**2020年北京市东城区高三一模数学逐题解析**

**第一部分（选择题 共40分）**

**一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。**

1. 已知集合，，那么

A. B.

C. D.

【答案】D

【解析】由题可得，因为，由集合的运算法则可得，故选D.

2. 函数的定义域为

A. B.

C. D.

【答案】B

【解析】函数有意义，则有，可得，所以函数定义域为，故选B.

3. 已知，则

A. B.

C. D.

【答案】A

【解析】由复数运算法则可知，化简得，所以，故选A.

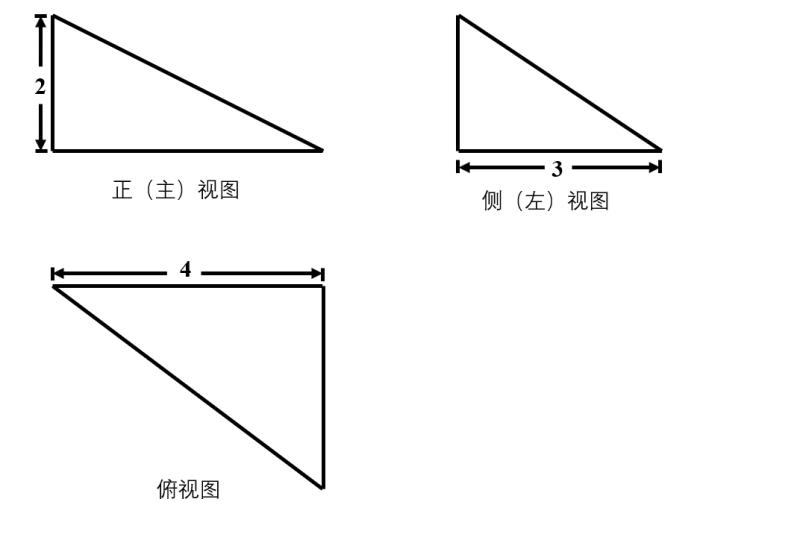
4. 若双曲线的一条渐近线与直线平行，则的值为

A. B.

C. D.

【答案】D

【解析】因为双曲线渐近线与直线平行，则双曲线的一条渐近线为.由可得双曲线渐近线为，所以，故选D.

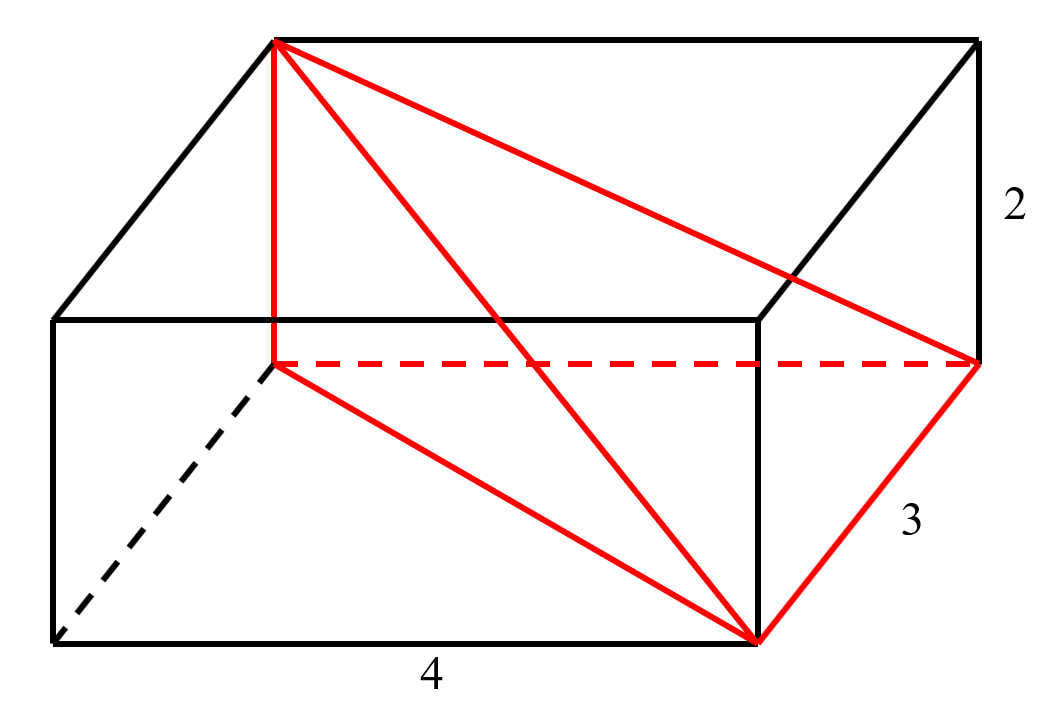
5. 如图所示，某三棱锥的正（主）视图、俯视图、侧（左）视图均为直角三角形，则该三棱锥的体积为

A.

B.

C.

D.

【答案】A

【解析】该三视图的直观图如图所示：

，故选A.

6. 已知，那么在下列不等式中，不成立的是

A. B.

C. D.

【答案】D

【解析】选项A：若，则，则，故成立；

选项B：若，则，，由均值不等式可知，当且仅当时取等号，即，.又因为，所以，即，故成立；

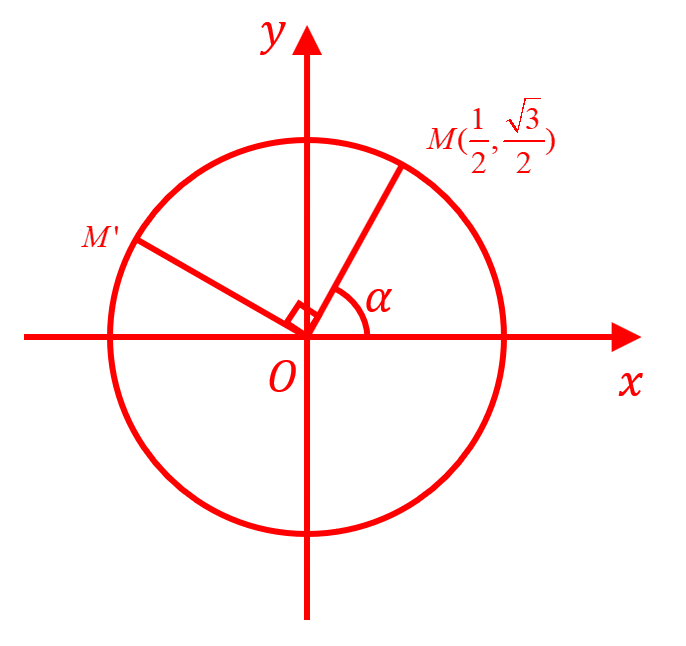
选项C：因为，且，所以，即，故成立；

选项D：当时，，所以在时不都成立.

故选D.

7. 在平面直角坐标系中，动点在单位圆上按逆时针方向作匀速圆周运动，每分钟转动一周.若点的初始位置坐标为，则运动到分钟时，动点所处位置的坐标是

A. B.

C. D.

【答案】C

【解析】周期分钟，分钟，

即绕点逆时针旋转了；

若设非负半轴为始边，为终边的角为，

则，；

已知，，所以，即，

故选C.

8. 已知三角形，那么“”是“三角形为锐角三角形”的

A.充分而不必要条件 B.必要而不充分条件

C.充分必要条件 D.既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】，，即.设与夹角为，即，又因为为三角形内角，所以.

充分条件：是锐角，不能说明其他两个角也是锐角，故不能说明是锐角三角形，所以不具有充分性；

必要条件：若为锐角三角形，即三个角都为锐角，所以，所以具有必要性.

故选B.

9. 设为坐标原点，点，动点在抛物线上，且位于第一象限，是线段的中点，则直线的斜率的范围为

A. B.

C. D.

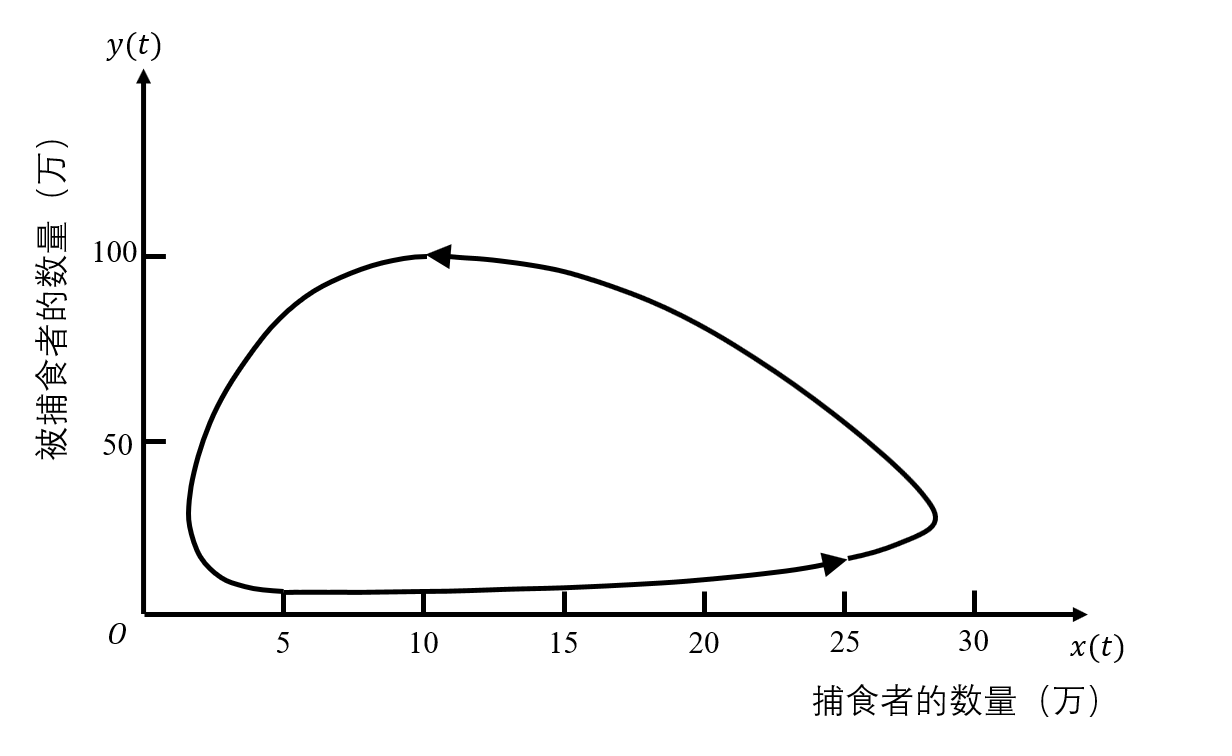
【答案】C

【解析】设点的坐标为，，点的坐标，直线的斜率，当且仅当，即得时取等.

故选C.

10. 假设存在两个物种，前者有充足的食物和生存空间，而后者仅以前者为食物，则我们称前者为被捕食者，后者为捕食者.现在我们来研究捕食者与被捕食者之间在理想状态下的数学模型.假设捕食者的数量以表示，被捕食者的数量以表示.下图描述的是这两个物种随时间变化的数量关系，其中箭头方向为时间增加的方向．下列说法正确的是

A.若在，时刻满足：，则

B.如果数量是先上升后下降的，那么的数量一定也是先上升后下降的

C.被捕食者数量与捕食者数量不会同时到达最大值或最小值

D.被捕食者数量与捕食者数量总和达到最大值时，被捕食者的数量也会达到最大值

【答案】C

【解析】由图可知，曲线中纵坐标相等时横坐标未必相等，所以选项不对；在曲线上半段中观察到是先上升后下降的，而是不断变小的，所以选项不对；捕食者数量最大时是在图像最右端，最小值是在图像最左端，此时都不是被捕食者的数量的最值处，同样当被捕食者的数量最大即图像最上端和最小图像最下端时，也不是捕食者数量取最值的时候，所以被捕食者数量和捕食者数量不会同时达到最大值和最小值，选项正确；当捕食者数量最大时在图像最右端，，此时二者总和，而由图像可知存在点，，所以并不是被捕食者数量与捕食者数量总和达到最大值时，被捕食者的数量也会达到最大值，选项不对；

故选C.

**第二部分（非选择题 共110分）**

**二、填空题共5小题，每小题5分，共25分。**

11. 已知向量，，，若与共线，则实数\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】，，.

12. 在的展开式中常数项为\_\_\_\_\_\_\_\_.（用数字作答）

【答案】160

【解析】

令得常数项

所以.

13. 圆心在轴上，且与直线和都相切的圆的方程为\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】设圆为，圆心

，

由相切，有

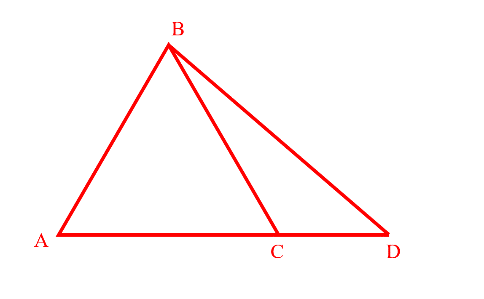
所以

所以圆的方程为.

14. 是等边三角形，点在边的延长线上，且，，则\_\_\_\_\_\_\_\_，\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】因为为等边三角形，所以

所以所以

在中，由余弦定理可得，

即，所以所以.

所以.

所以在中由正弦定理可得

，所以

15.设，给出下列四个结论：

①对，，使得无解；

②对，，使得有两解；

③当时，，使得有解；

④当时，，使得有三解；

其中，所有正确结论的序号是\_\_\_\_\_\_\_\_.

注：本题给出的结论中，有多个符合题目要求.全部选对得5分，不选或者有错选得0分，其他得3分.

【答案】③④

【解析】设，

当且仅当时取等.即时取等

1. 若，当时，恒成立；当时，恒成立，所以值域为，所以与都有交点，所以有解.

所以①错误.

1. 当时，若，成立，所以与不可能有交点.

所以当时，在上为单调函数，所以至多有一个解.

所以当时, 至多有一个解.

所以②错误.

1. 当时，在上单调递减，在上单调递增.

当时，.当时，由图像可得，有解.

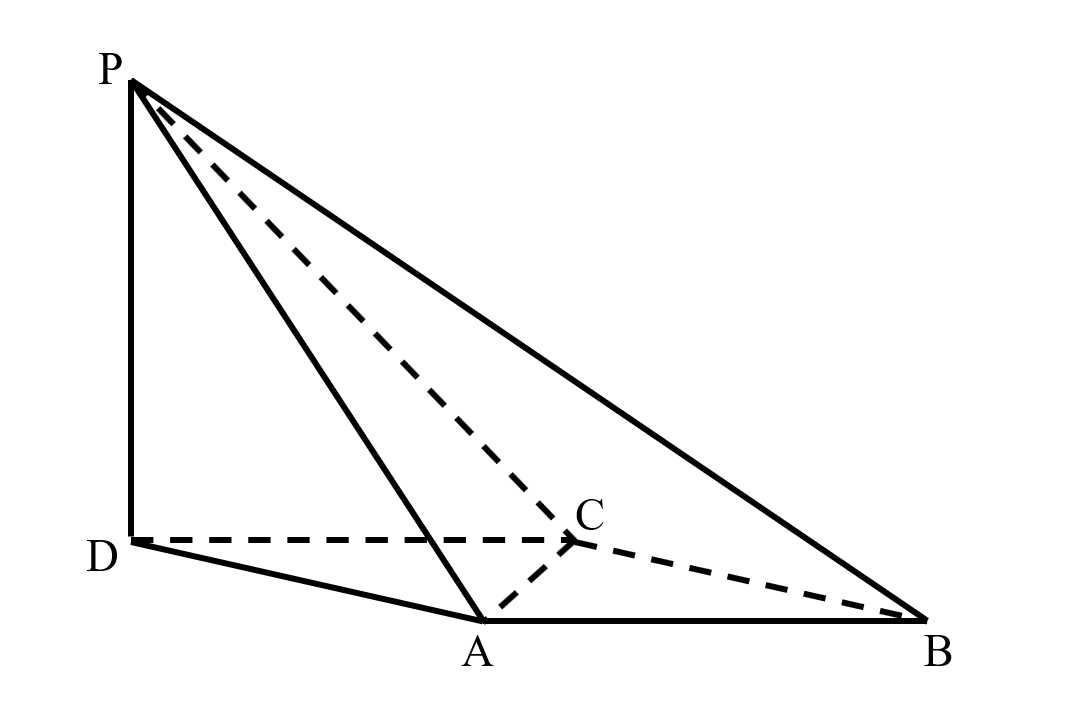
所以③正确.

1. 当时，恒成立且在上为减函数，上为增函数.直线与轴交点为且在单调递增，由图像可得，，使有三个解.

所以④正确.

**三、解答题共6小题，共85分。解答应写出文字说明，演练步骤或证明过程。**

16.（本小题14分）

如图，在四棱锥中，面，底面为平行四边形，，，.

（Ⅰ）求证:平面；

（Ⅱ）求二面角的余弦值的大小.

【解析】

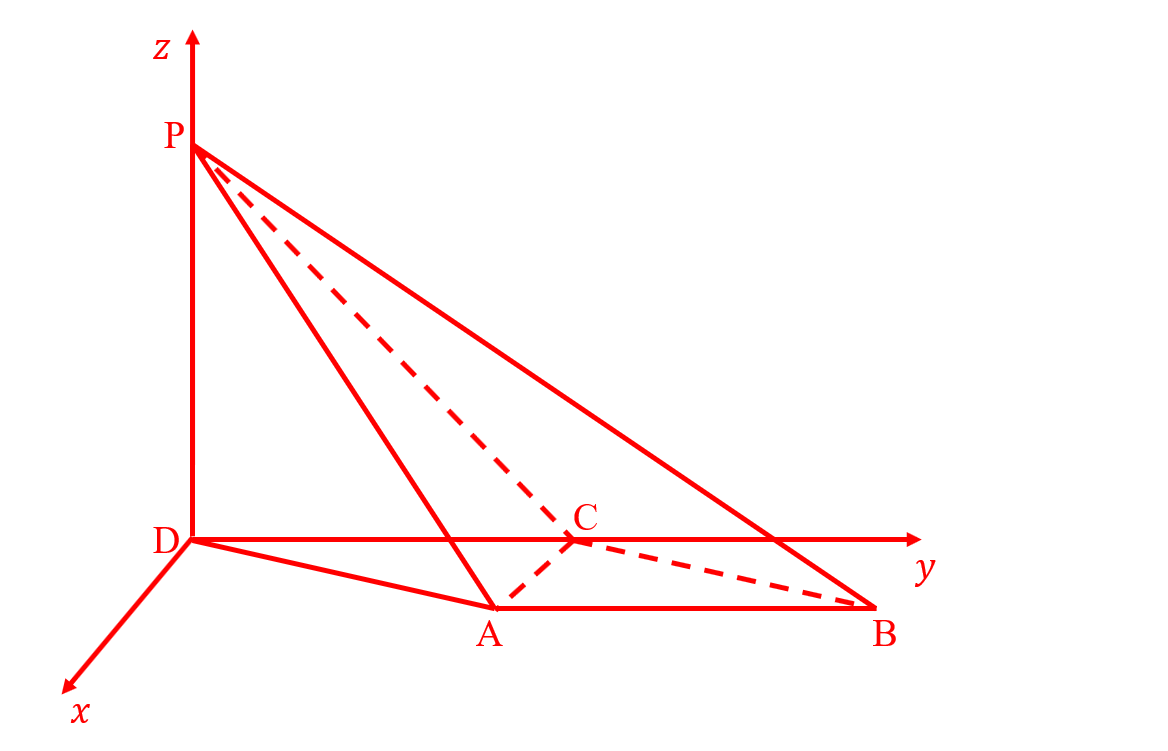
（Ⅰ）底面为平行四边形，

，

平面，平面，

平面.

（Ⅱ）底面为平行四边形，

，

，

，

平面，平面，

，

，平面，平面，

平面，

则以为原点，、所在直线为轴、轴，如图建立空间直角坐标系，其中轴与平行，与垂直，

，，，，，

，，，

取平面的法向量为，

设平面的法向量为，

由，得

，取，

，

，

由图知二面角为钝角，

二面角的余弦值的大小为.

17.（本小题14分）

已知函数，且满足\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

（Ⅰ）求函数的解析式及最小正周期；

（Ⅱ）若关于的方程在区间上有两个不同解，求实数的取值范围.

从①的最大值为1，②的图像与直线的两个相邻交点的距离等于，③的图像过点，这三个条件中选择一个，补充在上面问题中并作答.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。

【解析】





（Ⅰ）选择条件①

，，



最小正周期为

（Ⅱ），，

，

，；，；，

又在上有两个不同解

则



另解：

（Ⅰ）若选择条件②



图像与直线的两个相邻交点的距离等于

且最大值为，则为的最小值

，



最小正周期为

（Ⅱ），，

，，，

，；，；，

又在上有两个不同解

则 ，

另解：

（Ⅰ）选择条件③

的图像过点



，



最小正周期为

（Ⅱ），，

，，，

，；，；，

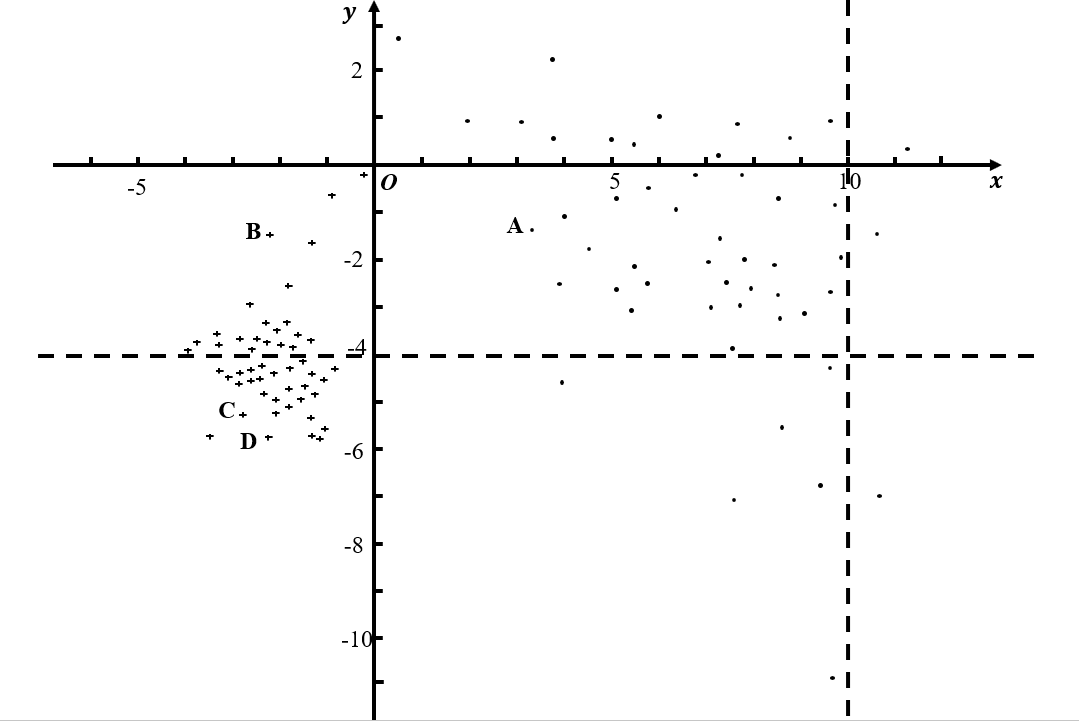
又在上有两个不同解

则



18．（本小题14分）

中国北斗卫星导航系统是中国自行研制的全球卫星导航系统，预计2020年北斗全球系统建设将全面完成.下图是在室外开放的环境下，北斗二代和北斗三代定位模块分别定位的50个点位的横、纵坐标误差的值，其中“•”表示北斗二代定位模块的误差的值，“＋”表示北斗三代定位模块的误差的值.（单位：米）

（Ⅰ）从北斗二代定位的50个点位中随机抽取一个，求此点横坐标误差的值大于10米的概率；

（Ⅱ）从图中四个点位中随机选出两个，记为其中纵坐标误差的值小于的点位的个数，求的分布列和数学期望；

（Ⅲ）试比较北斗二代和北斗三代定位模块纵坐标误差的方差的大小.（结论不要求证明）

【解析】

（Ⅰ）由图知，在北斗二代定位的50个点中，横坐标误差的绝对值大于10米的有3个点，所以从中随机选出一点，此点横坐标误差的绝对值大于10米的概率为.

（Ⅱ）由图知，四个点位中纵坐标误差的值小于的有两个点： .

所以所有可能取值为0,1,2.

，， ；

所以的分布列为：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 |
|  |  |  |  |

所以的数学期望.

（Ⅲ）北斗二代定位模块纵坐标误差的方差大于北斗三代.

19．（本小题14分）

已知椭圆，其上、下顶点分别为，，左、右焦点分别为，，若四边形为正方形，且面积为.

（Ⅰ）求椭圆的标准方程；

（Ⅱ）设存在斜率不为零且平行的两条直线，，它们与椭圆分别交于点，，，，且四边形是菱形，求出该菱形周长的最大值.

【解析】

（Ⅰ）根据题意有，解得

所以椭圆的标准方程为.

（Ⅱ）设的方程为，，

设的方程为，，

联立，解得

由得，化简得 ①

，







同理可得

因为四边形为菱形，所以，所以

又因为，所以，所以与关于原点对称

又因为椭圆关于原点对称

所以，关于原点对称，，关于原点对称

所以且

，

因为四边形为菱形

所以，所以

所以



化简得

设菱形的周长为，则





当且仅当即时等号成立，此时，满足①

所以菱形周长的最大值为

20.（本小题15分）

已知函数.

（Ⅰ）若，求曲线在点处的切线方程；

（Ⅱ）若有两个极值点，求实数的取值范围；

（Ⅲ）若，求在区间上的最小值.

【解析】

（Ⅰ）时，，所以

， ，

所以切线方程为即

（Ⅱ）方法一：

有两个极值点，即有两个异号零点



，即

令



时，，单调递增

，，单调递减

，，且时，

所以当时，即时，有两个极值点.

方法二：



令



1. 当时，，在上单增

即在上单增，此时不可能有两个极值点

1. 当时，令，

当时，，在上单增，即在上单增

当时，，在上单减，即在上单减

所以

因为有两个极值点，

所以得

，

所以当时，存在使，存在使

当变化时，，变化情况如下

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  | **0** |  | **0** |  |
|  |  |  |  |  |  |

符合题意，故的范围是.

（Ⅲ）

方法一：

时，由（Ⅱ）知

即

在上

方法二：

，

由（Ⅱ）知时，在上单增，上单减



所以在上恒成立

所以在上单调递减

所以

21．（本小题14分）

数列,对于给定的，记满足不等式的构成的集合为.

（Ⅰ）若数列，写出集合；

（Ⅱ）如果均为相同的单元素集合，求证：数列为等差数列；

（Ⅲ）如果为单元素集合，那么数列还是等差数列吗？如果是等差数列，请给出证明；如果不是等差数列，请给出反例.

【解析】

（Ⅰ）由于，为满足不等式的构成的集合，

所以有：，

当时，上式可化为，

所以，

当时，上式可化为，

所以为.

（Ⅱ）对于数列，若中均只有同一个元素，不妨设为，

下面证明数列为等差数列，

当时，有；

当时，有；

由于，两式对任意大于1的整数均成立，

所以有成立，从而数列为等差数列.

（Ⅲ）

对于数列，不妨设，

由可知：，

由可知：，即，

从而，

所以，

设，则，

这说明如果，则，

因为对于数列，中均只有一个元素，

首先考查时的情况，不妨设，

因为，又为单元素集，

所以，

再证，证明如下：

由的定义可知：，，

所以，

又由的定义可知，

所以，

所以，

若，即，

则存在正整数，使得，

由于，

所以，这与矛盾，

所以，

同理可证，

即数列为等差数列.