n+1)\sin(2n\pi)$，

所以$a_{4n}+a_{4n-1}+a_{4n-2}+a_{4n-3}=4$，

所以$a_1+a_2+a_3+a_4=4$，$a_5+a_6+a_7+a_8=4$，依次类推，可知$a_{97}+a_{98}+a_{99}+a_{100}=4$.

所以$S_{100}=a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_{97}+a_{98}+a_{99}+a_{100}=4\times 25=100$.

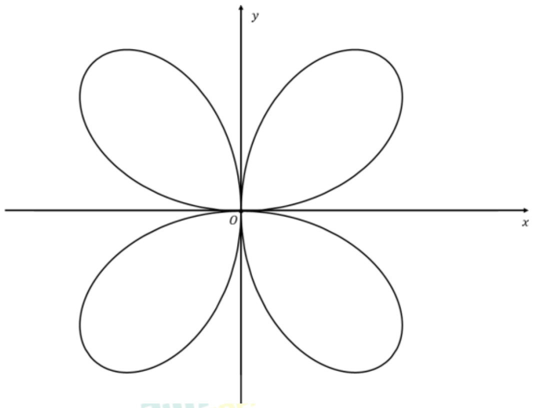
15. 数学中有许多寓意美好的曲线，曲线 C:$(x^2+y^2)^3=4x^2y^2$ 被称为“四叶玫瑰线”(如图所示).给出下列三个结论：

①曲线 C 关于直线 $y=x$ 对称；

②曲线 C 上任意一点到原点的距离都不超过 1；

③存在一个以原点为中心、边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形，使得曲线 C 在此正方形区域内(含边界).

其中，正确结论的序号是________.



(第 15 题图)

注：本题给出的结论中，有多个符合题目要求.全部选对得 5 分，不选或者有错选得 0 分，其他得 3 分.

【答案】①②

【解析】①将点 $(y,x)$ 代入曲线方程，与原式相同，则曲线关于 $y=x$ 对称，故①正确.

②设曲线上一点坐标 $P(x_0,y_0)$，则到坐标原点距离 $d=\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2}$，

因为 $P(x_0,y_0)$ 在曲线上，则 $(x_0{}^2+y_0{}^2)^3=4x_0{}^2y_0{}^2$，

$x_0{}^2+y_0{}^2\geq 2\sqrt{x_0{}^2y_0{}^2}=2\sqrt{\dfrac{(x_0{}^2+y_0{}^2)^3}{4}}$，

所以 $x_0{}^2+y_0{}^2\geq\sqrt{(x_0{}^2+y_0{}^2)^3}$，

所以 $(x_0{}^2+y_0{}^2)^2\geq(x_0{}^2+y_0{}^2)^3$，

所以 $x_0{}^2+y_0{}^2\leq 1$，

所以 $d\leq 1$，当且仅当 $x_0{}^2=y_0{}^2$ 时取等，

所以曲线到坐标原点距离不超过 1，故②正确.

③由图可知，曲线 C 关于 $x,y$ 轴对称且关于原点中心对称，

则在第一象限内，由②可知，$x^2+y^2\leq 1$，当且仅当 $x^2=y^2=\dfrac{1}{2}$ 时取等，

当$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$y=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$d$有最大值，

若正方形边长为$\sqrt{2}$，且中心为原点，则第一象限内的正方形边长为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，

即正方形右上顶点为曲线C到原点距离最大的点，

过该点向$x,y$轴作垂线，可知曲线上的部分点不在该正方形区域内，故③错误.

**三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演练步骤或证明过程。**

16.（本小题 14 分）

在$\triangle ABC$中，$b\sin A = a\cos(B-\frac{\pi}{6})$.

（Ⅰ）求$B$；

（Ⅱ）若$c=5$,______.求$a$.

从①$b=7$；②$C=\frac{\pi}{4}$这两个条件中任选一个，补充在上面问题中并作答.

注：如果选择多个条件分别作答，按第一个解答计分.

【解析】

（Ⅰ）由正弦定理得：$\sin B\sin A=\sin A\cos(B-\frac{\pi}{6})$

$\because A\in(0,\pi)$ $\therefore \sin A\neq 0$

$\therefore \sin B=\cos(B-\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B$

$\therefore \tan B=\frac{\sin B}{\cos B}=\sqrt{3}$

$\because B\in(0,\pi)$ $\therefore B=\frac{\pi}{3}$

（Ⅱ）若选择条件①，则$B=\frac{\pi}{3},b=7,c=5$，求$a$.

由余弦定理得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，得$49=a^2+25-5a$

$\therefore (a-8)(a+3)=0$

$\because a>0$

$\therefore a=8$

另解：

若选择条件②，则 $B=\dfrac{\pi}{3},C=\dfrac{\pi}{4},c=5$，求 $a$.

$\because A+B+C=\pi$，$\therefore A=\dfrac{5\pi}{12}$

$\therefore \sin A=\sin(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{4})=\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{6}\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

由正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$

$\therefore a=\dfrac{c\sin A}{\sin C}=\dfrac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\bullet\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\dfrac{5(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}=\dfrac{5(\sqrt{3}+1)}{2}$

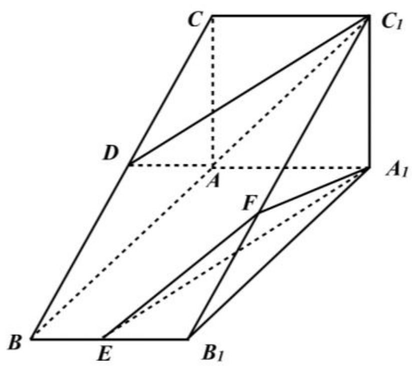
17．（本小题 14 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 $ABC$，四边形 $ACC_1A_1$ 是正方形，点 $D,E$ 分别是棱 $BC,BB_1$ 的中点，$AB=4,AA_1=2,BC=2\sqrt{5}$.

（Ⅰ）求证: $AB\perp CC_1$；

（Ⅱ）求二面角 $D-AC_1-C$ 的余弦值；

（Ⅲ）若点 $F$ 在棱 $B_1C_1$ 上，且 $B_1C_1$=4$B_1F$，判断平面 $AC_1D$ 与平面 $A_1EF$ 是否平行，并说明理由.




【解析】

（Ⅰ）在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，

$\because$ 四边形 $ACC_1A_1$ 是正方形，$\therefore CC_1\perp AC$，

又 $\because$ 平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 $ABC$，平面 $ACC_1A_1\cap$ 平面 $ABC=AC$，

且 $CC_1\subset$ 平面 $ACC_1A_1$，

$\therefore CC_1\perp$ 平面 $ABC$，又 $\because AB\subset$ 平面 $ABC$，$\therefore AB\perp CC_1$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$CC_1 \perp AC$，$CC_1 \perp AB$，且 $CC_1 // AA_1$，$\therefore AA_1 \perp AC$，$AA_1 \perp AB$，

又$\because$正方形 $ACC_1A_1$ 中，$AA_1=2$，$\therefore AC=2$，$AB=4$，$BC=2\sqrt{5}$，

$\therefore BC^2 = AC^2 + AB^2$，$\therefore AC \perp AB$，

则以 $A$ 为原点，$AB$ 为 $x$ 轴，$AA_1$ 为 $y$ 轴，$AC$ 为 $z$ 轴建立空间直角坐标系，

$\therefore A(0,0,0)$，$C(0,0,2)$，$B(4,0,0)$，$C_1(0,2,2)$，$\because D$ 为 $BC$ 中点，$\therefore D(2,0,1)$，

又$\because AB \perp AC$，$AB \perp AA_1$，且 $AC \cap AA_1 = A$，$AC \subset$ 平面 $ACC_1$，$AA_1 \subset$ 平面 $ACC_1$，

$\therefore AB \perp$ 平面 $ACC_1$，$\therefore$ 平面 $ACC_1$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$，

设平面 $ADC_1$ 法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{AD}=(2,0,1)$，$\overrightarrow{AC_1}=(0,2,2)$，

则 $\begin{cases} \boldsymbol{m} \perp \overrightarrow{AD} \\ \boldsymbol{m} \perp \overrightarrow{AC_1} \end{cases}$，$\therefore \begin{cases} \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \\ \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{AC_1} = 0 \end{cases}$，$\therefore \begin{cases} 2x+z=0 \\ 2y+2z=0 \end{cases}$，令 $z=-2$，得 $x=1$，$y=2$，

则 $\boldsymbol{m}=(1,2,-2)$，设二面角 $D-AC_1-C$ 为 $\theta$，

则 $|\cos\theta| = \left|\dfrac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}| \cdot |\boldsymbol{n}|}\right| = \left|\dfrac{1}{1 \cdot 3}\right| = \dfrac{1}{3}$，又二面角 $D-AC_1-C$ 为锐角，

$\therefore$ 二面角 $D-AC_1-C$ 的余弦值为 $\dfrac{1}{3}$.

(Ⅲ) 由（Ⅱ）知，$B_1(4,2,0)$，$B(4,0,0)$，$A_1(0,2,0)$，且 $E$ 为 $BB_1$ 中点，

$\therefore E(4,1,0)$，$\overrightarrow{B_1C_1}=(-4,0,2)$，又$\because F$ 在棱 $B_1C_1$ 上，且 $B_1C_1=4B_1F$，

$\therefore \overrightarrow{B_1F} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{B_1C_1} = (-1,0,\dfrac{1}{2})$，$\therefore F(3,2,\dfrac{1}{2})$，$\therefore \overrightarrow{A_1F}=(3,0,\dfrac{1}{2})$ 且 $\overrightarrow{A_1E}=(4,-1,0)$，

设平面 $A_1EF$ 法向量为 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，

$\therefore \begin{cases} \boldsymbol{a} \perp \overrightarrow{A_1F} \\ \boldsymbol{a} \perp \overrightarrow{A_1E} \end{cases}$，$\therefore \begin{cases} \boldsymbol{a} \cdot \overrightarrow{A_1F}=0 \\ \boldsymbol{a} \cdot \overrightarrow{A_1E}=0 \end{cases}$，$\therefore \begin{cases} 3x_1 + \dfrac{1}{2}z_1 = 0 \\ 4x_1 - y_1 = 0 \end{cases}$，

令 $x_1=1$，则 $y_1=4$，$z_1=-6$，$\therefore \boldsymbol{a}=(1,4,-6)$，

又平面 $AC_1D$ 法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,2,-2)$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{m}$ 不平行，

$\therefore$ 平面 $AC_1D$ 与平面 $A_1EF$ 不平行.

18．（本小题 14 分）

某科研团队研发了一款快速检测某种疾病的试剂盒.为了解该试剂盒检测的准确性，质检部门从某地区（人数众多）随机选取了80位患者和100位非患者，用该试剂盒分别对他们进行检测，结果如下：

| 患者的检测结果 | 人数 |
|---|---|
| 阳性 | 76 |
| 阴性 | 4 |

| 非患者的检测结果 | 人数 |
|---|---|
| 阳性 | 1 |
| 阴性 | 99 |

（Ⅰ）从该地区患者中随机选取一人，对其检测一次，估计此患者检测结果为阳性的概率；

（Ⅱ）从该地区患者中随机选取3人，各检测一次，假设每位患者的检测结果相互独立，以 $X$ 表示检测结果为阳性的患者人数，利用（Ⅰ）中所得概率，求 $X$ 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）假设该地区有10万人，患病率为0.01.从该地区随机选取一人，用该试剂盒对其检测一次.若检测结果为阳性，能否判断此人患该疾病的概率超过0.5？并说明理由.

【解析】

（Ⅰ）设“80 名患者中随机抽取 1 人检测结果为阳性”为事件 $A$，

由表知，80 名患者中，检测结果为阳性的人数为 76 人，

由频率估计概率得，$P\left(A\right)=\dfrac{76}{80}=\dfrac{19}{20}$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$P=P\left(A\right)=\dfrac{19}{20}$，且 $X$ 的可能取值为 0,1,2,3

$P(X=0)=C_3^0\left(\frac{19}{20}\right)^0\left(\frac{1}{20}\right)^3=\frac{1}{8000}$，$P(X=1)=C_3^1\left(\frac{19}{20}\right)^1\left(\frac{1}{20}\right)^2=\frac{57}{8000}$

$P(X=2)=C_3^2\left(\frac{19}{20}\right)^2\left(\frac{1}{20}\right)^1=\frac{1083}{8000}$，$P(X=3)=C_3^3\left(\frac{19}{20}\right)^3\left(\frac{1}{20}\right)^0=\frac{6859}{8000}$

$X$ 的分布列如下：

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{8000}$ | $\frac{57}{8000}$ | $\frac{1083}{8000}$ | $\frac{6859}{8000}$ |

$E(X)=0\times\frac{1}{8000}+1\times\frac{57}{8000}+2\times\frac{1083}{8000}+3\times\frac{6859}{8000}=\frac{57}{20}$.

（III）不能判断此人患该疾病的概率超过 0.5，理由如下：

该地区 10 万人中患者 $100000\times0.01=1000$ 人，

经该试剂盒检测：患者检测结果为阳性应为 $1000\times\frac{19}{20}=950$ 人，

非患者检测结果为阳性应为 $99000\times\frac{1}{100}=990$ 人，

设“该人检测结果为阳性且患该疾病”为事件 $B$，

则 $P(B)=\frac{950}{950+990}<\frac{1}{2}$，

所以，该人患病概率不会超过 0.5.

19.（本小题 14 分）

已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，圆$O:x^2+y^2=r^2$（$O$为坐标原点）.过点$(0,b)$且斜率为$1$的直线与圆$O$交于点$(1,2)$，与椭圆$C$的另一个交点的横坐标为$-\frac{8}{5}$.

（Ⅰ）求椭圆$C$的方程和圆$O$的方程；

（Ⅱ）过圆$O$上动点$P$作两条互相垂直的直线$l_1$，$l_2$，若直线$l_1$的斜率为$k(k\neq 0)$且$l_1$与椭圆$C$相切，试判断直线$l_2$与椭圆$C$的位置关系，并说明理由.

【解析】

（Ⅰ）将点$(1,2)$代入圆$O$得$r^2=1+4=5$，故圆$O$的方程为$x^2+y^2=5$

设过点$(0,b)$，斜率为$1$的直线为$y=x+b$

将点$(1,2)$代入得$2=1+b$，故$b=1$，该直线方程为$y=x+1$

将$x=-\frac{8}{5}$代入，得$y=-\frac{3}{5}$

将$(-\frac{8}{5},-\frac{3}{5})$代入椭圆$C$，得$\frac{64}{25a^2}+\frac{9}{25}=1$，解得$a^2=4$

故椭圆$C$的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$

（Ⅱ）$l_2$与椭圆$C$相切.

证明：设$P(x_0,y_0)$，则${x_0}^2+{y_0}^2=5$

过点$P(x_0,y_0)$的直线$l_1$为$y-y_0=k(x-x_0)$

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\ y-y_0=k(x-x_0)\end{cases}$

得 $(1+4k^2)x^2+8k(y_0-kx_0)x+4(y_0-kx_0)^2-4=0$

$\Delta=64k^2(y_0-kx_0)^2-4(1+4k^2)[4(y_0-kx_0)^2-4]=16[4k^2+1-(y_0-kx_0)^2]$ ①

因为 $l_1$ 与椭圆 $C$ 相切

所以 $\Delta=0$

即 $4k^2+1-(y_0-kx_0)^2=0$

即 $2kx_0y_0=y_0{}^2+k^2x_0{}^2-4k^2-1$ ②

设 $l_2$ 与椭圆 $C$ 联立后的判别式为 $\Delta'$

因为 $l_2\perp l_1$

所以 $l_2$ 的斜率为 $-\dfrac{1}{k}$，将①式中的 $k$ 替换成 $-\dfrac{1}{k}$，得

$$\Delta'=16[\frac{4}{k^2}+1-(y_0+\frac{x_0}{k})^2]$$

$$=16(\frac{4}{k^2}+1-y_0{}^2-\frac{x_0{}^2}{k^2}-\frac{2x_0y_0}{k})$$

$$=16\cdot\frac{4+k^2-k^2y_0{}^2-x_0{}^2-2kx_0y_0}{k^2}$$

代入②，得

$$\Delta'=16\cdot\frac{4+k^2-k^2y_0{}^2-x_0{}^2-y_0{}^2-k^2x_0{}^2+4k^2+1}{k^2}$$

$$=16\cdot\frac{5+5k^2-(x_0{}^2+y_0{}^2)(1+k^2)}{k^2}$$

再代入 $x_0{}^2+y_0{}^2=5$，得

$\Delta'=0$

故 $l_2$ 与椭圆 $C$ 相切.

20.（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{x+1}{x-1}$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）判断函数 $f(x)$ 的零点的个数，并说明理由；

（Ⅲ）设 $x_0$ 是 $f(x)$ 的一个零点，证明曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 在点 $\left(x_0,\mathrm{e}^{x_0}\right)$ 处的切线也是曲线 $y=\ln x$ 的切线.

【解析】

（Ⅰ）$f'(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{x-1-x-1}{(x-1)^2}=\mathrm{e}^x+\dfrac{2}{(x-1)^2}$

$f(0)=1+1=2$，　$f'(0)=1+2=3$，

切线 $y=3x+2$

（Ⅱ）方法一：

由（Ⅰ）知当 $x\in(-\infty,1),(1,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

$f(-2)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}-\dfrac{1}{3}<0$，$f(0)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上有且只有一个零点，

$f(2)=\mathrm{e}^2-3>0$，$f(\dfrac{5}{4})=\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}-9<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有且只有一个零点，

所以 $f(x)$ 有 2 个零点.

方法二：

由（Ⅰ）知 $f'(x)=e^x+\dfrac{2}{(x-1)^2}>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $f(-1)=\dfrac{1}{e}>0$， $f(-2)=\dfrac{1}{e^2}-\dfrac{1}{3}<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上有唯一零点 $x_1$，且 $x_1\in(-2,-1)$， $f(x_1)=0$，即 $e^{x_1}=\dfrac{x_1+1}{x_1-1}$

因为 $1<-x_1<2$， $f(-x)=e^{-x_1}-\dfrac{-x_1+1}{-x_1-1}=\dfrac{x_1-1}{x_1+1}+\dfrac{-x_1+1}{x_1+1}=0$，

所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有唯一零点 $-x_1$，

综上， $f(x)$ 有且只有 2 个零点.

（III） $f(x_0)=e^{x_0}-\dfrac{x_0+1}{x_0-1}=0$，①

$y=e^x$ 在 $(x_0,e^{x_0})$ 处的切线为 $l_1: y-e^{x_0}=e^{x_0}(x-x_0)$

即 $l_1: y=e^{x_0}x+e^{x_0}(1-x_0)$

代入①得 $y=e^{x_0}x+\dfrac{x_0+1}{x_0-1}(1-x_0)$

即 $y=e^{x_0}x-1-x_0$

设 $y=\ln x$ 上一点 $(x_1,\ln x_1)$，在点 $(x_1,\ln x_1)$ 处的切线 $l_2: y-\ln x_1=\dfrac{1}{x_1}(x-x_1)$

当 $\dfrac{1}{x_1}=e^{x_0}$ 时， $l_2: y=e^{x_0}x-1-x_0$，

此时 $l_2$ 与 $l_1$ 重合，

所以 $y=e^x$ 在 $(x_0,e^{x_0})$ 处的切线也是 $y=\ln x$ 的切线.

21. （本小题14分）

设数列 $A$： $a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geq 3)$ 的各项均为正整数，且 $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$． 若对任意 $k\in\{3,4,\cdots,n\}$，存在正整数 $i,j(1\leq i\leq j<k)$ 使得 $a_k=a_i+a_j$，则称数列 $A$ 具有性质 $T$．

（Ⅰ）判断数列 $A_1:1,2,4,7$ 与数列 $A_2:1,2,3,6$ 是否具有性质 $T$；（只需写出结论）

（Ⅱ）若数列 $A$ 具有性质 $T$，且 $a_1=1,a_2=2,a_n=200$，求 $n$ 的最小值；

（Ⅲ）若集合 $S=\{1,2,3,\cdots,2019,2020\}=S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4\cup S_5\cup S_6$，且 $S_i\cap S_j=\varnothing$（任意 $i,j\in\{1,2,\cdots,6\},i\neq j$）．求证：存在 $S_i$，使得从 $S_i$ 中可以选取若干元素（可重复选取）组成一个具有性质 $T$ 的数列．

【解析】

（Ⅰ）数列 $A_1$ 不具有性质 $T$；数列 $A_2$ 具有性质 $T$．

（Ⅱ）由题可知 $a_2=2,a_3\leq 2a_2=4,a_4\leq 2a_3=8,\cdots,a_8\leq 2a_7=128$，

所以 $n\geq 9$．

若 $n=9$，因为 $a_9=200$ 且 $a_9\leq 2a_8$，所以 $128\geq a_8\geq 100$．

同理， $64\geq a_7\geq 50,32\geq a_6\geq 25,16\geq a_5\geq 12.5,8\geq a_4\geq 6.25,4\geq a_3\geq 3.125$．

因为数列各项均为正整数，所以 $a_3=4$．数列前三项为 $1,2,4$．

因为数列 $A$ 具有性质 $T$， $a_4$ 只可能为 $4,5,6,8$ 之一，而又因为 $8\geq a_4\geq 6.25$，

所以 $a_4=8$．

同理，有 $a_5=16,a_6=32,a_7=64,a_8=128$．

此时数列为 $1,2,4,8,16,32,64,128,200$．

但数列中不存在 $1\leq i\leq j<9$ 使得 $200=a_i+a_j$，所以该数列不具有性质 $T$．

所以 $n\geq 10$

当 $n=10$ 时，取 $A:1,2,4,8,16,32,36,64,100,200$（构造数列不唯一）

经验证，此数列具有性质 $T$.

所以，$n$ 的最小值为 10.

（III）反证法：假设结论不成立，即对任意 $S_i(i=1,2,\cdots,6)$ 都有：

若正整数 $a,b\in S_i$ ,$a<b$，则 $b-a\notin S_i$，

否则，当 $a<b-a$ 时，$a,b-a,b$ 是一个具有性质 $T$ 的数列；

当 $a>b-a$ 时，$b-a,a,b$ 是一个具有性质 $T$ 的数列；

当 $a=b-a$ 时，$a,a,b$ 是一个具有性质 $T$ 的数列.

（i）由题意可知，这 6 个集合中至少有一个集合的元素个数不少于 337 个，不妨设此集合为 $S_1$，从 $S_1$ 中取出 337 个数，记为 $a_1,a_2,\cdots,a_{337}$，且 $a_1<a_2<\cdots<a_{337}$，

令集合 $N_1=\{a_{337}-a_i\mid i=1,2,\cdots,336\}\subseteq S$.

由假设，对任意 $i=1,2,\cdots,336,a_{337}-a_i\notin S_1$，所以 $N_1\subseteq S_2\cup S_3\cup S_4\cup S_5\cup S_6$.

（ii）在 $S_2,S_3,S_4,S_5,S_6$ 中至少存在一个集合 $N_1$ 包含中的至少 68 个元素，不妨设这个集合为 $S_2$，从 $S_2\cap N_1$ 中取出 68 个数，记为 $b_1,b_2,\cdots,b_{68}$，且 $b_1<b_2<\cdots<b_{68}$.

令集合 $N_2=\{b_{68}-b_i\mid i=1,2,\cdots,67\}\subseteq S$.

由假设 $b_{68}-b_i\notin S_2$.

对任意 $k=1,2,\cdots,68$，存在 $s_k\in\{1,2,\cdots,336\}$ 使得 $b_k=a_{337}-a_{s_k}$，

所以对任意 $i=1,2,\cdots,67,b_{68}-b_i=(a_{337}-a_{s_{68}})-(a_{337}-a_{s_k})=a_{s_k}-a_{s_{68}}$，

由假设 $a_{s_k}-a_{s_{68}}\notin S_1$，所以 $b_{68}-b_i\notin S_1$，所以 $b_{68}-b_i\notin S_1\cup S_2$，

所以 $N_2\subseteq S_3\cup S_4\cup S_5\cup S_6$.

（iii）在 $S_3,S_4,S_5,S_6$ 中至少有一个集合包含 $N_2$ 中的至少 17 个元素，不妨设这个集合为 $S_3$，从 $S_3\cap N_2$ 中取出 17 个数记为 $c_1,c_2,\cdots,c_{17}$，且 $c_1<c_2<\cdots<c_{17}$.

令集合 $N_3=\{c_{17}-c_i\,|\,i=1,2,\cdots,16\}\subseteq S$.

由假设 $c_{17}-c_i\notin S_3$.

对任意 $k=1,2,\cdots,17$，存在 $l_k\in\{1,2,\cdots,67\}$ 使得 $c_k=b_{68}-b_{l_k}$，

所以对任意 $i=1,2,\cdots,16,c_{17}-c_i=(b_{68}-b_{l_{17}})-(b_{68}-b_{l_i})=b_{l_i}-b_{l_{17}}$，

同样，由假设可得 $b_{l_i}-b_{l_{17}}\notin S_1\cup S_2$，所以 $c_{17}-c_i\notin S_1\cup S_2\cup S_3$，

所以 $N_3\subseteq S_4\cup S_5\cup S_6$.

（iv）类似地，在 $S_4,S_5,S_6$ 中至少有一个集合包含 $N_3$ 中的至少 6 个元素，不妨设这个集合为 $S_4$，从 $S_4\cap N_3$ 中取出 6 个数，记为 $d_1,d_2,\cdots,d_6$，且 $d_1<d_2<\cdots<d_6$，

则 $N_4=\{d_6-d_i\,|\,i=1,2,\cdots,5\}\subseteq S_5\cup S_6$.

（v）同样，在 $S_5,S_6$ 中至少有一个集合包含 $N_4$ 中的至少 3 个元素，不妨设这个集合为 $S_5$，从 $S_5\cap N_4$ 中取出 3 个数，记为 $e_1,e_2,e_3$，且 $e_1<e_2<e_3$，

同理可得 $N_5=\{e_3-e_1,e_3-e_2\}\subseteq S_6$.

（vi）由假设可得 $e_2-e_1=(e_3-e_1)-(e_3-e_2)\notin S_6$.

同上可知，$e_2-e_1\notin S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4\cup S_5$，

而又因为 $e_2-e_1\in S$，所以 $e_2-e_1\in S_6$，矛盾.

所以假设不成立.

所以原命题成立.