2020 年北京市海淀区高三一模数学考试逐题解析

2020.5

本试卷分为第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，满分 150 分，考试时长 120 分钟。考生务必将答案写在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第 I 卷（选择题　共 40 分）

一、选择题：共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 在复平面内,复数$\mathrm{i}(2-\mathrm{i})$对应的点位于

（A）第一象限　　（B）第二象限

（C）第三象限　　（D）第四象限

【答案】A

【解析】本题考查复数的运算.

$\mathrm{i}(2-\mathrm{i})=-\mathrm{i}^2+2\mathrm{i}=1+2\mathrm{i}$

对应点$(1,2)$在第一象限内.

故选 A.

2. 已知集合$A=\{x\,|\,0<x<3\}$, $A\cap B=\{1\}$,则集合B可以是

（A）$\{1,2\}$　　（B）$\{1,3\}$

（C）$\{0,1,2\}$　　（D）$\{1,2,3\}$

【答案】B

【解析】本题考查集合运算.

选项 A: $A\bigcap B=\{1,2\}$

选项 B: $A\bigcap B=\{1\}$

选项 C: $A\bigcap B=\{1,2\}$

选项 D: $A\bigcap B=\{1,2\}$

故选 B.

3. 已知双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的离心率是 $\sqrt{5}$,则 b 的值为

（A）1　　（B）2

（C）3　　（D）4

【答案】B

【解析】本题考查双曲线的离心率.

由 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$,可知 $a=1$

$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+b^2}=\sqrt{5}$

解得 $b^2=4$

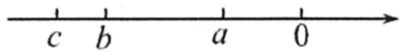
$\because b>0$

$\therefore b=2$

故选 B.

4. 已知实数a,b,c在数轴上对应的点如图所示,则下列式子中正确的是

（A）$b-a<c+a$ （B）$c^2<ab$



（C）$\frac{c}{b}>\frac{c}{a}$ （D）$|b|c<|a|c$

【答案】D

【解析】本题考查不等式的性质.

由图可知,$c<b<a<0$,且$|c|>|b|>|a|$

选项 A:

$\because c<b,a<0, \therefore c+a<c,b-a>b.$

$\therefore c+a<c<b<b-a.$

$\therefore c+a<b-a$,故 A 项错误;

选项 B:

$\because c<b<a<0, \therefore c^2>b^2>a^2$,且$b^2>ab$

$\therefore c^2>b^2>ab$

$\therefore c^2>ab$,故选项 B 错误;

选项 C:

$\because b<a<0, \therefore \frac{1}{b}>\frac{1}{a}$

$\therefore \frac{c}{b}<\frac{c}{a}$,故选项 C 错误;

选项 D:

$\because |b|>|a|$且$c<0$

$\therefore |b|\cdot c<|a|\cdot c$,故选项 D 正确.

5. 在$(\frac{1}{x}-2x)^6$的展开式中,常数项为

（A）-120　　（B）120　　（C）-160　　（D）160

【答案】C

【解析】本题考查二项式定理.

$T_{r+1}=C_6^r\cdot(\frac{1}{x})^{6-r}\cdot(-2x)^r=C_6^r\cdot(-2)^r\cdot x^{2r-6}$,

其中常数项需满足$2r-6=0$,即$r=3$,

$T_4=C_6^3\cdot(-2)^3=20\times(-8)=-160$.

故选 C.

6. 如图,半径为 1 的圆M与直线l相切于点A,圆M沿着直线l滚动.当圆M滚到圆M'时,圆M'与直线l相切于点B,点A运动到点A',线段AB的长度为$\frac{3\pi}{2}$,则点M'到直线BA'的距离为

（A）1　　（B）$\frac{\sqrt{3}}{2}$

（C）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　（D）$\frac{1}{2}$

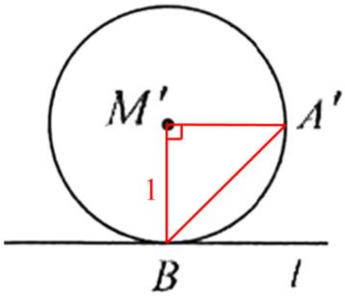
【答案】C

【解析】本题考查直线与圆.

由题可知$AB=\frac{3\pi}{2}$,且圆M的周长为2π,

所以由圆M到圆M'的过程中沿着直线l旋转了$\frac{3}{4}$圈,

所以点 A' 的位置如图所示，



此时 $\triangle A'BM'$ 为等腰直角三角形，

所以 M' 到直线 BA' 的距离为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

故选 C.

7. 已知函数 $f(x)=|x-m|$ 与函数 $g(x)$ 的图象关于 y 轴对称.若 $g(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内单调递减,则 m 的取值范围为

（A）$[-1,+\infty)$　　（B）$(-\infty,-1]$　　（C）$[-2,+\infty)$　　（D）$(-\infty,-2]$

【答案】D

【解析】本题考查函数单调性.

因为函数 $f(x)=|x-m|$ 与函数 $g(x)$ 的图象关于 y 轴对称,

所以函数 $g(x)=|x+m|$.

由解析式可知函数 $g(x)$ 在区间 $(-\infty,-m)$ 单调递减,

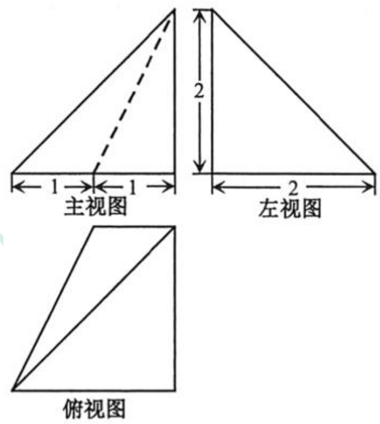
若函数 $g(x)$ 在区间 $(1,2)$ 单调递减,

则 $(1,2)\subseteq(-\infty,-m)$,即 $-m\geq 2$,

解得 $m\leq -2$.

故选 D.

8. 某四棱锥的三视图如图所示,该四棱锥中最长棱的棱长为



（A） $\sqrt{5}$

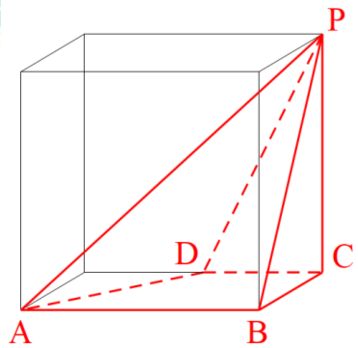
（B） $2\sqrt{2}$

（C） $2\sqrt{3}$

（D） $\sqrt{13}$

【答案】C

【解析】本题考查三视图.



四棱锥的直观图如图所示:由图可知,

该四棱锥中最长棱的棱长为 $PA=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}$.

故选 C.

9. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$,则"$\forall p,r\in\mathbf{N}^*,a_{p+r}=a_pa_r$"是"$\{a_n\}$ 为等比数列"的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】本题考查等比数列.

充分条件:因为数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=2$,并且对于 $\forall p,r\in\mathbf{N}^*,a_{p+r}=a_pa_r$ 都成立,

所以 $p\geq1,r\geq1$,即 $a_2=a_1\cdot a_1=4,a_3=a_1\cdot a_2=8,a_4=a_1\cdot a_3=16,\cdots$

所以 $\{a_n\}$ 各项均不为 0.

令 $r=1$,则 $a_{p+r}=a_{p+1}=a_1\cdot a_p=2a_p$,即 $\dfrac{a_{p+1}}{a_p}=2$,

所以 $\{a_n\}$ 为以 $a_1=2$ 为首项,公比 $q=2$ 的等比数列,所以充分条件成立;

必要条件:若$\{a_n\}$为等比数列,则公比q可以为 1.

当$q=1$时,$a_{p+r}=a_1\cdot q^{p+r-1}=a_1=2$,$a_p=a_1\cdot q^{p-1}=a_1=2$,$a_r=a_1\cdot q^{r-1}=a_1=2$,

此时$a_pa_r=4\neq a_{p+r}=2$,所以必要条件不成立.

所以“$\forall p,r\in\mathbf{N}^*,a_{p+r}=a_pa_r$”是“$\{a_n\}$为等比数列”的充分而不必要条件,

故选 A.

10. 形如$2^{2^n}+1$(n是非负整数)的数称为费马数,记为F_n.数学家费马根据F_0,F_1,F_2,F_3,F_4都是质数提出了猜想:费马数都是质数.多年之后,数学家欧拉计算出F_5不是质数,那么F_5的位数是

(参考数据:$\lg 2\approx 0.3010$)

(A)9　　(B)10　　(C)11　　(D)12

【答案】B

【解析】本题考查指对数运算.

由题知,$F_5=2^{2^5}+1=2^{32}+1\approx 2^{32}=10^{\lg 2^{32}}=10^{32\lg 2}\approx 10^{32\times 0.3010}=10^{9.632}=10^{0.632}\times 10^9$

因为$1<10^{0.632}<10$,所以F_5的位数是 10.

故选 B.

第 II 卷（非选择题　共 110 分）

二、填空题：共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 已知点 $P(1,2)$ 在抛物线 $C: y^2=2px$ 上,则抛物线 C 的准线方程为______.

【答案】$x=-1$

【解析】本题考查抛物线.

将点 $P(1,2)$ 代入 $y^2=2px$,解得 $p=2$,所以抛物线 $C: y^2=4x$,其准线方程为 $x=-1$.

12. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=3, a_2+a_5=16$,则数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项的和为______.

【答案】24

【解析】本题考查等差数列.

设等差数列 $\{a_n\}$ 公差为 d,由 $a_1=3, a_2+a_5=2a_1+5d=16$,解得 $d=2$,

其中 $a_4=a_1+3d=3+6=9$.

所以数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项和 $S_4=\dfrac{(a_1+a_4)\times 4}{2}=\dfrac{(3+9)\times 4}{2}=24$.

13. 已知非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,则 $(\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=$______.

【答案】0

【解析】本题考查平面向量.

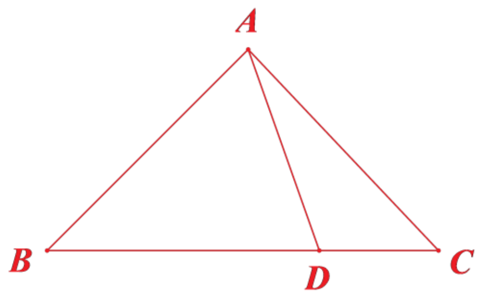
因为 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,平方得 $|\boldsymbol{a}|^2=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$,化简得 $2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=0$,

所以 $(\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}^2=\dfrac{1}{2}(2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2)=0$.

14.在$\triangle ABC$中,$AB=4\sqrt{3},\angle B=\frac{\pi}{4}$,点$D$在边$BC$上,$\angle ADC=\frac{2\pi}{3}$,$CD=2$,则$AD=$______;$\triangle ACD$的面积为______.

【答案】$4\sqrt{2};2\sqrt{6}$

【解析】本题考查解三角形.



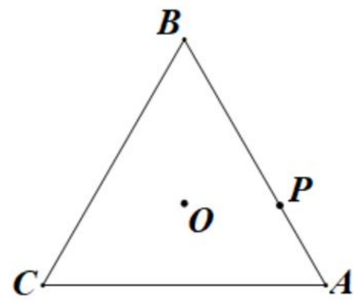
在$\triangle ABD$中,由正弦定理得$\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{AD}{\sin\angle B}$,

其中$\angle ADB=\pi-\angle ADC=\frac{\pi}{3}$,

所以$AD=\frac{AB\cdot\sin\angle B}{\sin\angle ADB}=\frac{4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4\sqrt{2}$,

所以$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AD\cdot CD\cdot\sin\angle ADC=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{6}$.

15. 如图,在等边三角形ABC中,$AB=6$.动点P从点A出发,沿着此三角形三边逆时针运动回到A点,记P运动的路程为x,点P到此三角形中心O距离的平方为$f(x)$,给出下列三个结论:



①函数$f(x)$的最大值为12;

②函数$f(x)$的图象的对称轴方程为$x=9$;

③关于x的方程$f(x)=kx+3$最多有5个实数根.

其中,所有正确结论的序号是______.

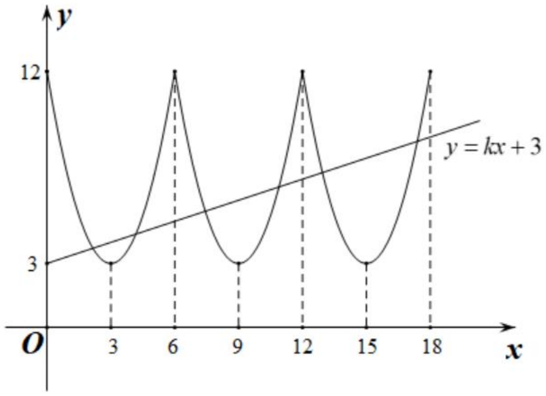
注:本题给出的结论中,有多个符合题目要求.全部选对得 5 分,不选或有错选得 0 分,其他得 3 分.

【答案】①②

【解析】本题考查函数的应用、图象与性质.

由题意可知,函数 $f(x)$ 解析式为:

$$f(x)=\begin{cases}3+(x-3)^2, & 0\le x<6\\ 3+(x-9)^2, & 6\le x<12\\ 3+(x-15)^2, & 12\le x\le 18\end{cases},$$



图象如图所示.

易知:当点 P 与 $\triangle ABC$ 的顶点重合,即 $x=0,6,12,18$ 时, $f(x)$ 取得最大值为 12,故①正确;

由 $f(x)$ 解析式可知, $f(x)=f(18-x)$,函数 $f(x)$ 的图象的对称轴方程为 $x=9$,故②正确;

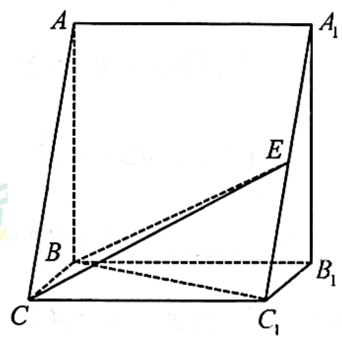
由图象可知, $f(x)$ 的图象与直线 $y=kx+3$ 的交点的个数最多为 6 个,即此时方程 $f(x)=kx+3$ 有 6 个实数根,故③不正确.

综上所述,所有正确结论的序号为①②.

三、解答题：共 6 小题，共 85 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

16.（本小题满分 14 分）

如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AB\perp$ 平面 BB_1C_1C,$AB=BB_1=2BC=2$,$BC_1=\sqrt{3}$,点 E 为 A_1C_1 的中点.



（Ⅰ）求证:$C_1B\perp$ 平面 ABC;

（Ⅱ）求二面角 $A-BC-E$ 的大小.

【解析】

（Ⅰ）因为 $ABC-A_1B_1C_1$ 是三棱柱,三棱柱侧棱平行且相等,

所以 $BB_1 // CC_1$, $BB_1=CC_1=2$,

在 $\triangle BCC_1$ 中, $BC=1, BC_1=\sqrt{3}, CC_1=2$,

所以 $CC_1^2=BC^2+BC_1^2$,

所以 $\triangle BCC_1$ 是直角三角形,且 $\angle CBC_1=\dfrac{\pi}{2}$,即 $BC\perp BC_1$,

又因为 $AB\perp$ 平面 BB_1C_1C, $BC_1\subset$ 平面 BB_1C_1C,

所以 $AB\perp BC_1$,

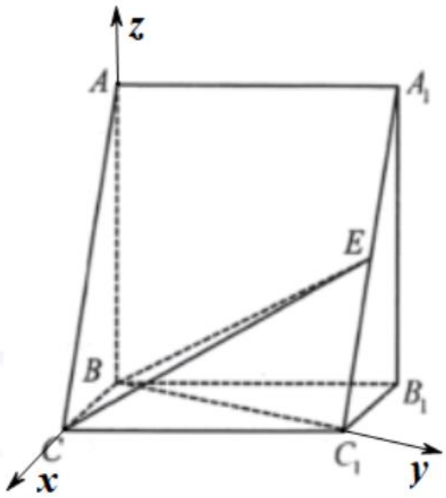
又因为 $AB\subset$ 平面 ABC, $BC\subset$ 平面 ABC, $AB\cap BC=B$,

所以 $C_1B\perp$ 平面 ABC.

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 AB, BC, BC_1 两两垂直,故以 B 为原点,分别以 BC, BC_1, BA 为 x 轴, y 轴, z 轴,如图建立空间直角坐标系,

$B(0,0,0)$, $C(1,0,0)$, $A(0,0,2)$, $C_1(0,\sqrt{3},0)$, $A_1(-1,\sqrt{3},2)$,

因为 E 为 A_1C_1 中点,



所以 $E(-\frac{1}{2},\sqrt{3},1)$,

所以 $\overrightarrow{BC}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{BE}=(-\frac{1}{2},\sqrt{3},1)$,

由（Ⅰ）可知平面 ABC 一个法向量为

$\overrightarrow{BC_1}=(0,\sqrt{3},0)$,

设平面 BCE 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

由 $\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}=0\\ \overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$,得 $\begin{cases}x=0,\\ -\frac{1}{2}x+\sqrt{3}y+z=0,\end{cases}$

令 $y=1$,得 $\boldsymbol{n}=(0,1,-\sqrt{3})$.

设二面角 $A-BC-E$ 为 θ,由图可知 θ 为锐角,

则 $\cos\theta=|\cos<\overrightarrow{BC_1},\boldsymbol{n}>|=|\frac{\overrightarrow{BC_1}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{BC_1}|\cdot|\boldsymbol{n}|}|=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{0+(\sqrt{3})^2+0}\cdot\sqrt{0+1^2+(-\sqrt{3})^2}}=\frac{1}{2}$,

即二面角 $A-BC-E$ 为 $\frac{\pi}{3}$.

17.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=2\cos^2\omega_1x+\sin\omega_2x$.

（Ⅰ）求 $f(0)$ 的值;

（Ⅱ）从① $\omega_1=1,\omega_2=2$;② $\omega_1=1,\omega_2=1$ 这两个条件中任选一个,作为题目的已知条件,求函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}]$ 上的最小值,并直接写出函数 $f(x)$ 的一个周期.

注:如果选择两个条件分别解答,按第一个解答计分.

【解析】

（Ⅰ） $f(0)=2\cos^2 0+\sin 0=2$.

（Ⅱ）选① $\omega_1=1,\omega_2=2$ 时,

$f(x)=2\cos^2 x+\sin 2x$,

$=\cos 2x+\sin 2x+1$

$=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+1$

因为 $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}]$,

所以 $2x+\frac{\pi}{4}\in[-\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{12}]$,

所以当 $2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}$,即 $x=-\frac{3\pi}{8}$ 时函数 $f(x)$ 有最小值 $1-\sqrt{2}$,

函数 $f(x)$ 的一个周期 $T=\pi$.

选② $\omega_1=1,\omega_2=1$ 时,

$f(x)=2\cos^2 x+\sin x$,

$=2(1-\sin^2 x)+\sin x$

$=-2\sin^2 x+\sin x+2$

令 $t=\sin x$, $h(t)=-2t^2+t+2$,

因为 $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}]$,

所以 $t\in[-1,\frac{1}{2}]$,

因为$h(-1)=-1, h(\frac{1}{2})=2$且函数$h(t)$开口向下,

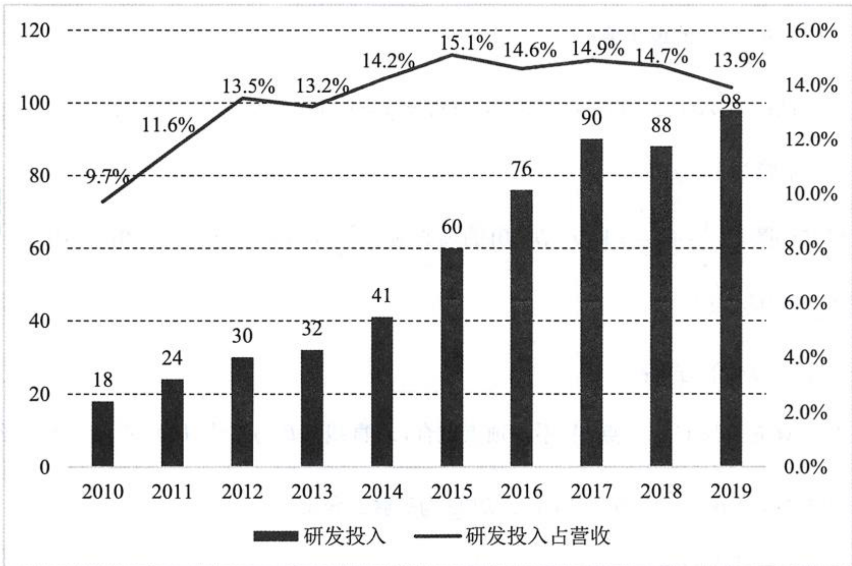
所以当$t=-1$时函数$h(t)$有最小值-1,

即当$x=-\frac{\pi}{2}$时,函数$f(x)$有最小值-1,

函数$f(x)$的一个周期$T=2\pi$.

18. （本小题满分 14 分）

科技创新能力是决定综合国力和国际竞争力的关键因素,也是推动经济实现高质量发展的重要支撑,而研发投入是科技创新的基本保障.下图是某公司从 2010 年到 2019 年这 10 年研发投入的数据分布图:



其中折线图是该公司研发投入占当年总营收的百分比,条形图是当年研发投入的数值（单位:十亿元）.

（Ⅰ）从 2010 年至 2019 年中随机选取一年,求该年研发投入占当年总营收的百分比超过10%的概率;

（Ⅱ）从 2010 年至 2019 年中随机选取两个年份,设 X 表示其中研发投入超过 500 亿元的年份的个数,求 X 的分布列和数学期望;

（Ⅲ）根据图中的信息,结合统计学知识,判断该公司在发展的过程中是否比较重视研发,并说明理由.

【解析】

（Ⅰ）设“该年研发投入占当年总营收的百分比超过10%”为事件A,从2010年到2019年共有10年,其中研发投入占当年总营收的百分比超过10%的有9年,所以$P(A)=\frac{9}{10}$.

（Ⅱ）低于500亿的年份是2010、2011、2012、2013、2014共5年,超过500亿的年份是2015、2016、2017、2018、2019共5年.

X 的所有可能的取值为:0,1,2

$P(X=0)=\frac{C_5^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{9};P(X=1)=\frac{C_5^1C_5^1}{C_{10}^2}=\frac{5}{9};P(X=2)=\frac{C_5^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{9}$

所以X的分布列为:

X	0	1	2
P	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

$E(X)=0\times\frac{2}{9}+1\times\frac{5}{9}+2\times\frac{2}{9}=1$

（Ⅲ）该公司在发展的过程中比较重视研发,原因是:总体看从2010年到2019年研发投入从180亿到980亿,研发投入占比从$9.7\%-13.9\%$,均呈上涨趋势,且研发投入占比平均数为13.54%,判断该公司在发展过程中比较重视研发.

19.（本小题满分 15 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+ax$.

（Ⅰ）当 $a=-1$ 时,

①曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程;

②求函数 $f(x)$ 的最小值;

（Ⅱ）求证:当 $a\in(-2,0)$ 时,曲线 $y=f(x)$ 与 $y=1-\ln x$ 有且只有一个交点.

【解析】

（Ⅰ）①由题意,得当 $a=-1$ 时, $f(x)=\mathrm{e}^x-x$, $f'(x)=\mathrm{e}^x-1$

则 $f'(0)=\mathrm{e}^0-1=0$, $f(0)=\mathrm{e}^0-0=1$

所以 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=1$

②由①知:随着 x 变化, $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的变化情况如下表所示:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减,在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)=1$.

（Ⅱ）当 $a\in(-2,0)$ 时,令 $g(x)=f(x)-1+\ln x=e^{x}+ax-1+\ln x$, $x\in(0,+\infty)$

由②知:当 $x>0$ 时, $e^{x}-x>1$,即: $e^{x}>x+1$

$$g'(x)=e^{x}+a+\frac{1}{x}>x+1+a+\frac{1}{x}\ge 3+a>0$$

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

$g(e)=e^{e}+ae=e(e^{e-1}+a)>0$,

$$g(\frac{1}{e})=e^{\frac{1}{e}}+\frac{a}{e}-2<(2^{e})^{\frac{1}{e}}+\frac{a}{e}-2=\frac{a}{e}<0$$

所以 $\exists x_0\in(\frac{1}{e},e)$,使得 $g(x_0)=0$

由 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增可知:

$y=g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有且仅有一个零点

即: $y=f(x)$ 与 $y=1-\ln x$ 有且只有一个交点.

20.（本小题满分 14 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $A_1(-a,0),A_2(a,0),B(0,b)$, $\triangle A_1BA_2$ 的面积为 2 .

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程;

（Ⅱ）设 M 是椭圆 C 上一点,且不与顶点重合,若直线 A_1B 与直线 A_2M 交于点 P ,直线 A_1M 与直线 A_2B 交于点 Q .求证: $\triangle BPQ$ 为等腰三角形.

【解析】

（Ⅰ）由题知，$\begin{cases} S_{\triangle A_1BA_2}=ab=2 \\ e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=\sqrt{3} \end{cases}$

所以椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

（Ⅱ）设$M(x_0,y_0)$且满足$x_0{}^2+4y_0{}^2-4=0(x_0\cdot y_0\neq 0)$

$A_1(-2,0),A_2(2,0),B(0,1)$

$k_{A_1B}=\dfrac{1}{2}$,所以A_1B的直线方程为$y=\dfrac{1}{2}x+1$,

$k_{A_2M}=\dfrac{y_0}{x_0-2}$,所以直线$A_2M$的直线方程为$y=\dfrac{y_0}{x_0-2}(x-2)$,

联立两条直线方程,得到$\begin{cases} x=\dfrac{-2x_0-4y_0+4}{x_0-2y_0-2} \\ y=\dfrac{-4y_0}{x_0-2y_0-2} \end{cases}$

因为直线A_1B与直线A_2M交于点P,

所以$P(\dfrac{-2x_0-4y_0+4}{x_0-2y_0-2},\dfrac{-4y_0}{x_0-2y_0-2})$

$k_{A_2B}=-\dfrac{1}{2}$,所以A_2B的直线方程为$y=-\dfrac{1}{2}x+1$,

$k_{A_1M}=\dfrac{y_0}{x_0+2}$,所以直线$A_1M$的直线方程为$y=\dfrac{y_0}{x_0+2}(x+2)$,

联立两条直线方程,得到$\begin{cases} x=\dfrac{2x_0-4y_0+4}{x_0+2y_0+2} \\ y=\dfrac{4y_0}{x_0+2y_0+2} \end{cases}$

因为直线A_1M与直线A_2B交于点Q,

所以$Q(\dfrac{2x_0-4y_0+4}{x_0+2y_0+2},\dfrac{4y_0}{x_0+2y_0+2})$

$$x_P-x_Q=\frac{-2x_0-4y_0+4}{x_0-2y_0-2}-\frac{2x_0-4y_0+4}{x_0+2y_0+2}$$

$$=\frac{2[2^2-(x_0+2y_0)^2]-2[(x_0-2y_0)^2-2^2]}{{x_0}^2-(2y_0+2)^2}$$

$$=\frac{2(4-{x_0}^2-4{y_0}^2)-8x_0y_0+8x_0y_0+2(4-{x_0}^2-4{y_0}^2)}{{x_0}^2-(2y_0+2)^2}=0$$

所以$x_P=x_Q$,直线PQ的斜率不存在,

所以直线PQ垂直x轴.

$$y_P+y_Q=\frac{-4y_0}{x_0-2y_0-2}+\frac{4y_0}{x_0+2y_0+2}$$

$$=\frac{-16{y_0}^2-16y_0}{{x_0}^2-(2y_0+2)^2}$$

$$=\frac{-16{y_0}^2-16y_0}{{x_0}^2-4{y_0}^2-8y_0-4}$$

$$=\frac{-16{y_0}^2-16y_0}{(4-4{y_0}^2)-4{y_0}^2-8y_0-4}$$

$$=\frac{-16{y_0}^2-16y_0}{-8{y_0}^2-8y_0}=2$$

因此可以得到PQ的中点纵坐标为1与B点纵坐标相同,

所以对于以 PQ 为底的 $\triangle BPQ$ 来说,

中线的斜率为 0,

所以中线与底 PQ 垂直,

所以 $\triangle BPQ$ 是等腰三角形.

21.（本小题满分 14 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 是由正整数组成的无穷数列.若存在常数 $k\in\mathbf{N}^*$,使得 $a_{2n-1}+a_{2n}=ka_n$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立,则称数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $\Psi(k)$.

（Ⅰ）分别判断下列数列 $\{a_n\}$ 是否具有性质 $\Psi(2)$;（直接写出结论）

①$a_n=1$; ②$a_n=2^n$.

（Ⅱ）若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}\geq a_n(n=1,2,3,\cdots)$,求证:“数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $\Psi(2)$”是“数列 $\{a_n\}$ 为常数列”的充分必要条件;

（Ⅲ）已知数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=1$,且 $a_{n+1}>a_n(n=1,2,3,\cdots)$.若数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $\Psi(4)$,求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【解析】

（Ⅰ）①具有,②不具有.$(a_{2n-1}+a_{2n}=2^{2n-1}+2^{2n}=2^n\cdot(2^{n-1}+2^n)=a_n\cdot(2^{n-1}+2^n)\neq 2a_n)$

（Ⅱ）必要条件:若 $\{a_n\}$ 为常数列,即 $\forall n\in\mathbf{N}^*, a_{2n-1}=a_{2n}=a_n$,所以 $a_{2n-1}+a_{2n}=2a_n$ 成立.

充分条件:当 $n=1$ 时,$a_1+a_2=2a_1$,所以 $a_1=a_2$.

假设存在 $k\in\mathbf{N}^*, k\geq 3$,使 $a_k>a_{k-1}$,

若 k 为奇数,则 $a_{k+1}\geq a_k>a_{\frac{k+1}{2}}$,所以 $a_k+a_{k+1}>2a_{\frac{k+1}{2}}$,矛盾;

若 k 为偶数,则 $a_k>a_{k-1}\geq a_{\frac{k}{2}}$,所以 $a_k+a_{k-1}>2a_{\frac{k}{2}}$,矛盾.

所以 $a_k\leq a_{k-1}$,并且 $a_k\geq a_{k-1}$,

所以 $\forall k\in\mathbf{N}^*$,都有 $a_k=a_{k-1}$,即 $\{a_n\}$ 为常数列.

所以"数列 $\{a_n\}$ 具有性质 $\Psi(2)$"是"数列 $\{a_n\}$ 为常数列"的充分必要条件.

（III）由题意,易知 $a_1=1,a_2=3,a_3+a_4=4a_2=12$,且 $a_3\geq 4$,

若 $a_3=4$,则 $a_4=8$, $a_5+a_6\geq 9+10>16=4a_3$,矛盾;

若 $a_3\geq 6$,则 $a_4\leq 6$,矛盾.

因此 $a_3=5,a_4=7$.下证 $a_n=2n-1$.

假设该命题不成立,设 $k=\min\{i\in\mathbf{N}^*\mid a_{2i-1}\neq 4i-3$ 或 $a_{2i}\neq 4i-1\}$,显然 $k\geq 3$,

考虑数列 $\{b_n\}$,其中 $b_n=a_{n+2k-4}-4(k-2)$,则数列 $\{b_n\}$ 也具有性质 $\Psi(4)$,

且 $b_1=a_{2k-3}-4(k-2)=4k-7-4(k-2)=1$,同理有 $b_3=5,b_4=7$,

即 $a_{3+2k-4}-4(k-2)=5,a_{4+2k-4}-4(k-2)=7$,

有 $a_{2k-1}=4k-3$ 且 $a_{2k}=4k-1$,矛盾.

综上,数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-1$.