2020 年北京市海淀区高三一模数学试卷

2020.5

本试卷分为第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，满分 150 分，考试时长 120 分钟。考生务必将答案写在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第 I 卷（选择题　共 40 分）

一、选择题：共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 在复平面内,复数 $\mathrm{i}(2-\mathrm{i})$ 对应的点位于

（A）第一象限　（B）第二象限　（C）第三象限　（D）第四象限

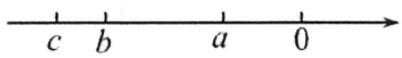
2. 已知集合 $A=\{x\,|\,0<x<3\}$, $A\cap B=\{1\}$,则集合 B 可以是

（A）$\{1,2\}$　（B）$\{1,3\}$　（C）$\{0,1,2\}$　（D）$\{1,2,3\}$

3. 已知双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的离心率是 $\sqrt{5}$,则 b 的值为

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

4. 已知实数 a,b,c 在数轴上对应的点如图所示,则下列式子中正确的是



（A）$b-a<c+a$　（B）$c^2<ab$

（C）$\dfrac{c}{b}>\dfrac{c}{a}$　（D）$|b|c<|a|c$

5. 在 $(\dfrac{1}{x}-2x)^6$ 的展开式中,常数项为

（A）-120　（B）120　（C）-160　（D）160

6. 如图,半径为 1 的圆M与直线l相切于点A,圆M沿着直线l滚动.当圆M滚到圆M'时,圆M'与直线l相切于点B,点A运动到点A',线段AB的长度为$\frac{3\pi}{2}$,则点M'到直线BA'的距离为

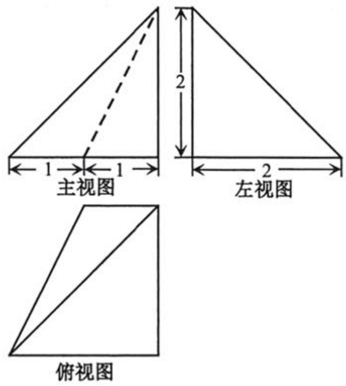
（A）1　（B）$\frac{\sqrt{3}}{2}$

（C）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　（D）$\frac{1}{2}$

7. 已知函数$f(x)=|x-m|$与函数$g(x)$的图象关于y轴对称.若$g(x)$在区间$(1,2)$内单调递减,则m的取值范围为

（A）$[-1,+\infty)$　（B）$(-\infty,-1]$　（C）$[-2,+\infty)$　（D）$(-\infty,-2]$

8. 某四棱锥的三视图如图所示,该四棱锥中最长棱的棱长为



（A）$\sqrt{5}$

（B）$2\sqrt{2}$

（C）$2\sqrt{3}$

（D）$\sqrt{13}$

9. 若数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$,则“$\forall p,r\in\mathbf{N}^*,a_{p+r}=a_pa_r$”是“$\{a_n\}$为等比数列”的

（A）充分而不必要条件　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　（D）既不充分也不必要条件

10. 形如$2^{2^n}+1$（n是非负整数）的数称为费马数,记为F_n.数学家费马根据F_0,F_1,F_2,F_3,F_4都是质数提出了猜想:费马数都是质数.多年之后,数学家欧拉计算出F_5不是质数,那么F_5的位数是

（参考数据:$\lg 2\approx 0.3010$）

（A）9　（B）10　（C）11　（D）12

第 II 卷（非选择题　共 110 分）

二、填空题：共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 已知点 $P(1,2)$ 在抛物线 $C: y^2 = 2px$ 上,则抛物线 C 的准线方程为______.

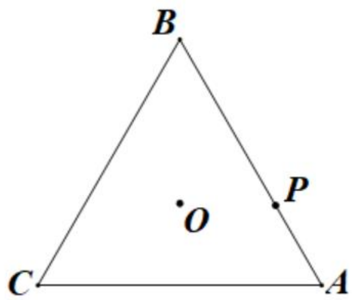
12. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1 = 3, a_2 + a_5 = 16$,则数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项的和为______.

13. 已知非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$,则 $(\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b} =$ ______.

14.在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 4\sqrt{3}, \angle B = \frac{\pi}{4}$, 点 D 在边 BC 上, $\angle ADC = \frac{2\pi}{3}, CD = 2$,则 $AD =$ ______;

$\triangle ACD$ 的面积为______.

15. 如图,在等边三角形 ABC 中, $AB = 6$.动点 P 从点 A 出发,沿着此三角形三边逆时针运动回到 A 点,记 P 运动的路程为 x,点 P 到此三角形中心 O 距离的平方为 $f(x)$,给出下列三个结论:



①函数 $f(x)$ 的最大值为12;

②函数 $f(x)$ 的图象的对称轴方程为 $x = 9$;

③关于 x 的方程 $f(x) = kx + 3$ 最多有5个实数根.

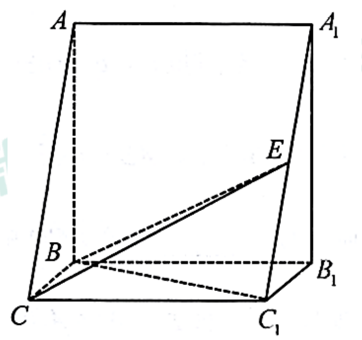
其中,所有正确结论的序号是______.

注:本题给出的结论中,有多个符合题目要求.全部选对得 5 分,不选或有错选得 0 分,其他得 3 分.

三、解答题：共 6 小题，共 85 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

16.（本小题满分 14 分）

如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB\perp$ 平面 BB_1C_1C , $AB=BB_1=2BC=2$, $BC_1=\sqrt{3}$,点 E 为 A_1C_1 的中点.



（Ⅰ）求证: $C_1B\perp$ 平面 ABC ;

（Ⅱ）求二面角 $A-BC-E$ 的大小.

17.（本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=2\cos^2\omega_1 x+\sin\omega_2 x$.

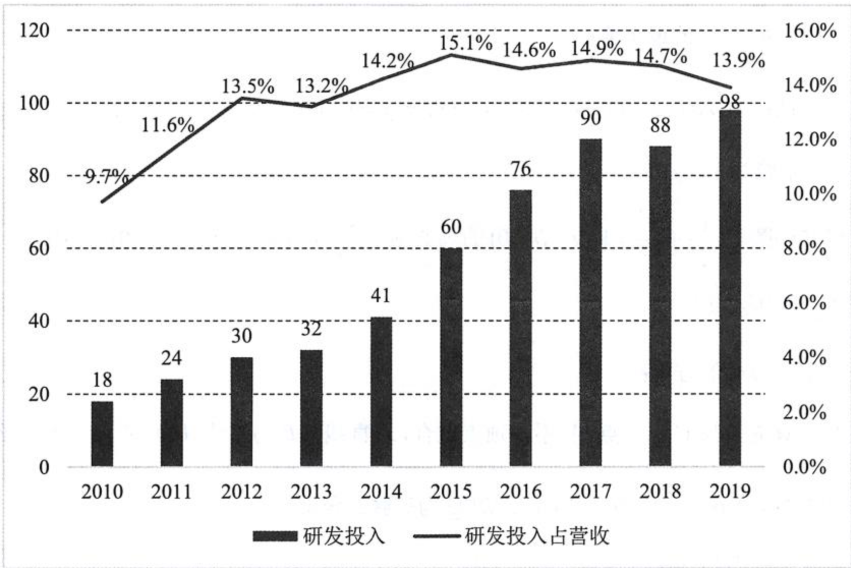
（Ⅰ）求 $f(0)$ 的值;

（Ⅱ）从① $\omega_1=1,\omega_2=2$;② $\omega_1=1,\omega_2=1$ 这两个条件中任选一个,作为题目的已知条件,求函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}]$ 上的最小值,并直接写出函数 $f(x)$ 的一个周期.

注:如果选择两个条件分别解答,按第一个解答计分.

18.（本小题满分 14 分）

科技创新能力是决定综合国力和国际竞争力的关键因素,也是推动经济实现高质量发展的重要支撑,而研发投入是科技创新的基本保障.下图是某公司从 2010 年到 2019 年这 10 年研发投入的数据分布图:



其中折线图是该公司研发投入占当年总营收的百分比,条形图是当年研发投入的数值（单位:十亿元）.

（Ⅰ）从 2010 年至 2019 年中随机选取一年,求该年研发投入占当年总营收的百分比超过10%的概率;

（Ⅱ）从 2010 年至 2019 年中随机选取两个年份,设 x 表示其中研发投入超过 500 亿元的年份的个数,求 x 的分布列和数学期望;

（Ⅲ）根据图中的信息,结合统计学知识,判断该公司在发展的过程中是否比较重视研发,并说明理由.

19．（本小题满分 15 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+ax$.

（Ⅰ）当 $a=-1$ 时,

①曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程;

②求函数 $f(x)$ 的最小值;

（Ⅱ）求证:当 $a\in(-2,0)$ 时,曲线 $y=f(x)$ 与 $y=1-\ln x$ 有且只有一个交点.

20.（本小题满分 14 分）

已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$A_1(-a,0),A_2(a,0),B(0,b)$，$\triangle A_1BA_2$的面积为$2$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程;

（Ⅱ）设M是椭圆C上一点,且不与顶点重合,若直线A_1B与直线A_2M交于点P,直线A_1M与直线A_2B交于点Q.求证:$\triangle BPQ$为等腰三角形.

21.（本小题满分 14 分）

已知数列$\{a_n\}$是由正整数组成的无穷数列.若存在常数$k\in\mathbf{N}^*$,使得$a_{2n-1}+a_{2n}=ka_n$对任意的$n\in\mathbf{N}^*$成立,则称数列$\{a_n\}$具有性质$\Psi(k)$.

（Ⅰ）分别判断下列数列$\{a_n\}$是否具有性质$\Psi(2)$;（直接写出结论）

①$a_n=1$;　　②$a_n=2^n$.

（Ⅱ）若数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}\geq a_n(n=1,2,3,\cdots)$,求证:“数列$\{a_n\}$具有性质$\Psi(2)$”是“数列$\{a_n\}$为常数列”的充分必要条件;

（Ⅲ）已知数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,且$a_{n+1}>a_n(n=1,2,3,\cdots)$.若数列$\{a_n\}$具有性质$\Psi(4)$,求数列$\{a_n\}$的通项公式.

2020年北京市海淀区高三一模数学答案

2020.5

一、选择题：共10小题，每小题4分，共40分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	B	B	D	C	C	D	C	A	B

二、填空题：共5小题，每小题5分，共25分。

11. $x=-1$

12. 24

13. 0

14. $4\sqrt{2};2\sqrt{6}$

15. ①②

三、解答题：共 6 小题，共 85 分。

16. （本小题满分 14 分）

（Ⅰ）因为 $ABC-A_1B_1C_1$ 是三棱柱,三棱柱侧棱平行且相等,

所以 $BB_1 // CC_1, BB_1=CC_1=2$,

在 $\triangle BCC_1$ 中, $BC=1, BC_1=\sqrt{3}, CC_1=2$,

所以 $CC_1^{\ 2}=BC^2+BC_1^{\ 2}$,

所以 $\triangle BCC_1$ 是直角三角形,且 $\angle CBC_1=\frac{\pi}{2}$,即 $BC\perp BC_1$,

又因为 $AB\perp$ 平面 BB_1C_1C, $BC_1\subset$ 平面 BB_1C_1C,

所以 $AB\perp BC_1$,

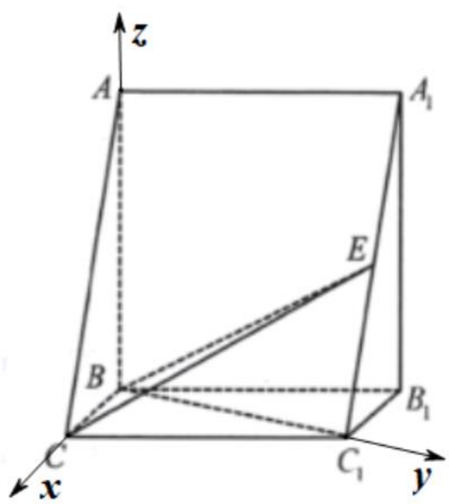
又因为 $AB\subset$ 平面 ABC, $BC\subset$ 平面 ABC, $AB\cap BC=B$,

所以 $C_1B\perp$ 平面 ABC.

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 AB,BC,BC_1 两两垂直,故以 B 为原点,分别以 BC,BC_1,BA 为 x 轴, y 轴, z 轴,如图建立空间直角坐标系,

$B(0,0,0)$, $C(1,0,0)$, $A(0,0,2)$, $C_1(0,\sqrt{3},0)$, $A_1(-1,\sqrt{3},2)$,

因为 E 为 A_1C_1 中点,



所以 $E(-\frac{1}{2},\sqrt{3},1)$,

所以 $\overrightarrow{BC}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{BE}=(-\frac{1}{2},\sqrt{3},1)$,

由（Ⅰ）可知平面 ABC 一个法向量为 $\overrightarrow{BC_1}=(0,\sqrt{3},0)$,

设平面 BCE 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

由 $\begin{cases}\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}=0\\ \overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$,得 $\begin{cases}x=0,\\ -\dfrac{1}{2}x+\sqrt{3}y+z=0,\end{cases}$

令 $y=1$,得 $\boldsymbol{n}=(0,1,-\sqrt{3})$.

设二面角 $A-BC-E$ 为 θ,由图可知 θ 为锐角,

则 $\cos\theta=|\cos<\overrightarrow{BC_1},\boldsymbol{n}>|=|\dfrac{\overrightarrow{BC_1}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{BC_1}|\cdot|\boldsymbol{n}|}|=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{0+(\sqrt{3})^2+0}\cdot\sqrt{0+1^2+(-\sqrt{3})^2}}=\dfrac{1}{2}$,

即二面角 $A-BC-E$ 为 $\dfrac{\pi}{3}$.

17.（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）$f(0)=2\cos^2 0+\sin 0=2$.

（Ⅱ）选① $\omega_1=1,\omega_2=2$ 时,

$f(x)=2\cos^2 x+\sin 2x$,

$=\cos 2x+\sin 2x+1$

$=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+1$

因为 $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}]$,

所以 $2x+\frac{\pi}{4}\in[-\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{12}]$,

所以当 $2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}$,即 $x=-\frac{3\pi}{8}$ 时函数 $f(x)$ 有最小值 $1-\sqrt{2}$,

函数 $f(x)$ 的一个周期 $T=\pi$.

选② $\omega_1=1,\omega_2=1$ 时,

$f(x)=2\cos^2 x+\sin x$,

$=2(1-\sin^2 x)+\sin x$

$=-2\sin^2 x+\sin x+2$

令 $t=\sin x$, $h(t)=-2t^2+t+2$,

因为 $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}]$,

所以 $t\in[-1,\frac{1}{2}]$,

因为$h(-1)=-1,h(\frac{1}{2})=2$且函数$h(t)$开口向下,

所以当$t=-1$时函数$h(t)$有最小值-1,

即当$x=-\frac{\pi}{2}$时,函数$f(x)$有最小值-1,

函数$f(x)$的一个周期$T=2\pi$.

18.（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）设“该年研发投入占当年总营收的百分比超过10%”为事件A,从 2010 年到 2019 年共有 10 年,其中研发投入占当年总营收的百分比超过10%的有 9 年,所以$P(A)=\frac{9}{10}$.

（Ⅱ）低于 500 亿的年份是 2010、2011、2012、2013、2014 共 5 年,超过 500 亿的年份是 2015、2016、2017、2018、2019 共 5 年.

X 的所有可能的取值为:0,1,2

$$P(X=0)=\frac{C_5^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{9};P(X=1)=\frac{C_5^1C_5^1}{C_{10}^2}=\frac{5}{9};P(X=2)=\frac{C_5^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{9}$$

所以 X 的分布列为:

X	0	1	2
P	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

$$E(X)=0\times\frac{2}{9}+1\times\frac{5}{9}+2\times\frac{2}{9}=1$$

（Ⅲ）该公司在发展的过程中比较重视研发,原因是:总体看从 2010 年到 2019 年研发投入从 180 亿到 980 亿,研发投入占比从$9.7\%-13.9\%$,均呈上涨趋势,且研发投入占比平均数为13.54%,判断该公司在发展过程中比较重视研发.

19.（本小题满分 15 分）

（Ⅰ）①由题意,得当$a=-1$时, $f(x)=e^x-x$, $f'(x)=e^x-1$

则 $f'(0)=e^0-1=0$, $f(0)=e^0-0=1$

所以$y=f(x)$在$(0,f(0))$处的切线方程为$y=1$

②由①知:随着x变化, $f'(x)$与$f(x)$的变化情况如下表所示:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 在$(-\infty,0)$上单调递减,在$(0,+\infty)$上单调递增.

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(0)=1$.

（Ⅱ）当$a\in(-2,0)$时,令$g(x)=f(x)-1+\ln x=e^x+ax-1+\ln x$, $x\in(0,+\infty)$

由②知:当$x>0$时, $e^x-x>1$,即: $e^x>x+1$

$$g'(x)=e^x+a+\frac{1}{x}>x+1+a+\frac{1}{x}\geq 3+a>0$$

所以$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增

$g(e)=e^e+ae=e(e^{e-1}+a)>0$,

$$g(\frac{1}{e})=e^{\frac{1}{e}}+\frac{a}{e}-2<(2^e)^{\frac{1}{e}}+\frac{a}{e}-2=\frac{a}{e}<0$$

所以$\exists x_0 \in (\frac{1}{e}, e)$,使得$g(x_0)=0$

由$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增可知:

$y=g(x)$在$(0,+\infty)$上有且仅有一个零点

即:$y=f(x)$与$y=1-\ln x$有且只有一个交点.

20. （本小题满分 14 分）

（Ⅰ）由题知, $\begin{cases} S_{\triangle A_1BA_2}=ab=2 \\ e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=\sqrt{3} \end{cases}$

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

（Ⅱ）设 $M(x_0,y_0)$ 且满足 $x_0^{\ 2}+4y_0^{\ 2}-4=0(x_0\cdot y_0\neq 0)$

$A_1(-2,0),A_2(2,0),B(0,1)$

$k_{A_1B}=\dfrac{1}{2}$,所以 A_1B 的直线方程为 $y=\dfrac{1}{2}x+1$,

$k_{A_2M}=\dfrac{y_0}{x_0-2}$,所以直线 A_2M 的直线方程为 $y=\dfrac{y_0}{x_0-2}(x-2)$,

联立两条直线方程,得到 $\begin{cases} x=\dfrac{-2x_0-4y_0+4}{x_0-2y_0-2} \\ y=\dfrac{-4y_0}{x_0-2y_0-2} \end{cases}$

因为直线 A_1B 与直线 A_2M 交于点 P,

所以 $P(\dfrac{-2x_0-4y_0+4}{x_0-2y_0-2},\dfrac{-4y_0}{x_0-2y_0-2})$

$k_{A_2B}=-\dfrac{1}{2}$,所以 A_2B 的直线方程为 $y=-\dfrac{1}{2}x+1$,

$k_{A_1M}=\dfrac{y_0}{x_0+2}$,所以直线 A_1M 的直线方程为 $y=\dfrac{y_0}{x_0+2}(x+2)$,

联立两条直线方程,得到$\begin{cases} x=\dfrac{2x_0-4y_0+4}{x_0+2y_0+2} \\ y=\dfrac{4y_0}{x_0+2y_0+2} \end{cases}$

因为直线A_1M与直线A_2B交于点Q,

所以$Q(\dfrac{2x_0-4y_0+4}{x_0+2y_0+2},\dfrac{4y_0}{x_0+2y_0+2})$

$$x_P-x_Q=\frac{-2x_0-4y_0+4}{x_0-2y_0-2}-\frac{2x_0-4y_0+4}{x_0+2y_0+2}$$

$$=\frac{2[2^2-(x_0+2y_0)^2]-2[(x_0-2y_0)^2-2^2]}{x_0^{\ 2}-(2y_0+2)^2}$$

$$=\frac{2(4-x_0^{\ 2}-4y_0^{\ 2})-8x_0y_0+8x_0y_0+2(4-x_0^{\ 2}-4y_0^{\ 2})}{x_0^{\ 2}-(2y_0+2)^2}=0$$

所以$x_P=x_Q$,直线PQ的斜率不存在,

所以直线PQ垂直x轴.

$$y_P+y_Q=\frac{-4y_0}{x_0-2y_0-2}+\frac{4y_0}{x_0+2y_0+2}$$

$$=\frac{-16y_0^{\ 2}-16y_0}{x_0^{\ 2}-(2y_0+2)^2}$$

$$=\frac{-16y_0^{\ 2}-16y_0}{x_0^{\ 2}-4y_0^{\ 2}-8y_0-4}$$

$$=\frac{-16y_0^{\ 2}-16y_0}{(4-4y_0^{\ 2})-4y_0^{\ 2}-8y_0-4}$$

$$=\frac{-16y_0^{\ 2}-16y_0}{-8y_0^{\ 2}-8y_0}=2$$

因此可以得到PQ的中点纵坐标为1与B点纵坐标相同,

所以对于以 PQ 为底的 $\triangle BPQ$ 来说,

中线的斜率为0,

所以中线与底 PQ 垂直,

所以 $\triangle BPQ$ 是等腰三角形.

21.（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）①具有,②不具有.$(a_{2n-1}+a_{2n}=2^{2n-1}+2^{2n}=2^n\cdot(2^{n-1}+2^n)=a_n\cdot(2^{n-1}+2^n)\neq 2a_n)$

（Ⅱ）必要条件:若$\{a_n\}$为常数列,即$\forall n\in\mathbf{N}^*,a_{2n-1}=a_{2n}=a_n$,所以$a_{2n-1}+a_{2n}=2a_n$成立.

充分条件:当$n=1$时,$a_1+a_2=2a_1$,所以$a_1=a_2$.

假设存在$k\in\mathbf{N}^*,k\geq 3$,使$a_k>a_{k-1}$,

若k为奇数,则$a_{k+1}\geq a_k>a_{\frac{k+1}{2}}$,所以$a_k+a_{k+1}>2a_{\frac{k+1}{2}}$,矛盾;

若k为偶数,则$a_k>a_{k-1}\geq a_{\frac{k}{2}}$,所以$a_k+a_{k-1}>2a_{\frac{k}{2}}$,矛盾.

所以$a_k\leq a_{k-1}$,并且$a_k\geq a_{k-1}$,

所以$\forall k\in\mathbf{N}^*$,都有$a_k=a_{k-1}$,即$\{a_n\}$为常数列.

所以“数列$\{a_n\}$具有性质$\Psi(2)$”是“数列$\{a_n\}$为常数列”的充分必要条件.

（Ⅲ）由题意,易知$a_1=1,a_2=3,a_3+a_4=4a_2=12$,且$a_3\geq 4$,

若$a_3=4$,则$a_4=8,a_5+a_6\geq 9+10>16=4a_3$,矛盾;

若$a_3\geq 6$,则$a_4\leq 6$,矛盾.

因此$a_3=5,a_4=7$.下证$a_n=2n-1$.

假设该命题不成立,设$k=\min\{i\in\mathbf{N}^*\mid a_{2i-1}\neq 4i-3$或$a_{2i}\neq 4i-1\}$,显然$k\geq 3$,

考虑数列$\{b_n\}$,其中$b_n=a_{n+2k-4}-4(k-2)$,则数列$\{b_n\}$也具有性质$\Psi(4)$,

且$b_1=a_{2k-3}-4(k-2)=4k-7-4(k-2)=1$,同理有$b_3=5,b_4=7$,

即$a_{3+2k-4}-4(k-2)=5,a_{4+2k-4}-4(k-2)=7$,

有$a_{2k-1}=4k-3$且$a_{2k}=4k-1$,矛盾.

综上,数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n-1$.