2020年北京市朝阳区高三一模数学试卷

第I卷（选择题　共40分）

一、选择题：共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A=\{1,3,5\}$， $B=\{x\in\mathbf{Z}\mid(x-1)(x-4)<0\}$，则 $A\cup B=$

A. $\{3\}$　　B. $\{1,3\}$

C. $\{1,2,3,5\}$　　D. $\{1,2,3,4,5\}$

2. 下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

A. $y=x^3$　　B. $y=-x^2+1$

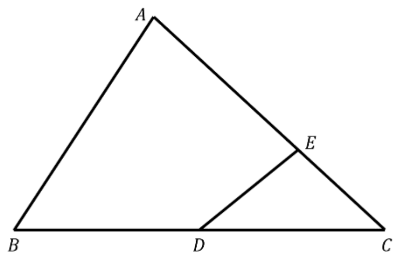
C. $y=\log_2 x$　　D. $y=2^{|x|}$

3. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1=1$， $a_4=-8$，则 $\{a_n\}$ 的前6项和为

A. -21　　B. 11

C. 31　　D. 63

4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D,E 满足 $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BD}$， $\overrightarrow{CA}=3\overrightarrow{CE}$，若 $\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}\ (x,y\in\mathbf{R})$，则 $x+y=$



A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. $-\dfrac{1}{3}$

C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{3}$

5. 已知抛物线$C: y^2=2px(p>0)$的焦点为F，准线为l，点A是抛物线C上一点，$AD\perp l$于D.若$AF=4$，$\angle DAF=60^\circ$，则抛物线C的方程为

A. $y^2=8x$　　B. $y^2=4x$

C. $y^2=2x$　　D. $y^2=x$

6. 现有甲、乙、丙、丁、戊 5 种在线教学软件，若某学校要从中随机选取 3 种作为教师“停课不停学”的教学工具，则其中甲、乙、丙至多有 2 种被选取的概率为

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{2}{5}$

C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{9}{10}$

7. 在$\triangle ABC$中，$AB=BC$，$\angle ABC=120^\circ$，若以A，B为焦点的双曲线经过点C，则该双曲线的离心率为

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$　　D. $\sqrt{3}$

8. 已知函数$f(x)=\sqrt{3}\sin(\omega x-\varphi)(\omega>0)$的图象上相邻两个最高点的距离为$\pi$，则“$\varphi=\frac{\pi}{6}$”是“$f(x)$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{3}$对称”的

A.充分而不必要条件　　B.必要而不充分条件

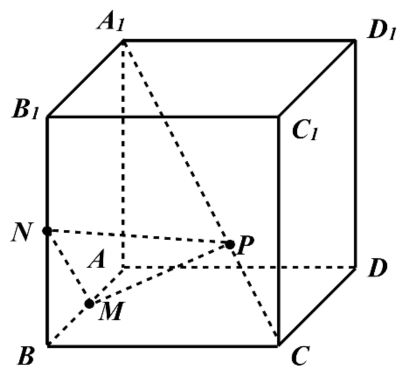
C.充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2ax+2a, & x\le 1.\\ 2x-a\ln x, & x>1.\end{cases}$ 若关于 x 的不等式 $f(x)\ge \dfrac{a}{2}$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，则实数 a 的取值范围为

A. $(-\infty,2\sqrt{e}]$　　　　B. $[0,\dfrac{3}{2}]$

C. $[0,2]$　　　　D. $[0,2\sqrt{e}]$

10. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M,N 分别是棱 AB,BB_1 的中点，点 P 在对角线 CA_1 上运动，当 $\triangle PMN$ 的面积取得最小值时，点 P 的位置是



A. 线段 CA_1 的三等分点，且靠近点 A_1

B. 线段 CA_1 的中点

C. 线段 CA_1 的三等分点，且靠近点 C

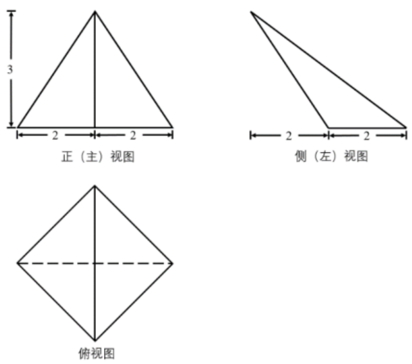
D. 线段 CA_1 的四等分点，且靠近点 C

第 II 卷（非选择题　共 110 分）

二、填空题：共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 若复数 $z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}$，则 $|z|=$________.

12. 已知某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的最长棱的长为_______，它的体积为________.



13. 某购物网站开展一种商品的预约购买，规定每个手机号只能预约一次，预约后通过摇号的方式决定能否购买到该商品.规则如下：（i）摇号的初始中签率为0.19；（ii）当中签率不超过1时，可借助“好友助力”活动增加中签率，每邀请到一位好友参与“好友助力”活动可使中签率增加0.05.为了使中签率超过0.9，则至少需要邀请______位好友参与到“好友助力”活动.

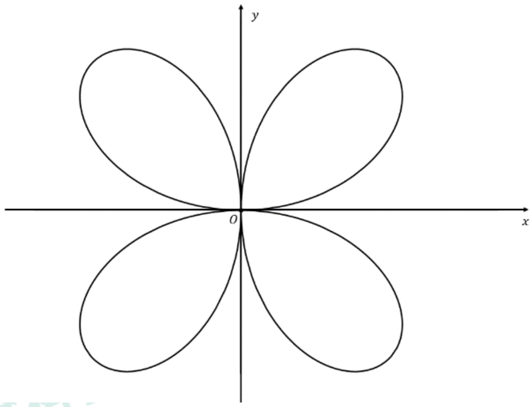
14. 已知函数 $f(x)=x\cos\frac{\pi x}{2}$. 数列$\{a_n\}$满足$a_n=f(n)+f(n+1)\ (n\in \mathbf{N}^*)$，则数列$\{a_n\}$的前 100 项和是______.

15. 数学中有许多寓意美好的曲线，曲线 C:$(x^2+y^2)^3=4x^2y^2$被称为“四叶玫瑰线”(如图所示).给出下列三个结论：

①曲线 C 关于直线$y=x$对称；

②曲线 C 上任意一点到原点的距离都不超过 1；

③存在一个以原点为中心、边长为$\sqrt{2}$的正方形，使得曲线 C 在此正方形区域内(含边界).



(第 15 题图)

其中，正确结论的序号是______.

注：本题给出的结论中，有多个符合题目要求.全部选对得 5 分，不选或者有错选得 0 分，其他得 3 分.

三、解答题：共 6 小题，共 85 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

16.（本小题 14 分）

在$\triangle ABC$中，$b\sin A = a\cos(B-\frac{\pi}{6})$.

（Ⅰ）求B；

（Ⅱ）若$c=5$,_______.求a.

从①$b=7$；②$C=\frac{\pi}{4}$这两个条件中任选一个，补充在上面问题中并作答.

注：如果选择多个条件分别作答，按第一个解答计分.

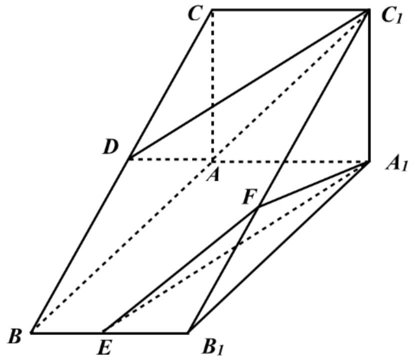
17．（本小题 14 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 ABC，四边形 ACC_1A_1 是正方形，点 D,E 分别是棱 BC,BB_1 的中点，$AB=4,AA_1=2,BC=2\sqrt{5}$.

（Ⅰ）求证: $AB\perp CC_1$；

（Ⅱ）求二面角 $D-AC_1-C$ 的余弦值；

（Ⅲ）若点 F 在棱 B_1C_1 上，且 $B_1C_1=4B_1F$，判断平面 AC_1D 与平面 A_1EF 是否平行，并说明理由.



18．（本小题 14 分）

某科研团队研发了一款快速检测某种疾病的试剂盒.为了解该试剂盒检测的准确性，质检部门从某地区（人数众多）随机选取了80位患者和100位非患者，用该试剂盒分别对他们进行检测，结果如下：

患者的检测结果	人数
阳性	76
阴性	4

非患者的检测结果	人数
阳性	1
阴性	99

（Ⅰ）从该地区患者中随机选取一人，对其检测一次，估计此患者检测结果为阳性的概率；

（Ⅱ）从该地区患者中随机选取3人，各检测一次，假设每位患者的检测结果相互独立，以 X 表示检测结果为阳性的患者人数，利用（Ⅰ）中所得概率，求 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）假设该地区有10万人，患病率为0.01.从该地区随机选取一人，用该试剂盒对其检测一次.若检测结果为阳性，能否判断此人患该疾病的概率超过0.5？并说明理由.

19．（本小题 14 分）

已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，圆$O:x^2+y^2=r^2$（$O$为坐标原点）.过点$(0,b)$且斜率为$1$的直线与圆$O$交于点$(1,2)$，与椭圆$C$的另一个交点的横坐标为$-\dfrac{8}{5}$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程和圆O的方程；

（Ⅱ）过圆O上动点P作两条互相垂直的直线l_1，l_2，若直线l_1的斜率为$k(k\neq 0)$且l_1与椭圆C相切，试判断直线l_2与椭圆C的位置关系，并说明理由.

20.（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-\dfrac{x+1}{x-1}$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）判断函数 $f(x)$ 的零点的个数，并说明理由；

（Ⅲ）设 x_0 是 $f(x)$ 的一个零点，证明曲线 $y=\mathrm{e}^{x}$ 在点 $\left(x_0,\mathrm{e}^{x_0}\right)$ 处的切线也是曲线 $y=\ln x$ 的切线.

21.（本小题14分）

设数列 A： $a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geq 3)$ 的各项均为正整数，且 $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$． 若对任意 $k\in\{3,4,\cdots,n\}$，存在正整数 $i,j(1\leq i\leq j<k)$ 使得 $a_k=a_i+a_j$，则称数列 A 具有性质 T．

（Ⅰ）判断数列 $A_1:1,2,4,7$ 与数列 $A_2:1,2,3,6$ 是否具有性质 T；（只需写出结论）

（Ⅱ）若数列 A 具有性质 T，且 $a_1=1,a_2=2,a_n=200$，求 n 的最小值；

（Ⅲ）若集合 $S=\{1,2,3,\cdots,2019,2020\}=S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4\cup S_5\cup S_6$，且 $S_i\cap S_j=\varnothing$（任意 $i,j\in\{1,2,\cdots,6\},i\neq j$）． 求证：存在 S_i，使得从 S_i 中可以选取若干元素（可重复选取）组成一个具有性质 T 的数列．

2020 年北京市朝阳区高三一模数学答案

一、选择题：共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	D	A	B	B	D	C	A	C	B

二、填空题：共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. $\sqrt{2}$

12. 5；4

13. 15

14. 100

15. ①②

三、解答题：共 6 小题，共 85 分。

16. （本小题 14 分）

（Ⅰ）由正弦定理得：$\sin B\sin A=\sin A\cos(B-\frac{\pi}{6})$

$\because A\in(0,\pi)$ $\therefore \sin A\neq 0$

$\therefore \sin B=\cos(B-\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B$

$\therefore \tan B=\frac{\sin B}{\cos B}=\sqrt{3}$

$\because B\in(0,\pi)$ $\therefore B=\frac{\pi}{3}$

（Ⅱ）若选择条件①，则 $B=\frac{\pi}{3},b=7,c=5$，求 a.

由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，得 $49=a^2+25-5a$

$\therefore (a-8)(a+3)=0$

$\because a>0$

$\therefore a=8$

另解：

若选择条件②，则 $B=\frac{\pi}{3},C=\frac{\pi}{4},c=5$，求 a.

$\because A+B+C=\pi$，$\therefore A=\frac{5\pi}{12}$

$\therefore \sin A=\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

由正弦定理：$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$

$\therefore a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\bullet\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{5(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2\sqrt{2}}=\frac{5(\sqrt{3}+1)}{2}$

17. （本小题 14 分）

（Ⅰ）在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，

$\because$ 四边形 ACC_1A_1 是正方形，$\therefore CC_1 \perp AC$，

又$\because$ 平面 $ACC_1A_1 \perp$ 平面 ABC，平面 $ACC_1A_1 \cap$ 平面 $ABC = AC$，

且 $CC_1 \subset$ 平面 ACC_1A_1，

$\therefore CC_1 \perp$ 平面 ABC，又$\because AB \subset$ 平面 ABC，$\therefore AB \perp CC_1$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$CC_1 \perp AC$，$CC_1 \perp AB$，且 $CC_1 // AA_1$，$\therefore AA_1 \perp AC$，$AA_1 \perp AB$，

又$\because$ 正方形 ACC_1A_1 中，$AA_1=2$，$\therefore AC=2$，$AB=4$，$BC=2\sqrt{5}$，

$\therefore BC^2 = AC^2 + AB^2$，$\therefore AC \perp AB$，

则以 A 为原点，AB 为 x 轴，AA_1 为 y 轴，AC 为 z 轴建立空间直角坐标系，

$\therefore A(0,0,0)$，$C(0,0,2)$，$B(4,0,0)$，$C_1(0,2,2)$，$\because D$ 为 BC 中点，$\therefore D(2,0,1)$，

又$\because AB \perp AC$，$AB \perp AA_1$，且 $AC \cap AA_1 = A$，$AC \subset$ 平面 ACC_1，$AA_1 \subset$ 平面 ACC_1，

$\therefore AB \perp$ 平面 ACC_1，$\therefore$ 平面 ACC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$，

设平面 ADC_1 法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{AD}=(2,0,1)$，$\overrightarrow{AC_1}=(0,2,2)$，

则 $\begin{cases} \boldsymbol{m} \perp \overrightarrow{AD} \\ \boldsymbol{m} \perp \overrightarrow{AC_1} \end{cases}$，$\therefore \begin{cases} \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0 \\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0 \end{cases}$，$\therefore \begin{cases} 2x+z=0 \\ 2y+2z=0 \end{cases}$，令 $z=-2$，得 $x=1$，$y=2$，

则 $\boldsymbol{m}=(1,2,-2)$，设二面角 $D-AC_1-C$ 为 θ，

则 $|\cos\theta| = \left|\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}\right| = \left|\dfrac{1}{1\cdot 3}\right| = \dfrac{1}{3}$，又二面角 $D-AC_1-C$ 为锐角，

$\therefore$ 二面角 $D-AC_1-C$ 的余弦值为 $\dfrac{1}{3}$.

(III) 由（II）知，$B_1(4,2,0)$，$B(4,0,0)$，$A_1(0,2,0)$，且 E 为 BB_1 中点，

$\therefore E(4,1,0)$，$\overrightarrow{B_1C_1}=(-4,0,2)$，又$\because F$ 在棱 B_1C_1 上，且 $B_1C_1=4B_1F$，

$\therefore \overrightarrow{B_1F}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{B_1C_1}=(-1,0,\dfrac{1}{2})$，$\therefore F(3,2,\dfrac{1}{2})$，$\therefore \overrightarrow{A_1F}=(3,0,\dfrac{1}{2})$ 且 $\overrightarrow{A_1E}=(4,-1,0)$，

设平面 A_1EF 法向量为 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，

$\therefore \begin{cases} \boldsymbol{a}\perp\overrightarrow{A_1F} \\ \boldsymbol{a}\perp\overrightarrow{A_1E} \end{cases}$，$\therefore \begin{cases} \boldsymbol{a}\bullet\overrightarrow{A_1F}=0 \\ \boldsymbol{a}\bullet\overrightarrow{A_1E}=0 \end{cases}$，$\therefore \begin{cases} 3x_1+\dfrac{1}{2}z_1=0 \\ 4x_1-y_1=0 \end{cases}$，

令 $x_1=1$，则 $y_1=4$， $z_1=-6$，$\therefore \boldsymbol{a}=(1,4,-6)$，

又平面 AC_1D 法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,2,-2)$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{m}$ 不平行，

$\therefore$ 平面 AC_1D 与平面 A_1EF 不平行.

18.（本小题 14 分）

（Ⅰ）设“80 名患者中随机抽取 1 人检测结果为阳性”为事件 A，

由表知，80 名患者中，检测结果为阳性的人数为 76 人，

由频率估计概率得，$P(A)=\dfrac{76}{80}=\dfrac{19}{20}$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$P=P(A)=\dfrac{19}{20}$，且 X 的可能取值为 0,1,2,3

$P(X=0)=C_3^0\left(\dfrac{19}{20}\right)^0\left(\dfrac{1}{20}\right)^3=\dfrac{1}{8000}$，$P(X=1)=C_3^1\left(\dfrac{19}{20}\right)^1\left(\dfrac{1}{20}\right)^2=\dfrac{57}{8000}$

$P(X=2)=C_3^2\left(\dfrac{19}{20}\right)^2\left(\dfrac{1}{20}\right)^1=\dfrac{1083}{8000}$，$P(X=3)=C_3^3\left(\dfrac{19}{20}\right)^3\left(\dfrac{1}{20}\right)^0=\dfrac{6859}{8000}$

X 的分布列如下：

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{8000}$	$\dfrac{57}{8000}$	$\dfrac{1083}{8000}$	$\dfrac{6859}{8000}$

$E(X)=0\times\dfrac{1}{8000}+1\times\dfrac{57}{8000}+2\times\dfrac{1083}{8000}+3\times\dfrac{6859}{8000}=\dfrac{57}{20}$.

（Ⅲ）不能判断此人患该疾病的概率超过 0.5，理由如下：

该地区 10 万人中患者 $100000\times0.01=1000$ 人，

经该试剂盒检测：患者检测结果为阳性应为 $1000\times\dfrac{19}{20}=950$ 人，

非患者检测结果为阳性应为 $99000\times\dfrac{1}{100}=990$ 人，

设“该人检测结果为阳性且患该疾病”为事件 B，

则 $P(B)=\dfrac{950}{950+990}<\dfrac{1}{2}$，

所以，该人患病概率不会超过 0.5.

19.（本小题 14 分）

（Ⅰ）将点$(1,2)$代入圆O得$r^2=1+4=5$，故圆O的方程为$x^2+y^2=5$

设过点$(0,b)$，斜率为1的直线为$y=x+b$

将点$(1,2)$代入得$2=1+b$，故$b=1$，该直线方程为$y=x+1$

将$x=-\frac{8}{5}$代入，得$y=-\frac{3}{5}$

将$(-\frac{8}{5},-\frac{3}{5})$代入椭圆$C$，得$\frac{64}{25a^2}+\frac{9}{25}=1$，解得$a^2=4$

故椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$

（Ⅱ）l_2与椭圆C相切.

证明：设$P(x_0,y_0)$，则$x_0^2+y_0^2=5$

过点$P(x_0,y_0)$的直线l_1为$y-y_0=k(x-x_0)$

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\ y-y_0=k(x-x_0)\end{cases}$

得$(1+4k^2)x^2+8k(y_0-kx_0)x+4(y_0-kx_0)^2-4=0$

$\Delta=64k^2(y_0-kx_0)^2-4(1+4k^2)[4(y_0-kx_0)^2-4]=16[4k^2+1-(y_0-kx_0)^2]$　①

因为l_1与椭圆C相切

所以$\Delta=0$

即$4k^2+1-(y_0-kx_0)^2=0$

即$2kx_0y_0=y_0^2+k^2x_0^2-4k^2-1$　②

设l_2与椭圆C联立后的判别式为Δ'

因为$l_2\perp l_1$

所以l_2的斜率为$-\dfrac{1}{k}$，将①式中的k替换成$-\dfrac{1}{k}$，得

$$\Delta'=16[\frac{4}{k^2}+1-(y_0+\frac{x_0}{k})^2]$$

$$=16(\frac{4}{k^2}+1-y_0^{\ 2}-\frac{x_0^{\ 2}}{k^2}-\frac{2x_0y_0}{k})$$

$$=16\cdot\frac{4+k^2-k^2y_0^{\ 2}-x_0^{\ 2}-2kx_0y_0}{k^2}$$

代入②，得

$$\Delta'=16\cdot\frac{4+k^2-k^2y_0^{\ 2}-x_0^{\ 2}-y_0^{\ 2}-k^2x_0^{\ 2}+4k^2+1}{k^2}$$

$$=16\cdot\frac{5+5k^2-(x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2})(1+k^2)}{k^2}$$

再代入$x_0^{\ 2}+y_0^{\ 2}=5$，得

$\Delta'=0$

故l_2与椭圆C相切.

20.（本小题满分 15 分）

（Ⅰ） $f'(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{x-1-x-1}{(x-1)^2}=\mathrm{e}^x+\dfrac{2}{(x-1)^2}$

$f(0)=1+1=2$， $f'(0)=1+2=3$，

切线 $y=3x+2$

（Ⅱ）方法一：

由（Ⅰ）知当 $x\in(-\infty,1),(1,+\infty)$， $f'(x)>0$， $f(x)$ 单调递增，

$f(-2)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}-\dfrac{1}{3}<0$， $f(0)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上有且只有一个零点，

$f(2)=\mathrm{e}^2-3>0$， $f(\dfrac{5}{4})=\mathrm{e}^{\frac{5}{4}}-9<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有且只有一个零点，

所以 $f(x)$ 有 2 个零点.

方法二：

由（Ⅰ）知 $f'(x)=\mathrm{e}^x+\dfrac{2}{(x-1)^2}>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $f(-1)=\dfrac{1}{\mathrm{e}}>0$， $f(-2)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}-\dfrac{1}{3}<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上有唯一零点 x_1，且 $x_1\in(-2,-1)$， $f(x_1)=0$，即 $\mathrm{e}^{x_1}=\dfrac{x_1+1}{x_1-1}$

因为 $1<-x_1<2$， $f(-x)=\mathrm{e}^{-x_1}-\dfrac{-x_1+1}{-x_1-1}=\dfrac{x_1-1}{x_1+1}+\dfrac{-x_1+1}{x_1+1}=0$，

所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有唯一零点 $-x_1$，

综上， $f(x)$ 有且只有 2 个零点.

（III） $f(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-\dfrac{x_0+1}{x_0-1}=0$，①

$y=\mathrm{e}^x$ 在 $\left(x_0,\mathrm{e}^{x_0}\right)$ 处的切线为 $l_1: y-\mathrm{e}^{x_0}=\mathrm{e}^{x_0}(x-x_0)$

即 $l_1: y=\mathrm{e}^{x_0}x+\mathrm{e}^{x_0}(1-x_0)$

代入①得 $y=\mathrm{e}^{x_0}x+\dfrac{x_0+1}{x_0-1}(1-x_0)$

即 $y=\mathrm{e}^{x_0}x-1-x_0$

设 $y=\ln x$ 上一点 $\left(x_1,\ln x_1\right)$，在点 $\left(x_1,\ln x_1\right)$ 处的切线 $l_2: y-\ln x_1=\dfrac{1}{x_1}(x-x_1)$

当 $\dfrac{1}{x_1}=\mathrm{e}^{x_0}$ 时，$l_2: y=\mathrm{e}^{x_0}x-1-x_0$，

此时 l_2 与 l_1 重合，

所以 $y=\mathrm{e}^x$ 在 $\left(x_0,\mathrm{e}^{x_0}\right)$ 处的切线也是 $y=\ln x$ 的切线.

21．（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）数列 A_1 不具有性质 T；数列 A_2 具有性质 T.

（Ⅱ）由题可知 $a_2=2,a_3\le 2a_2=4,a_4\le 2a_3=8,\cdots,a_8\le 2a_7=128$，

所以 $n\ge 9$.

若 $n=9$，因为 $a_9=200$ 且 $a_9\le 2a_8$，所以 $128\ge a_8\ge 100$.

同理，$64\ge a_7\ge 50,32\ge a_6\ge 25,16\ge a_5\ge 12.5,8\ge a_4\ge 6.25,4\ge a_3\ge 3.125$.

因为数列各项均为正整数，所以 $a_3=4$. 数列前三项为 $1,2,4$.

因为数列 A 具有性质 T，a_4 只可能为 $4,5,6,8$ 之一，而又因为 $8\ge a_4\ge 6.25$，

所以 $a_4=8$.

同理，有 $a_5=16,a_6=32,a_7=64,a_8=128$.

此时数列为 $1,2,4,8,16,32,64,128,200$.

但数列中不存在 $1\le i\le j<9$ 使得 $200=a_i+a_j$，所以该数列不具有性质 T.

所以 $n\ge 10$

当 $n=10$ 时，取 $A:1,2,4,8,16,32,36,64,100,200$（构造数列不唯一）

经验证，此数列具有性质 T.

所以，n 的最小值为 10.

（Ⅲ）反证法：假设结论不成立，即对任意 $S_i(i=1,2,\cdots,6)$ 都有：

若正整数 $a,b\in S_i$，$a<b$，则 $b-a\notin S_i$，

否则，当 $a<b-a$ 时，$a,b-a,b$ 是一个具有性质 T 的数列；

当 $a>b-a$ 时，$b-a,a,b$ 是一个具有性质 T 的数列；

当 $a=b-a$ 时，a,a,b 是一个具有性质 T 的数列.

（i） 由题意可知，这 6 个集合中至少有一个集合的元素个数不少于 337 个，不妨设此集合为S_1，从S_1中取出 337 个数，记为$a_1,a_2,\cdots,a_{337}$，且$a_1<a_2<\cdots<a_{337}$，

令集合$N_1=\{a_{337}-a_i\,|\,i=1,2,\cdots,336\}\subseteq S$.

由假设，对任意$i=1,2,\cdots,336,a_{337}-a_i\notin S_1$，所以$N_1\subseteq S_2\cup S_3\cup S_4\cup S_5\cup S_6$.

（ii）在S_2,S_3,S_4,S_5,S_6中至少存在一个集合N_1包含中的至少 68 个元素，不妨设这个集合为S_2，从$S_2\cap N_1$中取出 68 个数，记为$b_1,b_2,\cdots,b_{68}$，且$b_1<b_2<\cdots<b_{68}$.

令集合$N_2=\{b_{68}-b_i\,|\,i=1,2,\cdots,67\}\subseteq S$.

由假设$b_{68}-b_i\notin S_2$.

对任意$k=1,2,\cdots,68$，存在$s_k\in\{1,2,\cdots,336\}$使得$b_k=a_{337}-a_{s_k}$，

所以对任意$i=1,2,\cdots,67,b_{68}-b_i=(a_{337}-a_{s_{68}})-(a_{337}-a_{s_k})=a_{s_k}-a_{s_{68}}$，

由假设$a_{s_k}-a_{s_{68}}\notin S_1$，所以$b_{68}-b_i\notin S_1$，所以$b_{68}-b_i\notin S_1\cup S_2$，

所以$N_2\subseteq S_3\cup S_4\cup S_5\cup S_6$.

（iii）在S_3,S_4,S_5,S_6中至少有一个集合包含N_2中的至少 17 个元素，不妨设这个集合为S_3，从$S_3\cap N_2$中取出 17 个数记为$c_1,c_2,\cdots,c_{17}$，且$c_1<c_2<\cdots<c_{17}$.

令集合$N_3=\{c_{17}-c_i\,|\,i=1,2,\cdots,16\}\subseteq S$.

由假设$c_{17}-c_i\notin S_3$.

对任意$k=1,2,\cdots,17$，存在$l_k\in\{1,2,\cdots,67\}$使得$c_k=b_{68}-b_{l_k}$，

所以对任意$i=1,2,\cdots,16,c_{17}-c_i=(b_{68}-b_{l_{17}})-(b_{68}-b_{l_i})=b_{l_i}-b_{l_{17}}$，

同样，由假设可得$b_{l_i}-b_{l_{17}}\notin S_1\cup S_2$，所以$c_{17}-c_i\notin S_1\cup S_2\cup S_3$，

所以$N_3\subseteq S_4\cup S_5\cup S_6$.

（iv）类似地，在S_4,S_5,S_6中至少有一个集合包含N_3中的至少 6 个元素，不妨设这个集合为S_4，从$S_4\cap N_3$中取出 6 个数，记为$d_1,d_2,\cdots,d_6$，且$d_1<d_2<\cdots<d_6$，

则 $N_4=\{d_6-d_i\mid i=1,2,\cdots,5\}\subseteq S_5\cup S_6$.

（v）同样，在 S_5,S_6 中至少有一个集合包含 N_4 中的至少 3 个元素，不妨设这个集合为 S_5，从 $S_5\cap N_4$ 中取出 3 个数，记为 e_1,e_2,e_3，且 $e_1<e_2<e_3$，

同理可得 $N_5=\{e_3-e_1,e_3-e_2\}\subseteq S_6$.

（vi）由假设可得 $e_2-e_1=(e_3-e_1)-(e_3-e_2)\notin S_6$.

同上可知，$e_2-e_1\notin S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4\cup S_5$，

而又因为 $e_2-e_1\in S$，所以 $e_2-e_1\in S_6$，矛盾.

所以假设不成立.

所以原命题成立.