百校联盟 2020 届 TOP300 七月尖子生联考

文科数学

注意事项：

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.

2. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试卷相应的位置.

3. 全部答案写在答题卡上，写在本试卷上无效.

4. 本试卷满分 150 分，测试时间 120 分钟.

5. 考试范围：必修 1，选修 1—1 第 1 章、第 3 章.

第Ⅰ卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

(1)已知集合 $A=\{1,2,4\}$，集合 $B=\{x|2-x<1\}$，则 $A\cap B=$

(A)$\{1,4\}$　(B)$\{2,4\}$　(C)$\{1,2\}$　(D)$\{4\}$

(2)已知函数 $f(x)=e^x-e^{-x}$，则下列说法正确的是

(A)函数 $f(x)$是偶函数，且在 $\mathbf{R}$ 上是减函数　(B)函数 $f(x)$是偶函数，且在 $\mathbf{R}$ 上是增函数

(C)函数 $f(x)$是奇函数，且在 $\mathbf{R}$ 上是减函数　(D)函数 $f(x)$是奇函数，且在 $\mathbf{R}$ 上是增函数

(3)函数 $y=\dfrac{1}{\lg(x-2)}+\sqrt{16-x^2}$ 的定义域为

(A)$(2,3)$　(B)$(3,4]$　(C)$(2,4]$　(D)$(2,3)\cup(3,4]$

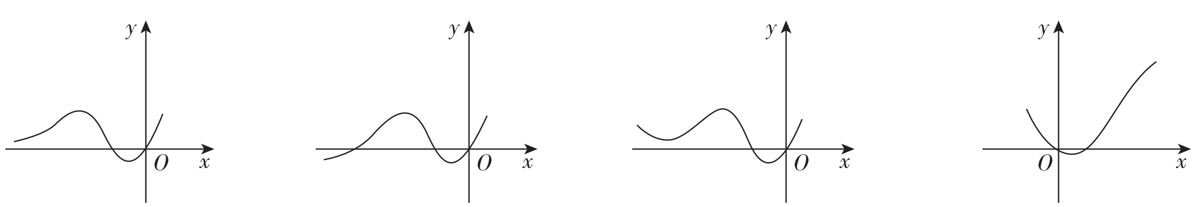
(4)已知命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$x^2>x-1$；命题 q：$\exists x_0\in(0,+\infty)$，$\ln x_0=x_0-1$，下列命题为真命题的是

(A)$p\wedge q$　(B)$p\wedge\neg q$　(C)$\neg p\wedge q$　(D)$\neg p\wedge\neg q$

(5)已知集合 $A=\{x|x^2+2ax+2a\leqslant 0\}$，若 A 中只有一个元素，则实数 a 的值为

(A)0　(B)0 或 -2　(C)0 或 2　(D)2

(6)函数 $f(x)=(3x^2+4x)e^x$ 的图象大致是



(A)　(B)　(C)　(D)

(7)函数 $f(x)=\log_2(4^x+1)-x$ 的最小值为

(A)3　(B)2　(C)1　(D)0

(8)三个数 $a=2020^{\frac{1}{2019}}$，$b=\left(\dfrac{1}{2019}\right)^{2020}$，$c=\log_{2020}\dfrac{1}{2019}$的大小顺序为

(A)$b<c<a$　(B)$b<a<c$　(C)$c<a<b$　(D)$c<b<a$

(9)设命题 p：函数 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+2ax-\ln x$ 存在极值，q：函数 $g(x)=\log_a x$($a>0$，且 $a\neq 1$)在$(0,+\infty)$上是增函数，则 p 是 q 的

(A)充要条件　(B)充分而不必要条件

(C)必要而不充分条件　(D)既不充分也不必要条件

(10)已知函数 $f(x)=-x^2(x^2+ax+b)$，且满足 $f(1-x)=f(1+x)$，则 $f(x)$的最大值是

(A)-2　　(B)-1　　(C)0　　(D)1

(11)已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $y=f(x)$的导函数为 $f'(x)$，函数 $f(x)$满足：当 $x>0$ 时，$x\cdot f'(x)+f(x)>0$，且 $f(1)=2$. 则不等式 $f(x)<\dfrac{2}{|x|}$的解集是

(A)$(-1,1)$　　(B)$(-\infty,1)$

(C)$(-1,0)\cup(0,1)$　　(D)$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

(12)已知函数 $f(x)=ax^2+x-xe^x$，当 $x\geqslant 0$ 时，恒有 $f(x)\leqslant 0$，则实数 a 的取值范围为

(A)$[0,+\infty)$　　(B)$[1,+\infty)$　　(C)$(-\infty,0]$　　(D)$(-\infty,1]$

第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分.

(13)设集合 $A=\{1,a-2,a\}$，若 $3\in A$，则实数 $a=$________.

(14)已知命题 p：$\exists x_0\in[-1,1]$，$a^2x_0^2+ax_0-2=0$，若命题 p 为真命题，则实数 a 的取值范围为________.

(15)已知函数 $f(x)=\begin{cases}-e^{x-1}-2x, & x\geqslant 0\\ -e^{-x-1}+2x, & x<0\end{cases}$，则满足不等式 $f(x)+3>0$ 的实数 x 的取值范围为________.

(16)已知函数 $f(x)=3\ln x-x^2$，点 A 为函数 $f(x)$图象上一动点，则 A 到直线 $y=x$ 距离的最小值为________.

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17)(本小题满分 10 分)

已知集合 $A=\{x\,|\,x^2-(m+2)x+(1-m)(2m+1)\leqslant 0\}$，集合 $B=\{x\,|\,-2\leqslant x\leqslant 4\}$.

(Ⅰ)当 $m=1$ 时，求 $A\cup B$；

(Ⅱ)若 $B\subseteq A$，求实数 m 的取值范围.

(18)(本小题满分 12 分)

已知命题 p:函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(\frac{a}{x}+1)$在$[-2,-1]$上单调递增;命题 q:函数 $g(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2+ax$ 在$[3,+\infty)$上单调递减.

(Ⅰ)若 q 是真命题,求实数 a 的取值范围;

(Ⅱ)若 p 或 q 为真命题,p 且 q 为假命题,求实数 a 的取值范围.

(19)(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{4}}(2mx^2-3x+8m)$.

(Ⅰ)当 $m=1$ 时,求函数 $f(x)$在$[\frac{1}{2},2]$上的值域;

(Ⅱ)若函数 $f(x)$在$(4,+\infty)$上单调递减,求实数 m 的取值范围.

(20)(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x(a-x)-\ln x(a\in\mathbf{R})$,若函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上存在两个极值点 x_1,x_2.

(Ⅰ)求实数 a 的取值范围;

(Ⅱ)证明:$f(x_1)+f(x_2)>3+\ln 2$.

(21)(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=ax^3+(a+b)x^2+12bx(a>0)$为奇函数,且 $f(x)$的极小值为-16. $f'(x)$为函数 $f(x)$的导函数.

(Ⅰ)求 a 和 b 的值;

(Ⅱ)若关于 x 的方程 $f'(x)=2x^3+m$ 有三个不等的实数根,求实数 m 的取值范围.

(22)(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=a(x-1)e^x-\dfrac{x^2}{2}$.

(Ⅰ)若曲线 $f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为 $2x+2y-1=0$,求实数 a 的值;

(Ⅱ)若函数 $f(x)$存在两个零点,求实数 a 的取值范围.

百校联盟2020届TOP300七月尖子生联考

文科数学　　参考答案

本试卷防伪处为：

若 A 中只有一个元素，则实数 a 的值为

若 q 是真命题，求实数 a 的取值范围；

1. B 【解析】$B=\{x\mid 2-x<1\}=\{x\mid x>1\}$，所以 $A\cap B=\{2,4\}$.

2. D 【解析】因为 $f(x)=e^x-e^{-x}$，则 $f(-x)=-(e^x-e^{-x})=-f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是奇函数，$f(x)=e^x-e^{-x}=e^x-\frac{1}{e^x}$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

3. D 【解析】由题意得 $\begin{cases}x-2>0\\ \lg(x-2)\neq 0\\ 16-x^2\geqslant 0\end{cases}$，故所求函数的定义域为 $(2,3)\cup(3,4]$.

4. A 【解析】令 $f(x)=x^2-(x-1)=(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$，所以 p 为真命题；当 $x_0=1$ 时，$\ln x_0=x_0-1$，故 q 为真命题。所以 $p\wedge q$ 为真命题.

5. C 【解析】若 A 中只有一个元素，则只有一个实数满足 $x^2+2ax+2a\leqslant 0$，即抛物线 $y=x^2+2ax+2a$ 与 x 轴只有一个交点，$\therefore \Delta=4a^2-8a=0$. $\therefore a=0$ 或 2.

6. A 【解析】由 $f(x)$ 的解析式知只有两个零点 $x=-\frac{4}{3}$ 与 $x=0$，排除 B、D；又 $f'(x)=(3x^2+10x+4)e^x$，由 $f'(x)=0$ 根的情况知函数有两个极值点，排除 C.

7. C 【解析】$f(x)=\log_2(4^x+1)-x=\log_2(4^x+1)-\log_2 2^x=\log_2\frac{4^x+1}{2^x}$，令 $t=\frac{4^x+1}{2^x}$ 则 $t=2^x+\frac{1}{2^x}\geqslant 2$，所以 $\log_2\frac{4^x+1}{2^x}\geqslant\log_2 2=1$，即函数 $f(x)$ 的最小值为 1.

8. D 【解析】$a=2020^{\frac{1}{2019}}>1$，$0<b=(\frac{1}{2019})^{2020}<1$，$c=\log_{2020}\frac{1}{2019}<0$，所以 $a>b>c$.

9. A 【解析】p：函数 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2ax-\ln x$ 存在极值，对函数 $f(x)$ 求导得 $f'(x)=-\frac{x^2-2ax+1}{x}$.

因为 $f(x)$ 存在极值，所以 $f'(x)=-\frac{x^2-2ax+1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解，即方程 $x^2-2ax+1=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解，即 $\Delta=4a^2-4\geqslant 0$，显然当 $\Delta=0$ 时，$f(x)$ 无极值，不合题意，所以方程 $x^2-2ax+1=0$ 必有两个不等正根，所以 $\begin{cases}a>0\\ \Delta=4a^2-4>0\end{cases}$，解得 $a>1$. 函数 $g(x)=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，则 $a>1$. 故 p 是 q 的充要条件.

10. C 【解析】$\because f(1-x)=f(1+x)$，$\therefore f(x)=-x^2(x^2+ax+b)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称，因为 $x=0$ 是 $f(x)=0$ 的二重根，所以 $x=2$ 也是方程 $f(x)=0$ 的二重根，则 $f(x)=-x^2(x-2)^2$，所以 $f(x)\leqslant 0$，所以 $f(x)$ 的最大值是 0.

11. C 【解析】当 $x>0$ 时，$x\cdot f'(x)+f(x)>0$，令 $F(x)=x\cdot f(x)$，则 $F'(x)=x\cdot f'(x)+f(x)>0$，即当 $x>0$ 时，$F(x)$ 单调递增.

又 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，$\therefore F(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数且 $F(0)=0$，则当 $x<0$ 时，$F(x)$ 单调递增.

$f(1)=2$，所以 $F(1)=2$，$\therefore F(-1)=-2$，当 $x>0$ 时，不等式 $f(x)<\frac{2}{|x|}$ 等价于 $x\cdot f(x)<2$，即 $F(x)<F(1)$，$\therefore 0<x<1$，当 $x<0$ 时，不等式 $f(x)<\frac{2}{|x|}$ 等价于 $x\cdot f(x)>-2$，即 $F(x)>F(-1)$，$\therefore -1<x<0$，综上，不等式 $f(x)<\frac{2}{|x|}$ 的解集为 $(-1,0)\cup(0,1)$.

12. D 【解析】$f(x)=x(ax+1-e^x)$. 令 $g(x)=ax-e^x+1$，则 $g'(x)=a-e^x$.

若 $a\leqslant 1$，则当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 为减函数，而 $g(0)=0$，

从而当 $x\geqslant 0$ 时，$g(x)\leqslant 0$，即 $f(x)\leqslant 0$，

若 $a>1$，则当 $x\in(0,\ln a)$ 时，$g'(x)>0$，

$g(x)$ 为增函数，而 $g(0)=0$，从而当 $x\in(0,\ln a)$ 时 $g(x)>0$，即 $f(x)>0$，不合题意.

综上可得，a 的取值范围为 $(-\infty,1]$.

13. 5 【解析】$a-2=3$，解得 $a=5$；当 $a=3$ 时，$a-2=1$，不满足互异性，舍去.

14. $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$【解析】当命题 p 为真命题，即方程 $a^2x^2+ax-2=0$ 在$[-1,1]$上有解，由 $a^2x^2+ax-2=0$，得$(ax+2)(ax-1)=0$，显然 $a\neq0$ $\therefore x=-\frac{2}{a}$或$x=\frac{1}{a}$，$\because x\in[-1,1]$，故$\left|\frac{2}{a}\right|\leqslant1$或$\left|\frac{1}{a}\right|\leqslant1$，$\therefore |a|\geqslant1$，即实数 a 的取值范围为$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

15. $(-1,1)$【解析】函数 $f(x)$的定义域关于原点对称，$\because x>0$时，$-x<0$，$f(-x)=-e^{x-1}-2x=f(x)$，$x<0$同理：$f(-x)=f(x)$，$\therefore f(x)$为偶函数. 易知 $f(x)$在$(0,+\infty)$上为减函数，且 $f(1)=-e^0-2=-3$，$f(x)+3>0$ 即 $f(x)>-3$，即 $f(x)>f(1)$，根据偶函数的性质知当$|x|<1$时，得$-1<x<1$.

16. $\sqrt{2}$【解析】$f'(x)=\frac{3}{x}-2x,(x>0)$与直线 $y=x$ 平行的切线斜率$k=1=\frac{3}{x}-2x$，解得 $x=1$ 或 $x=-\frac{3}{2}$(舍去)，又 $f(1)=-1$，即切点$(1,-1)$，则切点到直线 $y=x$ 的距离为$d=\frac{|1+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，$A$ 到直线 $y=x$ 距离的最小值为$\sqrt{2}$.

17.【解析】(Ⅰ)当 $m=1$ 时，$A=\{x|x^2-3x\leqslant0\}=\{x|0\leqslant x\leqslant3\}$，……2分

所以 $A\cup B=\{x|-2\leqslant x\leqslant4\}$. ……4分

(Ⅱ)集合 $A=\{x|x^2-(m+2)x+(1-m)(2m+1)\leqslant0\}=\{x|(x+m-1)(x-2m-1)\leqslant0\}$

若 $m\geqslant0$，则 $A=\{x|1-m\leqslant x\leqslant2m+1\}$，…5分

$\because B\subseteq A$，$\therefore\begin{cases}1-m\leqslant-2\\2m+1\geqslant4\end{cases}$，解得 $m\geqslant3$，……7分

若 $m<0$，则 $A=\{x|2m+1\leqslant x\leqslant1-m\}$.

$\because B\subseteq A$，$\therefore\begin{cases}2m+1\leqslant-2\\1-m\geqslant4\end{cases}$，解得 $m\leqslant-3$，…9分

$\therefore m$ 的取值范围为$(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$. ……10分

18.【解析】(Ⅰ)当命题 q 为真命题时，

函数 $g(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2+ax$ 在$[3,+\infty)$上单调递减，

所以 $g'(x)=-x^2+2x+a\leqslant0$ 在$[3,+\infty)$上恒成立，……2分

$g'(x)=-x^2+2x+a=-(x-1)^2+1+a$

所以 $g'(x)$在$[3,+\infty)$上单调递减，故 $g'(3)\leqslant0$，解得 $a\leqslant3$，

所以 q 是真命题，实数 a 的取值范围为$(-\infty,3]$. ……4分

(Ⅱ)命题 p 为真命题时，函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(\frac{a}{x}+1)$在$[-2,-1]$上单调递增，$\therefore 0<a<1$. ……6分

因为 p 或 q 为真命题，p 且 q 为假命题，所以 p 与 q 的真值相反. ……7分

(ⅰ)当 p 真且 q 假时，有$\begin{cases}0<a<1\\a>3\end{cases}$，

此不等式无解. ……9分

(ⅱ)当 p 假且 q 真时，有$\begin{cases}a\leqslant0\text{ 或 }a\geqslant1\\a\leqslant3\end{cases}$，

解得 $a\leqslant0$ 或 $1\leqslant a\leqslant3$，……11分

综上可得，实数 a 的取值范围为$(-\infty,0]\cup[1,3]$. ……12分

19.【解析】(Ⅰ)当 $m=1$ 时，$f(x)=\log_{\frac{1}{4}}(2x^2-3x+8)$，此时函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$；

因为函数 $y=2x^2-3x+8$ 的最小值为 $\frac{4\times2\times8-3^2}{8}=\frac{55}{8}$，

最大值为 $2\times2^2-3\times2+8=10$，故函数 $f(x)$在$[\frac{1}{2},2]$上的值域为$[\log_{\frac{1}{4}}10,\log_{\frac{1}{4}}\frac{55}{8}]$；……6分

(Ⅱ)因为函数 $y=\log_{\frac{1}{4}}x$ 在$(0,+\infty)$上单调递减，故 $g(x)=2mx^2-3x+8m$ 在$(4,+\infty)$上单调递增，则$\begin{cases}m>0,\\\frac{3}{4m}\leqslant4,\\g(4)\geqslant0,\end{cases}$

解得 $m\geqslant\frac{3}{10}$，综上所述，实数 m 的取值范围$[\frac{3}{10},+\infty)$. ……12分

20.【解析】(Ⅰ)$f(x)=x(a-x)-\ln x=-x^2+ax-\ln x$

对函数 $f(x)$求导得 $f'(x)=-\frac{2x^2-ax+1}{x}$. ……1分

函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上存在两个极值点 x_1,x_2，所以 $f'(x)=-\frac{2x^2-ax+1}{x}=0$ 在$(0,+\infty)$上有两个解，即方程 $2x^2-ax+1=0$ 必有两个不等正根，……3分

$\begin{cases}\Delta=a^2-8>0\\x_1x_2=\frac{1}{2}>0\\x_1+x_2=\frac{a}{2}>0\end{cases}$，……5分

解得 $a>2\sqrt{2}$，所以实数 a 的取值范围为 $(2\sqrt{2},+\infty)$. …………………………………… 6 分

(Ⅱ)由题意知 $f(x_1)+f(x_2)=a(x_1+x_2)-(x_1^2+x_2^2)-(\ln x_1+\ln x_2)$

$=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{4}+1-\ln\frac{1}{2}=\frac{a^2}{4}+1+\ln 2$，………… 9 分

由 $a>2\sqrt{2}$ 得 $f(x_1)+f(x_2)>2+1+\ln 2=3+\ln 2$，即 $f(x_1)+f(x_2)>3+\ln 2$. ………… 12 分

21.【解析】(Ⅰ)因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(x)+f(-x)=0$ 恒成立，则 $2(a+b)x^2=0$.

所以 $b=-a$，所以 $f(x)=ax^3-12ax$，…… 1 分

则 $f'(x)=3ax^2-12a=3a(x+2)(x-2)$

令 $f'(x)=0$，解得 $x=-2$ 或 $x=2$.

当 $x\in(-2,2)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

$f(x)$ 在 $(-2,2)$ 单调递减，在 $(2,+\infty)$ 单调递增，

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(2)$，……………… 3 分

由 $f(2)=8a-24a=-16a=-16$，解得 $a=1$.

所以 $a=1,b=-1$. ………………………………… 5 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知 $f(x)=x^3-12x$，$f'(x)=3x^2-12$，………………………………………… 6 分

方程 $f'(x)=2x^3+m$ 即为 $3x^2-12=2x^3+m$

即方程 $2x^3-3x^2+m+12=0$ 有三个不等的实数根，………………………………………… 7 分

设 $g(x)=2x^3-3x^2+m+12$，只要使曲线有 3 个零点即可. ………………………………… 8 分

设 $g'(x)=6x^2-6x=0$，$\therefore x=0$ 或 $x=1$ 分别为 $g(x)$ 的极值点，

当 $x\in(-\infty,0)$ 和 $(1,+\infty)$ 时 $g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

当 $x\in(0,1)$ 时 $g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，

所以，$x=0$ 为极大值点，$x=1$ 为极小值点. ……………………………………………… 9 分

所以要使曲线与 x 轴有 3 个交点，当且仅当 $\begin{cases}g(0)>0\\g(1)<0\end{cases}$，即 $\begin{cases}m+12>0\\m+11<0\end{cases}$，………………… 11 分

解得 $-12<m<-11$.

即实数 m 的取值范围为 $(-12,-11)$. …… 12 分

22.【解析】(Ⅰ)因为 $f(x)=a(x-1)e^x-\frac{x^2}{2}$，

得 $f'(x)=axe^x-x=x(ae^x-1)$，………… 2 分

所以 $f'(1)=ae-1$.

因为曲线在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $2x+2y-1=0$，

所以 $f'(1)=ae-1=-1$，即 $a=0$. ………… 5 分

(Ⅱ) $f(x)=a(x-1)e^x-\frac{x^2}{2}$ 存在两个零点，即方程 $a(x-1)=\frac{x^2}{2e^x}$ 有两个根，也即直线 $y=a(x-1)$ 与函数 $y=\frac{x^2}{2e^x}$ 的图像有两个交点，………… 7 分

记 $h(x)=\frac{x^2}{2e^x}\Rightarrow h'(x)=\frac{x(2-x)}{2e^x}$，

由 $h'(x)>0\Rightarrow x(2-x)>0\Rightarrow 0<x<2$，由 $h'(x)<0\Rightarrow x(2-x)<0\Rightarrow x<0$，或 $x>2$，

故 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，…………… 9 分

且 $h(0)=0$，$x>0$ 时 $h(x)>0$，

又直线 $y=a(x-1)$ 过 $(1,0)$，斜率为 a，

由图象观察知：当 $a<0$ 时直线 $y=a(x-1)$ 与 $h(x)=\frac{x^2}{2e^x}$ 的图象必有两个交点，………… 10 分

当 $a\geqslant 0$ 时直线 $y=a(x-1)$ 与 $h(x)=\frac{x^2}{2e^x}$ 的图象只有一个交点，………………………… 11 分

综上，函数 $f(x)$ 存在两个零点，实数 a 的取值范围为 $(-\infty,0)$. ………………………… 12 分