百校联盟 2020 届 TOP300 七月尖子生联考

理科数学

注意事项：

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.
2. 答题前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试卷相应的位置.
3. 全部答案写在答题卡上,写在本试卷上无效.
4. 本试卷满分 150 分,测试时间 120 分钟.
5. 考试范围:必修 1,选修 2—1 第 1 章,选修 2—2 第 1 章.

第Ⅰ卷

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

(1)已知集合 $A=\{1,2,4\}$,$B=\{x|\log_2(x+1)>1\}$,则 $A\cap B=$

(A)$\{1,4\}$　(B)$\{2,4\}$　(C)$\{1,2\}$　(D)$\{4\}$

(2)下列函数中,既是偶函数,又在$(0,+\infty)$上单调递增的是

(A)$y=e^x-e^{-x}$　(B)$y=1-x^2$　(C)$y=2^{-|x|}$　(D)$y=\ln|x|$

(3)函数 $y=\dfrac{1}{\lg(x-2)}+\sqrt{16-x^2}$ 的定义域为

(A)$(2,3)$　(B)$(3,4]$　(C)$(2,4]$　(D)$(2,3)\cup(3,4]$

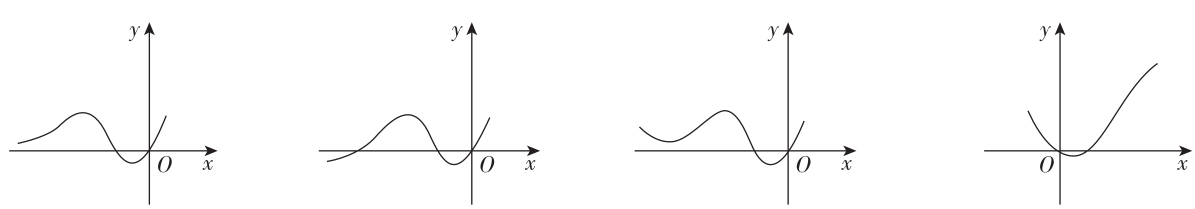
(4)已知命题 p:$\forall x>0$,$e^x>x+1$;命题 q:$\exists x_0\in(0,+\infty)$,$\ln x_0=x_0-1$;下列命题为真命题的是

(A)$p\wedge q$　(B)$p\wedge\neg q$　(C)$\neg p\wedge q$　(D)$\neg p\wedge\neg q$

(5)已知集合 $A=\{x|x^2+2ax+2a\leqslant 0\}$,若 A 中只有一个元素,则实数 a 的值为

(A)0　(B)0 或-2　(C)0 或 2　(D)2

(6)函数 $f(x)=(x^2+2x)e^{2x}$ 的图象大致是



(A)　(B)　(C)　(D)

(7)函数 $f(x)=\log_2(4^x+1)-x$ 的最小值为

(A)3　(B)2　(C)1　(D)0

(8)三个数 $a=\dfrac{2}{e^2}$,$b=\ln\sqrt{2}$,$c=\dfrac{\ln 3}{3}$的大小顺序为

(A)$b<c<a$　(B)$b<a<c$　(C)$c<a<b$　(D)$a<b<c$

(9)设命题 p:函数 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+2ax-\ln x$ 存在极值,q:函数 $g(x)=\log_a x(a>0$,且 $a\neq 1)$在$(0,+\infty)$上是增函数,则 p 是 q 的

(A)充要条件　(B)充分而不必要条件

(C)必要而不充分条件　(D)既不充分也不必要条件

(10)已知函数 $f(x)=ax^2+x-xe^x$,当 $x\geqslant 0$ 时,恒有 $f(x)\leqslant 0$,则实数 a 的取值范围为

(A)$[1,+\infty)$　(B)$(-\infty,0]$　(C)$(-\infty,1]$　(D)$[0,+\infty)$

(11)已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$满足 $f(2+x)=f(2-x)$，且当 $x>2$ 时，$x\cdot f'(x)+f(x)>2f'(x)$，若 $f(1)=1$. 则不等式 $f(x)<\dfrac{1}{|x-2|}$的解集是

(A)$(2,3)$　　(B)$(-\infty,1)$

(C)$(1,2)\cup(2,3)$　　(D)$(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$

(12)已知函数 $f(x)=\dfrac{1-e^{x+1}}{e^{x+1}}(x<0)$与 $g(x)=e^x\ln(x+1)-ae^x$ 的图象上存在关于 y 轴对称的点，则实数 a 的取值范围是

(A)$(-\infty,1+\dfrac{1}{e})$　　(B)$(-\dfrac{1}{e},+\infty)$　　(C)$(-\infty,1-\dfrac{1}{e})$　　(D)$(1-\dfrac{1}{e},+\infty)$

第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分.

(13)设集合 $A=\{1,a-2,a\}$，若 $3\in A$，则实数 $a=$________.

(14)已知命题 p：$\exists x_0\in[-1,1]$，$a^2x_0^2+ax_0-2=0$，若命题 p 为真命题，则实数 a 的取值范围为________.

(15)已知函数 $f(x)=\begin{cases}-e^{x-1}-2x,x\geqslant 0\\-e^{-x-1}+2x,x<0\end{cases}$，则满足不等式 $f(x)+3>0$ 的实数 x 的取值范围为________.

(16)已知 a 为任意的实数，则函数 $y=(3\ln x-x^2-a)^2+x^2-2ax+a^2$ 的最小值为________.

三、解答题：解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(17)(本小题满分 10 分)

已知集合 $A=\{x|x^2-(m+2)x+(1-m)(2m+1)\leqslant 0\}$. 集合 $B=\{x|y=\sqrt{(\dfrac{1}{9}-3^x)(3^x-81)}\}$.

(Ⅰ)当 $m=1$ 时，求 $A\cup B$；

(Ⅱ)若 $B\subseteq A$，求实数 m 的取值范围.

(18)(本小题满分 12 分)

已知命题 p:函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(\frac{a}{x}+1)$在$[-2,-1]$上单调递增;命题 q:函数 $g(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2+ax$ 在$[3,+\infty)$上单调递减.

(Ⅰ)若 q 是真命题,求实数 a 的取值范围;

(Ⅱ)若 p 或 q 为真命题,p 且 q 为假命题,求实数 a 的取值范围.

(19)(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{4}}(2mx^2-3x+8m)$.

(Ⅰ)当 $m=1$ 时,求函数 $f(x)$在$[\frac{1}{2},2]$上的值域;

(Ⅱ)若函数 $f(x)$在$(4,+\infty)$上单调递减,求实数 m 的取值范围.

(20)(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=ax^3+(a+b)x^2+12bx(a>0)$为奇函数,且 $f(x)$的极小值为-16.

(Ⅰ)求 a 和 b 的值;

(Ⅱ)若过点 $M(1,m)$可作三条不同的直线与曲线 $y=f(x)$相切,求实数 m 的取值范围.

(21)(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2-\frac{1}{2}ax+(1-x)e^x$.

(Ⅰ)若曲线 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=x+1$,求实数 a 的值;

(Ⅱ)若函数 $f(x)$ 有 3 个零点,求实数 a 的取值范围.

(22)(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x\ln x-\frac{k}{x}-x(k\in\mathbf{R})$,若函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在两个极值点 x_1,x_2.

(Ⅰ)求实数 k 的取值范围;

(Ⅱ)证明:$\frac{x_1+x_2}{2}>\sqrt{2k}$.

百校联盟 2020 届 TOP300 七月尖子生联考

理科数学　　参考答案

本试卷防伪处为：

图象上存在关于 y 轴对称的点

若函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上存在两个极值点 x_1,x_2.

1. B 【解析】$B=\{x\mid\log_2(x+1)>1\}=\{x\mid x>1\}$，所以 $A\cap B=\{2,4\}$.

2. D 【解析】选项 A 中函数是奇函数，选项 B 中函数在$(0,+\infty)$上单调递减，选项 C 中函数在$(0,+\infty)$上单调递减，选项 D 中函数是偶函数且在$(0,+\infty)$上单调递增.

3. D 【解析】由题意得$\begin{cases}x-2>0\\ \lg(x-2)\neq 0\\ 16-x^2\geqslant 0\end{cases}$，故所求函数的定义域为$(2,3)\cup(3,4]$.

4. A 【解析】令 $f(x)=e^x-(x+1)$，则 $f'(x)=e^x-1$，当 $x>0$ 时，$f'(x)=e^x-1>0$，即 $f(x)$单调递增，所以 $x>0$ 时，则 $f(x)>f(0)=0$，即 $e^x>x+1$，所以 p 为真命题；当 $x_0=1$ 时，$\ln x_0=x_0-1$，故 q 为真命题。所以 $p\wedge q$ 为真命题.

5. C 【解析】若 A 中只有一个元素，则只有一个实数满足 $x^2+2ax+2a\leqslant 0$，即抛物线 $y=x^2+2ax+2a$ 与 x 轴只有一个交点，$\therefore\Delta=4a^2-8a=0$. $\therefore a=0$ 或 2.

6. A 【解析】由 $f(x)$的解析式知只有两个零点 $x=-2$ 与 $x=0$，排除 B、D；又 $f'(x)=(2x^2+6x+2)e^{2x}$，由 $f'(x)=0$ 根的情况知函数有两个极值点，排除 C.

7. C 【解析】$f(x)=\log_2(4^x+1)-x=\log_2(4^x+1)-\log_2 2^x=\log_2\dfrac{4^x+1}{2^x}$，令 $t=\dfrac{4^x+1}{2^x}$则 $t=2^x+\dfrac{1}{2^x}\geqslant 2$，所以 $\log_2\dfrac{4^x+1}{2^x}\geqslant\log_2 2=1$，即函数 $f(x)$的最小值为 1.

8. D 【解析】构造函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $a=\dfrac{2}{e^2}=f(e^2)$，$b=\ln\sqrt{2}=\dfrac{\ln 4}{4}=f(4)$，$c=\dfrac{\ln 3}{3}=f(3)$，由 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$知函数 $f(x)$在$(0,e)$上单调递增，在$(e,+\infty)$上单调递减，又因为 $e<3<4<e^2$，所以$a<b<c$.

9. A 【解析】p：函数 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+2ax-\ln x$ 存在极值，对函数 $f(x)$求导得 $f'(x)=-\dfrac{x^2-2ax+1}{x}$.

因为 $f(x)$存在极值，所以 $f'(x)=-\dfrac{x^2-2ax+1}{x}$ 在$(0,+\infty)$上有解，即方程 $x^2-2ax+1=0$ 在$(0,+\infty)$上有解，即 $\Delta=4a^2-4\geqslant 0$，显然当 $\Delta=0$ 时，$f(x)$无极值，不合题意，所以方程 $x^2-2ax+1=0$ 必有两个不等正根，所以$\begin{cases}a>0\\ \Delta=4a^2-4>0\end{cases}$，解得 $a>1$. 函数 $g(x)=\log_a x$ 在$(0,+\infty)$上是增函数，则$a>1$. 故 p 是 q 的充要条件.

10. C 【解析】$f(x)=x(ax+1-e^x)$. 令 $g(x)=ax-e^x+1$，则 $g'(x)=a-e^x$.

若 $a\leqslant 1$，则当 $x\in(0,+\infty)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$为减函数，而 $g(0)=0$，

从而当 $x\geqslant 0$ 时，$g(x)\leqslant 0$，即 $f(x)\leqslant 0$，

若 $a>1$，则当 $x\in(0,\ln a)$时，$g'(x)>0$，

$g(x)$为增函数，而 $g(0)=0$，从而当 $x\in(0,\ln a)$时 $g(x)>0$，即 $f(x)>0$，不合题意.

综上可得，a 的取值范围为$(-\infty,1]$.

11. C 【解析】当 $x>2$ 时，$x\cdot f'(x)+f(x)>2f'(x)$，$\therefore(x-2)f'(x)+f(x)>0$，

令 $F(x)=|x-2|f(x)$，

当 $x>2$ 时，则 $F(x)=(x-2)f(x)$，$F'(x)=(x-2)f'(x)+f(x)>0$，即当 $x>2$ 时，$F(x)$单调递增. 函数 $f(x)$满足 $f(2+x)=f(2-x)$，所以 $F(2+x)=F(2-x)$，即 $F(x)$的图象关于 $x=2$ 对称，不等式 $f(x)<\dfrac{1}{|x-2|}$等价于$|x-2|f(x)<1(x\neq 2)$，$F(1)=|1-2|f(1)=f(1)=1$，即 $F(x)<F(1)$，所以$|x-2|<|1-2|$，解得 $1<x<3$ 且 $x\neq 2$，解集为$(1,2)\cup(2,3)$.

12. D 【解析】由 $f(x)$关于 y 轴对称的函数为

$h(x)=f(-x)=\dfrac{1-e^{-x+1}}{e^{-x+1}}=e^{x-1}-1(x>0)$，

令 $h(x)=g(x)$，得 $e^{x-1}-1=e^x\ln(x+1)-ae^x$，$(x>0)$，

则方程 $e^{x-1}-1=e^x\ln(x+1)-ae^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解，

即方程 $\frac{1}{e^x}+\ln(x+1)-\frac{1}{e}=a$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解

设 $\varphi(x)=\frac{1}{e^x}+\ln(x+1)-\frac{1}{e}$，

条件转化为 $y=\varphi(x)$ 与 $y=a$ 的图象在 $(0,+\infty)$ 上有交点，

$\because \varphi'(x)=-\frac{1}{e^x}+\frac{1}{x+1}=\frac{e^x-x-1}{e^x(x+1)}>0$，

得 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

当 $x>0$ 时，则 $\varphi(x)>\varphi(0)=1-\frac{1}{e}$

所以 $a>1-\frac{1}{e}$.

13.5 【解析】$a-2=3$，解得 $a=5$；当 $a=3$ 时，$a-2=1$，不满足互异性，舍去.

14.$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ 【解析】当命题 p 为真命题，即方程 $a^2x^2+ax-2=0$ 在 $[-1,1]$ 上有解，由 $a^2x^2+ax-2=0$，得 $(ax+2)(ax-1)=0$，显然 $a\neq0$ $\therefore x=-\frac{2}{a}$ 或 $x=\frac{1}{a}$，$\because x\in[-1,1]$，故 $|\frac{2}{a}|\leqslant1$ 或 $|\frac{1}{a}|\leqslant1$，$\therefore |a|\geqslant1$，即实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

15.$(-1,1)$ 【解析】函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，$\because x>0$ 时，$-x<0$，$f(-x)=-e^{x-1}-2x=f(x)$，$x<0$ 同理：$f(-x)=f(x)$，$\therefore f(x)$ 为偶函数. 易知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，且 $f(1)=-e^0-2=-3$，$f(x)+3>0$ 即 $f(x)>-3$，即 $f(x)>f(1)$，根据偶函数的性质知当 $|x|<1$ 时，得 $-1<x<1$.

16.2 【解析】$(3\ln x-x^2-a)^2+(x-a)^2$ 就是曲线 $y=3\ln x-x^2(x>0)$ 上点 $A(x,3\ln x-x^2)$ 与直线 $y=x$ 上点 $B(a,a)$ 之间的距离 $|AB|$ 的平方，对曲线 $y=3\ln x-x^2$ 求导：$y'=\frac{3}{x}-2x$，与直线 $y=x$ 平行的切线斜率 $k=1=\frac{3}{x}-2x$，解得 $x=1$ 或 $x=-\frac{3}{2}$（舍去），把 $x=1$ 代入 $y=3\ln x-x^2$，解得 $y=-1$，即切点 $(1,-1)$，则切点 $(1,-1)$ 到直线 $y=x$ 的距离为 $d=\frac{|1+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，所以 $d^2=2$，即 $|AB|$ 的平方最小值为 2. 即 $(3\ln x-x^2-a)^2+(x-a)^2$ 的最小值为 2.

17.【解析】（Ⅰ）当 $m=1$ 时，$A=\{x\,|\,x^2-3x\leqslant0\}=\{x\,|\,0\leqslant x\leqslant3\}$， …………………………… 1 分

$B=\{x\,|\,y=\sqrt{(\frac{1}{9}-3^x)(3^x-81)}\}=\{x\,|\,\frac{1}{9}\leqslant3^x\leqslant81\}=\{x\,|\,-2\leqslant x\leqslant4\}$， ……………………… 3 分

所以 $A\cup B=\{x\,|\,-2\leqslant x\leqslant4\}$. ……………… 4 分

（Ⅱ）集合 $A=\{x\,|\,x^2-(m+2)x+(1-m)(2m+1)\leqslant0\}=\{x\,|\,(x+m-1)(x-2m-1)\leqslant0\}$

若 $m\geqslant0$，则 $A=\{x\,|\,1-m\leqslant x\leqslant2m+1\}$， … 5 分

$\because B\subseteq A$，$\therefore \begin{cases}1-m\leqslant-2\\2m+1\geqslant4\end{cases}$，解得 $m\geqslant3$，……… 7 分

若 $m<0$，则 $A=\{x\,|\,2m+1\leqslant x\leqslant1-m\}$.

$\because B\subseteq A$，$\therefore \begin{cases}2m+1\leqslant-2\\1-m\geqslant4\end{cases}$，解得 $m\leqslant-3$， … 9 分

$\therefore m$ 的取值范围为 $(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$. ……
…………………………………………………… 10 分

18.【解析】（Ⅰ）当命题 q 为真命题时，

函数 $g(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2+ax$ 在 $[3,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $g'(x)=-x^2+2x+a\leqslant0$ 在 $[3,+\infty)$ 上恒成立，…………………………………………… 2 分

$g'(x)=-x^2+2x+a=-(x-1)^2+1+a$

所以 $g'(x)$ 在 $[3,+\infty)$ 上单调递减，故 $g'(3)\leqslant0$，

解得 $a\leqslant3$，

所以 q 是真命题，实数 a 的取值范围为 $(-\infty,3]$.
…………………………………………………… 4 分

（Ⅱ）命题 p 为真命题时，函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(\frac{a}{x}+1)$ 在 $[-2,-1]$ 上单调递增，$\therefore 0<a<1$. ……… 6 分

因为 p 或 q 为真命题，p 且 q 为假命题，所以 p 与 q 的真值相反. …………………………… 7 分

（ⅰ）当 p 真且 q 假时，有 $\begin{cases}0<a<1\\a>3\end{cases}$，

此不等式无解. …………………………… 9 分

（ⅱ）当 p 假且 q 真时，有 $\begin{cases}a\leqslant0 \text{ 或 } a\geqslant1\\a\leqslant3\end{cases}$，

解得 $a\leqslant0$ 或 $1\leqslant a\leqslant3$， ………………… 11 分

综上可得，实数 a 的取值范围为 $(-\infty,0]\cup[1,3]$.
…………………………………………………… 12 分

19.【解析】（Ⅰ）当 $m=1$ 时，$f(x)=\log_{\frac{1}{4}}(2x^2-3x+8)$，

此时函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$；

因为函数 $y=2x^2-3x+8$ 的最小值为 $\frac{4\times2\times8-3^2}{8}=\frac{55}{8}$，

最大值为 $2\times2^2-3\times2+8=10$，故函数 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2},2]$ 上的值域为 $[\log_{\frac{1}{4}}10,\log_{\frac{1}{4}}\frac{55}{8}]$； …… 6 分

（Ⅱ）因为函数 $y=\log_{\frac{1}{4}}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，故 $g(x)=2mx^2-3x+8m$ 在 $(4,+\infty)$ 上单调递增，则 $\begin{cases}m>0,\\ \frac{3}{4m}\leqslant4,\\ g(4)\geqslant0,\end{cases}$

解得 $m\geqslant\frac{3}{10}$，综上所述，实数 m 的取值范围 $[\frac{3}{10},+\infty)$. …………………………………… 12 分

20.【解析】（Ⅰ）因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(x)+f(-x)=0$ 恒成立，则 $2(a+b)x^2=0$.

所以 $b=-a$，所以 $f(x)=ax^3-12ax$， …… 1 分

则 $f'(x)=3ax^2-12a=3a(x+2)(x-2)$

令 $f'(x)=0$，解得 $x=-2$ 或 $x=2$.

当 $x\in(-2,2)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

$f(x)$ 在 $(-2,2)$ 单调递减，在 $(2,+\infty)$ 单调递增，

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(2)$， ……………… 3 分

由 $f(2)=8a-24a=-16a=-16$，解得 $a=1$.

所以 $a=1,b=-1$. ………………………… 5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $f(x)=x^3-12x$，

设点 $P(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $f(x)=x^3-12x$ 的切点，则在 P 点处的切线的方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ 即 $y=3(x_0^2-4)x-2x_0^3$

因为其过点 $M(1,m)$，所以，$m=3(x_0^2-4)-2x_0^3=-2x_0^3+3x_0^2-12$， ………………………… 7 分

由于有三条切线，所以方程应有 3 个实根，

设 $g(x)=2x^3-3x^2+m+12$，只要使曲线 $g(x)$ 有 3 个零点即可. ………………………………… 8 分

设 $g'(x)=6x^2-6x=0$，$\therefore x=0$ 或 $x=1$ 分别为 $g(x)$ 的极值点，

当 $x\in(-\infty,0)$ 和 $(1,+\infty)$ 时 $g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

当 $x\in(0,1)$ 时 $g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，所以，$x=0$ 为极大值点，$x=1$ 为极小值点.

…………………………………………… 9 分

所以要使曲线 $g(x)$ 与 x 轴有 3 个交点，当且仅当 $\begin{cases}g(0)>0\\ g(1)<0\end{cases}$，即 $\begin{cases}m+12>0\\ m+11<0\end{cases}$， ……………… 11 分

解得 $-12<m<-11$.

即实数 m 的取值范围为 $(-12,-11)$. …… 12 分

21.【解析】（Ⅰ）因为 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2-\frac{1}{2}ax+(1-x)e^x$，

得 $f'(x)=ax-\frac{1}{2}a-e^x+(1-x)e^x=ax-\frac{1}{2}a-xe^x$， …………………………………… 2 分

所以 $f'(0)=-\frac{1}{2}a$.

因为曲线在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=x+1$，

所以 $f'(0)=-\frac{1}{2}a=1$，即 $a=-2$. ……… 5 分

（Ⅱ）$f(x)=\frac{1}{2}ax^2-\frac{1}{2}ax+(1-x)e^x=\frac{1}{2}ax(x-1)+(1-x)e^x=(x-1)(\frac{1}{2}ax-e^x)$，

所以 $f(x)$ 有一个零点 $x=1$. ……………… 6 分

要使得 $f(x)$ 有 3 个零点，即方程 $\frac{1}{2}ax-e^x=0$ 有 2 个不为 1 的不等实数根，

又方程 $\frac{1}{2}ax-e^x=0\Leftrightarrow a=\frac{2e^x}{x}(x\neq0)$，令 $h(x)=\frac{2e^x}{x}(x\neq0)$， ………………………………… 7 分

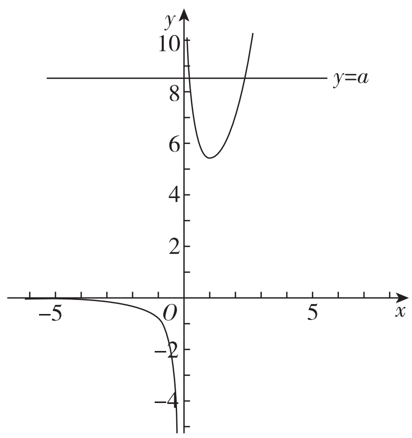
即函数 $y=a$ 与 $y=h(x)$ 图象有两个交点，

令 $h'(x)=\frac{2xe^x-2e^x}{x^2}=\frac{2e^x(x-1)}{x^2}=0$，得 $x=1$.

………………………………………… 8 分

$h(x)$ 的单调性如表：

x	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$h'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	↘	极小值	↗



……………………………………………… 9 分

当 $x<0$ 时,$h(x)<0$,又 $h(1)=2e$,可作出 $h(x)$ 的大致图象,由图象得 $a>2e$ ………………… 11 分

所以,要使得 $f(x)$ 有 3 个零点,

则实数 a 的取值范围为 $(2e,+\infty)$. ……… 12 分

22.【解析】(Ⅰ)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

因为 $f(x)=x\ln x-\frac{k}{x}-x$,

$f'(x)=\ln x+1+\frac{k}{x^2}-1=\ln x+\frac{k}{x^2}$

令 $g(x)=\ln x+\frac{k}{x^2}$

所以 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2k}{x^3}=\frac{x^2-2k}{x^3}$,$x>0$. …… 1 分

当 $k\leqslant 0$ 时,$g'(x)>0$,

所以函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. … 2 分

即 $f'(x)=\ln x+\frac{k}{x^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

$f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上至多一个零点,所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上至多一个极值点,不满足条件.

当 $k>0$ 时,由 $g'(x)=0$,得 $x=\sqrt{2k}$(负根舍去),

当 $x\in(0,\sqrt{2k})$ 时,$g'(x)<0$,

当 $x\in(\sqrt{2k},+\infty)$ 时,$g'(x)>0$,

所以函数 $g(x)$ 在 $(0,\sqrt{2k})$ 上单调递减;

在 $(\sqrt{2k},+\infty)$ 上单调递增. ……………… 2 分

所以 $g(x)_{\min}=g(\sqrt{2k})=\ln\sqrt{2k}+\frac{1}{2}$,

要使函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在两个极值点

则函数 $f'(x)$ 有两个零点,即 $g(x)$ 有两个零点

首先 $g(x)_{\min}=\ln\sqrt{2k}+\frac{1}{2}<0$,解得 $0<k<\frac{1}{2e}$.

……………………………………………… 5 分

因为 $2k<\sqrt{2k}<1$,且 $g(1)=k>0$,

下面证明:$g(2k)=\ln(2k)+\frac{1}{4k}>0$.

设 $h(k)=\ln(2k)+\frac{1}{4k}$,

则 $h'(k)=\frac{1}{k}-\frac{1}{4k^2}=\frac{4k-1}{4k^2}$.

因为 $k<\frac{1}{2e}$,所以 $h'(k)=\frac{4k-1}{4k^2}<\frac{\frac{2}{e}-1}{4k^2}<0$.

所以 $h(k)$ 在 $(0,\frac{1}{2e})$ 上单调递减,

所以 $g(2k)=h(k)>h(\frac{1}{2e})=\ln\frac{1}{e}+\frac{e}{2}>0$.

所以实数 k 的取值范围为 $(0,\frac{1}{2e})$. ………… 6 分

(Ⅱ)因为 x_1,x_2 是函数 $f(x)$ 的两个极值点,

所以 x_1,x_2 是函数 $f'(x)$ 的两个零点

即 x_1,x_2 是函数 $g(x)$ 的两个零点,

不妨设 $x_1<x_2$,令 $x_2=tx_1$,则 $t>1$.

所以 $\begin{cases}\ln x_1+\frac{k}{x_1^2}=0,\\ \ln x_2+\frac{k}{x_2^2}=0,\end{cases}$ 即 $\ln x_2-\ln x_1=\frac{k}{x_1^2}-\frac{k}{x_2^2}$. …

…………………………………………………… 8 分

所以 $\ln t=\frac{k}{x_1^2}-\frac{k}{t^2x_1^2}$,即 $x_1^2=\frac{k}{\ln t}(1-\frac{1}{t^2})$,$0<k<\frac{1}{2e}$,$t>1$.

要证 $\frac{x_1+x_2}{2}>\sqrt{2k}$,需证 $\sqrt{x_1x_2}>\sqrt{2k}$. … 9 分

即证 $tx_1^2>2k$,即证 $t\times\frac{k}{\ln t}(1-\frac{1}{t^2})>2k$.

因为 $0<k<\frac{1}{2e}$,所以即证 $t-\frac{1}{t}>2\ln t(t>1)$. …

…………………………………………… 10 分

设 $H(t)=2\ln t-t+\frac{1}{t}$,

则 $H'(t)=\frac{2}{t}-1-\frac{1}{t^2}=-\frac{(t-1)^2}{t^2}<0$,$t>1$.

所以 $H(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减, ……… 11 分

所以 $H(t)=2\ln t-t+\frac{1}{t}<H(1)=0$.

所以 $\frac{x_1+x_2}{2}>\sqrt{2k}$. ……………………… 12 分