**2020年北京市朝阳区高三一模数学试卷**

**第I卷（选择题 共40分）**

**一、选择题：共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。**

1. 已知集合，，则

A. B.

C. D.

2. 下列函数中，既是偶函数又在区间上单调递增的是

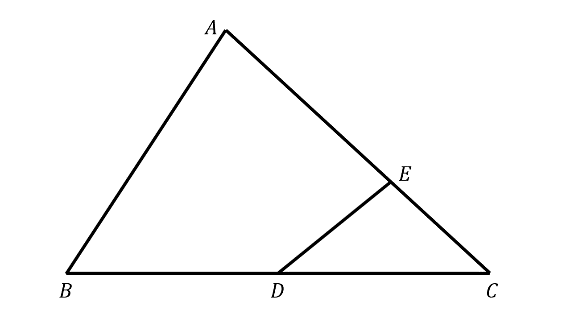
A. B.

C. D.

3. 在等比数列中，，，则的前项和为

A. B.

C. D.

4. 如图，在中，点*D*，*E*满足, , 若，则

A. B.

C. D.

5. 已知抛物线的焦点为，准线为，点是抛物线上一点，于.若，，则抛物线的方程为

A.  B. 

C.  D. 

6. 现有甲、乙、丙、丁、戊5种在线教学软件，若某学校要从中随机选取3种作为教师“停课不停学”的教学工具，则其中甲、乙、丙至多有2种被选取的概率为

A.  B. 

C.  D. 

7. 在中，，，若以，为焦点的双曲线经过点，则该双曲线的离心率为

A.  B. 

C.  D. 

8. 已知函数的图象上相邻两个最高点的距离为，则“”是“的图象关于直线对称”的

A.充分而不必要条件 B.必要而不充分条件

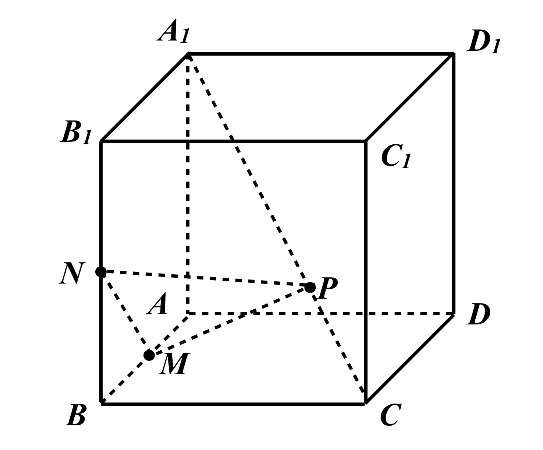
C.充分必要条件 D.既不充分也不必要条件

9. 已知函数 若关于的不等式在上恒成立，则实数的取值范围为

A. B.

C. D.

10. 如图，在正方体中，分别是棱的中点，点在对角线上运动，当的面积取得最小值时，点的位置是

A.线段的三等分点，且靠近点

B.线段的中点

C.线段的三等分点，且靠近点

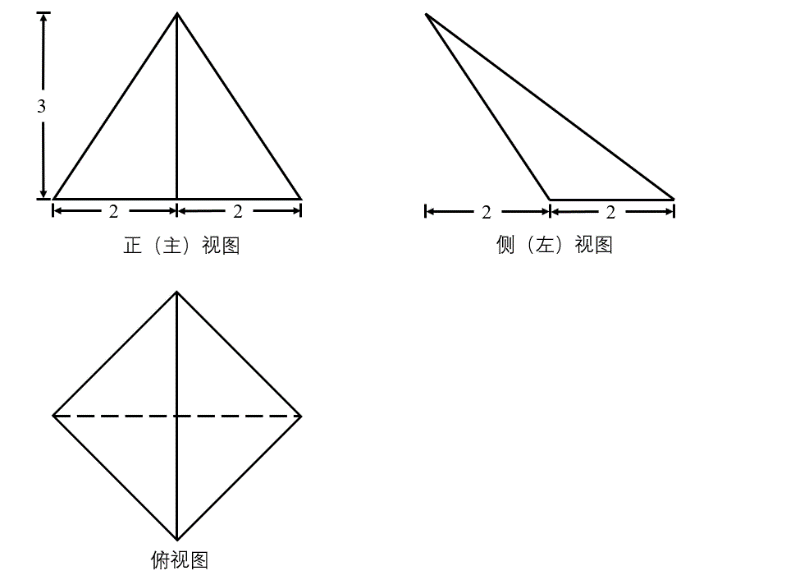
D.线段的四等分点，且靠近点

**第II卷（非选择题 共110分）**

**二、填空题：共5小题，每小题5分，共25分。**

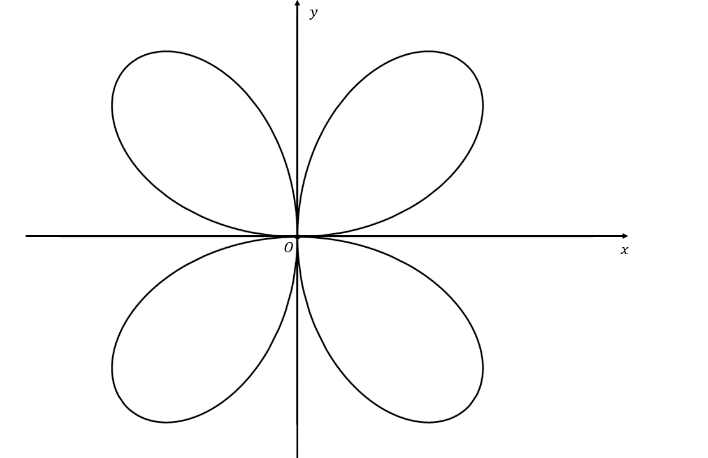
11. 若复数，则\_\_\_\_\_\_\_\_.

12. 已知某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的最长棱的长为\_\_\_\_\_\_\_，它的体积为\_\_\_\_\_\_\_\_.



13. 某购物网站开展一种商品的预约购买，规定每个手机号只能预约一次，预约后通过摇号的方式决定能否购买到该商品.规则如下：（ⅰ）摇号的初始中签率为;（ⅱ）当中签率不超过时，可借助“好友助力”活动增加中签率，每邀请到一位好友参与“好友助力”活动可使中签率增加.为了使中签率超过，则至少需要邀请\_\_\_\_\_\_\_位好友参与到“好友助力”活动.

14. 已知函数. 数列满足，则数列的前100项和是\_\_\_\_\_\_\_.

15. 数学中有许多寓意美好的曲线，曲线C:被称为“四叶玫瑰线”(如图所示).给出下列三个结论：

①曲线C关于直线对称；

②曲线C上任意一点到原点的距离都不超过1；

③存在一个以原点为中心、边长为的正方形，

使得曲线C在此正方形区域内(含边界).

其中，正确结论的序号是\_\_\_\_\_\_\_. (第15题图)

注：本题给出的结论中，有多个符合题目要求.全部选对得5分，不选或者有错选得0分，其他得3分.

**三、解答题：共6小题，共85分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。**

16.（本小题14分）

在中，.

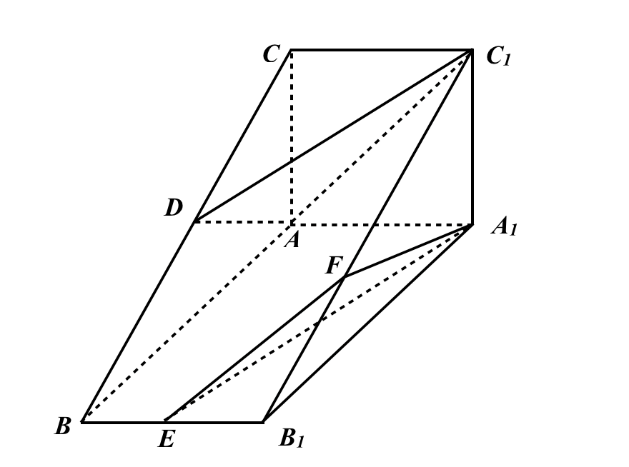
（Ⅰ）求;

（Ⅱ）若求.

从①；②这两个条件中任选一个，补充在上面问题中并作答.

注：如果选择多个条件分别作答，按第一个解答计分.

17．（本小题14分）

如图，在三棱柱中，平面平面，四边形是正方形，点分别是棱的中点，.

（Ⅰ）求证:；

（Ⅱ）求二面角的余弦值；

（Ⅲ）若点在棱上，且，

判断平面与平面是否平行，

并说明理由.

18．（本小题14分）

某科研团队研发了一款快速检测某种疾病的试剂盒.为了解该试剂盒检测的准确性，质检部门从某地区（人数众多）随机选取了80位患者和100位非患者，用该试剂盒分别对他们进行检测，结果如下：

|  |  |
| --- | --- |
| 患者的检测结果 | 人数 |
| 阳性 | 76 |
| 阴性 | 4 |

|  |  |
| --- | --- |
| 非患者的检测结果 | 人数 |
| 阳性 | 1 |
| 阴性 | 99 |

（Ⅰ）从该地区患者中随机选取一人，对其检测一次，估计此患者检测结果为阳性的概率；

（Ⅱ）从该地区患者中随机选取3人，各检测一次，假设每位患者的检测结果相互独立，以表示检测结果为阳性的患者人数，利用（Ⅰ）中所得概率，求的分布列和数学期望；

（Ⅲ）假设该地区有10万人，患病率为0.01.从该地区随机选取一人，用该试剂盒对其检测一次.若检测结果为阳性，能否判断此人患该疾病的概率超过0.5？并说明理由.

19．（本小题14分）

已知椭圆，圆（为坐标原点）.过点且斜率为的直线与圆交于点，与椭圆的另一个交点的横坐标为.

（Ⅰ）求椭圆的方程和圆的方程；

（Ⅱ）过圆上动点作两条互相垂直的直线，，若直线的斜率为且与椭圆相切，试判断直线与椭圆的位置关系，并说明理由.

20.（本小题15分）

已知函数

（Ⅰ）求曲线在点处的切线方程；

（Ⅱ）判断函数的零点的个数，并说明理由；

（Ⅲ）设是的一个零点，证明曲线在点处的切线也是曲线的切线.

1. （本小题14分）

设数列：的各项均为正整数，且．若对任意，存在正整数使得，则称数列具有性质．

（Ⅰ）判断数列与数列是否具有性质；（只需写出结论）

（Ⅱ）若数列具有性质，且，求的最小值；

（Ⅲ）若集合，且（任意

）．求证：存在，使得从中可以选取若干元素（可重复选取）组成一个具有性质的数列．

**2020年北京市朝阳区高三一模数学答案**

**一、选择题：共10小题，每小题4分，共40分。**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 答案 | C | D | A | B | B | D | C | A | C | B |

**二、填空题：共5小题，每小题5分，共25分。**

11. 12. 5；4

13. 15 14. 100

15.①②

**三、解答题：共6小题，共85分。**

16. （本小题14分）

(Ⅰ)由正弦定理得：







(Ⅱ)若选择条件①，则，求.

由余弦定理得，得







另解：

若选择条件②，则，求.

，



由正弦定理：



17. （本小题14分）

(Ⅰ)在三棱柱中，

四边形是正方形，，

又平面平面，平面平面，

且平面，

平面，又平面，.

(Ⅱ)由(Ⅰ)知，，，且，，，

又正方形中，，，，，

，，

则以为原点，为轴，为轴，为轴建立空间直角坐标系，

，，，，为中点，，

又，，且，平面，平面，

平面，平面的法向量为=，

设平面法向量为=，，，

则，，，令，得，，

则=，设二面角为，

则=，又二面角为锐角，

二面角的余弦值为.

(Ⅲ)由（II）知，，，，且为中点，

，，又在棱上，且，

，，且，

设平面法向量为=，

，，，

令，则，，=，

又平面法向量为=，则与不平行，

平面与平面不平行.

18. （本小题14分）

（Ⅰ）设“80名患者中随机抽取1人检测结果为阳性”为事件，

由表知，80名患者中，检测结果为阳性的人数为76人，

由频率估计概率得，.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，，且的可能取值为0,1,2,3

，

，

的分布列如下：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 | 3 |
|  |  |  |  |  |

.

（Ⅲ）不能判断此人患该疾病的概率超过0.5，理由如下：

该地区10万人中患者人，

经该试剂盒检测：患者检测结果为阳性应为人，

非患者检测结果为阳性应为人，

设“该人检测结果为阳性且患该疾病”为事件，

则，

所以，该人患病概率不会超过0.5.

19. （本小题14分）

（Ⅰ）将点代入圆得，故圆的方程为

设过点，斜率为的直线为

将点代入得，故，该直线方程为

将代入，得

将代入椭圆，得，解得

故椭圆的方程为

（Ⅱ）与椭圆相切.

证明：设，则

过点的直线为

联立

得

 ①

因为与椭圆相切

所以

即

即 ②

设与椭圆联立后的判别式为

因为

所以的斜率为，将①式中的替换成，得







代入②，得





再代入，得



故与椭圆相切.

20. （本小题满分15分）

（Ⅰ）

， ，

切线

（Ⅱ）方法一：

由（Ⅰ）知当，，单调递增，

，，

所以在上有且只有一个零点，

，，

所以在上有且只有一个零点，

所以有2个零点.

方法二：

由（Ⅰ）知，

所以在和上单调递增，

因为，，

所以在上有唯一零点，且，，即

因为，，

所以在上有唯一零点，

综上，有且只有2个零点.

（Ⅲ），①

在处的切线为

即

代入①得

即

设上一点，在点处的切线

当时，，

此时与重合，

所以在处的切线也是的切线.

21. （本小题满分14分）

（Ⅰ）数列不具有性质；数列具有性质.

（Ⅱ）由题可知，

所以.

若，因为且，所以.

同理，.

因为数列各项均为正整数，所以.数列前三项为.

因为数列具有性质，只可能为之一，而又因为，

所以.

同理，有.

此时数列为.

但数列中不存在使得，所以该数列不具有性质.

所以

当时，取（构造数列不唯一）

经验证，此数列具有性质.

所以，的最小值为10.

（Ⅲ）反证法：假设结论不成立，即对任意都有：

若正整数，则，

否则，当时，是一个具有性质的数列；

当时，是一个具有性质的数列；

当时，是一个具有性质的数列.

1. 由题意可知，这6个集合中至少有一个集合的元素个数不少于337个，不妨设此集合为，从中取出337个数，记为，且，

令集合.

由假设，对任意，所以.

（ii）在中至少存在一个集合包含中的至少68个元素，不妨设这个集合为，从中取出68个数，记为，且.

令集合.

由假设.

对任意，存在使得，

所以对任意，

由假设，所以，所以，

所以.

（iii）在中至少有一个集合包含中的至少17个元素，不妨设这个集合为，从中取出17个数记为，且.

令集合.

由假设.

对任意，存在使得，

所以对任意，

同样，由假设可得，所以，

所以.

（iv）类似地，在中至少有一个集合包含中的至少6个元素，不妨设这个集合为，从中取出6个数，记为，且，

则.

（v）同样，在中至少有一个集合包含中的至少3个元素，不妨设这个集合为，从中取出3个数，记为，且，

同理可得.

（vi）由假设可得.

同上可知，，

而又因为，所以，矛盾.

所以假设不成立.

所以原命题成立.