2020年北京市东城区高三一模数学试卷

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 已知集合 $A=\{x\mid x-1>0\}$，$B=\{-1,0,1,2\}$，那么 $A\cap B=$

A. $\{-1,0\}$　　B. $\{0,1\}$

C. $\{-1,0,1,2\}$　　D. $\{2\}$

2. 函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2+1}}$ 的定义域为

A. $(-1,2]$　　B. $[2,+\infty)$

C. $(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1)\cup[2,+\infty)$

3. 已知 $\dfrac{2}{1+a\mathrm{i}}=1-\mathrm{i}\ (a\in\mathrm{R})$，则 $a=$

A. 1　　B. 0

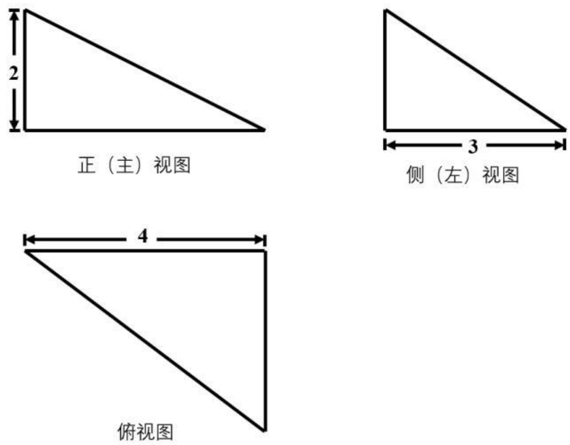
C. -1　　D. -2

4. 若双曲线 $C:x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (b>0)$ 的一条渐近线与直线 $y=2x+1$ 平行，则 b 的值为

A. 1　　B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$　　D. 2

5. 如图所示，某三棱锥的正（主）视图、俯视图、侧（左）视图均为直角三角形，则该三棱锥的体积为



A. 4

B. 6

C. 8

D. 12

6. 已知 $x<-1$，那么在下列不等式中，不成立的是

A. $x^2-1>0$　　B. $x+\frac{1}{x}<-2$

C. $\sin x-x>0$　　D. $\cos x+x>0$

7. 在平面直角坐标系中，动点 M 在单位圆上按逆时针方向作匀速圆周运动，每 12 分钟转动一周.若点 M 的初始位置坐标为 $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，则运动到 3 分钟时，动点 M 所处位置的坐标是

A. $(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$　　B. $(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$

C. $(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$　　D. $(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$

8. 已知三角形 ABC，那么“$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|>|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|$”是“三角形 ABC 为锐角三角形”的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

9. 设O为坐标原点，点$A(1,0)$，动点P在抛物线$y^2=2x$上，且位于第一象限，M是线段PA的中点，则直线OM的斜率的范围为

A. $(0,1]$　　B. $(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$

C. $(0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$　　D. $[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$

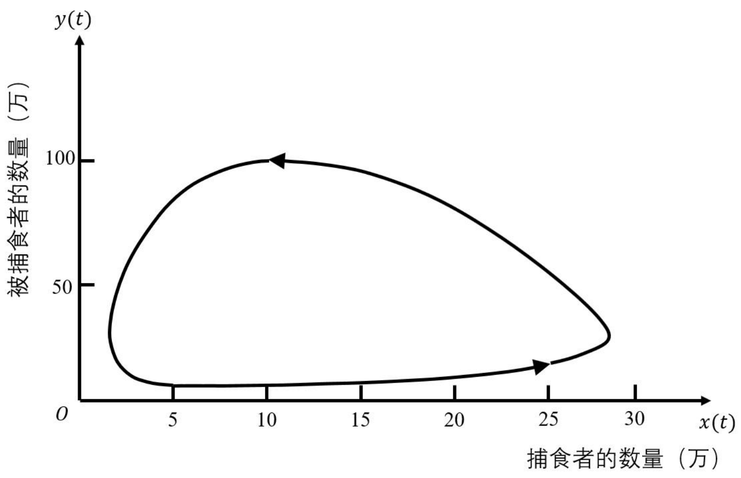
10. 假设存在两个物种，前者有充足的食物和生存空间，而后者仅以前者为食物，则我们称前者为被捕食者，后者为捕食者.现在我们来研究捕食者与被捕食者之间在理想状态下的数学模型.假设捕食者的数量以$x(t)$表示，被捕食者的数量以$y(t)$表示.下图描述的是这两个物种随时间变化的数量关系，其中箭头方向为时间增加的方向．下列说法正确的是

A.若在t_1，t_2时刻满足：$y(t_1)=y(t_2)$，则$x(t_1)=x(t_2)$

B.如果$y(t)$数量是先上升后下降的，那么$x(t)$的数量一定也是先上升后下降的

C.被捕食者数量与捕食者数量不会同时到达最大值或最小值

D.被捕食者数量与捕食者数量总和达到最大值时，被捕食者的数量也会达到最大值



第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(m,1)$， $\boldsymbol{b}=(1,-2)$， $\boldsymbol{c}=(2,3)$，若 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，则实数 $m=$________.

12. 在 $(x+\frac{2}{x})^6$ 的展开式中常数项为________.（用数字作答）

13. 圆心在 x 轴上，且与直线 $l_1: y=x$ 和 $l_2: y=x-2$ 都相切的圆的方程为______.

14. $\triangle ABC$ 是等边三角形，点 D 在边 AC 的延长线上，且 $AD=3CD$， $BD=2\sqrt{7}$,则 $CD=$________， $\sin\angle ABD=$________.

15.设 $f(x)=\begin{cases} a(x+1), x<0 \\ 2^{x-a}+2^{a-x}, x\geq 0 \end{cases}$，给出下列四个结论：

①对 $\forall a>0$， $\exists t\in\mathbf{R}$，使得 $f(x)=t$ 无解；

②对 $\forall t>0$， $\exists a\in\mathbf{R}$，使得 $f(x)=t$ 有两解；

③当 $a<0$ 时， $\forall t>0$，使得 $f(x)=t$ 有解；

④当 $a>2$ 时， $\exists t\in\mathbf{R}$，使得 $f(x)=t$ 有三解；

其中，所有正确结论的序号是________.

注：本题给出的结论中，有多个符合题目要求.全部选对得 5 分，不选或者有错选得 0 分，其他得 3 分.

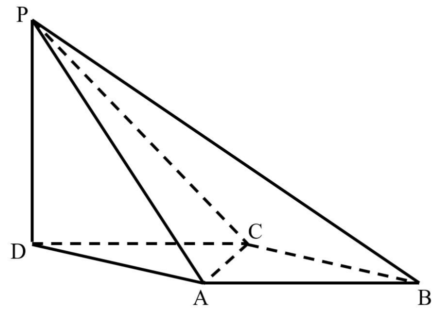
三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演练步骤或证明过程。

16.（本小题 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$ 面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为平行四边形，$AB\perp AC$，$AB=AC=1$，$PD=1$.

（Ⅰ）求证: $AD//$ 平面 PBC；

（Ⅱ）求二面角 $D-PC-B$ 的余弦值的大小.



17.（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=a\sin(2x-\frac{\pi}{6})-2\cos^2(x+\frac{\pi}{6})(a>0)$，且满足__________.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的解析式及最小正周期;

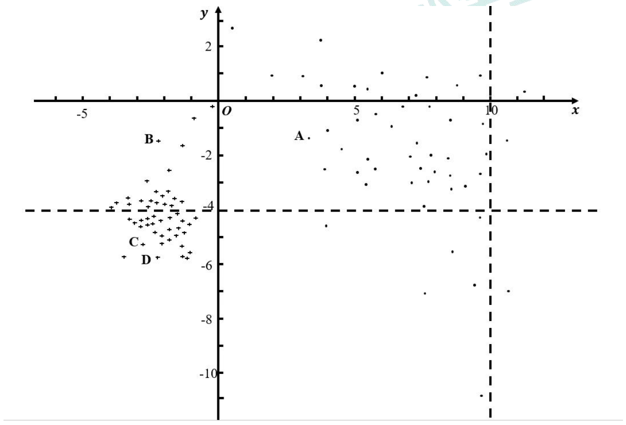
（Ⅱ）若关于 x 的方程 $f(x)=1$ 在区间 $[0,m]$ 上有两个不同解，求实数 m 的取值范围.

从① $f(x)$ 的最大值为1，② $f(x)$ 的图像与直线 $y=-3$ 的两个相邻交点的距离等于 π，③ $f(x)$ 的图像过点 $(\frac{\pi}{6},0)$，这三个条件中选择一个，补充在上面问题中并作答.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。

18．（本小题 14 分）

中国北斗卫星导航系统是中国自行研制的全球卫星导航系统，预计2020年北斗全球系统建设将全面完成.下图是在室外开放的环境下，北斗二代和北斗三代定位模块分别定位的50个点位的横、纵坐标误差的值，其中“•”表示北斗二代定位模块的误差的值，“＋”表示北斗三代定位模块的误差的值.（单位：米）



（Ⅰ）从北斗二代定位的50个点位中随机抽取一个，求此点横坐标误差的值大于10米的概率；

（Ⅱ）从图中 A，B，C，D 四个点位中随机选出两个，记 X 为其中纵坐标误差的值小于 -4 的点位的个数，求 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）试比较北斗二代和北斗三代定位模块纵坐标误差的方差的大小.（结论不要求证明）

19．（本小题 14 分）

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，其上、下顶点分别为 A，B，左、右焦点分别为 F_1，F_2，若四边形 AF_1BF_2 为正方形，且面积为 2.

（Ⅰ）求椭圆 E 的标准方程；

（Ⅱ）设存在斜率不为零且平行的两条直线 l_1，l_2，它们与椭圆 E 分别交于点 C，D，M，N，且四边形 $CDMN$ 是菱形，求出该菱形周长的最大值.

20.（本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=x(\ln x-ax)$ $(a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）若 $a=1$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程;

（Ⅱ）若 $f(x)$ 有两个极值点，求实数 a 的取值范围;

（Ⅲ）若 $a>1$，求 $f(x)$ 在区间 $(0,2a]$ 上的最小值.

21．（本小题 14 分）

数列 $A:x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots$,对于给定的 $t(t>1,t\in\mathbf{N}_+)$，记满足不等式 $x_n-x_t\ge t^*(n-t)$ $(\forall n\in\mathbf{N}_+,n\ne t)$ 的 t^* 构成的集合为 $T(t)$.

（Ⅰ）若数列 $A:x_n=n^2$，写出集合 $T(2)$；

（Ⅱ）如果 $T(t)$ $(\forall t\in\mathbf{N}_+,t>1)$ 均为相同的单元素集合，求证：数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 为等差数列；

（Ⅲ）如果 $T(t)$ $(\forall t\in\mathbf{N}_+,t>1)$ 为单元素集合，那么数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 还是等差数列吗？如果是等差数列，请给出证明；如果不是等差数列，请给出反例.

2020年北京市东城区高三一模数学答案

2020.5

一、选择题：共10小题，每小题4分，共40分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	B	A	D	A	D	C	B	C	C

二、填空题：共5小题，每小题5分，共25分。

11.3

12. 160

13. $(x-1)^2+y^2=\frac{1}{2}$

14. $2,\frac{3\sqrt{21}}{14}$

15.③④

三、解答题：共 6 小题，共 85 分。

16.（本小题 14 分）

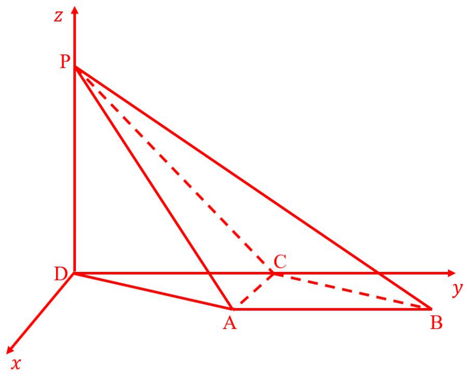
（Ⅰ）$\because$ 底面 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore AD//BC$，

$\because AD \not\subset$ 平面 PBC， $BC \subset$ 平面 PBC，

$\therefore AD//$ 平面 PBC.

（Ⅱ）$\because$ 底面 $ABCD$ 为平行四边形，



$\therefore DC//AB$，

$\because AB \perp AC$，

$\therefore DC \perp AC$，

$\because PD \perp$ 平面 $ABCD$， $AC \subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore AC \perp PD$，

$\because DC \cap PD = D$， $DC \subset$ 平面 PDC， $PD \subset$ 平面 PDC，

$\therefore AC \perp$ 平面 PDC，

则以 D 为原点， DC、DP 所在直线为 y 轴、z 轴，如图建立空间直角坐标系 $D-xyz$，其中 x 轴与 AC 平行，与 DC 垂直，

$\therefore D(0,0,0)$， $P(0,0,1)$， $C(0,1,0)$， $B(1,2,0)$， $A(1,1,0)$，

$\therefore \overrightarrow{AC}=(-1,0,0)$， $\overrightarrow{PC}=(0,1,-1)$， $\overrightarrow{CB}=(1,1,0)$，

取平面 PDC 的法向量为 $\overrightarrow{AC}=(-1,0,0)$，

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0\end{cases}$， 得 $\begin{cases}y-z=0\\ x+y=0\end{cases}$

$\therefore -x=y=z$， 取 $x=-1$，

$\therefore \boldsymbol{n}=(-1,1,1)$ ，

$\therefore \cos<\overrightarrow{AC},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\overrightarrow{AC}\bullet\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{AC}|\bullet|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

由图知二面角 $D-PC-B$ 为钝角，

$\therefore$二面角 $D-PC-B$ 的余弦值的大小为$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

17.（本小题 14 分）

$$f(x)=a\sin(2x-\frac{\pi}{6})-2\bullet\frac{1+\cos(2x+\frac{\pi}{3})}{2}=a\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1-\cos(2x+\frac{\pi}{3})$$

$$=a\sin(2x-\frac{\pi}{6})-\sin[\frac{\pi}{2}-(2x+\frac{\pi}{3})]-1=(a+1)\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1$$

（Ⅰ）选择条件①

$\because f(x)_{\max}=1$，$\therefore a+1-1=1$，$\therefore a=1$

$\therefore f(x)=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})-1$

$\therefore f(x)$最小正周期为$T=\dfrac{2\pi}{|2|}$=π

（Ⅱ）$\because f(x)=1$，$\therefore 2\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})-1=1$，$\therefore \sin(2x-\dfrac{\pi}{6})=1$

$\therefore 2x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in z)$，$\therefore x=k\pi+\dfrac{\pi}{3}\ (k\in z)$

$\therefore k=0$，$x=\dfrac{\pi}{3}$；$k=1$，$x=\dfrac{4\pi}{3}$；$k=2$，$x=\dfrac{7\pi}{3}$

又$\because f(x)=1$在$[0,m]$上有两个不同解

则$\dfrac{4\pi}{3}\le m<\dfrac{7\pi}{3}$

$\therefore m\in[\dfrac{4\pi}{3},\dfrac{7\pi}{3})$

另解：

（Ⅰ）若选择条件②

$\because f(x)=(a+1)\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1(a>0)$

$\because f(x)$图像与直线$y=-3$的两个相邻交点的距离等于π

且$f(x)$最大值为$a+1-1=a(a>0)$，则-3为$f(x)$的最小值

$\therefore -a-1-1=-3$，$\therefore a=1$

$\therefore f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1$

$\therefore f(x)$最小正周期为$T=\frac{2\pi}{|2|}=\pi$

（Ⅱ）$\because f(x)=1$，$\therefore 2\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1=1$，$\therefore \sin(2x-\frac{\pi}{6})=1$

$\therefore 2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in z$，$\therefore x=k\pi+\frac{\pi}{3}$，$k\in z$

$\therefore k=0$，$x=\frac{\pi}{3}$；$k=1$，$x=\frac{4\pi}{3}$；$k=2$，$x=\frac{7\pi}{3}$

又$\because f(x)=1$在$[0,m]$上有两个不同解

则$\frac{4\pi}{3}\le m<\frac{7\pi}{3}$，$\therefore m\in[\frac{4\pi}{3},\frac{7\pi}{3})$

另解：

（Ⅰ）选择条件③

$\because f(x)$的图像过点$(\frac{\pi}{6},0)$

$\therefore 0=(a+1)\sin(2\bullet\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6})-1$

$\therefore 0=\frac{1}{2}(a+1)-1$，$\therefore a=1$

$\therefore f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1$

$\therefore f(x)$最小正周期为$T=\dfrac{2\pi}{|2|}=\pi$

（Ⅱ）$\because f(x)=1$，$\therefore 2\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})-1=1$，$\therefore \sin(2x-\dfrac{\pi}{6})=1$

$\therefore 2x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in z$，$\therefore x=k\pi+\dfrac{\pi}{3}$，$k\in z$

$\therefore k=0$，$x=\dfrac{\pi}{3}$；$k=1$，$x=\dfrac{4\pi}{3}$；$k=2$，$x=\dfrac{7\pi}{3}$

又$\because f(x)=1$在$[0,m]$上有两个不同解

则$\dfrac{4\pi}{3}\le m<\dfrac{7\pi}{3}$

$\therefore m\in[\dfrac{4\pi}{3},\dfrac{7\pi}{3})$

18.（本小题 14 分）

（Ⅰ）由图知，在北斗二代定位的 50 个点中，横坐标误差的绝对值大于 10 米的有 3 个点，所以从中随机选出一点，此点横坐标误差的绝对值大于 10 米的概率为$\dfrac{3}{50}$=0.06.

（Ⅱ）由图知，A，B，C，D四个点位中纵坐标误差的值小于-4的有两个点：C，D .

所以X所有可能取值为 0,1,2.

$P(X=0)=\dfrac{C_2^2}{C_4^2}=\dfrac{1}{6}$，$P(X=1)=\dfrac{C_2^1C_2^1}{C_4^2}=\dfrac{2}{3}$，$P(X=2)=\dfrac{C_2^2}{C_4^2}=\dfrac{1}{6}$；

所以X的分布列为：

X	0	1	2
P	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{1}{6}$

所以X的数学期望$E(X)=0\times\dfrac{1}{6}+1\times\dfrac{2}{3}+2\times\dfrac{1}{6}=1$.

（Ⅲ）北斗二代定位模块纵坐标误差的方差大于北斗三代.

19．（本小题 14 分）

（Ⅰ）根据题意有$\begin{cases} b=c \\ 2bc=2 \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$，解得$\begin{cases} a=\sqrt{2} \\ b=1 \\ c=1 \end{cases}$

所以椭圆E的标准方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

（Ⅱ）设l_1的方程为$y=kx+m_1$，$C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$

设l_2的方程为$y=kx+m_2$，$M(x_3,y_3)$，$N(x_4,y_4)$

联立$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2}+y^2=1 \\ y=kx+m_1 \end{cases}$，解得$(1+2k^2)x^2+4km_1x+2m_1^2-2=0$

由$\Delta>0$得$16k^2m_1^2-4(1+2k^2)(2m_1^2-2)>0$，化简得$2k^2+1-m_1^2>0$ ①

$x_1+x_2=\dfrac{-4km_1}{1+2k^2}$，$x_1\cdot x_2=\dfrac{2m_1^2-2}{1+2k^2}$

$$|CD|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$

$$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{-4km_1}{1+2k^2}\right)^2-4\frac{2m_1^2-2}{1+2k^2}}$$

$$=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2k^2+1-m_1^2}}{1+2k^2}$$

同理可得$|MN|=\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2k^2+1-m_2^2}}{1+2k^2}$

因为四边形$CDMN$为菱形，所以$|CD|=|MN|$，所以$m_1^2=m_2^2$

又因为$m_1\neq m_2$，所以$m_1=-m_2$，所以l_1与l_2关于原点对称

又因为椭圆E关于原点对称

所以C，M 关于原点对称，D，N关于原点对称

所以$\begin{cases} x_3=-x_1 \\ y_3=-y_1 \end{cases}$且$\begin{cases} x_4=-x_2 \\ y_4=-y_2 \end{cases}$

$\overrightarrow{MC}=(2x_1,2y_1)$，$\overrightarrow{ND}=(2x_2,2y_2)$

因为四边形$CDMN$为菱形

所以$\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{ND}=0$，所以$x_1x_2+y_1y_2=0$

所以$x_1x_2+(kx_1+m_1)(kx_2+m_2)=0$

$\Rightarrow(1+k^2)x_1x_2+km_1(x_1+x_2)+m_1^{\ 2}=0\Rightarrow(1+k^2)\cdot\dfrac{2m_1^{\ 2}-2}{1+2k^2}+km_1\cdot\dfrac{-4km_1}{1+2k^2}+m_1^{\ 2}=0$

化简得$3m_1^{\ 2}-2k^2-2=0$

设菱形$CDMN$的周长为l，则

$l=4|CD|=\dfrac{8\sqrt{2}\sqrt{1+2k^2}\cdot\sqrt{2k^2+1-m_1^{\ 2}}}{1+2k^2}$

$=\dfrac{8\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{2+2k^2}\cdot\sqrt{1+4k^2}}{1+2k^2}\le\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{\dfrac{1}{2}(2+2k^2+1+4k^2)}{1+2k^2}=4\sqrt{3}$

当且仅当$2+2k^2=1+4k^2$即$k^2=\dfrac{1}{2}$时等号成立，此时$m_1^{\ 2}=1$，满足①

所以菱形周长的最大值为$4\sqrt{3}$

20.（本小题 15 分）

（Ⅰ）$a=1$时，$f(x)=x(\ln x-x)$，所以$f(1)=-1$

$f'(x)=\ln x-2x+1$，　$f'(1)=-1$，

所以切线方程为$y=-(x-1)-1$即$y=-x$

（Ⅱ）方法一：

$f(x)$有两个极值点，即$f'(x)$有两个异号零点

$f'(x)=\ln x-2ax+1=0$

$2ax=\ln x+1$，即$2a=\dfrac{\ln x+1}{x}$

令 $g(x)=\dfrac{\ln x+1}{x}$

$g'(x)=\dfrac{1-\ln x-1}{x^2}=\dfrac{-\ln x}{x^2}$

$x\in(0,1)$时， $g'(x)>0$， $g(x)$单调递增

$x\in(1,+\infty)$， $g'(x)<0$， $g(x)$单调递减

$g(x)_{\max}=g(1)=1$， $g(\dfrac{1}{e})=0$， 且$x>1$时， $g(x)>0$

所以当$0<2a<1$时，即$a\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$时， $f(x)$有两个极值点.

方法二：

$f'(x)=\ln x-2ax+1$

令 $g(x)=\ln x-2ax+1$

$g'(x)=\dfrac{1}{x}-2a=\dfrac{1-2ax}{x}(x>0)$

① 当$a\le 0$时， $g'(x)\ge 0$， $g(x)$在$(0,+\infty)$上单增

即$f'(x)$在$(0,+\infty)$上单增，此时$f(x)$不可能有两个极值点

② 当$a>0$时，令$g'(x)=0$， $x=\dfrac{1}{2a}>0$

当$x\in\left(0,\dfrac{1}{2a}\right)$时， $g'(x)>0$， $g(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{2a}\right)$上单增，即$f'(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{2a}\right)$上单增

当$x\in\left(\dfrac{1}{2a},+\infty\right)$时， $g'(x)<0$， $g(x)$在$\left(\dfrac{1}{2a},+\infty\right)$上单减，即$f'(x)$在$\left(\dfrac{1}{2a},+\infty\right)$上单减

所以$f'(x)_{\max}=f'(\dfrac{1}{2a})=\ln(\dfrac{1}{2a})$

因为$f(x)$有两个极值点，

所以$\ln(\frac{1}{2a})>0$得$a<\frac{1}{2}$

$f'(\frac{1}{e})=\ln\frac{1}{e}-2a\bullet\frac{1}{e}+1=-\frac{2a}{e}<0$，$f'(\frac{1}{a^2})=-2\ln a-\frac{2}{a}+1<0$

所以当$0<a<\frac{1}{2}$时，存在$x_1\in\left(0,\frac{1}{2a}\right)$使$f(x_1)=0$，存在$x_2\in\left(\frac{1}{2a},\frac{1}{a^2}\right)$使$f(x_2)=0$

当x变化时，$f'(x)$，$f(x)$变化情况如下

x	$(0,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	**0**	$+$	**0**	$-$
$f(x)$	↘	$f(x_1)$	↗	$f(x_2)$	↘

符合题意，故a的范围是$\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

（III）

方法一：

$a>1$时，由（II）知$\frac{\ln x+1}{x}<2a$

即$f'(x)=\ln x-2ax+1<0$

在$(0,2a]$上$f(x)_{\min}=f(2a)=2a(\ln 2a-2a^2)$

方法二：

$f(x)=x(\ln x-ax)$，$f'(x)=\ln x-2ax+1$

由（II）知$a>1$时，$f'(x)$在$\left(0,\frac{1}{2a}\right)$上单增，$\left(\frac{1}{2a},+\infty\right)$上单减

$f'(x)_{\max}=f'(\frac{1}{2a})=\ln(\frac{1}{2a})<0$

所以$f'(x)<0$在$(0,+\infty)$上恒成立

所以 $f(x)$ 在 $(0,2a]$ 上单调递减

所以 $f(x)_{\min}=f(2a)=2a(\ln 2a-2a^2)$

21．（本小题 14 分）

（Ⅰ）由于 $A:x_n=n^2$，$T(2)$ 为满足不等式 $x_n-x_t\ge t^*(n-t)$ $(\forall n\in\mathbf{N}_+)$ 的 t^* 构成的集合，

所以有：$n^2-4\ge t^*(n-2)$ $(\forall n\in\mathbf{N}_+,n\ne t)$，

当 $n>2$ 时，上式可化为 $n+2\ge t^*$，

所以 $5\ge t^*$，

当 $n=1$ 时，上式可化为 $3\le t^*$，

所以 $T(2)$ 为 $[3,5]$.

（Ⅱ）对于数列 $A:x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$，若 $T(t)$ $(\forall t\in\mathbf{N}_+,t>1)$ 中均只有同一个元素，不妨设为 a，

下面证明数列 A 为等差数列，

当 $n=t+1$ 时，有 $x_{t+1}-x_t\ge a(\forall t>1)\cdots(1)$；

当 $n=t-1$ 时，有 $x_t-x_{t-1}\le a(\forall t>1)\cdots(2)$；

由于 (1)，(2) 两式对任意大于 1 的整数均成立，

所以有 $x_{t+1}-x_t=a(\forall t>1)$ 成立，从而数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 为等差数列.

（Ⅲ）

对于数列 $A:x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$，不妨设 $T(i)=\{a\},T(j)=\{b\},1<i<j,a\ne b$，

由 $T(i)=\{a\}$ 可知：$x_j-x_i\ge a(j-i)$，

由 $T(j)=\{b\}$ 可知：$x_i-x_j\ge b(i-j)$，即 $x_j-x_i\le b(j-i)$，

从而 $a(j-i)\le x_j-x_i\le b(j-i)$，

所以 $a\le b$，

设 $T(i)=\{t_i\}$，，则 $t_2\le t_3\le\cdots\le t_n\le\cdots$，

这说明如果$1<i<j$，则$t_i \le t_j$，

因为对于数列$A: x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$，$T(t)\ (\forall t \in \mathbf{N}_+, t>1)$中均只有一个元素，

首先考查$t=2$时的情况，不妨设$x_2 > x_1$，

因为$x_2 - x_1 \le t_2$，又$T(2)$为单元素集，

所以$x_2 - x_1 = t_2$，

再证$t_3 = x_3 - x_2$，证明如下：

由t_3的定义可知：$t_3 \ge x_3 - x_2$，$t_3 \ge \dfrac{x_3 - x_1}{2}$，

所以$t_3 = \max\left\{x_3 - x_2, \dfrac{x_3 - x_1}{2}\right\}$，

又由t_2的定义可知$x_3 - x_2 \ge t_2 = x_2 - x_1$，

所以$t_3 \ge x_3 - x_2 \ge \dfrac{x_3 - x_2 + x_2 - x_1}{2} = \dfrac{x_3 - x_1}{2}$，

所以$x_3 - x_2 = t_3$，

若$t_3 > t_2$，即$t_3 = x_3 - x_2 > t_2$，

则存在正整数$m(m \ge 4)$，使得$(m-2)t_2 = x_m - x_2 \cdots\cdots(3)$，

由于$x_2 - x_1 = t_2 \le x_3 - x_2 \le t_3 \le x_4 - x_3 \le \cdots \le x_k - x_{k-1} \le t_k \le \cdots$，

所以$x_m - x_2 = \sum\limits_{i=3}^{m}(x_i - x_{i-1}) \ge \sum\limits_{i=3}^{m} t_{i-1} > (m-2)t_2$，这与(3)矛盾，

所以$t_3 = t_2$，

同理可证$t_2 = t_3 = t_4 = t_5 = \cdots$，

即数列$A: x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$为等差数列.