2020年北京市西城区高三一模数学试卷

2020.4

本试卷分为第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分，满分150分，考试时长120分钟。考生务必将答案写在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第I卷（选择题 共40分）

一、选择题：共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 设集合 $A=\{x\,|\,x<3\}$, $B=\{x\,|\,x<0$,或$x>2\}$,则 $A\cap B=$

（A）$(-\infty,0)$　　（B）$(2,3)$

（C）$(-\infty,0)\cup(2,3)$　　（D）$(-\infty,3)$

2. 若复数 $z=(3-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$,则 $|z|=$

（A）$2\sqrt{2}$　　（B）$2\sqrt{5}$　　（C）$\sqrt{10}$　　（D）20

3. 下列函数中,值域为$\mathbf{R}$且为奇函数的是

（A）$y=x+2$　　（B）$y=\sin x$　　（C）$y=x-x^3$　　（D）$y=2^x$

4. 设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,若$a_3=2,a_1+a_4=5$,则$S_6=$

（A）10　　（B）9　　（C）8　　（D）7

5. 设$A(2,-1),B(4,1)$,则以线段AB为直径的圆的方程是

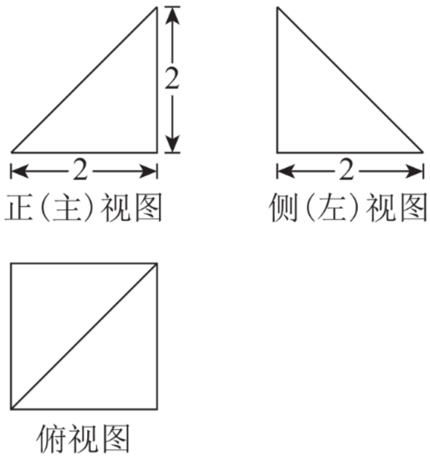
（A）$(x-3)^2+y^2=2$　　（B）$(x-3)^2+y^2=8$

（C）$(x+3)^2+y^2=2$　　（D）$(x+3)^2+y^2=8$

6. 设a,b,c为非零实数,且$a>c,b>c$,则

（A）$a+b>c$　　（B）$ab>c^2$　　（C）$\dfrac{a+b}{2}>c$　　（D）$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{2}{c}$

7. 某四棱锥的三视图如图所示,记S为此棱锥所有棱的长度的集合,则



（A）$2\sqrt{2}\notin S$,且$2\sqrt{3}\notin S$

（B）$2\sqrt{2}\notin S$,且$2\sqrt{3}\in S$

（C）$2\sqrt{2}\in S$,且$2\sqrt{3}\notin S$

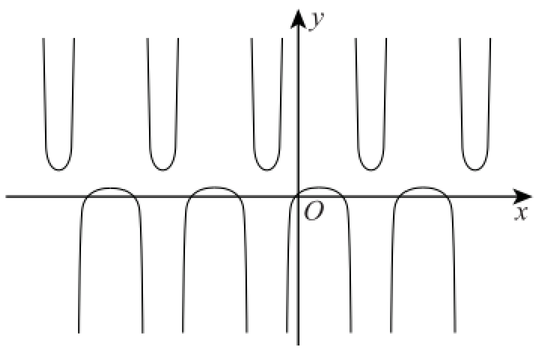
（D）$2\sqrt{2}\in S$,且$2\sqrt{3}\in S$

8. 设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为非零向量,则“$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$”是“$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

9. 已知函数$f(x)=\dfrac{\sin x}{1+2\sin x}$的部分图象如图所示,将此图象分别作以下变换,那么变换后的图象可以与原图象重合的变换方式有



①绕着x轴上一点旋转180°;

②沿x轴正方向平移;

③以x轴为轴作轴对称;

④以x轴的某一条垂线为轴作轴对称.

（A）①③　　（B）③④　　（C）②③　　（D）②④

10. 设函数$f(x)=\begin{cases}x^2+10x+1, & x\le 0,\\ |\lg x|, & x>0.\end{cases}$若关于$x$的方程$f(x)=a(a\in\mathbf{R})$有四个实数解$x_i(i=1,2,3,4)$,其中$x_1<x_2<x_3<x_4$,则$(x_1+x_2)(x_3-x_4)$的取值范围是

（A）$(0,101]$　　（B）$(0,99]$　　（C）$(0,100]$　　（D）$(0,+\infty)$

第 II 卷（非选择题　共 110 分）

二、填空题：共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11. 在 $(x+\frac{1}{x})^6$ 的展开式中,常数项为______.（用数字作答）

12. 若向量 $\boldsymbol{a}=(x^2,2),\boldsymbol{b}=(1,x)$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<3$,则实数 x 的取值范围是______.

13. 设双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x$,则该双曲线的离心率为______.

14. 函数 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 的最小正周期为______;若函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\alpha)$ 上单调递增,则 α 的最大值为______.

15. 在一次体育水平测试中,甲、乙两校均有100名学生参加,其中:甲校男生成绩的优秀率为70%,女生成绩的优秀率为50%;乙校男生成绩的优秀率为60%,女生成绩的优秀率为40%.对于此次测试,给出下列三个结论:

①甲校学生成绩的优秀率大于乙校学生成绩的优秀率;

②甲、乙两校所有男生成绩的优秀率大于甲、乙两校所有女生成绩的优秀率;

③甲校学生成绩的优秀率与甲、乙两校所有学生成绩的优秀率的大小关系不确定.

其中,所有正确结论的序号是______.

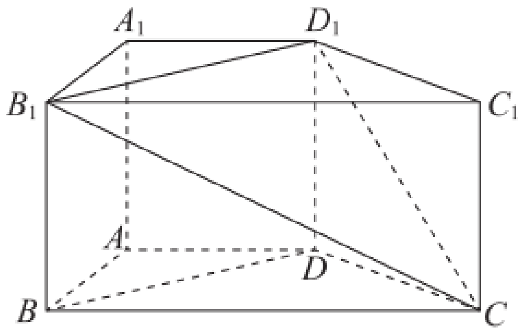
三、解答题：共 6 小题，共 85 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

16.（本小题满分 14 分）

如图,在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AA_1\perp$ 平面 $ABCD$,底面 $ABCD$ 满足 $AD // BC$,且 $AB=AD=AA_1=2, BD=DC=2\sqrt{2}$.

（Ⅰ）求证: $AB\perp$ 平面 ADD_1A_1 ;

（Ⅱ）求直线 AB 与平面 B_1CD_1 所成角的正弦值.



17.（本小题满分 14 分）

已知$\triangle ABC$满足_______,且$b=\sqrt{6}, A=\frac{2\pi}{3}$,求$\sin C$的值及$\triangle ABC$的面积.

从①$B=\frac{\pi}{4}$,②$a=\sqrt{3}$,③$a=3\sqrt{2}\sin B$这三个条件中选一个,补充到上面问题中,并完成解答.

注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分.

18.（本小题满分 14 分）

2019 年底,北京 2022 年冬奥组委会启动志愿者全球招募,仅一个月内报名人数便突破 60 万,其中青年学生约有 50 万人.现从这 50 万青年学生志愿者中,按男女分层抽样随机选取 20 人进行英语水平测试,所得成绩（单位:分）统计结果用茎叶图记录如下:

男		女
6	4	7
3	5	7 9
0 3 8	6	5 6
1 4	7	1 3 5 6 8
5	8	1 8

（Ⅰ）试估计在这 50 万青年学生志愿者中,英语测试成绩在 80 分以上的女生人数;

（Ⅱ）从选出的 8 名男生中随机抽取 2 人,记其中测试成绩在 70 分以上的人数为 X ,求 X 的分布列和数学期望;

（Ⅲ）为便于联络,现将所有的青年学生志愿者随机分成若干组（每组人数不少于 5000）,并在每组中随机选取 m 个人作为联络员,要求每组的联络员中至少有 1 人的英语测试成绩在 70 分以上的概率大于90%.根据图表中数据,以频率作为概率,给出 m 的最小值.（结论不要求证明）

19.（本小题满分 14 分）

设函数 $f(x)=a\ln x+x^2-(a+2)x$,其中 $a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处切线的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$,求 a 的值;

（Ⅱ）已知导函数 $f'(x)$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 上存在零点,证明:当 $x\in(1,\mathrm{e})$ 时,$f(x)>-\mathrm{e}^2$.

20.（本小题满分 15 分）

设椭圆$E:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$,直线l_1经过点$M(m,0)$,直线l_2经过点$N(n,0)$,直线l_1 // 直线l_2,且直线l_1,l_2分别与椭圆E相交于A,B两点和C,D两点.

（Ⅰ）若M,N分别为椭圆E的左、右焦点,且直线$l_1\perp x$轴,求四边形$ABCD$的面积;

（Ⅱ）若直线l_1的斜率存在且不为0,四边形$ABCD$为平行四边形,求证:$m+n=0$;

（III）在（Ⅱ）的条件下,判断四边形$ABCD$能否为矩形,说明理由.

21.（本小题满分 14 分）

对于正整数 n，如果 $k(k\in\mathbf{N}^*)$ 个整数 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 满足 $1\le a_1\le a_2\le\cdots\le a_k\le n$，且 $a_1+a_2+\cdots+a_k=n$，则称数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_k)$ 为 n 的一个"正整数分拆".记 $a_1,a_2,\cdots a_k$ 均为偶数的"正整数分拆"的个数为 f_n，$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 均为奇数的"正整数分拆"的个数为 g_n.

（Ⅰ）写出整数 4 的所有"正整数分拆";

（Ⅱ）对于给定的整数 $n(n\ge 4)$，设 $(a_1,a_2,\cdots,a_k)$ 是 n 的一个"正整数分拆"，且 $a_1=2$，求 k 的最大值;

（Ⅲ）对所有的正整数 n，证明: $f_n\le g_n$;并求出使得等号成立的 n 的值.

（注:对于 n 的两个"正整数分拆" $(a_1,a_2,\cdots,a_k)$ 与 $(b_1,b_2,\cdots,b_m)$，当且仅当 $k=m$ 且 $a_1=b_1,a_2=b_2,\cdots,a_k=b_m$ 时,称这两个"正整数分拆"是相同的.）

2020 年北京市西城区高三一模数学答案

2020.4

一、选择题：共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	B	C	B	A	C	D	A	D	B

二、填空题：共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

11.20

12.$(-3,1)$

13.$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

14.π；$\dfrac{\pi}{8}$

15.②③

三、解答题：共 6 小题，共 85 分。

16.（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）因为在底面 $ABCD$ 中, $AB=AD=2, BD=2\sqrt{2}$,

所以 $AB^2+AD^2=BD^2$,

即 $AB\perp AD$.

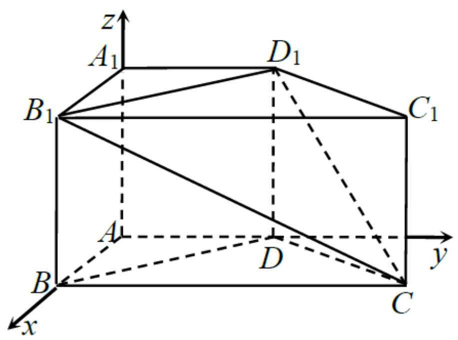
因为 $AA_1\perp$ 平面 $ABCD$, $AB\subset$ 平面 $ABCD$,

所以 $AA_1\perp AB$,

又因为 $AA_1\cap AD=A$, AA_1, $AD\subset$ 平面 ADD_1A_1,

所以 $AB\perp$ 平面 ADD_1A_1.

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 AB, AD, AA_1 两两垂直,故分别以 AB, AD, AA_1 为 x 轴, y 轴, z 轴,如图建立空间直角坐标系,



在底面 $ABCD$ 中, $\triangle ABD$ 为等腰直角三角形, $AD\,//\,BC$,

所以 $\angle CBD=\angle ADB=45^\circ$,

又因为 $BD=DC=2\sqrt{2}$,

所以 $\triangle BCD$ 为等腰直角三角形,即 $BC=\sqrt{BD^2+DC^2}=4$.

则 $A(0,0,0)$, $B(2,0,0)$, $C(2,4,0)$, $B_1(2,0,2)$, $D_1(0,2,2)$,

所以 $\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$, $\overrightarrow{B_1C}=(0,4,-2)$, $\overrightarrow{B_1D_1}=(-2,2,0)$,

设平面 B_1CD_1 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

由 $\begin{cases}\overrightarrow{B_1C}\cdot\boldsymbol{n}=0\\ \overrightarrow{B_1D_1}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$,得 $\begin{cases}4y-2z=0,\\ -2x+2y=0,\end{cases}$

令 $y=1$,得 $\boldsymbol{n}=(1,1,2)$.

设直线 AB 与平面 B_1CD_1 所成的角为 θ,

则 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{AB},\boldsymbol{n}>|=|\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\boldsymbol{n}|}|=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$,

所以直线 AB 与平面 B_1CD_1 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

17.（本小题满分 14 分）

（不可以选择②作为补充条件.）

选① $B=\dfrac{\pi}{4}$ 时,

在 $\triangle ABC$ 中, $A+B+C=\pi$,

所以 $\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)$

$=\sin(\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4})=\sin\dfrac{2\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{2\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

在 $\triangle ABC$ 中,由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$,

所以 $a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=3$,

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times3\times\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\dfrac{9-3\sqrt{3}}{4}$.

选③ $a=3\sqrt{2}\sin B$ 时,

在 $\triangle ABC$ 中,由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$,且 $a=3\sqrt{2}\sin B$,

所以 $\sin^2 B=\dfrac{b\sin A}{3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{3\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$,

因为在 $\triangle ABC$ 中, $\sin B>0$,

所以 $\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

因为 $A+B+C=\pi$, $A=\dfrac{2\pi}{3}$,

所以 $B\in(0,\dfrac{\pi}{3})$,则 $B=\dfrac{\pi}{4}$.

$\sin C=\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)$

$=\sin(\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4})=\sin\dfrac{2\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{2\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$a=3\sqrt{2}\sin B=3\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=3$.

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times3\times\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\dfrac{9-3\sqrt{3}}{4}$.

18.（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）由图表可知,测试成绩在 80 分以上的女生有 2 人,占比为 $\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$,

故在这 50 万青年学生志愿者中,英语测试成绩在 80 分以上的女生约为 $50\times\frac{1}{10}=5$ 万人.

（Ⅱ）由图表知,选取的 8 名男生中,成绩在 70 分以上的有 3 人,70 分及其以下的有 5 人,

由题意,随机变量 X 的所有可能取值为:0,1,2

且 $P(X=0)=\frac{C_5^2\cdot C_3^0}{C_8^2}=\frac{5}{14}$; $P(X=1)=\frac{C_5^1\cdot C_3^1}{C_8^2}=\frac{15}{28}$; $P(X=2)=\frac{C_5^0\cdot C_3^2}{C_8^2}=\frac{3}{28}$.

所以随机变量 X 的分布列为:

X	0	1	2
P	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

所以 $E(X)=0\times\frac{5}{14}+1\times\frac{15}{28}+2\times\frac{3}{28}=\frac{3}{4}$.

（Ⅲ）m 的最小值为 4.

解析:在抽取的 20 人中英语成绩在 70 分以上者共计 10 人,所以在这 20 人中随机抽取一人,其英语成绩在 70 分以上的概率为 $\frac{10}{20}=\frac{1}{2}$.在超过 5000 人的青年志愿者中抽取 m 人,其英语成绩在 70 分以上至少一人为事件 A,则 $P(\bar{A})=C_m^m\cdot(\frac{1}{2})^m<0.1=\frac{1}{10}$, $m\in\mathbf{N}^*$,由此得 $m\geq 4$,所以 m 的最小值为 4.

19.（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）由题意,得 $f'(x)=\frac{a}{x}+2x-(a+2)$

则 $f'(2)=\frac{a}{2}+4-(a+2)=\tan\frac{\pi}{4}=1$,解得 $a=2$.

（Ⅱ）$f'(x)=\frac{a}{x}+2x-(a+2)=\frac{(2x-a)(x-1)}{x}$,其中 $x\in(1,\mathrm{e})$.

令 $f'(x)=\frac{(2x-a)(x-1)}{x}=0$,得 $x=1$ 或 $x=\frac{a}{2}$.

由导函数 $f'(x)$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 上存在零点,得 $\frac{a}{2}\in(1,\mathrm{e})$,即 $a\in(2,2\mathrm{e})$.

随着 x 变化, $f'(x)$ 与 $f(x)$ 的变化情况如下表所示:

x	$(1,\frac{a}{2})$	$\frac{a}{2}$	$(\frac{a}{2},\mathrm{e})$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 在 $(1,\frac{a}{2})$ 上单调递减,在 $(\frac{a}{2},\mathrm{e})$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 在 $(1,\mathrm{e})$ 上存在最小值 $f(\frac{a}{2})=a\ln(\frac{a}{2})-\frac{a^2}{4}-a$.

设 $g(x)=2x\ln x-x^2-2x$, $x\in(1,\mathrm{e})$,则 $g(\frac{a}{2})=f(\frac{a}{2})$, $\frac{a}{2}\in(1,\mathrm{e})$.

所以 $g'(x)=2\ln x-2x$.

由 $x\in(1,\mathrm{e})$,得 $2\ln x\in(0,2)$, $2x\in(2,2\mathrm{e})$,则 $g'(x)=2\ln x-2x<0$.

所以 $g(x)$ 在区间 $(1,\mathrm{e})$ 上单调递减.

所以 $g(x)>g(\mathrm{e})=-\mathrm{e}^2$,即 $g(\frac{a}{2})=f(\frac{a}{2})>-\mathrm{e}^2$

故当 $x\in(1,\mathrm{e})$ 时, $f(x)>-\mathrm{e}^2$

20.（本小题满分 15 分）

（Ⅰ）由题知, $M(-1,0),N(1,0)$

又因为直线 l_1 // 直线 l_2 且 $l_1 \perp x$ 轴,

所以 $l_1: x=-1, l_2: x=1$.

因为直线 l_1, l_2 分别与椭圆 E 相交于 A, B 两点和 C, D 两点,

所以 $A(-1,\frac{\sqrt{2}}{2}),B(-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}),C(1,-\frac{\sqrt{2}}{2}),D(1,\frac{\sqrt{2}}{2})$

此时四边形 $ABCD$ 为矩形,

所以 $S_{\square ABCD}=|AB|\times|AD|=\sqrt{2}\times 2=2\sqrt{2}$.

（Ⅱ）因为直线 l_1 // 直线 l_2 且直线 l_1 的斜率存在且不为 0,

所以设直线 l_1 与直线 l_2 的斜率为 k.

则 $l_1: y=k(x-m)$

$$\begin{cases} y=k(x-m) \\ x^2+2y^2=2 \end{cases} \Rightarrow (1+2k^2)x^2-4k^2mx+2k^2m^2-2=0$$

$$\Delta=(4k^2m)^2-4(1+2k^2)(2k^2m^2-2)=8(1+2k^2-k^2m^2)>0$$

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

$$x_1+x_2=\frac{4k^2m}{1+2k^2}, x_1\cdot x_2=\frac{2k^2m^2-2}{1+2k^2}$$

$$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{8(1+2k^2-k^2m^2)}}{1+2k^2}$$

同理, 设 $l_2: y=k(x-n)$

$|CD|=\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{\sqrt{8(1+2k^2-k^2n^2)}}{1+2k^2}$

若四边形为平行四边形,则$|AB|=|CD|$,

$\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{\sqrt{8(1+2k^2-k^2m^2)}}{1+2k^2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{\sqrt{8(1+2k^2-k^2n^2)}}{1+2k^2}$

因为$k\neq 0$,整理得到:$m^2=n^2$

即$(m+n)(m-n)=0$

又因为$ABCD$是四边形,

所以$m\neq n$

即$m+n=0$

（III）法一:四边形$ABCD$不能为矩形,理由如下:

点O到直线l_1和直线l_2的距离分别为$\dfrac{|km|}{\sqrt{1+k^2}},\dfrac{|kn|}{\sqrt{1+k^2}}$,由（II）知$k\neq 0$且$m=-n$,

所以点O到直线l_1和直线l_2的距离相等.

根据椭圆的对称性,故而原点O是平行四边形$ABCD$的对称中心.

假设平行四边形是矩形,则$|OA|=|OB|$,

那么$\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$,则$x_1^2+1-\dfrac{x_1^2}{2}=x_2^2+1-\dfrac{x_2^2}{2}$,

所以$x_1=x_2$.

这时直线$l_1\perp x$轴.

这与直线l_1的斜率存在相矛盾,所以假设不成立.

所以四边形$ABCD$不能为矩形.

法二:四边形 $ABCD$ 不能为矩形,理由如下:

在（II）的条件下,可知 B,D 关于原点对称,

因为 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,所以 $D(-x_2,-y_2)$

$$k_{AD}=\frac{y_1-(-y_2)}{x_1-(-x_2)}=\frac{k(x_1+x_2-2m)}{x_1+x_2}=\frac{k(\frac{4k^2m}{1+2k^2}-2m)}{\frac{4k^2m}{1+2k^2}}=\frac{\frac{-2km}{1+2k^2}}{\frac{4k^2m}{1+2k^2}}=-\frac{1}{2k}$$

所以 $k_{AB}\cdot k_{AD}=k\cdot(-\frac{1}{2k})=-\frac{1}{2}\neq-1$

即平行四边形的邻边 AB,AD 不垂直,

所以四边形 $ABCD$ 不能为矩形.

21．（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）$(1,1,1,1)$，$(1,1,2)$，$(1,3)$，$(2,2)$，(4).

（Ⅱ）由题意,知 $2=a_1\le a_2\le\cdots\le a_k\le n$,且 $a_1+a_2+\cdots a_k=n$,

得 $n=a_1+a_2+\cdots a_k\ge 2k$,即 $k\le\dfrac{n}{2}$.

所以当 n 是偶数时,k 的最大值是 $\dfrac{n}{2}$（此时,$\underbrace{(2,2,\cdots,2)}_{\text{共有}k\text{个}2}$ 是 n 的一个"正整数分拆"）;

当 n 是奇数时,k 的最大值是 $\dfrac{n-1}{2}$（此时,$(\underbrace{2,2,\cdots,2}_{\text{共有}k-1\text{个}2},3)$ 是 n 的一个"正整数分拆"）.

（Ⅲ）当 n 为奇数时,

由题意,得 $f_n=0$;且 $\underbrace{(1,1,\cdots,1)}_{\text{共有n个1}}$ 是 n 的一个各位数字均为奇数的"正整数分拆",

所以 $g_n>0$,故 $f_n<g_n$.

当 n 为偶数时,

由 (n) 是各位数字均为偶数的"正整数分拆",$\underbrace{(1,1,\cdots,1)}_{\text{共有n个1}}$ 是各位数字均为奇数的"正整数分拆",得 $f_n>0$,$g_n>0$.

①当 $n=2$ 时,n 的"正整数分拆"只有 $(1,1)$ 和 (2),所以 $f_2=g_2=1$;

②当 $n=4$ 时,由（Ⅰ）知,$f_4=g_4=2$;

③当 n 为大于 4 的偶数时,

因为对于 n 的任意一个各位数字均为偶数的"正整数分拆"$(a_1,a_2,\cdots,a_k)$,都存在一个与之对应的各位数字均为奇数的"正整数分拆"$(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{\text{共有k个1}},a_1-1,a_2-1,\cdots,a_k-1)$.

且当 $(a_1,a_2,\cdots,a_k)$ 不同时,其对应的 $(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{\text{共有k个1}},a_1-1,a_2-1,\cdots,a_k-1)$ 也不相同,

所以 $f_n\le g_n$.

又因为在上述对应关系下,各位数字均为奇数的“正整数分拆” $(3,n-3)$ 不存在与之对应的各位数字都是偶数的“正整数分拆”,（注:因为 $n\geq 6$,所以 $(3,n-3)$ 有意义）

所以 $f_n < g_n$.

综上,对所有的正整数 n, $f_n \leq g_n$;当且仅当 $n=2$ 或 4 时等号成立.