



T1 Bustamante cap03 logica simbolica

Lógica Algorítmica (Universidad Estatal a Distancia Costa Rica)

Alfonso Bustamante Arias

Lógica y argumentación

De los argumentos inductivos
a las álgebras de Boole



This document is available free of charge on



Descargado por marcosandrea.marcussandri@gmail.com en www.FreeLibros.me

Lógica simbólica

Lógica proposicional

3.1 INTRODUCCIÓN

En el primer capítulo se indicó que la Lógica tiene como objetivo diferenciar entre razonamientos válidos y razonamientos no válidos, y en el segundo se consideró el aporte de la lógica aristotélica al logro de este objetivo, para el caso de los silogismos categóricos. Sin embargo, como no todo argumento es silogístico —o susceptible de ser puesto en forma silogística equivalente—, los criterios estudiados resultan insuficientes para decidir sobre la validez de los razonamientos deductivos en general. En este capítulo aprenderemos que la lógica simbólica moderna proporciona criterios más generales de validez y herramientas de uso sistemático para la aplicación de tales criterios. Esto amplía la capacidad para decidir sobre validez de razonamientos deductivos.

Para aplicar el criterio de validez de razonamientos provisto por la lógica simbólica, el razonamiento debe ser representado con símbolos de un alfabeto previamente establecido. Por esta razón inicialmente nos referiremos al uso de la lógica simbólica como sistema de representación de información. Sin embargo, es necesario tener siempre en cuenta que este uso es convencional, es decir, que deben convenirse previamente su alcance y limitaciones, puesto que ningún sistema simbólico logra capturar con exactitud todos los matices y peculiaridades del lenguaje natural. Por ejemplo, es un hecho que los enunciados “Juan es pobre y generoso” y “Juan es pobre pero generoso” tienen significados diferentes en el lenguaje cotidiano. No obstante,

veremos que los dos enunciados se representan de igual forma en el lenguaje de la lógica proposicional. Sin embargo, veremos también que estas simplificaciones no afectan el valor práctico del criterio de decisión para validez de razonamientos deductivos.

En español —y posiblemente esto es cierto en todos los lenguajes naturales— no siempre los enunciados tienen un significado inequívoco. Por ejemplo, la expresión “La vendedora entró colada por la puerta del estadio” tiene dos significados en nuestra región, según el uso del término “colada”. Uno de estos significados es que la vendedora entró al estadio eludiendo el pago; el otro, que la vendedora —presumiblemente vendedora de colada— entró ese tipo de bebida a través de la puerta del estadio. Análogamente, la frase “Ayer vi a un señor con un telescopio” tiene dos significados posibles, como bien puede concluir el lector.

El uso del condicional proporciona ejemplos adicionales de ambigüedad. Por ejemplo, con la expresión “Juan me explica el problema si tengo alguna duda”, se está indicando que es suficiente tener alguna duda, para contar con la ayuda de Juan, esto es, que tener alguna duda es condición suficiente para recibir la explicación de Juan. En cambio, en la afirmación “Juan me explica el problema, si tiene tiempo”, el contexto permite pensar que “tener tiempo” es condición necesaria para que Juan le explique el problema. Las dos proposiciones tienen la misma estructura y, sin embargo, el condicional está utilizado con diferente propósito. La lógica simbólica debe precisar significados para eliminar ambigüedades como esta.

La multiplicidad de significados y funciones gramaticales de una misma palabra, el empleo de expresiones idiomáticas y la carga emocional de las frases son algunos factores que deben considerarse en el análisis de los argumentos para decidir sobre su corrección o admisibilidad. Por esto, un primer paso en el desarrollo de herramientas formales de análisis para validez de razonamientos deductivos es eliminar, en lo posible, las imprecisiones y ambigüedades propias del lenguaje natural. Con este propósito se construye un lenguaje formal, lo cual requiere:

1. Especificar el alfabeto utilizado.
2. Hacer explícitas las reglas para producir elementos del lenguaje y para decidir si una cadena específica es o no un elemento de ese lenguaje.
3. Asignar significados inequívocos a los elementos del lenguaje.

La lógica simbólica moderna es un lenguaje que satisface estos requerimientos.

3.2 EL LENGUAJE DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL, $L(P)$

La lógica proposicional es un lenguaje formal que permite decidir acerca de la validez o invalidez de una amplia clase de razonamientos deductivos, sobre la base de la representación simbólica de las proposiciones que intervienen en el razonamiento y de las conexiones entre ellas.

El alfabeto o conjunto de caracteres de la lógica proposicional, que representaremos con P , tiene símbolos de cuatro clases:

1. Símbolos de variables proposicionales o átomos: p, q, r, s, \dots, w (p_1, p_2, \dots , si se requiere).

Estos símbolos se utilizan para representar proposiciones atómicas, es decir, proposiciones que no pueden descomponerse en otras más simples. Ejemplos:

p : llueve, q : hace frío, r : hoy es martes.

2. Símbolos de conectivos (u operadores) lógicos o proposicionales. Son los símbolos que se presentan en la Tabla 3.1. Se utilizan en la representación de proposiciones compuestas, mediante una conexión entre los símbolos que representan las proposiciones atómicas que las componen. Por ejemplo, con los símbolos p y q como en el numeral 1 anterior, "llueve y hace frío" se representaría por $p \wedge q$, en tanto que "llueve pero no hace frío" se representaría por $p \wedge \neg q$. En la tercera columna de la tabla se indica cómo se lee cada conectivo en una expresión de la lógica proposicional. Por ejemplo: $\neg p$ se lee como "no p " o como "es falso que p " o " p es falso". En la última de la derecha se da un ejemplo para cada caso.
3. Símbolos de puntuación. Son los paréntesis abierto "(" y cerrado ")". Se utilizan para agrupar, con fines sintácticos o de claridad, partes de una expresión. Por ejemplo, en lugar de escribir $p \vee q \Rightarrow r$ escribiremos $(p \vee q) \Rightarrow r$ o $p \vee (q \Rightarrow r)$, según el significado de la expresión representada.
4. Símbolos de constantes lógicas. Son los símbolos V y F . Su significado se presenta en la sección 3.6.1.

Tabla 3.1 Conectivos lógicos o conectivos proposicionales

Símbolo	Nombre usual	En una fórmula se lee	Ejemplo
\neg	negación	no, es falso que	$\neg p$: no p
\vee	disyunción	o	$p \vee q$: p o q
\wedge	conjunción	y	$p \wedge q$: p y q
\Rightarrow	condicional	si... entonces...	$p \Rightarrow q$: si p entonces q
\Leftrightarrow	bicondicional	...si y sólo si...	$p \Leftrightarrow q$: p si y sólo si q

Se llaman **fórmulas** de la lógica proposicional a las cadenas o expresiones resultantes de concatenar o yuxtaponer símbolos del alfabeto P . Por ejemplo: p , $\neg p \vee q$, $((\neg q \Rightarrow s) \Rightarrow q)$, y $(\neg \neg r \Leftrightarrow (r \neg \Rightarrow t))$, son fórmulas. Pero sólo las fórmulas que satisfacen ciertas reglas de sintaxis, y que se llaman fórmulas bien formadas, (FBF), hacen parte de lo que llamaremos el lenguaje de la lógica proposicional, $L(P)$.

3.3 FÓRMULAS BIEN FORMADAS. SINTAXIS EN LA LÓGICA PROPOSICIONAL

El proceso de comprensión de una oración en lenguaje natural requiere del análisis sintáctico. Este análisis permite decidir si la frase está o no construida de acuerdo con las reglas gramaticales propias del lenguaje. Por ejemplo, “el llanero solitario canta una canción”, es una frase sintácticamente correcta, pero no lo es “una el solitario canción llanero canta”. Cada lenguaje, natural o artificial, requiere un criterio para decidir cuándo una cadena de símbolos de su alfabeto pertenece al lenguaje, es decir, está bien construida. En el caso particular del lenguaje de la lógica proposicional ese criterio debe concluir que una cadena como $((\neg q \Rightarrow s) \Rightarrow q)$ está bien construida —y por lo tanto pertenece al lenguaje $L(P)$ — mientras que otra como $(\neg \neg r \Leftrightarrow (r \neg \Rightarrow t))$ presenta por lo menos un error de sintaxis y por lo tanto no pertenece a dicho lenguaje.

Definición 3.1 Las siguientes cadenas de símbolos de P , el alfabeto de la lógica proposicional, son fórmulas bien formadas y no hay otras que lo sean:

- F1.** Los símbolos de variables proposicionales o átomos: p, q, r, s, \dots, w .
- F2.** Las fórmulas que resulten de anteponer a una fórmula bien formada el símbolo de negación \neg .

Por ejemplo, $\neg p$ es fórmula bien formada, porque p lo es. Y con base en esto, $\neg\neg p$ también es FBF.

F3. Las fórmulas que resulten de conectar con un conectivo binario y después delimitar con paréntesis, dos fórmulas bien formadas. Si A y C son tales FBF, las nuevas FBF serán $(A \vee C)$, $(A \wedge C)$, $(A \Rightarrow C)$ y $(A \Leftrightarrow C)$.

Por ejemplo, ya sabemos que $\neg p$ es FBF y que también lo es q . Según F3, $(\neg p \vee q)$ es FBF. Porque conectamos mediante el conectivo \vee dos FBF y obtuvimos $\neg p \vee q$, y después delimitamos con paréntesis la expresión resultante. Observe que reiterando el argumento podemos concluir que $((\neg p \vee q) \Rightarrow (s \Leftrightarrow r))$ es una FBF.

Recuerde: Las cadenas que resulten de aplicar los casos anteriores son FBF y sólo ellas lo son.

Ejemplo 3.2 Mostremos que $((p \Rightarrow q) \wedge r)$ es fórmula bien formada.

Sabemos que p , q y r son FBF, según F1. Entonces $(p \Rightarrow q)$ es FBF, por F2. Finalmente, también por F2, $((p \Rightarrow q) \wedge r)$ es una fórmula bien formada.

Ejemplo 3.3 $(p \vee \neg r \Rightarrow t)$ no es FBF. En efecto, cada vez que dos FBF se enlazan con un conectivo binario el resultado debe delimitarse con paréntesis. Esto no es así en $p \vee \neg r$, ni en $\neg r \Rightarrow t$. Por lo tanto la fórmula no es FBF.

Observación 3.4 Note que, según los casos descritos en la definición 3.1, ninguna de las cadenas $p \vee q$, $\neg r \Rightarrow s$, $(p \vee r) \Rightarrow t$ es FBF y que la única razón para no serlo es la ausencia de paréntesis exteriores. Pero, ¿hay riesgo de ambigüedad por no utilizarlos? Realmente no, pues los paréntesis determinan las subfórmulas de una fórmula dada, así que no es necesario usarlos como delimitadores de la fórmula total, pues no hay lugar a ambigüedad. Esta es la única excepción que haremos al uso de los paréntesis al calificar una fórmula como FBF.

Observación 3.5 A veces se hace una reducción adicional del número de paréntesis, mediante la adopción de una jerarquía entre los conectivos. Haciendo uso de tal jerarquía y de lo anotado anteriormente sobre los paréntesis externos, se escribiría $p \Rightarrow q \wedge r$ en lugar de $(p \Rightarrow (q \wedge r))$. Sin embargo, aquí no haremos uso de jerarquía de conectivos como elemento para eliminación de paréntesis porque es preferible mantenerlos, así parezcan innecesarios, que correr el riesgo de alterar el significado de una expresión o de obtener una expresión ambigua, por no utilizarlos.

3.4 CONTENIDO SEMÁNTICO DE LAS FÓRMULAS BIEN FORMADAS

3.4.1 Introducción

Ya consideramos la sintaxis de las cadenas de símbolos en el lenguaje $L(P)$ y presentamos un criterio para decidir cuándo una fórmula es fórmula bien formada. Si este fuera el único aspecto por considerar, la lógica proposicional sería de poca o ninguna utilidad para los propósitos de este curso. Sin embargo, dotando de significados a las fórmulas bien formadas se obtiene una aplicación de la lógica formal en la determinación de la validez o invalidez de una amplia clase de razonamientos deductivos.

Los conectivos lógicos \neg , \wedge , \vee , \Rightarrow , \Leftrightarrow son elementos del alfabeto P de la lógica proposicional que operan sobre átomos o fórmulas y producen nuevas fórmulas. Estos conectivos serán presentados aquí en una doble perspectiva: para propósitos de representación simbólica, y definiéndolos mediante sus valores de verdad. En el primer caso se utilizan para representar determinadas expresiones del lenguaje ordinario; en el segundo se establece un criterio para asignar los valores V o F —que interpretaremos como verdadero o falso— a las fórmulas bien formadas. El criterio para asignar a una FBF un valor V o F debe reflejar, en cada caso, el uso dado al conectivo en la representación simbólica. En ambas perspectivas se mantiene el acuerdo implícito en la comunicación ordinaria, según el cual el enunciado de una proposición declarativa lleva implícita la afirmación de que lo que afirma es verdad. Por ejemplo, cuando decimos “el oxígeno es necesario para la vida” estamos afirmando que “es verdad que el oxígeno es necesario para la vida”. Igualmente, la declaración “Juan sabe inglés y alemán”, conlleva el significado “es verdad que Juan sabe inglés y también lo es que sabe alemán”. La situación es similar en lógica simbólica: si el átomo p simboliza una proposición, la notación p conlleva el significado “ p es verdadera”, o “es verdad que p ”. Por ejemplo, si utilizamos el símbolo p para representar la proposición atómica “el oxígeno es necesario para la vida” la aparición de p en una fórmula debe entenderse como la afirmación “el oxígeno es necesario para la vida”. Como veremos, esta convención se extiende a los significados de las FBF.

En lo que sigue se describe la función de los conectivos lógicos, específicamente entre átomos. Posteriormente se generaliza su función para conectar fórmulas en general.

3.4.2 Negación

Supongamos que el átomo p representa la afirmación p : Isabel es calculista. Entonces cualquiera de las afirmaciones "Isabel no es calculista", "es falso que Isabel es calculista", "es un hecho que Isabel no es calculista", "no es el caso que Isabel es calculista", formas de negar la afirmación inicial, se representa con la fórmula $\neg p$. La FBF $\neg p$, que leeremos "no p " representa la negación de p . En el lenguaje natural corresponde a las expresiones que se enuncian, a partir de la proposición representada por p , como "no p ", "es falso que p ", "no es cierto que p ", " p es falsa" y otras equivalentes. Otros ejemplos: Si q representa la afirmación $a = b$, $\neg q$ representa la afirmación $a \neq b$; si con r representamos el enunciado $a \in A$, entonces representaremos con $\neg r$ la afirmación $a \notin A$.

3.4.3 Conjunción

Si p y q representan proposiciones atómicas, la cadena de símbolos $p \wedge q$ (se lee " p y q ") representa la conjunción de tales proposiciones. Con esta fórmula se representan las expresiones que se enuncian, a partir de las proposiciones representadas por p y q , como " p y q ", " p pero q ", " p y también q ", " p y sin embargo q ", y otras equivalentes. Indica la ocurrencia simultánea de los eventos enunciados por las dos proposiciones. Por ejemplo, si con p y q se representan las afirmaciones "Pedro es alto" y "Pedro es delgado", respectivamente, entonces la fórmula $p \wedge q$ representa cualquiera de las afirmaciones "Pedro es alto y delgado", "Pedro es alto pero delgado", "Pedro es alto y sin embargo es delgado", "Pedro es alto aunque también es delgado", y otras equivalentes. El símbolo $p \wedge q$ conlleva la afirmación de que las dos proposiciones, p y q , son verdaderas, tanto en el contexto de conjunción copulativa: "Juan es pobre y generoso", como de conjunción adversativa: "Juan es pobre pero generoso".

Cabe aquí una observación: en el proceso de representación simbólica es necesario tener siempre presentes los significados convencionales. Por ejemplo: la proposición "Los números 2 y 7 son primos" es una proposición compuesta, de la forma $p \wedge q$, pero la proposición "Los estudiantes Diego y Andrés son primos" es una proposición atómica.

3.4.4 Disyunción

Si p y q representan proposiciones atómicas, la cadena de símbolos $p \vee q$ (se lee " p o q ") representa la disyunción de tales proposiciones. Corresponde a las expresiones del lenguaje natural que se enuncian, a partir de las proposiciones representadas

por p y q , como " p o q ", " p o q o ambas", "por lo menos una, entre p y q ", y otras equivalentes. Indica que por lo menos una de las dos proposiciones es verdadera. Por ejemplo, si p representa la proposición "los funcionarios de la embajada saben inglés" y q "los funcionarios de la embajada saben francés", entonces la FBF $p \vee q$ representa las afirmaciones "los funcionarios de la embajada saben inglés o francés", "los funcionarios de la embajada saben por lo menos inglés o francés", "los funcionarios de la embajada saben inglés o francés o los dos".

En el lenguaje cotidiano la disyunción tiene dos usos. Uno de estos es conocido como "inclusivo": lo uno, o lo otro, o ambos; el segundo es conocido como "exclusivo": lo uno, o lo otro, pero no ambos. El primer caso se presenta, por ejemplo, cuando decimos: Si $ab = 0$ entonces $a = 0$ o $b = 0$, porque en este caso una opción no excluye a la otra porque puede suceder que ambos, a y b , sean 0. "Lleve con usted la cédula o el pasaporte", es también un ejemplo de uso inclusivo de la disyunción. En contraste, "Llegaré el miércoles en la noche o el jueves en la mañana" y "Permítame ver su cédula o su pasaporte" ilustran usos de la disyunción en sentido exclusivo. En el primero de estos casos es evidente que una alternativa excluye a la otra, pero en el segundo la exclusión es convencional, pues aun cuando no se espera que el aludido muestre ambos documentos, la expresión no indica que no pueda hacerlo.

El doble uso de la disyunción en el lenguaje usual y la ambigüedad que de ello puede derivarse, son incompatibles con la unicidad de significados deseable en un lenguaje formal como lo es la lógica simbólica. Para eliminar tal ambigüedad adoptaremos esta convención: La disyunción "o" será usada siempre en sentido inclusivo, es decir, el símbolo $p \vee q$ tiene siempre el significado " p , o q , o ambas". El sentido exclusivo debe ser declarado explícitamente utilizando la forma "... o ..., pero no ambos", como en " x pertenece al conjunto A o x pertenece al conjunto B , pero no a ambos". Algunas veces se usa la forma "o..., o..." para significar que la disyunción es exclusiva, como en "o x pertenece a A , o x pertenece a B ", pero esta práctica no es tan generalizada como para considerarla segura y nosotros no la utilizaremos con este significado. Tampoco la notación simbólica es única para la disyunción exclusiva, pero nosotros adoptaremos una de las más utilizadas: $p \oplus q$. (Tenga presente que \oplus no es un conectivo proposicional; es un símbolo creado para denotar un vínculo que, como veremos a continuación, puede expresarse por intermedio de los conectivos proposicionales ya definidos).

La cadena de símbolos $p \oplus q$ indica que exactamente una entre p y q es verdadera, es decir, que alguna de las dos es verdadera pero es falso que ambas lo son. Este significado se puede expresar mediante los conectivos ya estudiados. En efecto: "alguna de las dos es verdadera" se representa como $(p \vee q)$; "ambas son verdaderas", se representa con $(p \wedge q)$; y, "es falso que ambas son verdaderas" se representa con $\neg(p \wedge q)$. Finalmente, "alguna de las dos (es verdadera) pero no las dos", se representa

con $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$. Por esta razón adoptamos la siguiente definición del conectivo derivado “o exclusivo”, donde el símbolo \equiv se lee “es lógicamente equivalente a”:

$$p \oplus q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \quad (3.1)$$

3.4.5 Condicional

Si p y q representan proposiciones atómicas, la fórmula $p \Rightarrow q$ (se lee “si p entonces q ” o, con menos frecuencia, “ p implica q ”), representa la relación entre p y q que se expresa en el lenguaje usual en cualquiera de estas formas: “si p entonces q ”, “ p sólo si q ”, “ q , si p ”, “es necesario q para p ”, “es suficiente p para q ”, “no p a menos que q ”, “no es posible que p y no q ”, “ p implica q ” y las que les sean equivalentes. Por ejemplo, si con p y q representamos las proposiciones p : hoy es martes y q : mañana es miércoles, con $p \Rightarrow q$ representamos cualquiera de las siguientes afirmaciones:

Si hoy es martes, **entonces** mañana es miércoles.

Hoy es martes, **sólo si** mañana es miércoles.

Mañana es miércoles, **si** hoy es martes.

Es necesario que mañana sea miércoles para que hoy sea martes.

Es suficiente que hoy sea martes para que mañana sea miércoles.

Hoy no es martes, **a menos** que mañana sea miércoles.

No es posible que hoy sea martes **y** mañana **no** sea miércoles.

En un enunciado condicional, la proposición que acompaña a “si” es llamada **antecedente**; la otra, que puede o no estar precedida de “entonces” es llamada **consecuente**. Esto significa que al escribir la proposición en cualquiera de las formas “si p entonces q ”, “si p , q ”, o “ q , si p ”, p es el antecedente y q el consecuente. En la proposición “si hoy es martes, (entonces) mañana es miércoles”, “hoy es martes” es el antecedente y “mañana es miércoles” es el consecuente. Observe que la última expresión en la lista de usos del condicional equivale a, “**No es posible** que el antecedente sea verdadero y que el consecuente sea falso”, una de las caracterizaciones más significativas del condicional, como se ilustra en estos ejemplos:

1. Si es médico, entonces sabe anatomía \equiv No es posible ser médico y no saber anatomía.
2. Si un número es divisible por 2, termina en cifra par \equiv No es posible que un número sea divisible por 2 y no termine en cifra par.
3. Si el silogismo es válido, satisface S2 \equiv No es posible que el silogismo sea válido y no satisfaga S2.

Es necesario reiterar que el condicional nada afirma sobre la verdad del antecedente o la del consecuente por separado; sólo afirma que si el antecedente es verdadero, el consecuente también lo es, o, en forma equivalente, que no es posible que el antecedente sea verdadero y simultáneamente el consecuente sea falso. Esto significa que el condicional puede considerarse como un conectivo derivado, en cuyo caso podría definirse de esta forma:

$$p \Rightarrow q \equiv \neg(p \wedge \neg q) \quad (3.2)$$

Ejemplo 3.6 Supongamos que los átomos p y q representan estas proposiciones:

p : El entero n es divisible por 3.

q : La suma de las cifras del número n es múltiplo de 3.

¡Cada una de las 7 oraciones siguientes se representa simbólicamente como $p \Rightarrow q$!:

1. Si el entero n es divisible por 3, entonces la suma de los dígitos de n es múltiplo de 3.
2. El entero n es divisible por 3 sólo si la suma de los dígitos de n es múltiplo de 3.
3. La suma de los dígitos del número n es múltiplo de 3 si n es divisible por 3.
4. Es necesario que la suma de los dígitos de n sea múltiplo de 3 para que n sea divisible por 3.
5. Es suficiente que el entero n sea divisible por 3 para que la suma de sus dígitos sea múltiplo de 3.
6. Un entero no es divisible por 3, a menos que la suma de sus dígitos sea múltiplo de 3.
7. No es posible que un entero sea divisible por 3 y que la suma de sus dígitos no sea múltiplo de 3.

Ninguna de las oraciones anteriores afirma que “el entero n es divisible por 3” (antecedente), ni que “la suma de los dígitos de n es múltiplo de 3” (consecuente). Sólo afirman que cada vez que un entero es divisible por 3, la suma de los dígitos del número es múltiplo de 3.

3.4.6 Usos del condicional

En la sección anterior mencionamos los usos diferenciados de la disyunción “o” y convinimos en atribuirle sentido inclusivo —salvo que explícitamente se dijera otra cosa— para evitar ambigüedad en las aplicaciones de la lógica simbólica. También el

condicional se utiliza con diferentes significados, como puede apreciarlo el lector en los casos siguientes:

1. Si ABC es un triángulo rectángulo, **entonces** ABC tiene un ángulo recto.
2. Si todo asesor tributario es contador o economista y Joaquín es asesor tributario pero no es economista, **entonces** Joaquín es contador.
3. Si una mujer da a luz una niña, **entonces** el sexo de esta fue determinado por el aporte de un cromosoma X de parte de su progenitor masculino.
4. Si tu papá es multimillonario, **entonces** yo soy Bill Gates.

Observe que en el primer caso la relación entre el antecedente y el consecuente se origina en la definición misma de triángulo rectángulo; en el segundo, el consecuente es una consecuencia lógica del antecedente; en el tercero, la relación expresa un hecho de la naturaleza. Finalmente, en el cuarto caso el condicional se utiliza con la intención de negar enfáticamente la posibilidad de que el antecedente sea verdadero.

Pese a su aparente diversidad, estos cuatro usos del condicional “si...entonces...” comparten un carácter esencial: afirmar que si el antecedente es verdadero, el consecuente también debe serlo, es decir, que no es posible que el antecedente sea verdadero y simultáneamente el consecuente sea falso: No es posible que ABC sea un triángulo rectángulo y no tenga un ángulo recto; no es posible que todo asesor tributario sea contador o economista y que Joaquín sea asesor tributario no economista, y sin embargo Joaquín no sea contador; etc. Como se dijo anteriormente, este significado se recoge en la definición $p \Rightarrow q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$.

Se recomienda al lector repasar en este momento la sección 2.5, que establece la relación entre el enunciado condicional y las condiciones suficiente y necesaria.

3.4.7 El bicondicional

Si p y q representan proposiciones, el símbolo $p \Leftrightarrow q$ (que se lee “ p si y sólo si q ”) se utiliza como expresión abreviada de la conjunción $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$, y por lo tanto deriva de esta su significado: si p es verdadera, entonces q es verdadera, y si q es verdadera, entonces p es verdadera. (De aquí se deduce que si una de las dos proposiciones es falsa, la otra también lo es). En síntesis, la fórmula $p \Leftrightarrow q$ afirma que p y q son ambas verdaderas o son ambas falsas. Cuando esto es verdad decimos que p y q son lógicamente equivalentes y escribimos $p \equiv q$. En la sección siguiente estudiaremos el significado del bicondicional como parte esencial de algunas definiciones y del enunciado de algunos teoremas.

3.4.7.1 El bicondicional y las definiciones

Al finalizar la sección 2.5 dijimos que toda definición convencional es un enunciado de la forma "... si y sólo si...". En estas definiciones se estipulan condiciones suficientes y necesarias para la propiedad definida. Es el caso de definiciones como:

- Un entero positivo es primo si y sólo si tiene exactamente dos divisores positivos: 1 y el mismo entero.
- Una cadena, palabra o frase sobre un alfabeto dado es un palíndromo si y sólo si se lee igualmente de izquierda a derecha que de derecha a izquierda (haciendo caso omiso de los espacios en blanco, si existen).

Como es de esperar, la definición de un concepto en términos de condición suficiente y necesaria establece condiciones de inclusión y exclusión en el conjunto de los elementos caracterizados por el concepto. Así, por ejemplo, la definición de número primo incluye en esta categoría a todos los enteros que tienen exactamente dos divisores positivos en tanto que excluye de ella al 1 y a los enteros que tienen más de dos divisores. Entonces, $n = 17$ es primo porque tiene exactamente dos divisores positivos: 1 y 17. Análogamente, como los únicos divisores positivos de 23 son 1 y 23, entonces 23 es número primo. En cuanto a la condición necesaria, 9 no es primo porque tiene más de dos divisores: 1, 3, y 9; 1 no es primo, porque tiene sólo un divisor positivo: 1.

En la sección 2.5.7 mencionamos el hecho de que si A es condición suficiente y necesaria para B, entonces B es también condición suficiente y necesaria para A, dado que las dos condiciones se implican mutuamente. Para el caso de la definición de número primo, esto significa que tener exactamente dos divisores es condición suficiente y necesaria para que un número sea primo. Entonces, si un enunciado particular afirma que un entero p es primo, de inmediato sabemos que p es diferente de 1 y tiene sólo dos divisores positivos, que son 1 y p ; igualmente, si un enunciado afirma que un número p distinto de 1 no es primo, de inmediato sabemos que tiene algún divisor d , que es distinto de 1 y de p mismo. En los ejercicios sobre técnicas de demostración se pide al estudiante probar este resultado: Si p es un número primo, y p no es divisor de a , entonces el máximo común divisor de p y a , es 1. (Por ejemplo, 5 es primo y no es divisor de 12 y el máximo divisor común de 5 y 12 es 1). En la demostración se utiliza el hecho de que por ser p un número primo, sus únicos divisores son 1 y p .

En cuanto a la noción de palíndromo, la condición suficiente o de inclusión indica que "amor a Roma", "20 02 2002" (20 de febrero de 2002), "A man, a plan, a canal: Panama", y el famoso "dábale arroz a la zorra el abad", son palíndromos, porque se leen igualmente de izquierda a derecha, que de derecha a izquierda. Por otra parte,

la condición necesaria o de exclusión indica que cadenas como "2003", "no tienes espíritu aventurero", no son palíndromos.

3.4.7.2 El bicondicional y los teoremas

Un teorema como "Si a y b son reales positivos entonces el producto ab es un real positivo" es de la forma "si H entonces T ". El resultado recíproco, "si ab es un real positivo entonces a y b son reales positivos", es falso. (¿Por qué?). Sin embargo, muchos teoremas tienen la forma " H si y sólo si T ". Por ejemplo:

1. El cuadrado de un entero es par si y sólo si el entero es par.
2. El producto ab es 0 si y sólo si a es 0 o b es 0.

Estos enunciados establecen una relación mutua de suficiencia y necesidad entre dos propiedades. El primero asegura que es suficiente y necesario que un entero sea par, para que el cuadrado del entero sea par y asegura también que es suficiente y necesario que el cuadrado de un entero sea par para que el entero mismo sea par. Esta relación mutua de suficiencia y necesidad entre H y T explica por qué al demostrar estos teoremas, se debe desarrollar una argumentación que pruebe dos hechos: Uno, que H es suficiente para T (con lo cual quedará probado que T es necesario para H); el otro, que T es suficiente para H (con lo cual quedará probado que H es necesario para T). Sólo así quedará establecida la validez del teorema propuesto.

En la sección destinada a técnicas de demostración volveremos sobre el tema. En este momento nos interesa solamente establecer la relación entre el bicondicional y los teoremas de este tipo.

3.5 REPRESENTACIÓN SIMBÓLICA

Los elementos desarrollados en la sección anterior permiten avanzar en uno de los propósitos más importantes de este capítulo: el uso del lenguaje $L(P)$ para representar simbólicamente enunciados del lenguaje natural. A continuación se presentan algunos ejemplos.

Ejemplo 3.7 Representar en el lenguaje $L(P)$ la frase: "Si la sequía persiste no sólo se secarán los pastos sino que aumentarán los incendios forestales".

Solución: Primero se identifican las proposiciones atómicas que intervienen en el enunciado. Ellas son: "la sequía persiste", "se secarán los pastos" y "aumentarán los incendios forestales".

A continuación se las representa con átomos. Por ejemplo:

p: La sequía persiste.

q: Se secarán los pastos.

r: Aumentarán los incendios forestales.

Escribamos el enunciado original en una forma que permita identificar más fácilmente los conectivos que contiene: "Si la sequía persiste, entonces se secarán los pastos y aumentarán los incendios forestales". El contexto y la forma del enunciado original indican que la representación correspondiente es $p \Rightarrow (q \wedge r)$.

Ejemplo 3.8 Representar la afirmación: "Se sabe que si continúa la incertidumbre habrá un aumento en las tasas de interés; se sabe también que la devaluación será acelerada".

Utilizaremos los átomos p y q con los significados siguientes:

p: Continúa la incertidumbre.

q: Habrá alza en la tasa de interés.

r: La devaluación será acelerada.

Con estos átomos y significados la afirmación dada se representa como $(p \Rightarrow q) \wedge r$.

Ejercicio 3.9 Utilizando las mismas proposiciones y símbolos del ejemplo anterior, ¿cuál es el enunciado que se representa por $p \Rightarrow (q \wedge r)$?

Ejercicio 3.10 Considere los enunciados:

A: Juan regresa temprano, y va a misa o se queda en casa.

B: Juan regresa temprano y va a misa, o se queda en casa.

Es un hecho que A y B tienen distinto significado. Determine cuál de las representaciones $(p \wedge q) \vee r$, y $p \wedge (q \vee r)$, se corresponde con A y cuál con B. Posteriormente veremos que la diferencia de significados se refleja en la no equivalencia de las fórmulas que los representan.

Ejemplo 3.11 Representar el razonamiento siguiente, en el lenguaje de la lógica proposicional:

"Si es verdad que si llueve entonces los estudiantes se acuestan, entonces no estudian. Si los estudiantes aprueban el examen entonces, o estudian o el examen es trivial. Pero si el examen es trivial, entonces los estudiantes son flojos. Y es un hecho que los estudiantes aprueban el examen y no son flojos. En consecuencia, llueve y los estudiantes no se acuestan".

Solución: Inicialmente utilizamos átomos para simbolizar las proposiciones atómicas involucradas en el razonamiento. Al hacerlo deben tenerse en cuenta estos aspectos:

Primero: La fórmula que represente una proposición negativa debe empezar efectivamente con el símbolo \neg . Por ejemplo, debemos representar el enunciado "Juan no sabe alemán", en la forma $\neg p$, donde p representa la proposición atómica "Juan sabe alemán".

Segundo: La proposición representada por un átomo debe enunciarse completamente. Esto significa, por ejemplo, que para representar el enunciado "Juan sabe inglés y alemán" debemos escribir $p = \text{Juan sabe inglés}$, $q = \text{Juan sabe alemán}$, y no $p = \text{Juan sabe inglés}$, $q = \text{alemán}$.

Sobre la base de lo anterior, representaremos las proposiciones atómicas del ejemplo 3.11 así:

p : Llueve.

q : Los estudiantes se acuestan.

r : Los estudiantes estudian.

s : Los estudiantes aprueban el examen.

t : El examen es trivial.

v : Los estudiantes son flojos.

Ahora representaremos simbólicamente cada premisa y la conclusión, utilizando los paréntesis para reflejar adecuadamente sus significados:

P_1 Si es verdad que si llueve entonces los estudiantes se acuestan, entonces no estudian: $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg r$

P_2 Si los estudiantes aprueban el examen entonces, o estudian o el examen es trivial: $s \Rightarrow (r \vee t)$

P_3 Si el examen es trivial, entonces los estudiantes son flojos: $t \Rightarrow v$

P_4 Es un hecho que los estudiantes aprueban el examen y no son flojos: $s \wedge \neg v$

C . Llueve y los estudiantes no se acuestan: $p \wedge \neg q$

Finalmente, el argumento se representa por un condicional que tiene como antecedente la conjunción de las premisas y como consecuente la conclusión. Esta fórmula debe incluir adecuadamente los paréntesis como signos de puntuación, para delimitar las premisas y la conclusión:

$$\{[(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg r] \wedge [s \Rightarrow (r \vee t)] \wedge (t \Rightarrow v) \wedge (s \wedge \neg v)\} \Rightarrow (p \wedge \neg q)$$

3.6 CONECTIVOS LÓGICOS Y TABLAS DE VERDAD

Supongamos que la fórmula $p \wedge q$ representa la afirmación “2 es un número primo y sin embargo es par”. Esta afirmación es verdadera, porque “2 es un número primo” es una proposición verdadera y “2 es un número par” también lo es. Dado que $p \wedge q$ es la fórmula que representa tal afirmación, tiene sentido decir que en este caso la fórmula $p \wedge q$ es verdadera. En forma similar, como la afirmación “Roma es la capital de Grecia o de Noruega” es falsa, entonces, si $p \vee q$ es la fórmula que la representa, tiene sentido decir que $p \vee q$ es falsa.

3.6.1 Valores de verdad de un átomo

Supongamos que p es un átomo. Como p puede representar proposiciones verdaderas o proposiciones falsas, decimos que p puede tener dos valores de verdad, V y F , lo cual denotamos como $v(p)=V$ y $v(p)=F$. Los símbolos V y F , que se interpretan como “verdadero” y “falso” respectivamente, reciben el nombre de constantes lógicas. Como vimos en la sección 3.2, hacen parte del alfabeto \mathbf{P} de la lógica proposicional.

3.6.2 Valor de verdad de una FBF

Una vez definido el valor de verdad de un átomo, ampliamos la definición al valor de verdad de una fórmula bien formada E . Para esto utilizaremos las diferentes formas de obtener FBF, establecidas en la definición 3.1 según la cual una FBF es un átomo o es la negación de una FBF, $\neg A$, o es de la forma $(A*B)$ donde A y B son FBFs y $*$ es un conector binario. Definimos los valores de verdad de E , en la forma siguiente:

1. $v(p) = V$ o $v(p) = F$ según el átomo p represente una proposición verdadera o falsa, respectivamente.
2. $v(\neg A) = F$ si $v(A) = V$ y $v(\neg A) = V$, si $v(A) = F$.
3. $v(A \wedge B) = V$, si $v(A) = v(B) = V$; $v(A \wedge B) = F$, en cualquiera otro caso.
4. $v(A \vee B) = F$, si $v(A) = v(B) = F$; $v(A \vee B) = V$, en cualquiera otro caso.
5. $v(A \Rightarrow B) = F$ si $v(A) = V$ y $v(B) = F$; $v(A \Rightarrow B) = V$, en cualquiera otro caso.
6. $v(A \Leftrightarrow B) = V$ si y sólo si $v(A) = v(B)$.

Con la posible excepción del condicional en la línea 5, los valores definidos en la lista anterior reflejan el uso y significado de los conectivos, estudiados en la sección 3.4. Por ejemplo, sobre la base del significado de la conjunción “y” es natural, como se

hace en la línea 3, asignar a $A \wedge B$ el valor V si (y sólo si) ambas fórmulas tienen el valor V. Este hecho se expresa usualmente como “La conjunción $A \wedge B$ es verdadera si y sólo si A y B son verdaderas”. Esto, porque las constantes V y F se han escogido teniendo presentes los significados de “verdadero” y “falso” respectivamente. De igual manera, es natural asignar los valores de verdad para $\neg A$ y para $A \vee B$ como aparecen en las líneas 2 y 4. Sin embargo, el lector puede preguntarse: ¿con qué criterio se han asignado los valores de verdad para el condicional como aparecen en la línea 5? ¿Por qué cuando el antecedente es falso el condicional tiene valor verdadero? En la sección 3.7 proponemos respuestas para estas preguntas.

Los valores de verdad para las proposiciones compuestas definidos anteriormente se recogen en la Tabla 3.2, para el caso en que A y B son átomos. Observe que las dos primeras columnas contienen las 4 posibles combinaciones de valores de verdad de los átomos p y q, que intervienen en las fórmulas. En forma de lista ordenada donde el primer elemento es el valor de verdad de p y el segundo es el de q, estas 4 combinaciones son: V–V, V–F, F–V y F–F. La tabla se construye escribiendo en cada casilla el valor de verdad del átomo o de la fórmula A que encabeza la columna correspondiente. Cada columna es la “tabla de verdad” del conectivo que la encabeza. Por ejemplo, la columna 3 es la tabla de verdad de la negación; la columna 4 es la tabla de verdad de la conjunción, etc. Usted debe memorizar esta tabla, para usos futuros.

Tabla 3.2 Las tablas de verdad de los conectivos proposicionales						
p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V
1	2	3	4	5	6	7

Definición 3.12 Dada una fórmula A en el lenguaje $L(P)$ de la lógica proposicional, una **interpretación** para A es cualquiera de las posibles asignaciones de valores de verdad a los átomos que aparecen en A. Por ejemplo, si A es la fórmula $A = (p \Rightarrow q) \wedge (\neg q \vee r)$, una posible interpretación es un caso en el que p represente una proposición verdadera, q una proposición falsa y r una proposición verdadera. Claro que lo usual en este caso sería decir: “p es verdadera, q falsa y r verdadera”. En notación de terna ordenada en el orden de aparición p–q–r, denotaríamos esta interpretación en la forma V–F–V.

Ejercicio 3.13 Establecer el número de interpretaciones posibles para una fórmula que contiene 3 átomos (como la fórmula anterior, $A = (p \Rightarrow q) \wedge (\neg q \vee r)$) y, en general, para una fórmula que tiene n átomos.

Solución: El número de interpretaciones está dado por el total de combinaciones posibles de valores V y F, para los tres átomos p , q y r que intervienen en la fórmula. Como cada átomo puede tomar dos valores, el total de combinaciones coincide con el número de ternas $x-y-z$, donde cada variable puede tomar uno de los valores V o F. Este número es 2^3 , es decir, una FBF que tiene tres átomos tiene 8 interpretaciones posibles. Una de estas es $v(p) = V$, $v(q) = V$ y $v(r) = V$, que denotamos como V-V-V. Otra es $v(p) = V$, $v(q) = F$ y $v(r) = V$, que denotamos como V-F-V, etc. Los resultados, 2^2 interpretaciones para una fórmula de 2 átomos y 2^3 interpretaciones para una de 3 átomos, se generalizan a una fórmula de n átomos: **el número de interpretaciones posibles para una fórmula que tiene n átomos está dado por 2^n .**

Observación 3.14 Las 2^n interpretaciones para una fórmula de n átomos deben escribirse en un orden preestablecido para no perder tiempo tratando de establecer cuál o cuáles quedan por escribir, cuando el número es alto y se escriben sin seguir un orden prefijado. En este libro se escribirán siempre así: al primer átomo se le asignan la mitad de 2^n valores V e igual número de valores F. Para el caso de $2^3 = 8$, al primer átomo se le asignan “4 verdaderos y 4 falsos”, como se ve en la primera columna de la tabla 3.3. Al segundo “2 verdaderos y 2 falsos, y otra vez 2 verdaderos y dos falsos” como en la segunda columna de la misma tabla. Finalmente, al tercer átomo se le asignan “uno verdadero, uno falso, uno verdadero, uno falso, hasta la última fila de la tabla”. Este es el proceso a seguir en general, aun cuando en ningún caso construiremos aquí tablas de verdad para $n > 4$.

Ejemplo 3.15 Determinaremos el valor de verdad de la fórmula $C = (p \Rightarrow r) \wedge (\neg q \vee r)$, para dos de sus 8 interpretaciones posibles: $I_1 = V-V-F$ e $I_2 = F-F-V$.

Los paréntesis en $C = (p \Rightarrow r) \wedge (\neg q \vee r)$, muestran que C es de la forma $C = A \wedge B$, con $A: (p \Rightarrow r)$ y $B: (\neg q \vee r)$. Entonces, $v(C)$ depende de $v(A)$ y $v(B)$. Por esto, debemos calcular los valores de verdad de $p \Rightarrow r$ y $\neg q \vee r$ para estas interpretaciones, según lo establecido en la tabla 3.2. Para la interpretación V-V-F, $v(p \Rightarrow r)$ se transforma en $v(V \Rightarrow F)$ y, de la tabla 3.2, $v(V \Rightarrow F) = F$. Análogamente, $v(\neg q \vee r)$ equivale a $v(\neg V \vee F)$ que es $v(F \vee F) = F$. Finalmente, $v((p \Rightarrow r) \wedge (\neg q \vee r))$ es $v(F \wedge F) = F$. Este es el valor de verdad de C , para I_1 .

Análogamente, para la interpretación $I_2 = F-F-V$ es decir, $v(p) = F$, $v(q) = F$ y $v(r) = V$, se obtiene $v(p \Rightarrow r) = V$, y $v(\neg q \vee r) = V$. En consecuencia, $v(C) = V$ para esta interpretación.

Observación 3.16 Cuando interesa establecer el valor de verdad para una interpretación en particular se escriben, en una línea 1 directamente debajo de los átomos —y de sus

negaciones si aparecen en la fórmula— sus valores de verdad. A continuación, y de acuerdo con la sintaxis de la fórmula, se van determinando los valores de verdad de las subfórmulas en nuevas líneas. El proceso termina cuando se tiene el valor de verdad de la fórmula completa. Como ilustración, encontraremos el valor de verdad de la fórmula anterior para la otra interpretación propuesta, $I_2 = F-V-F$.

	$(p \Rightarrow q) \wedge (\neg q \vee r)$			
línea 1	F	V	V	F
línea 2	<u>V</u>		F	F
línea 3				<u>F</u>
línea 4	F			

Una tabla que muestra el valor de verdad de una fórmula para todas sus interpretaciones posibles, se llama tabla de verdad de la fórmula. Se construye listando las 2^n interpretaciones posibles, donde n es el número de átomos en la fórmula. Luego se procede a establecer los valores de verdad de las subfórmulas, hasta obtener la evaluación de la fórmula completa. Como ejemplo, se muestra la tabla de verdad 3.3 de la fórmula A: $\{[p \Rightarrow (q \vee r)] \wedge (p \wedge \neg q)\} \Rightarrow r$.

Tabla 3.3 Tabla de verdad de la fórmula $\{[p \Rightarrow (q \vee r)] \wedge (p \wedge \neg q)\} \Rightarrow r$								
p	q	r	$\neg q$	$q \vee r$	$p \Rightarrow (q \vee r)$	$p \wedge \neg q$	$(p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge (p \wedge \neg q)$	$\{[p \Rightarrow (q \vee r)] \wedge (p \wedge \neg q)\} \Rightarrow r$
V	V	V	F	V	V	F	F	V
V	V	F	F	V	V	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	F	F	V
F	F	F	V	F	V	F	F	V

Observe que las $2^3 = 8$ interpretaciones se han dispuesto, conforme a lo establecido en la observación 3.14, como se ve en las tres primeras columnas. Observe, además, algo notorio en esta tabla: la última columna de la derecha muestra que el valor de verdad de esta fórmula es V, **para todas sus interpretaciones posibles**. Las fórmulas que tienen esta propiedad, llamadas **tautologías**, son las más importantes en las aplicaciones de la lógica simbólica al estudio de validez de razonamientos, como veremos oportunamente.

3.6.3 Clasificación de las FBF según sus valores de verdad.

1. Una interpretación para la cual una fórmula dada es verdadera es un **modelo** para la fórmula. Por ejemplo, $v(p) = F$ y $v(q) = V$ es un modelo para la fórmula $\neg p \wedge q$. Sin embargo, no lo es para $q \Rightarrow p$ porque si el antecedente es verdadero y el consecuente falso, el condicional es falso.
2. Una fórmula A es **satisfacible** si y sólo si existe alguna interpretación que la hace verdadera, es decir, si y sólo si tiene algún modelo. Por ejemplo, la fórmula $A: \neg p \wedge q$, es satisfacible porque la interpretación $v(p) = F$ y $v(q) = V$ la hace verdadera.
3. Una fórmula es una **tautología**, si y sólo si es verdadera para todas sus interpretaciones. Por ejemplo, la fórmula $\{[p \Rightarrow (q \vee r)] \wedge (p \wedge \neg q)] \Rightarrow r$ de la tabla 3.3 es una tautología. También es una tautología la fórmula $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$, conocida con el nombre *Modus ponens* (ver sección 2.5.4). La notación $\models A$ se usa para indicar que A es una tautología.

Observación 3.17 Con lamentable frecuencia algunos estudiantes de lógica “definen” tautología como “una fórmula que tiene todas sus interpretaciones verdaderas”. Esto es consecuencia de una lectura no crítica: no tiene sentido hablar de “interpretaciones verdaderas”; las interpretaciones son asignaciones de valores de verdad a los diferentes átomos que intervienen en una fórmula y, por lo tanto, no son ni verdaderas ni falsas, sino que producen valores V o F para dicha fórmula.

4. Una **contradicción** o fórmula **insatisfacible** es una fórmula que resulta falsa para todas sus interpretaciones. Por ejemplo, si A es una FBF, la conjunción $A \wedge \neg A$ es una contradicción dado que A no puede ser simultáneamente verdadera y falsa.

Finalmente:

5. Una FBF es una **contingencia** si es verdadera para alguna interpretación, pero es falsa para otras. Es el caso de $p \Rightarrow (q \wedge r)$ que es verdadera para la interpretación $F-V-F$, por ejemplo, y es falsa para la interpretación $V-V-F$.

3.7 FÓRMULAS LÓGICAMENTE EQUIVALENTES

Consideremos los enunciados siguientes:

- A. Juan desayuna con tostadas, y café o chocolate: $p \wedge (q \vee r)$.
- B. Juan desayuna con tostadas y café, o con tostadas y chocolate: $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

En A se afirma que Juan desayuna con tostadas, acompañadas de café o chocolate, (¿“o” exclusivo?, ¿inclusivo?). Entonces, el desayuno de Juan es tostadas y café,

o tostadas y chocolate, precisamente lo que se afirma en el enunciado B. Uno dice que A y B son enunciados equivalentes para indicar que tienen idéntico significado. Examinemos ahora las tablas de verdad de las fórmulas, $A = p \wedge (q \vee r)$ y $B = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, que representan los enunciados A y B respectivamente. Como se ve en las columnas 5 y 8 de la tabla 3.4, las tablas de verdad de estas dos fórmulas son iguales. Esto sugiere que podemos formalizar el concepto de equivalencia, mediante valores de verdad.

Tabla 3.4 Dos proposiciones lógicamente equivalentes

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q)$	$(p \wedge r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F
1	2	3	4	5	6	7	8

Definición 3.18 Dos fórmulas A y B son **lógicamente equivalentes** (o equivalentes) si y sólo si tienen el mismo valor de verdad para cada posible interpretación común.

Para denotar que A y B son lógicamente equivalentes escribiremos $A \equiv B$ o $B \equiv A$. Estas expresiones se leen como “A es equivalente a B” y “B es equivalente a A”, respectivamente. Tenga presente que el símbolo \equiv no es un conectivo lógico, no hace parte del alfabeto \mathcal{P} , sino que es un nuevo símbolo usado para indicar que las dos fórmulas que separa tienen las mismas tablas de verdad, esto es, que si una de ellas es verdadera (falsa) la otra es verdadera (falsa).

El resultado siguiente expresa una importante relación entre el bicondicional y la equivalencia lógica:

Teorema 3.19 Dos fórmulas A y B son lógicamente equivalentes si y sólo si la fórmula $A \Leftrightarrow B$ es una tautología.

Demostración: El teorema establece una condición suficiente y necesaria para la equivalencia de FBF. Por lo tanto (ver sección 3.4.7.2) debemos construir argumentos que demuestren la validez de dos afirmaciones:

1. Si A y B son lógicamente equivalentes, entonces la fórmula $A \Leftrightarrow B$ es una tautología.

2. Si la fórmula $A \Leftrightarrow B$ es una tautología, entonces A y B son lógicamente equivalentes.

Demostración de 1: Supongamos que A y B son lógicamente equivalentes. Mostraremos que $A \Leftrightarrow B$ tiene el valor V en todas sus interpretaciones. En efecto: si para alguna interpretación $v(A) = V$, entonces para esa interpretación $v(B) = V$ porque la hipótesis establece que A y B son lógicamente equivalentes. Por lo tanto $v(A \Leftrightarrow B)$ es $v(V \Leftrightarrow V)$, es decir, $v(A \Leftrightarrow B) = V$. Igualmente, si $v(A) = F$ para una interpretación, también $v(B) = F$ y se sigue que $v(A \Leftrightarrow B) = V$. Esto muestra que para todas las interpretaciones comunes de A y B , $v(A \Leftrightarrow B) = V$. En consecuencia, la fórmula $A \Leftrightarrow B$ es una tautología, como lo afirma el teorema.

Demostración de 2: Supongamos ahora que la fórmula $A \Leftrightarrow B$ es una tautología. Entonces, para cada interpretación común de las fórmulas A y B , $v(A \Leftrightarrow B) = V$. Esto significa que A y B tienen el mismo valor de verdad para cada interpretación común y, por lo tanto, $A \equiv B$, como lo asegura el teorema.

La tabla 3.5 muestra, en las columnas 5 y 6, la equivalencia entre las fórmulas $p \Rightarrow q$ y su contrarrecíproca o contrapositiva $\neg q \Rightarrow \neg p$. Esta equivalencia tiene un significado muy claro en términos de suficiencia y necesidad para el caso de implicaciones formales: si p es suficiente para q (columna 5), entonces q es necesario para p ; es decir, si no se da q , entonces no se puede dar p (columna 6). Por ejemplo, la afirmación: “si un triángulo es equilátero, entonces (el triángulo) tiene sus lados iguales” es equivalente a su afirmación contrarrecíproca: “si un triángulo no tiene sus tres lados iguales, entonces (el triángulo) no es equilátero”.

La columna 7 muestra, de conformidad con el teorema anterior, que el bicondicional $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ es una tautología.

Tabla 3.5 La equivalencia lógica $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$						
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V
1	2	3	4	5	6	7

Ahora el lector está en condiciones de responder estas preguntas:

1. ¿Qué se requiere para probar que dos fórmulas dadas no son lógicamente equivalentes?

2. Si, dadas dos fórmulas A y B , usted encuentra que $v(A)=v(B)$ para alguna interpretación, ¿puede concluir que son lógicamente equivalentes?
3. Dadas dos fórmulas A y B , usted encuentra que sus valores difieren por lo menos para una interpretación. ¿Qué puede concluir?

Ejercicio 3.20 Muestre que la fórmula $A = \neg(p \vee q)$ es equivalente a una de las fórmulas $B = \neg p \vee \neg q$ y $C = \neg p \wedge \neg q$. Según la fórmula encontrada, ¿cómo se niega la conjunción de dos proposiciones? ¿Cuál es la negación de “Juan está en el cine o en el estadio”? ¿Cuál es la forma correcta de negar la afirmación “Juanita es novia de Pedro o de Juan”?

Ejercicio 3.21 Muestre que la fórmula $A = \neg(p \wedge q)$ es equivalente con alguna de las fórmulas $B = \neg p \wedge \neg q$ o $C = \neg p \vee \neg q$. Entonces, ¿cómo se niega la conjunción de dos proposiciones? ¿Cuál es la forma correcta de negar la afirmación “Juana sabe inglés y francés”? ¿Puede afirmarse que la negación del enunciado anterior es equivalente a “Juana sabe inglés pero no francés, o Juana sabe francés pero no inglés”?

(Recuerde que ahora usted cuenta con definiciones y criterios formales para responder en forma correcta preguntas como las anteriores)

Definición 3.22 El condicional “si q , entonces p ”, es el recíproco del condicional “si p , entonces q ”.

De acuerdo con esta definición, el recíproco de “si m es divisor de n y de s , entonces m es divisor de la suma $n + s$ ”, es el condicional “si m es divisor de la suma $n + s$, entonces m es divisor de n y de s ”; el recíproco de “si una palabra es aguda, entonces tiene acento en la última sílaba” es “si una palabra tiene acento en la última sílaba entonces es aguda”. El primero de estos ejemplos muestra que el recíproco de un condicional verdadero puede ser falso (muéstrelo con un contraejemplo); el segundo, que el recíproco de un condicional verdadero puede ser verdadero. Por esta razón es una práctica conveniente, ante un condicional verdadero, indagar por el carácter de verdad de su recíproco.

Definición 3.23 La fórmula $B \Rightarrow A$ es el recíproco de la fórmula $A \Rightarrow B$.

Ejercicio 3.24 Muestre que $A \Rightarrow B$ y su recíproco $B \Rightarrow A$ no son lógicamente equivalentes. Relacione este hecho con los ejemplos que acompañan a la definición 3.22.

Ejercicio 3.25 Muestre que las fórmulas $A \Rightarrow B$ y $\neg A \vee B$, son lógicamente equivalentes.

Observación 3.26 También la equivalencia anterior se corresponde con la igualdad de significados en expresiones del lenguaje natural. La lista siguiente presenta algunos ejemplos; a la izquierda en forma de condicional $A \Rightarrow B$, y a la derecha el enunciado equivalente en la forma $\neg A \vee B$ (o $B \vee \neg A$, según el caso).

1. Si miente, entonces no podré creerle nunca más.
No mienta, o no podré creerle nunca más.
2. Si llega tarde, (entonces) perderá el cupo.
No llegue tarde, o perderá el cupo.
3. Si es médico, (entonces) sabe primeros auxilios. Sabe primeros auxilios, o no es médico.

La equivalencia del ejercicio 3.25 da respuesta a las preguntas que se formularon en la sección 3.6.2 sobre la asignación de valores al condicional: sus valores se han escogido para que coincidan con los valores de la fórmula $\neg p \vee q$. De alguna manera, podríamos decir que $p \Rightarrow q$ es, “por definición”, equivalente a $\neg p \vee q$.

$$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

(3.3)

3.8 EQUIVALENCIAS Y CÁLCULO PROPOSICIONAL

Una aplicación importante de la equivalencia lógica es la simplificación o manipulación de fórmulas, sin alterar su valor de verdad. Esto, porque la aplicación de cada equivalencia sustituye la fórmula a la cual se aplica, por otra lógicamente equivalente. Por ejemplo, aplicando algunas equivalencias de la tabla 3.6 puede mostrarse que la fórmula $[(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge \{\neg(\neg p \wedge q)\}]$ es lógicamente equivalente al átomo p , es decir, que $[(p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge \{\neg(\neg p \wedge q)\}] \equiv p$. El proceso de simplificación de FBFs es tan similar al de simplificación algebraica que usted conoce, que a veces se le llama “método algebraico” y es importante no sólo porque produce fórmulas más sencillas, pero con igual significado, sino porque genera habilidades en otra clase de cálculos, con el consiguiente beneficio en la capacidad para manipular símbolos no numéricos. En su momento mostraremos ejemplos de reducción de tautologías para mostrar algebraicamente que ellas son lógicamente equivalentes con V . Esta equivalencia es razonable pues, como se ha reiterado, son fórmulas verdaderas, independientemente de la interpretación particular y esto explica la eliminación de todos los átomos que figuran en la fórmula original.

En la tabla 3.6 se presentan las equivalencias más importantes para nuestros propósitos. Usted debe aprenderlas con su nombre y significado. Para esto es conveniente que idee términos propios para enunciar cada ley en forma tan descriptiva como le sea posible. Por ejemplo, la ley del tercio excluido $A \vee \neg A \equiv V$ podría describirse como “una fórmula es verdadera o es falsa y no hay una tercera alternativa, es decir, queda excluida cualquiera otra posibilidad”; la ley de dominación $V \vee A \equiv V$, como “cuando uno de los miembros de una disyunción es verdadero, la disyunción también lo es

independientemente del otro”, o, alternatively “verdadero o algo, es verdadero”, como a veces lo aprenden los estudiantes, etc. Por otra parte, conviene pensar que los símbolos V y F, de mucha utilidad en el proceso de simplificación, son formas simplificadas de denotar una tautología y una contradicción, respectivamente. Las dos leyes conmutativas encabezan la lista de equivalencias, con el propósito de no incluir en la tabla equivalencias derivadas por conmutatividad. Por ejemplo, la ley 2 —tercio excluido— se ha expresado como $A \vee \neg A \equiv V$ y la conmutatividad del operador \vee permite saber que puede expresarse también como $\neg A \vee A \equiv V$.

Observe que, con pocas excepciones, las equivalencias de la tabla 3.6 se han agrupado en parejas. Cada fórmula de la pareja se llama el dual de la otra. Por ejemplo, el dual de $A \vee \neg A \equiv V$ es $A \wedge \neg A \equiv F$. El dual de una fórmula A es la fórmula que se obtiene sustituyendo en ella cada aparición del conectivo \wedge por el conectivo \vee ; cada aparición del conectivo \vee por el conectivo \wedge ; cada aparición de la constante V, por F y cada aparición de la constante F por V. Por ejemplo, el dual de $p \vee (q \wedge (r \vee V))$ es $p \wedge (q \vee (r \wedge F))$. Este hecho debe facilitar al lector el aprendizaje de las equivalencias, pues es suficiente aprender una equivalencia de la pareja; la otra se construye por dualidad.

Tabla 3.6 Algunas equivalencias	
Leyes	Nombre
1. $A \vee B \equiv B \vee A$ 1'. $A \wedge B \equiv B \wedge A$	Leyes conmutativas
2. $A \vee \neg A \equiv V$ 2'. $A \wedge \neg A \equiv F$	Ley del tercio excluido Ley de contradicción
3. $A \vee F \equiv A$ 3'. $A \wedge V \equiv A$	Leyes de identidad
4. $A \vee V \equiv V$ 4'. $A \wedge F \equiv F$	Leyes de dominación
5. $A \vee A \equiv A$ 5'. $A \wedge A \equiv A$	Leyes de idempotencia
6. $\neg(\neg A) \equiv A$	Ley de doble negación
7. $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ 7'. $(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$	Leyes asociativas
8. $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \equiv A \vee (B \wedge C)$ 8'. $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \equiv A \wedge (B \vee C)$	Leyes distributivas
9. $(A \Rightarrow B) \equiv (\neg B \Rightarrow \neg A)$	Ley de trasposición o de la contrarrecíproca
10. $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \equiv (A \wedge B) \Rightarrow C$	Ley de la deducción
11. $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$ 11'. $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$	Leyes de De Morgan
12. $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$	Def. de condicional

Ejemplo 3.27 Muestre que $(p \vee \neg p) \wedge q$ puede reducirse a q , es decir, $(p \vee \neg p) \wedge q \equiv q$.

1. $(p \vee \neg p) \wedge q \equiv V \wedge q$ (Por la ley del tercio excluido).
Se reemplaza $p \vee \neg p$ por su equivalente V .
2. $V \wedge q \equiv q$ (Por la ley de identidad para la conjunción)

Ejercicio 3.28 Establecer la equivalencia siguiente, transformando la fórmula de la izquierda en la de la derecha, mediante el uso de equivalencias conocidas (Método algebraico) $((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \wedge (\neg(\neg p \wedge q)) \equiv p$

1. $((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \wedge (\neg(\neg p \wedge q)) \equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q)$
L. de De Morgan.
2. $\equiv ((p \vee q) \wedge (p \vee r)) \wedge (p \vee \neg q)$
L. doble negación.
3. $\equiv (p \vee (q \wedge r)) \wedge (p \vee \neg q)$
L. distributiva.
4. $\equiv p \vee ((q \wedge r) \wedge \neg q)$
L. distributiva.
5. $\equiv p \vee ((q \wedge \neg q) \wedge r)$
L. conmutativa + L. asociativa
6. $\equiv p \vee (F \wedge r)$
L. de contradicción.
7. $\equiv p \vee F$
L. de dominación.
8. $\equiv p$
L. de identidad.

3.9 CONSECUENCIA LÓGICA

Nos proponemos ahora formalizar la noción de “consecuencia lógica”, en el marco de la lógica simbólica. Naturalmente, esta formalización debe reflejar el uso cotidiano del concepto, según el cual B es consecuencia lógica de A cuando la ocurrencia de A ocasiona necesariamente la ocurrencia de B .

Ejemplo 3.29 Consideremos el texto siguiente:

“Todos los miércoles la universidad presenta un grupo de cuenteros o un grupo musical. Además, no se hace una presentación de la misma clase de grupos en dos miércoles seguidos. Hoy es miércoles, y el pasado miércoles se presentó un grupo musical”.

Uno deduce como “consecuencia lógica” de estos hechos (premisas), que “la universidad presenta hoy un grupo de cuenteros” ¿Está de acuerdo?

Dado que en el dominio de la lógica simbólica los hechos se representan por medio de fórmulas, su validez simultánea por medio de conjunciones, y la causalidad por medio de condicionales, es natural que la noción formal de consecuencia lógica se dé en función de estos elementos.

Definición 3.30 Supongamos que P_1, P_2, \dots, P_t y Q son fórmulas bien formadas. Se dice que Q es consecuencia lógica de P_1, P_2, \dots, P_t si y solamente si el condicional $(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_t) \Rightarrow Q$ es una tautología.

Para indicar que Q es consecuencia lógica de P_1, P_2, \dots, P_t se utiliza la notación $\{P_1, P_2, \dots, P_t\} \vdash Q$. Veamos cómo se aplica esta definición al ejemplo 3.29:

Para empezar, se representan simbólicamente las proposiciones atómicas contenidas en las premisas:

p : Es miércoles

q : La universidad presenta hoy un grupo de cuenteros.

r : La universidad presenta hoy un grupo musical.

s : El miércoles pasado la universidad presentó un grupo de cuenteros.

t : El miércoles pasado la universidad presentó un grupo musical.

Con base en lo anterior, se representan las premisas en símbolos de la lógica proposicional:

$$P_1 \quad p \Rightarrow (q \vee r)$$

$$P_2 \quad s \Rightarrow \neg q$$

$$P_3 \quad t \Rightarrow \neg r$$

$$P_4 \quad p \wedge t$$

En el ejemplo se afirmó que de este grupo de premisas se deduce como consecuencia lógica que “La universidad presenta hoy un grupo de cuenteros”. Esto, de acuerdo con la definición 3.30, es cierto si y sólo si el condicional $((P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4) \Rightarrow q)$ es una tautología, es decir, si y sólo si la fórmula A siguiente es una tautología:

$$A: [(p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge (s \Rightarrow \neg q) \wedge (t \Rightarrow \neg r) \wedge (p \wedge t)] \Rightarrow q$$

Es posible establecer que A es una tautología, sin necesidad de hacer la tabla de verdad completa con sus 32 interpretaciones. En efecto, es suficiente considerar las interpretaciones en las cuales cada premisa tiene valor V, porque si alguna tiene valor

F, entonces el valor del antecedente es F (recuerde que es una conjunción) y en tal caso $v(A)=V$. Por esto se supone que $v(P_i)=V$ para cada premisa P_i y se procede a calcular el valor de verdad del consecuente. Si este es V, la fórmula es una tautología.

En la primera línea del arreglo siguiente hemos asignado el valor V al conectivo principal de cada premisa, para indicar que ella es verdadera. El subíndice 1 indica que esta ha sido la primera asignación de valores de verdad; además, usamos el mismo subíndice en cada premisa para indicar que la asignación ha sido simultánea.

$$\begin{array}{ccccccc} [(p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge (s \Rightarrow \neg q) \wedge (t \Rightarrow \neg r) \wedge (p \wedge t)] \Rightarrow q \\ V_1 & & V_1 & & V_1 & & V_1 \end{array}$$

A continuación, procuramos establecer qué valores deben tener las subfórmulas de cada premisa, para que ella tenga el valor V asignado. Recuerde que si se trata de un condicional $A \Rightarrow B$, hay para ello tres interpretaciones posibles: V-V, F-V y F-F. Entonces, considerar cada posibilidad, para cada condicional, haría el proceso tal vez más complicado que elaborar la tabla completa. Por esta razón continuamos el proceso de asignación de valores con la conjunción $(p \wedge t)$ que presenta una sola opción. En efecto, $v(p \wedge t) = V$ si y sólo si $v(p) = V$ y $v(t) = V$. Esta inferencia se agrega al paso anterior, como se ve a continuación. El subíndice 2 indica que esta ha sido la segunda inferencia en el proceso.

$$\begin{array}{ccccccc} [(p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge (s \Rightarrow \neg q) \wedge (t \Rightarrow \neg r) \wedge (p \wedge t)] \Rightarrow q \\ V_1 & & V_1 & & V_1 & & V_2 V_1 V_2 \end{array}$$

Seguidamente se trasladan los valores obtenidos de p y t a las fórmulas que los contienen, identificados con el subíndice 3 como se ve a continuación:

$$\begin{array}{ccccccc} [(p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge (s \Rightarrow \neg q) \wedge (t \Rightarrow \neg r) \wedge (p \wedge t)] \Rightarrow q \\ V_3 V_1 & & V_1 & & V_3 V_1 & & V_2 V_1 V_2 \end{array}$$

En el primero y en el tercer condicionales, de izquierda a derecha, se conocen el valor del condicional y el de su antecedente. En ambos casos se tiene "un condicional verdadero con antecedente verdadero", lo cual exige que el consecuente tenga el valor V. Estas inferencias se incorporan al desarrollo, indicadas con el subíndice 4. Tenga presente que en el condicional $t \Rightarrow \neg r$, la subfórmula que tiene valor V es $\neg r$. Por lo tanto V_4 va directamente bajo el símbolo \neg .

$$\begin{array}{ccccccc} [(p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge (s \Rightarrow \neg q) \wedge (t \Rightarrow \neg r) \wedge (p \wedge t)] \Rightarrow q \\ V_3 V_1 & V_4 & & V_1 & & V_3 V_1 V_4 & V_2 V_1 V_2 \end{array}$$

Al llegar a este punto, tenemos dos subfórmulas con valor conocido para continuar el análisis: $q \vee r$ y $\neg r$. Como $v(q \vee r) = V$ origina varias opciones, escogemos $v(\neg r) = V$, de

la cual se infiere, en quinto lugar, que $v(r) = F$. Trasladamos este resultado a r como F_6 en la disyunción $(q \vee r)$:

$$\begin{array}{ccccccc} [(p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge (s \Rightarrow \neg q) \wedge (t \Rightarrow \neg r) \wedge (p \wedge t)] \Rightarrow q \\ V_3 \quad V_1 \quad V_4 \quad F_6 \quad V_1 \quad V_3 \quad V_1 \quad V_4 \quad F_5 \quad V_2 \quad V_1 \quad V_2 \end{array}$$

Finalmente, de $v(q \vee r) = V$ pero $v(r) = F$, se concluye que $v(q) = V$, valor que registramos en la estructura anterior de valores de verdad como V_7 . Tenemos entonces:

$$\begin{array}{ccccccc} [(p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge (s \Rightarrow \neg q) \wedge (t \Rightarrow \neg r) \wedge (p \wedge t)] \Rightarrow q & (*) \\ V_3 \quad V_1 \quad V_7 \quad V_4 \quad F_6 & V_1 & V_3 \quad V_1 \quad V_4 \quad F_5 & V_2 \quad V_1 \quad V_2 & V_7 \end{array}$$

Hemos llegado así a la conclusión de que las interpretaciones que hacen verdadero el antecedente hacen necesariamente verdadero el consecuente q . Entonces el condicional es una tautología y, por lo tanto, q es consecuencia lógica del conjunto dado de premisas, es decir, $\{p \Rightarrow q \vee r, s \Rightarrow \neg q, t \Rightarrow \neg r, p \wedge t\} \models q$.

En la práctica, el proceso de asignación se hace en un solo renglón, que se verá finalmente como (*). Es indispensable indicar con subíndices el orden de las inferencias parciales para que, de ser necesario, usted mismo, o alguien que lee su trabajo, pueda reconstruir el proceso.

3.10 RAZONAMIENTO VÁLIDO

La noción formal de consecuencia lógica permite, a su vez, formalizar el concepto de razonamiento válido, en el sistema de la lógica proposicional.

Definición 3.31 Sea $R = (\{P_1, P_2, \dots, P_t\}, C)$ un razonamiento deductivo de premisas P_1, P_2, \dots, P_t y conclusión C . Este razonamiento R es válido si y sólo si C es consecuencia lógica de P_1, P_2, \dots, P_t

La definición anterior puede entonces expresarse así:

El razonamiento $R = (\{P_1, P_2, \dots, P_t\}, C)$ es válido si y sólo si $\{P_1, P_2, \dots, P_t\} \models C$

De acuerdo con esta definición, el procedimiento para decidir si un argumento deductivo es o no válido es el siguiente: Se representa el argumento en el lenguaje $L(P)$ de la lógica proposicional en la forma de un condicional $(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_t) \Rightarrow C$, donde las fórmulas P_1, \dots, P_t representan las premisas, y C la conclusión. Si este condicional es una tautología, el razonamiento deductivo es válido; si no lo es, el razonamiento es no válido. En este último caso es necesario mostrar una interpretación para la cual las premisas son verdaderas pero la conclusión es falsa. A tal interpretación se le llama un contraejemplo.

Ejercicio 3.32 Utilice el criterio de validez presentado en el párrafo anterior para mostrar que el razonamiento siguiente es válido (ejemplo 3.11).

“Si es verdad que si llueve entonces los estudiantes se acuestan, entonces no estudian. Si los estudiantes aprueban el examen, entonces, o estudian o el examen es trivial. Pero si el examen es trivial, entonces los estudiantes son flojos. Y es un hecho que los estudiantes aprueban el examen y no son flojos. En consecuencia, llueve y los estudiantes no se acuestan”.

El criterio de validez para razonamientos deductivos en $L(P)$ es un criterio correcto. Esto significa que cuando el criterio indica que un razonamiento deductivo es válido, efectivamente lo es. Sin embargo, es conveniente anotar que el disponer de este criterio no significa necesariamente eliminar de la práctica cotidiana el análisis informal. El criterio aquí expuesto es una herramienta útil cuando se exige un método formal de deducción o cuando la complejidad del argumento no permite mostrar informalmente que la conclusión es consecuencia lógica de las premisas.

3.11 REGLAS DE INFERENCIA. DEDUCCIÓN NATURAL

Si el condicional $(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \Rightarrow C$ que representa un razonamiento deductivo contiene n átomos o variables proposicionales, la tabla de verdad correspondiente tiene 2^n filas, una por cada interpretación. Aun cuando sólo requerimos considerar aquellas líneas en las cuales todas las premisas son verdaderas, en la práctica el número de interpretaciones que deben considerarse puede ser todavía muy alto. Una forma alternativa de establecer la validez de un argumento es usar el método de deducción natural, que consiste en deducir la conclusión a partir de las premisas, mediante el uso de un conjunto de reglas llamadas reglas de inferencia. Estas reglas son esquemas deductivos cuya validez aceptamos sin discusión y que se corresponden con estructuras simples de razonamiento válido identificadas como tales en la lógica clásica. Un ejemplo es la regla “*Modus ponens*”, denotada como $\{A \Rightarrow B, A\} \vdash B$. Se trata de una regla natural de deducción que aplicamos inconscientemente pero permanentemente: Si es un hecho que “cada vez que se da A , se tiene que dar B ” y es un hecho también que “se da A ”, entonces “debe darse B ”. Como puede verse, es una regla de aplicación espontánea y cotidiana: Si es miércoles, y si cuando es miércoles tengo clase de lógica, entonces “es natural” concluir que tengo clase de lógica.

Tan naturales como la anterior son las reglas de inferencia o deducción que se listan a continuación.

El lector debe aprender cada regla con el nombre correspondiente y estar en capacidad de identificarlas cuando las utilice en el proceso de determinar la validez de un razonamiento deductivo.

Las reglas de inferencia:

1. *Modus ponens* (MP): $\{A, A \Rightarrow B\} \vdash B$
2. *Modus tollens* (MT): $\{A \Rightarrow B, \neg B\} \vdash \neg A$
3. Silogismo hipotético (SH): $\{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C\} \vdash (A \Rightarrow C)$
4. Silogismo disyuntivo (SD): $\{A \vee B, \neg A\} \vdash B$
 $\{A \vee B, \neg B\} \vdash A$
5. Dilema constructivo (DC): $\{(A \Rightarrow B), (C \Rightarrow D), A \vee C\} \vdash (B \vee D)$
6. Simplificación (Sim.): $\{A \wedge B\} \vdash A$
 $\{A \wedge B\} \vdash B$
7. Conjunción (Con.): $\{A, B\} \vdash (A \wedge B)$
8. Adjunción (Adj.): $\{A\} \vdash (A \vee B)$
 $\{A\} \vdash (B \vee A)$

Como en el caso de las leyes de equivalencia, puede ser útil idearse formas de recordar el significado de las reglas, formas que pueden ser graciosas sin que ello signifique trivializar el tema bajo estudio. En particular, la *Modus ponens* podría describirse como “la regla del: si... sí, entonces sí”; la *Modus tollens* como “la regla del: “si... no, entonces no”; el Silogismo hipotético, como “soñar no cuesta nada”, etc.

Ejemplo 3.33 Para ilustrar el uso de la deducción natural, estableceremos por este método la validez del razonamiento considerado en el ejemplo 3.29:

“Todos los miércoles la universidad presenta un grupo de cuenteros o un grupo musical. Además, no se hace una presentación de la misma clase de grupos en dos miércoles seguidos. Hoy es miércoles, y el pasado miércoles se presentó un grupo musical. Por lo tanto, la universidad presenta hoy un grupo de cuenteros”.

Los símbolos que se utilizaron para representar las proposiciones atómicas fueron:

- p: Es miércoles.
- q: La universidad presenta hoy un grupo de cuenteros.
- r: La universidad presenta hoy un grupo musical.
- s: El miércoles pasado la universidad presentó un grupo de cuenteros.
- t: El miércoles pasado la universidad presentó un grupo musical.

Sobre la base de lo anterior, las premisas y la conclusión quedan representadas en esta forma:

$$P_1 \quad p \Rightarrow (q \vee r)$$

$$P_2 \quad s \Rightarrow \neg q$$

$$P_3 \quad t \Rightarrow \neg r$$

$$P_4 \quad p \wedge t$$

$$C. \quad q$$

Ahora utilizaremos deducción natural para derivar la conclusión. Las inferencias graduales constituyen nuevas premisas y se identifican como tales por el símbolo '. En cada línea se citan la regla de inferencia aplicada en ese momento del proceso y las premisas involucradas. El proceso termina cuando la línea derivada es justamente la conclusión del razonamiento.

$$P_1 \quad p \Rightarrow (q \vee r) \quad (\text{Premisa})$$

$$P_2 \quad s \Rightarrow \neg q \quad (\text{Premisa})$$

$$P_3 \quad t \Rightarrow \neg r \quad (\text{Premisa})$$

$$P_4 \quad p \wedge t \quad (\text{Premisa})$$

$$P_5' \quad t \quad (\text{Sim. 4}) \leftarrow \text{Indica que se utilizó la regla de Simplificación en la línea 4.}$$

$$P_6' \quad \neg r \quad (\text{MP 3, 5'}) \leftarrow \text{Indica que se utilizó } \textit{Modus ponens} \text{ entre las líneas 3 y 5.}$$

$$P_7' \quad p \quad (\text{Sim. 4})$$

$$P_8' \quad q \vee r \quad (\text{MP 1, 7'})$$

$$C. \quad q \quad (\text{SD 6', 8'}) \leftarrow \text{Silogismo disyuntivo entre las líneas 6 y 8.}$$

Ejemplo 3.34 Utilizar deducción natural para establecer la validez del razonamiento en el caso del ejemplo 3.11.

Las premisas y la conclusión del razonamiento fueron representadas de esta forma:

$$P_1 \quad (p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg r$$

$$P_2 \quad s \Rightarrow (r \vee t)$$

$$P_3 \quad t \Rightarrow v$$

$$P_4 \quad s \wedge \neg v$$

$$C. \quad p \wedge \neg q$$

Deducción:

P_1	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg r$	(Premisa)
P_2	$s \Rightarrow (r \vee t)$	(Premisa)
P_3	$t \Rightarrow v$	(Premisa)
P_4	$s \wedge \neg v$	(Premisa)
P_5'	s	(Sim 4)
P_6'	$\neg v$	(Sim 4)
P_7'	$r \vee t$	(MP 2, 5')
P_8'	$\neg t$	(MT 3, 6')
P_9'	r	(SD 7', 8')
P_{10}'	$\neg(\neg r)$	(DN 9') \leftarrow Doble negación en la línea 9.
P_{11}'	$\neg(p \Rightarrow q)$	(MT 1, 10')
P_{12}'	$\neg(\neg(p \wedge \neg q))$	(Def. Condicional)
C.	$p \wedge \neg q$	(DN 12')

Ejemplo 3.35 Utilice deducción natural para deducir que $\neg r$ es consecuencia lógica de este conjunto de premisas $\{p \Rightarrow \neg q, \neg p \Rightarrow (r \Rightarrow \neg q), (\neg s \vee \neg r) \Rightarrow \neg \neg q, \neg s\}$.

Solución: Que $\neg r$ sea consecuencia lógica del conjunto dado de premisas es equivalente a afirmar que el razonamiento siguiente es válido:

P_1	$p \Rightarrow \neg q$
P_2	$\neg p \Rightarrow (r \Rightarrow \neg q)$
P_3	$(\neg s \vee \neg r) \Rightarrow \neg \neg q$
P_4	$\neg s$
C.	$\neg r$

Deducción:

P_1	$p \Rightarrow \neg q$	(Premisa)
P_2	$\neg p \Rightarrow (r \Rightarrow \neg q)$	(Premisa)
P_3	$(\neg s \vee \neg r) \Rightarrow \neg \neg q$	(Premisa)
P_4	$\neg s$	(Premisa)
P_5'	$\neg s \vee \neg r$	(Adj, 4) \leftarrow Regla de adjunción en la línea 4.
P_6'	$\neg \neg q$	(MP 3, 5')
P_7'	$\neg p$	(MT 1, 6')
P_8'	$r \Rightarrow \neg q$	(MP 2, 7')
C.	$\neg r$	(MT 6', 8')

Para establecer la validez de un argumento se muestra que la conclusión es consecuencia lógica de las premisas. Esto requiere, o probar que la fórmula que lo representa es una tautología o, alternativamente, utilizar deducción natural para derivar la conclusión a partir de las premisas. Naturalmente, si el razonamiento es inválido, lo anterior no será posible. En tal este caso, debe mostrarse un contraejemplo, es decir, exhibir alguna interpretación para la cual todas las premisas son verdaderas y, sin embargo, la conclusión es falsa. Si usted asegura que un razonamiento no es válido, debe mostrar siempre un contraejemplo; no es suficiente decir que “no se puede llegar a la conclusión”.

Ejemplo 3.36 Decidir si el razonamiento representado a continuación es válido o es inválido:

$$P_1 \quad p \Rightarrow (q \vee r)$$

$$P_2 \quad q \Rightarrow (s \vee t)$$

$$P_3 \quad t \Rightarrow u$$

$$P_4 \quad \neg(u \vee s)$$

$$C. \quad \neg p$$

Razonemos de esta manera: Las tres primeras premisas son condicionales... pero un condicional nada nos asegura sobre la verdad del antecedente o del consecuente. Entonces, no podemos hacer ninguna inferencia a partir de ellas. Buscamos si hay una premisa formada por la disyunción de los antecedentes de un par de estos condicionales ($p \vee q$ o $p \vee t$ o $q \vee t$), con el fin de utilizar la regla de Dilema constructivo, pero no la hay. Se concluye así que no hay un proceso deductivo que pueda iniciarse con alguna de las tres primeras premisas y, por tanto, examinamos la posibilidad de iniciarlo con la cuarta premisa. Esta es equivalente a la conjunción $\neg u \wedge \neg s$, por una de las leyes de De Morgan, y de esta conjunción sí podemos hacer nuevas inferencias aplicando la regla de simplificación: A continuación se presenta el desarrollo obtenido a partir de esta única opción:

$$P_1 \quad p \Rightarrow (q \vee r)$$

$$P_2 \quad q \Rightarrow (s \vee t)$$

$$P_3 \quad t \Rightarrow u$$

$$P_4 \quad \neg(u \vee s)$$

$$P_5' \quad \neg u \wedge \neg s \quad (\text{Equivalencia con 4; ley de De Morgan})$$

$$P_6' \quad \neg u \quad (\text{Simplificación, en 5})$$

$$P_7' \quad \neg s \quad (\text{Simplificación, en 5})$$

$$P_8' \quad \neg t \quad (\text{Modus tollens, 6 y 3})$$

$$P_9' \quad \neg s \wedge \neg t \quad (\text{Conjunción 7 y 8})$$

$$P_{10}' \quad \neg(s \vee t) \quad (\text{Equivalencia con 9; ley de De Morgan})$$

$$P_{11}' \quad \neg q \quad (\text{Modus tollens, 2 y 10})$$

Hasta el momento se ha inferido $\neg q$, pero la conclusión del razonamiento es $\neg p$. Y como p figura solamente en P_1 , se concluye que tendríamos que deducir $\neg(q \vee r)$ para deducir posteriormente $\neg p$, por *Modus tollens*. Ahora bien: $\neg(q \vee r) \equiv \neg q \wedge \neg r$ y en P_{11}' tenemos $\neg q$. Entonces, requerimos $\neg r$. Sin embargo, nada permite deducir $\neg r$ porque ni aparece en otra premisa ni es una tautología. (A propósito, siempre que sea útil o necesario, se puede insertar una tautología entre las premisas originales o derivadas en un razonamiento. ¿Por qué?). Al llegar a este punto en el análisis es razonable conjeturar que el razonamiento es inválido. Para probarlo, debemos encontrar una interpretación para la cual todas las premisas son verdaderas y la conclusión falsa. Veamos: P_{11}' establece que $v(q) = F$. De manera que, tomando $v(r) = V$, se tiene $v(q \vee r) = V$, y con $v(p) = V$ se garantiza que la primera premisa, $p \Rightarrow (q \vee r)$, es verdadera. De esto se desprende que $v(\neg p) = F$, en contra de lo que afirma la conclusión. Finalmente, para la interpretación $v(p) = v(r) = V$, $v(q) = v(s) = v(t) = v(u) = F$, todas las premisas son verdaderas y la conclusión falsa. Este contraejemplo muestra que el razonamiento no es válido. Asegúrese de comprender el significado del proceso anterior: hemos mostrado que es posible tener proposiciones p, q, r, s, t, u con los valores encontrados, para las cuales todas las premisas son verdaderas pero la conclusión es falsa. Por analogía lógica, el razonamiento es falso, independientemente de cuál fuera el significado de las proposiciones atómicas que intervienen en él.

3.12 REGLA DE LA DEDUCCIÓN

En muchos casos la conclusión de un razonamiento es un condicional. Esto sucede con mucha frecuencia en los teoremas. Consideremos por ejemplo estos resultados:

R1. Sean a y b números reales positivos. Entonces si $a < b$, $a^2 < b^2$.

R2. Sean A, B y C conjuntos tales que $A \cap B = \emptyset$. Entonces, si $A \cup B = C$, $B = C - A$.

Por último, un ejemplo en el cual las premisas y la conclusión se representan como sigue:

$$P_1 \quad p \Rightarrow \neg q$$

$$P_2 \quad r \Rightarrow \neg q$$

$$P_3 \quad (s \vee t) \Rightarrow u$$

$$P_4 \quad (\neg p \wedge \neg r) \Rightarrow s$$

$$C. \quad q \Rightarrow u$$

En cada uno de los casos anteriores la argumentación debe establecer la verdad de un condicional $S \Rightarrow T$ a partir de un conjunto de premisas $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$. El esquema general de demostración hace uso de la Ley de deducción (Nro. 10 de la tabla 3.6) y se describe en el recuadro siguiente:

El proceso argumentativo para establecer la validez de un razonamiento en el cual la conclusión es un condicional, $((P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \Rightarrow (S \Rightarrow T))$, empieza por la aplicación de la Ley de deducción al esquema anterior, para transformarlo en un esquema equivalente $((P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \wedge S) \Rightarrow T)$. Esto equivale a suponer que el antecedente del condicional que representa la conclusión es verdadero, incorporarlo como nueva premisa y probar que el consecuente es consecuencia lógica del conjunto de premisas así aumentado.

En el caso del resultado R1, diríamos: Supongamos que a y b son números reales positivos, y que $a < b$. A partir de esta información y de los conocimientos sobre números reales probaríamos que $a^2 < b^2$.

Para el resultado R2, supondríamos que A , B y C son conjuntos tales que $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = C$, para concluir, basándonos en lo anterior, que $B = C - A$.

Finalmente, en el tercer caso incorporaríamos a q como premisa P_5 , para deducir u como consecuencia lógica del conjunto ampliado de premisas.

La generalización del proceso anterior se conoce con el nombre de **Regla de la deducción (RD)** que puede simbolizarse así:

$$(W \models A \Rightarrow B) \equiv (W \cup \{A\} \models B) \quad (4)$$

Regla de la deducción: Sea W un conjunto de fórmulas y sean A y B fórmulas. Entonces, del conjunto W se deduce como consecuencia lógica $A \Rightarrow B$, es decir, $W \models A \Rightarrow B$, si y sólo si del conjunto que resulta al adicionar a W la fórmula A , $W \cup \{A\}$, se deduce como consecuencia lógica B , es decir, $(W \cup \{A\}) \models B$.

Esta importantísima regla establece que una forma de probar que un condicional $A \Rightarrow B$ es consecuencia lógica de un conjunto dado de premisas es añadir el antecedente A al conjunto de premisas y mostrar que B es consecuencia lógica del conjunto así ampliado de premisas, como se ve en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 3.37 Probar que $\{p \Rightarrow \neg q, r \Rightarrow \neg q, (s \vee t) \Rightarrow u, (\neg p \wedge \neg r) \Rightarrow s\} \models q \Rightarrow u$

Premisas:

- $P_1 \quad p \Rightarrow \neg q$
 $P_2 \quad r \Rightarrow \neg q$
 $P_3 \quad (s \vee t) \Rightarrow u$
 $P_4 \quad (\neg p \wedge \neg r) \Rightarrow s$

Deducción:

- $P_5' \quad q \quad (\text{RD}) \leftarrow \text{Se incorpora } q \text{ como nueva premisa.}$
 $P_6' \quad \neg p \quad (\text{MT } 1, 5')$
 $P_7' \quad \neg r \quad (\text{MT } 2, 5')$
 $P_8' \quad \neg p \wedge \neg r \quad (\text{Con } 6', 7')$
 $P_9' \quad s \quad (\text{MP } 4, 8')$
 $P_{10}' \quad s \vee t \quad (\text{Adj } 9')$
 $P_{11}' \quad u \quad (\text{MP } 3, 10')$
 $P_{12} \quad q \Rightarrow u \quad (\text{RD: Regla de la deducción})$

El proceso anterior muestra que u es consecuencia lógica del conjunto aumentado de premisas dadas. En consecuencia, según la equivalencia (4), $\{p \Rightarrow \neg q, r \Rightarrow \neg q, (s \vee t) \Rightarrow u, (\neg p \wedge \neg r) \Rightarrow s\} \vdash (q \Rightarrow u)$.

Observe que, una vez obtenida u en la línea 11, completamos el proceso escribiendo $q \Rightarrow u$ y reiterando el uso de la regla de la deducción. Esto, para insistir en que q no es una premisa original sino que se asume como verdadera por ser el antecedente de la conclusión.

Ejemplo 3.38 A continuación presentamos, a manera de ejemplo, la demostración del resultado R1: "Sean a y b números reales positivos. Entonces, si $a < b$, $a^2 < b^2$ ". La demostración se comprende fácilmente, pues sólo requiere algunos elementos de álgebra básica:

- $P_1 \quad a \text{ es un real positivo}$
 $P_2 \quad b \text{ es un real positivo}$
 $P_3' \quad a < b \quad (\text{Regla de la deducción})$
 $P_4' \quad b + a \text{ es un real positivo} \quad (\text{Porque la suma de reales positivos es real positivo})$
 $P_5' \quad b - a \text{ es un real positivo} \quad (\text{Porque si } a < b \text{ entonces } b > a \text{ y la diferencia } b - a \text{ es positiva})$
 $P_6' \quad (b + a)(b - a) \text{ es un real positivo} \quad (\text{Porque el producto de reales positivos es real positivo})$
 $P_7' \quad b^2 - a^2 \text{ es real positivo} \quad (\text{Porque } (b + a)(b - a) = b^2 - a^2)$
 $P_8' \quad a^2 < b^2 \quad (\text{Porque la diferencia en } P_7' \text{ es positiva})$
 $P_9' \quad \text{Si } a \text{ es real positivo y } b \text{ real positivo, entonces } (a < b \Rightarrow a^2 < b^2). \quad (\text{Regla de la deducción})$

3.13 INCONSISTENCIA

Para mostrar que un razonamiento es inválido debemos exhibir un contraejemplo, es decir, una interpretación para la cual todas las premisas son verdaderas pero la conclusión es falsa. Si no existe una interpretación tal, el razonamiento es válido. Como veremos, este hecho tiene consecuencias que en algunos casos pueden parecer extrañas.

Ejemplo 3.39 Consideremos el argumento siguiente:

Si el presidente es amonestado, el gran público quedará insatisfecho. Pero si el presidente no es amonestado, la clase política quedará insatisfecha. Sin embargo, ninguno de estos sectores quedará insatisfecho. Por lo tanto, el presidente será declarado “Gran Héroe Nacional”.

El razonamiento tiene esta representación simbólica en el lenguaje $L(P)$:

$$\{p \Rightarrow q, \neg p \Rightarrow r, \neg q \wedge \neg r\} \models s$$

La desconexión simbólica entre las premisas y la conclusión podría hacer pensar en la invalidez del razonamiento. En efecto, si para alguna interpretación las premisas fueran simultáneamente verdaderas sería suficiente añadir $v(s)=F$ y esto mostraría la invalidez del razonamiento. Sin embargo, la tabla siguiente, que presenta los valores de las premisas para las 8 interpretaciones posibles de la terna $p-q-r$, muestra que las premisas no pueden ser simultáneamente verdaderas, que no pueden coexistir como premisas de un razonamiento:

Tabla 3.7 Un conjunto inconsistente de premisas								
p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$p \Rightarrow q$	$\neg p \Rightarrow r$	$\neg q \wedge \neg r$
V	V	V	F	F	F	V	V	F
V	V	F	F	F	V	V	V	F
V	F	V	F	V	F	F	V	F
V	F	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	F	F	V	V	F
F	V	F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	V	V	F	V	V	F
F	F	F	V	V	V	V	F	V

Observe que cada interpretación hace falsa por lo menos a una de las premisas. En este caso decimos que las premisas son inconsistentes — por extensión, que el argumento

es inconsistente— para significar que no pueden aceptarse simultáneamente como premisas de un argumento sólido o convincente. (Recuerde que un argumento sólido o convincente es un argumento válido cuyas premisas son verdaderas). Lo extraño de los argumentos inconsistentes, desde el punto de vista de la lógica formal, es que son válidos. En efecto, la conjunción de sus premisas es falsa y por lo tanto el condicional que tiene tal conjunción como antecedente es verdadero. Formalmente, entonces, el razonamiento es válido. El resultado es sorprendente: sin importar s , el condicional es una tautología; es decir, no importa cuál sea la conclusión, todo razonamiento que tenga las premisas de este ejemplo es un razonamiento válido. Sin embargo, no puede ser convincente, porque sus premisas tendrían que ser simultáneamente verdaderas y, como vemos, esto es imposible.

Definición 3.40 Un conjunto de premisas es inconsistente, si es imposible que sean simultáneamente verdaderas. Es usual decir, en este caso, que “las premisas son inconsistentes”.

Definición 3.41 Si el conjunto de premisas de un razonamiento es inconsistente se dice que el razonamiento es inconsistente o contradictorio.

Como lo dijimos anteriormente, cualquier cosa puede deducirse válidamente de un conjunto inconsistente de premisas, lo cual despoja de valor a cualquier conclusión que se derive de ellas. ¿De qué puede servir un conjunto de premisas que permite deducir tanto una afirmación como su contradictoria? Supongamos que a partir de un conjunto de premisas, deducimos A y su fórmula contradictoria $\neg A$, como se ve en la continuación:

P_1 ----

P_2 ----

.

.

P_m A

.

P_t $\neg A$

A partir de este momento podemos argumentar así: Por adjunción en la línea m obtenemos

P_{t+1} $A \vee Q$, donde Q representa una conclusión arbitraria propuesta.

Y por Silogismo disyuntivo entre las líneas t y $t+1$, se obtiene la conclusión Q :

C. Q

Con lo anterior queda establecido que cualquiera sea la conclusión Q ella puede derivarse en forma válida como consecuencia lógica de tal conjunto inconsistente de premisas.

Apliquemos las anotaciones anteriores, al ejemplo 3.39:

$$P_1 \quad p \Rightarrow q$$

$$P_2 \quad \neg p \Rightarrow r$$

$$P_3 \quad \neg q \wedge \neg r$$

$$C. \quad // s$$

$$P_4' \quad \neg q \quad (\text{Sim. } 3)$$

$$P_5' \quad \neg r \quad (\text{Sim. } 3)$$

$$P_6' \quad \neg p \quad (\text{MT } 1, 4')$$

$$P_7' \quad \neg(\neg p) \quad (\text{MT } 2, 5')$$

$$P_8' \quad p \quad (\text{DN } 7') \quad (\text{Aquí es evidente la inconsistencia: } P_6', P_8')$$

$$P_9' \quad p \vee s \quad (\text{Adj } 8') \quad (s \text{ es la conclusión pretendida})$$

$$C. \quad s \quad (\text{SD } 6', 9')$$

La detección de una inconsistencia en un argumento dialéctico puede significar el desplome de todo el edificio argumentativo erigido hasta ese momento. Sin embargo, la detección de una inconsistencia en un cuerpo de conocimiento no necesariamente es una catástrofe: bien puede constituir el punto de partida para bienvenidas revisiones que conduzcan a los ajustes necesarios para eliminarla, con todo lo que de positivo ello puede significar para el área de conocimiento en cuestión. La paradoja de Russell en el desarrollo de la teoría de conjuntos es un ejemplo de ello.

3.14 EL MÉTODO INDIRECTO EN LAS PRUEBAS DE VALIDEZ DE RAZONAMIENTOS

3.14.1 El método indirecto por asignación de valores

En la sección 3.9 probamos que el condicional

$$((p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge (s \Rightarrow \neg q) \wedge (t \Rightarrow \neg r) \wedge (p \wedge t)) \Rightarrow q$$

es una tautología, considerando solamente las interpretaciones que hacen verdaderas las subfórmulas del antecedente, y mostrando que para ellas el consecuente tiene que ser verdadero. Nos referiremos a este método como “método directo por asignación

de valores". Ahora ilustraremos un método alternativo conocido como "método indirecto por asignación de valores".

Ejemplo 3.42 Probar, utilizando el método indirecto por asignación de valores, que el siguiente condicional es una tautología:

$$[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]$$

El método indirecto consiste en suponer que el condicional no es una tautología, es decir, que existe por lo menos una interpretación para la cual el condicional es falso. A partir de este supuesto desarrollamos un proceso "hacia atrás", tratando de establecer cuál es esa interpretación. Si en algún momento se llega a una contradicción es porque tal interpretación no existe y, en consecuencia, habremos mostrado que el condicional sí es una tautología.

Entonces, empecemos suponiendo que el condicional puede ser falso en alguna línea de su tabla de verdad y denotemos este hecho asignándole el valor F_1 como se ve en seguida:

$$[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r] \\ F_1$$

Ahora razonamos así: para que el condicional sea falso se requiere que el antecedente sea verdadero y el consecuente falso. Indicamos este hecho con los valores V_2 y F_2 bajo los conectivos principales en el antecedente y en el consecuente. (Hemos usado el mismo subíndice porque esta nueva asignación es simultánea pero hubiéramos podido V_2 y F_3).

$$[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r] \\ V_2 \quad \quad F_1 \quad \quad F_2$$

En este momento podemos continuar el análisis con el antecedente (V_2) o con el consecuente (F_2) pues en ambos casos hay sólo una opción posible. Hagámoslo con el consecuente: para que el condicional $((p \vee q) \Rightarrow r)$ sea falso, el antecedente debe ser verdadero y el consecuente falso. Marquemos esta deducción con V_3 y F_3 , respectivamente.

$$[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r] \\ V_2 \quad \quad F_1 \quad \quad V_3 \quad F_2 \quad F_3$$

¡Hemos encontrado un primer valor de verdad: el del átomo r ! Entonces lo trasladamos simultáneamente a todas las apariciones de r como F_4 , donde el subíndice indica que es una deducción inmediatamente siguiente a las obtenidas en el paso 3.

(significa suponer, como en el método anterior, que el condicional es falso). Esto equivale a considerar que la negación de la conclusión es verdadera y, por lo tanto, puede ser incorporada a la lista de premisas como una nueva premisa. El razonamiento será válido si y sólo si el conjunto así ampliado de premisas es inconsistente o contradictorio.

En este punto se le pide al lector reflexionar cuidadosamente sobre la diferencia de significado entre estas dos situaciones:

Un conjunto inconsistente de premisas.

El conjunto que resulta de adicionar a las premisas de un razonamiento la negación de la conclusión es inconsistente.

En el primer caso el conjunto es de poca utilidad: es posible derivar cualquier conclusión. En el segundo, la inconsistencia es importantísima: muestra que el razonamiento es válido.

Ejemplo 3.43 Utilizar el método indirecto y deducción natural para establecer la validez del razonamiento siguiente:

“El alza en los precios del petróleo es imparable. Esto obligará a disminuir los niveles de consumo mundial de petróleo o a incrementar la producción de biocombustibles. Todo indica, sin embargo, que el mundo no está dispuesto a disminuir los niveles de consumo de petróleo. La otra cara de la moneda es que el incremento en la producción de biocombustibles obliga a dedicar cada vez más tierras a cultivos aprovechables para producción de biocombustibles. Esto traerá como consecuencia alzas exageradas en los precios de alimentos básicos para consumo humano. Lo anterior muestra que el mundo experimentará alzas exageradas en los precios de los alimentos básicos para la especie humana”.

Solución: En primer lugar representaremos con átomos las proposiciones atómicas que intervienen en el razonamiento:

p: El alza en los precios del petróleo es imparable.

q: Disminuirá el consumo mundial de petróleo.

r: Se incrementará la producción de biocombustibles.

s: Se dedicarán más tierras a cultivos aprovechables para la producción de biocombustibles.

t: Habrá alzas exageradas en los precios de los alimentos básicos para consumo humano.

En segundo lugar, simbolizaremos las premisas y la conclusión del argumento:

$$P_1 \quad p$$

$$P_2 \quad p \Rightarrow (q \vee r)$$

$$P_3 \quad \neg q$$

$$P_4 \quad r \Rightarrow s$$

$$P_5 \quad s \Rightarrow t$$

$$C. \quad t$$

En una demostración indirecta (llamada también demostración por contradicción o por reducción al absurdo) se supone que la conclusión es falsa y se incorpora tal hecho al conjunto de premisas:

$$P_1 \quad p$$

$$P_2 \quad p \Rightarrow (q \vee r)$$

$$P_3 \quad \neg q$$

$$P_4 \quad r \Rightarrow s$$

$$P_5 \quad s \Rightarrow t$$

$$C. \quad t$$

$$P'_6 \quad \neg t \quad (\text{Método indirecto; negación de la conclusión})$$

$$P'_7 \quad \neg s \quad (\text{MT, 5 y 6})$$

$$P'_8 \quad \neg r \quad (\text{MT, 4 y 7})$$

$$P'_9 \quad \neg q \wedge \neg r \quad (\text{Conj, 3 y 8})$$

$$P'_{10} \quad \neg(q \vee r) \quad (\text{Ley de De M, 9})$$

$$P'_{11} \quad \neg p \quad (\text{MT, 2 y 10})$$

$$P'_{12} \quad p \wedge \neg p \quad (\text{Conj. 1 y 11})$$

$$C. \quad t \quad (\text{La conclusión no puede ser falsa, método indirecto})$$

Ejercicio 3.44 Utilice deducción natural para demostrar la validez del razonamiento anterior, pero esta vez por demostración directa. Aunque en este caso la demostración directa es mucho más sencilla, ello no siempre es así.

EJERCICIOS

1. Represente simbólicamente los enunciados a-j, utilizando los átomos p, q, r y s, con estos significados: p: 2 es número primo, q: 2 es número par, r: le entrego el libro, s: usted me entrega la fotografía.
 - a. 2 es número primo, pero es par.
 - b. es número par; sin embargo, es primo.
 - c. 2 es número primo no obstante que es par.
 - d. Es falso que 2 no es primo o no es par.
 - e. Es falso que 2 no es primo o es falso que 2 no es par.
 - f. Le entrego el libro si me entrega la fotografía.
 - g. Le entrego el libro sólo si me entrega la fotografía.
 - h. Si no me entrega la fotografía, entonces no le entrego el libro.
 - i. Sólo si me entrega la fotografía le entrego el libro.
 - j. No le entrego el libro, a menos que me entregue la fotografía.
2. Sobre la base de las definiciones de los conectivos lógicos, establezca el valor de verdad de los enunciados a-j.
 - a. $(\text{Roma es la capital de Italia}) \wedge (\text{Viena no es la capital de Suiza})$.
 - b. Aun cuando es cierto que París es la capital de Francia, es falso que Roma es la capital de Italia.
 - c. Ni Viena es la capital de Suiza ni París es la capital de Francia.
 - d. $\neg(\text{Viena es la capital de Suiza}) \wedge \neg(\text{París es la capital de Francia})$.
 - e. $\neg(\text{Viena es la capital de Suiza}) \Rightarrow (\text{París es la capital de Italia})$.
 - f. $(\neg \text{Viena es la capital de Austria} \vee \text{París es la capital de Italia}) \Leftrightarrow \text{Roma es la capital de Francia}$.
 - g. $\text{Viena es la capital de Austria} \wedge \neg(\text{Roma es la capital de Italia} \wedge \neg \text{París es la capital de Francia})$.
 - h. $\neg(\text{Todo número impar es primo} \wedge \text{todo número primo es impar})$.
 - i. Todo número primo es impar si y sólo si todo número impar es primo.
 - j. $(\text{Todo número impar es primo}) \vee \neg\{(\text{todo número primo es impar}) \Leftrightarrow [\neg(\text{todo número impar es primo})]\}$.
3. Considere las proposiciones "Álvaro Uribe es presidente de Colombia" y "Álvaro Uribe es ciudadano colombiano". Utilice los átomos p y q para representarlas, en ese orden, y escriba por lo menos seis enunciados que se representarían en este caso como $p \Rightarrow q$.
4. Ilustre, con un ejemplo diferente a los que se proporcionaron en este capítulo, los diferentes usos del condicional (definición, consecuencia lógica, rechazo absoluto, etcétera).

5. En cada uno de los puntos a–h proceda como se le indica en la palabra subrayada:
- Complete: La expresión “Llueve pero no hace frío ni calor” se puede representar en el cálculo proposicional como _____.
 - Complete: Según su significado, la disyunción exclusiva entre p y q se puede representar por la fórmula $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$ y también por la fórmula _____.
 - Responda: Si A y B representan fórmulas bien formadas tales que $A \equiv B$ y una interpretación para ellas hace que $v(A)=F$, ¿qué puede decirse de $v(\neg B)$ para esta interpretación?
 - Complete cada línea desde a hasta e para obtener una expresión verdadera:
 - $p \wedge (p \vee q) \equiv$ _____ (Equivalencia: ley de absorción)
 - $\{ _, \neg p \vee q \} \models q$ (Silogismo disyuntivo)
 - $p \vee q \equiv$ _____ (fórmula equivalente que usa solamente \neg y \wedge)
 - $\{ _ \} \models$ _____ (Dilema constructivo)
 - $\{ p \wedge q, (r \Rightarrow \neg s) \Rightarrow \neg(p \Rightarrow q) \} \models r$ _____ (*Modus tollens*)
 - Califique como verdadero o falso: Toda contingencia es una fórmula satisfacible, pero no toda fórmula satisfacible es una contingencia. Escriba un ejemplo de fórmula que es una contingencia.
 - Califique como verdadero o falso: Un razonamiento que tiene como premisas las que aparecen en la lista siguiente es inconsistente:

$$\{(p \vee q) \Rightarrow (r \Rightarrow s), p, (r \Rightarrow s) \Rightarrow (t \Rightarrow w), t \wedge \neg w\}$$
 - Responda: ¿Cuándo y cómo se utiliza la Regla de la Deducción?
 - Suponga que usted se propone demostrar, a partir de un conjunto de premisas, que $a=0 \vee b=0$. ¿Qué haría, si su plan consistiera en demostrar el resultado por método indirecto? ¿Cuál sería entonces la nueva premisa? ¿En qué momento consideraría finalizada la demostración?

6. Deduzca esta equivalencia: $p \wedge (q \Rightarrow r) \equiv \neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg p \vee \neg r)$.

7. A continuación se da un grupo de fórmulas bien formadas. Escriba, para cada una, dos enunciados que se representen simbólicamente con dicha fórmula. Por ejemplo, si la fórmula es $p \Rightarrow (q \wedge r)$, un enunciado podría ser: Si un triángulo es equilátero entonces sus tres lados y sus tres ángulos son iguales; un segundo enunciado de la misma forma: Si hoy es miércoles, entonces tengo clases de Lógica y de Algoritmos.

- $p \Rightarrow (q \vee \neg r)$
- $(p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$
- $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow r$
- $((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow s)) \Rightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow (r \wedge s))$

8. Represente simbólicamente cada razonamiento a-j. Utilice los átomos p, q, r... en el mismo orden en el cual aparecen las proposiciones atómicas en el razonamiento correspondiente. No olvide indicar explícitamente qué proposición está representada por cada átomo.
- a. Si el ratón se come el queso, entonces el gato atrapa al ratón. Pero el ratón no se come el queso. Por lo tanto, el gato no atrapa al ratón.
 - b. Si el ratón se come el queso, entonces el gato atrapa al ratón. Pero el gato no atrapa al ratón. Por tanto, el ratón no se come el queso.
 - c. Si el asalto ocurrió después de las 4 de la mañana, pero antes de las 5, entonces los guardianes se habían quedado dormidos. Si ocurrió a una hora diferente, entonces los guardianes son cómplices necesariamente; en tal circunstancia, hay personas externas involucradas. Por tanto, si los guardias no se quedaron dormidos, el asalto involucra a personas externas.
 - d. Si resuelvo un ejercicio sin quejarme, entonces lo puedo entender. Yo no puedo entender ejercicios de los cuales no tengo un ejemplo resuelto previamente. Los ejercicios que puedo entender no me producen dolor de cabeza. Este ejercicio tiene un ejemplo previamente resuelto. Por lo tanto, resuelvo este ejercicio sin quejarme, pero me produce dolor de cabeza.
 - e. Mi padre me anima si estudio diariamente. O me va bien en los cursos o no estudio diariamente. Si duermo en exceso, entonces no me va bien en los cursos. Por lo tanto, si mi padre me anima, entonces no duermo en exceso.
 - f. Si Dios fuera bueno, querría hacer a sus criaturas perfectamente felices. Y si fuera omnipotente podría hacer todo lo que quisiera. Si Dios quisiera hacer a sus criaturas perfectamente felices y pudiera hacer todo lo que quisiera, entonces las criaturas serían perfectamente felices. Pero las criaturas no son perfectamente felices. En consecuencia, a Dios le falta poder, o bondad, o ambas cosas. (Tomado del artículo "Cazadores de la verdad", de Daniel J. Boorstin. Lecturas Dominicales de El Tiempo, 22/02/98. Se modificó el texto original solamente para hacer explícita una premisa implícita).
 - g. Si Dios quisiera prevenir el mal pero fuera incapaz de hacerlo, entonces no sería todopoderoso; si fuera capaz de prevenir el mal, pero no quisiera hacerlo, sería malévolo. Existe el mal sólo si Dios es malévolo o incapaz de prevenirlo. Es un hecho que el mal existe. Si Dios existe, entonces es todopoderoso y no es malévolo. En consecuencia, Dios no existe.
 - h. La convivencia social se deteriorará sensiblemente. Las razones son claras: no hay duda de que si hay alza general de salarios no se podrá contener el desempleo, y si hay paro general no se alcanzarán las metas de producción. Sin embargo, las más recientes intervenciones del ministro

de Hacienda y de los sindicalistas indican que habrá alza general de salarios, pero insuficiente para evitar el paro general. Pero se alcanzarán las metas de producción. Lamentablemente, si no puede contenerse el desempleo, o si hay alza general de salarios, la convivencia social se deteriorará sensiblemente.

- i. Cualquiera sea la situación del dólar con respecto al peso, algún sector de la economía resulta perjudicado: Si el peso se revalúa, se lamenta el sector exportador porque los dólares que recibe representan menos pesos al traerlos al país; si el peso se devalúa, los importadores tienen que pagar más caros los bienes que importan y se reduce el consumo de los mismos. Además, en este caso se encarece la deuda externa del país, lo cual nos afecta a todos negativamente.
 - j. Las siguientes razones permiten afirmar que la inversión social disminuirá drásticamente: Según los analistas, si el alza en el salario mínimo es superior a la inflación, entonces no disminuirá el desempleo y, si hay otro paro general, no se alcanzarán las metas del sector productivo. Por otro lado, la dirigencia sindical amenaza con otro paro general, si el alza en el salario mínimo no es superior al nivel de inflación. Esto se complementa con el hecho de que si no disminuye el desempleo o no se alcanzan las metas del sector productivo, entonces habrá una baja en las exportaciones. Y una baja en las exportaciones hará que la inversión social disminuya drásticamente.
- 9.** Clasifique cada fórmula siguiente como satisfacible, tautología, contingencia, o insatisfacible. Recuerde que eventualmente una fórmula puede ser clasificada en diferentes grupos:
- a. $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$
 - b. $p \wedge ((p \vee q) \Rightarrow \neg q)$
 - c. $(p \Rightarrow (q \wedge r)) \wedge \neg(p \Rightarrow (q \wedge r))$
 - d. $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \wedge r))$
 - e. $((p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge r)) \Rightarrow q$
- 10.** Utilice el método directo por asignación de valores para establecer cuáles de las fórmulas siguientes son tautologías. En caso de no serlo, indique en su conclusión una interpretación para la cual la fórmula es falsa:
- a. $((p \Rightarrow q) \vee \neg q) \Rightarrow \neg p$
 - b. $((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$
 - c. $((p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$
 - d. $((p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow r$
 - e. $[p \Rightarrow (q \vee r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)]$

11. Pruebe las siguientes equivalencias. Un * indica que se exige una prueba algebraica, como en el ejercicio 3.28.

- $(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p)$
- $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ *
- $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
- $(p \vee q) \wedge p \wedge (q \vee r) \wedge (p \vee \neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \equiv (p \wedge r)$ *
- $(\neg(p \wedge (\neg p \vee q)) \vee q) \equiv V$ *
- $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (\neg(\neg p \vee q)) \equiv p$ *
- $\neg[(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)] \vee r \equiv V$

13. En cada caso muestre, sin hacer las tablas de verdad, una interpretación que le permita concluir que las fórmulas de cada par no son equivalentes:

- $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ y $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
- $p \wedge (q \vee r)$ y $(p \wedge q) \vee r$
- $p \Rightarrow q$ y y
- $q \Rightarrow p$

14. Califique cada afirmación a -e como verdadera o como falsa. Justifique plenamente su respuesta.

- La notación $\{p, p \Rightarrow q\} \models q$ es ambigua.
- Un razonamiento deductivo es válido si y sólo si la conjunción de las premisas y la conclusión es una tautología.
- La afirmación $\{p \Rightarrow q, \neg p\} \models \neg q$ es falsa, porque el razonamiento $((p \Rightarrow q) \wedge \neg p) \Rightarrow \neg q$ es una falacia.
- Toda regla de inferencia es un razonamiento válido, y todo razonamiento válido es una regla de inferencia.
- En los razonamientos inválidos las premisas son inconsistentes.

15. Establezca la validez de los razonamientos siguientes:

- | | |
|--|---|
| 1. $P_1 (p \vee q) \wedge (r \vee s)$ | 2. $P_1 p \Rightarrow \neg q$ |
| $P_2 (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow s)$ | $P_2 \neg p \Rightarrow (r \Rightarrow \neg q)$ |
| $P_3 \neg r$ | $P_3 (\neg s \vee \neg r) \Rightarrow \neg \neg q$ |
| C. s | $P_4 \neg s$ |
| | C. $\neg r$ |
| 3. $P_1 (p \vee q) \Rightarrow r$ | 4. $P_1 x = 5 \vee x < y$ |
| $P_2 (r \vee q) \Rightarrow (p \Rightarrow (s \Leftrightarrow t))$ | $P_2 (x > 3 \vee z < 2) \Rightarrow (z < x \vee y = 1)$ |
| $P_3 p \wedge s$ | $P_3 x < y \Rightarrow z < 2$ |
| C. $s \Leftrightarrow t$ | $P_4 x = 5 \Rightarrow x > 3$ |
| | $P_5 z < x \Rightarrow x = 4$ |
| | $P_6 y = 1 \Rightarrow \neg(x > 3 \vee z < 2)$ |
| | C. $x = 4$ |

16. Decida sobre la validez de los razonamientos del punto 8 de esta lista de ejercicios.
17. En los casos siguientes, construya una prueba formal de validez o pruebe la invalidez encontrando una interpretación para los átomos involucrados.
- | | | | |
|----|---|----|---|
| a. | $P_1 ((p \wedge q) \wedge r) \Rightarrow s$ | b. | $P_1 ((p \vee q) \wedge r) \Rightarrow s$ |
| | $P_2 (r \Rightarrow s) \Rightarrow (t \Rightarrow w)$ | | $P_2 (r \Rightarrow s) \Rightarrow (t \Rightarrow w)$ |
| | $P_3 t$ | | $P_3 t$ |
| | C. $p \Rightarrow w$ | | C. $p \Rightarrow w$ |
18. Decida si este argumento es o no válido: Si usted es autosuficiente, entonces sus acciones no están determinadas por eventos previos. En estas circunstancias, sus acciones no son predecibles y no es posible anticipar las consecuencias de ellas. En consecuencia, si usted es autosuficiente, las consecuencias de sus acciones no se pueden anticipar.
19. Pruebe que la fórmula, $((p \wedge \neg q) \Rightarrow r) \wedge (\neg r \wedge p) \Rightarrow q$ es una tautología,
- Por método indirecto, suponiendo que no lo es y derivando una contradicción.
 - Algebraicamente, utilizando equivalencias para probar que la fórmula dada es lógicamente equivalente con V.
20. Complete los pasos que faltan en la siguiente demostración incompleta de la ley de absorción,
- $[p \wedge (p \vee q)] \equiv p$:
- | | |
|---|------------------|
| $p \wedge (p \vee q) \equiv (p \vee F) \wedge (p \vee q)$ | Ley de identidad |
| \equiv _____ | Ley distributiva |
| \equiv _____ | Ley _____ |
| $\equiv p$ | Ley _____ |
21. Complete el enunciado para obtener una afirmación verdadera.
- La expresión "Malo porque sí y malo porque no" es una forma, en el lenguaje cotidiano, de una ley de inferencia (dilema), que se representa así: $\{ _, _ \} \models _$.
22. Decida si esta afirmación es falsa o si es verdadera. Justifique su respuesta:
- Si la negación de una fórmula A es una tautología, entonces la fórmula A tiene que ser lógicamente equivalente con $p \wedge \neg p$.
23. Complete cada línea en esta demostración algebraica de que $((p \vee q) \wedge \neg p) \Rightarrow q$ es una tautología. (La aparición de _____ y _____ indica que usted debe escribir los nombres de dos leyes que se han aplicado simultáneamente):

$$\begin{aligned}
 ((p \vee q) \wedge \neg p) \Rightarrow q &\equiv ((p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p)) \Rightarrow q \quad \text{_____} \\
 &\equiv (\text{___} \vee (q \wedge \neg p)) \Rightarrow q \quad \text{_____} \\
 &\equiv (q \wedge \neg p) \Rightarrow q \quad \text{Ley de identidad} \\
 &\equiv \neg(q \wedge \neg p) \vee q \quad \text{definición de } \Rightarrow \\
 &\equiv (\neg q \vee p) \vee q \quad \text{_____ y _____} \\
 &\equiv (q \vee \neg q) \vee p \quad \text{_____ y _____} \\
 &\equiv \text{_____} \quad \text{_____} \\
 &\equiv V \quad \text{Ley de dominación}
 \end{aligned}$$

24. Escriba una prueba algebraica de que $(((p \vee \neg q) \Rightarrow r) \wedge \neg q) \Rightarrow r$ es una tautología. Escriba también una prueba por el método indirecto con asignación de valores de verdad.
25. A continuación se dan las premisas de un razonamiento válido en el cual falta la conclusión. Obténgala, utilizando todas las premisas:
- "Si no tenemos fe en la recuperación del país y tambalea la esperanza, no tendremos un futuro mejor. Es cierto que tambalea la esperanza, pero también que tendremos un mejor futuro. Por lo tanto..."
26. Utilice deducción natural para mostrar que este razonamiento es válido:
- $$\{\neg s \Rightarrow q, (u \vee p) \Rightarrow (v \vee t), (r \wedge s) \Rightarrow t, \neg r \Rightarrow q, q \Rightarrow u\} \vdash (\neg t \Rightarrow v)$$
27. Suponga que los símbolos p y q tienen estos significados:
- p: Estudiaremos Lógica este domingo.
- q: Tenemos parcial de Organizaciones el lunes.
- Represente simbólicamente el enunciado «Estudiaremos Lógica este domingo sólo si no tenemos parcial de Organizaciones el lunes».
28. Llene los espacios provistos en cada caso, para obtener fórmulas lógicamente equivalentes con la fórmula $\neg r \Rightarrow s$. No use dobles negaciones ($\neg \neg A$).
- a. $\text{___} \Rightarrow \text{___}$ b. $\text{___} \vee \text{___}$ c. $\neg(\text{___} \wedge \text{___})$
29. Suponga que A y B son fórmulas lógicamente equivalentes. Entonces, se puede asegurar que $A \wedge \neg B \equiv F$. Seleccione, entre los siguientes enunciados, las posibles justificaciones de tal afirmación:
- Si $A \equiv B$, no es posible que A y $\neg B$ sean simultáneamente verdaderas para alguna interpretación.
 - $\neg B$ es falso. Por lo tanto la conjunción $A \wedge \neg B$ también lo es.
 - Si $A \equiv B$, por lo menos una entre A y $\neg B$ tiene que ser falsa para cada interpretación.
 - Si $A \equiv B$ entonces los valores de A y B son iguales, para cada interpretación.

30. Decida sobre la validez del razonamiento siguiente:

"Si pago matrícula completa no me quedará dinero. Pero si no pago matrícula completa no puedo matricularme en todos los cursos. Por otra parte, no aprenderé Programación de computadores a menos que me compre un computador, lo cual podré hacer sólo si me queda dinero. Además, si no me matriculo en todas las clases no me compraré un computador. Como es un hecho que pago matrícula completa o no pago matrícula completa entonces, con seguridad, no aprenderé Programación de computadores".

31. Decida si este conjunto de premisas es o no, inconsistente:

$$\{r \Rightarrow \neg s, p \vee q, (\neg r \wedge w) \Rightarrow \neg p, \neg q \wedge w, \neg s\}$$

32. Decida si esta afirmación es o no verdadera. Justifique su respuesta:

Ser fórmula satisfacible es condición necesaria pero no suficiente para ser tautología. En cambio, ser tautología es condición suficiente pero no necesaria para ser satisfacible.

EJERCICIOS DE OPCIÓN MÚLTIPLE

1. ¿Cuál de las siguientes fórmulas representa este enunciado: "Te ayudo si me devuelves mi calculadora" (donde p = "te ayudo" y q = "me devuelves mi calculadora")?

- (A) $p \wedge q$
- (B) $p \vee q$
- (C) $p \Rightarrow q$
- (D) $q \Rightarrow p$
- (E) $(p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)$

2. ¿Cuál de las siguientes es una fórmula bien formada?

- (A) $\{ \neg \neg p \wedge [q \Rightarrow (r \vee \neg s)] \}$
- (B) $(p \wedge \neg r) \Rightarrow (t \wedge s)$
- (C) $[p \vee \neg (s)]$
- (D) $p \vee r \Rightarrow s$
- (E) $(p \Rightarrow s)$

3. Considere el siguiente texto: "Los radicales libres pueden, por un lado, deteriorar las membranas celulares o pueden, por otro, intervenir en la producción de enfermedades como el cáncer; es más, pueden pasar ambas cosas".

Simbolizando los átomos en el orden en que aparecen, ¿cuál de las siguientes es una FBF que representa el texto?

- (A) $[(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)]$
- (B) $(p \vee q)$
- (C) $(p \wedge q)$
- (D) $[(p \vee q) \vee \neg(p \vee q)]$
- (E) $[(p \vee q) \vee r]$

4. Considere el siguiente texto: "Sólo con un uso adecuado del poder y con una interpretación apropiada de la voluntad del pueblo, una democracia es verdaderamente legítima; si es cierta la anterior afirmación, entonces hay un uso adecuado del poder o no habrá reelección". Simbolizando el texto con los átomos p, q, r, \dots , en el mismo orden en que aparecen en el texto, ¿cuál de las siguientes opciones es una representación simbólica de ese texto?

- (A) $\{[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow [(p \vee \neg s) \wedge \neg(p \wedge \neg s)]\}$
- (B) $\{[r \Rightarrow (p \wedge q)] \wedge (p \vee \neg s)\}$
- (C) $\{[(p \wedge q) \Rightarrow r] \Rightarrow (p \vee \neg s)\}$
- (D) $\{[r \Rightarrow (p \wedge q)] \Rightarrow (\neg p \vee \neg s)\}$
- (E) $\{[r \Rightarrow (p \wedge q)] \Rightarrow (p \vee \neg s)\}$
- (F) $\{[(p \wedge q) \Rightarrow r] \vee (p \vee \neg s)\}$
- (G) $\{[r \Rightarrow (p \vee q)] \Rightarrow (\neg p \vee \neg s)\}$
- (H) $\{[p \Rightarrow (q \wedge r)] \Rightarrow (p \vee \neg r)\}$

5. Considere el texto siguiente: "No es cierto que el nuevo equipo sea un equipo ganador, como tampoco es cierto que el nuevo técnico sea responsable. Si la afirmación anterior es verdadera, entonces es falso que si el nuevo equipo no es un equipo ganador entonces el nuevo técnico es responsable". Simbolizando las proposiciones atómicas del texto con los átomos p, q, r, \dots , en el mismo orden de aparición, ¿cuál de las siguientes opciones es una representación simbólica del texto?

- | | |
|--|--|
| (A) $\neg[(\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg(\neg p \Rightarrow q)]$ | (E) $[(\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)]$ |
| (B) $[\neg(p \wedge q) \Rightarrow \neg(\neg p \Rightarrow q)]$ | (F) $[(\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg(\neg p \Rightarrow \neg q)]$ |
| (C) $[(\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow \neg(\neg p \Rightarrow q)]$ | (G) $[(\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg(p \Rightarrow q)]$ |
| (D) $[(\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg(\neg p \Rightarrow q)]$ | (H) $\{(\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg[\neg(p \Rightarrow q)]\}$ |

1.

6. Considere el texto siguiente: "Si alguien no tiene paciencia, entonces obtendrá beneficios a corto plazo. Además, sucede que alguien tiene paciencia o tiene carisma. Por otra parte, una persona no obtendrá beneficios a corto plazo o al menos no es el caso que tenga carisma. En consecuencia, tiene paciencia". Simbolizando el texto con los átomos p, q, r, \dots , en el mismo orden

en que aparecen en el razonamiento, ¿cuál de las siguientes opciones es una representación simbólica del razonamiento?

- (A) $[(\neg p \Rightarrow q) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r)] \Rightarrow p$
- (B) $[(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee r) \wedge \neg(\neg q \vee \neg r)] \Rightarrow p$
- (C) $[(\neg p \Rightarrow \neg r) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r)] \Rightarrow p$
- (D) $[(\neg p \Rightarrow q) \wedge (p \vee r)] \wedge [(\neg q \vee \neg r) \Rightarrow p]$
- (E) $[\neg(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r)] \Rightarrow p$
- (F) $\neg[(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r)] \Rightarrow p$
- (G) $[(\neg p \Leftrightarrow q) \wedge (p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r)] \Rightarrow p$
- (H) $\{(\neg p \Rightarrow q) \wedge (p \vee r) \wedge [(\neg q \vee \neg r) \wedge \neg(\neg q \wedge \neg r)]\} \Rightarrow p$

7. Todas las afirmaciones siguientes se refieren a la misma fórmula referida en el punto anterior. Cada una de las afirmaciones es verdadera, **excepto**:

- (A) La fórmula tiene ocho interpretaciones.
- (B) Por lo menos una de las interpretaciones de la fórmula hace que su valor de verdad sea verdadero; por lo tanto, es una fórmula satisfacible.
- (C) Si la fórmula representa en el lenguaje de la lógica proposicional un razonamiento deductivo, no podríamos referirnos al razonamiento como "verdadero" o "falso".
- (D) Si negáramos la fórmula completa, el valor de verdad de la fórmula negada, para la interpretación $v(p) = V$, $v(q) = V$, y $v(r) = F$, sería falso.
- (E) Si negáramos la conclusión del razonamiento, el valor de verdad de la fórmula que expresa el razonamiento modificado sería verdadero para la interpretación $v(p) = V$, $v(q) = V$, y $v(r) = F$.

8. Sobre el problema anterior, podemos concluir lo siguiente:

- (A) El enunciado define un razonamiento en el cual la expresión "no obtengo plata" es la conclusión.
- (B) El enunciado establece una condición necesaria para obtener plata.
- (C) El enunciado establece que en este caso "perder materias" es suficiente para no obtener plata.
- (D) Puede asegurarse que, si el autor del enunciado obtuvo plata, entonces no perdió ni una materia.
- (E) El enunciado está representado por una fórmula lógicamente equivalente a $p \Rightarrow \neg q \wedge \neg r$.

9. Sobre la fórmula del problema anterior, podemos concluir lo siguiente:

- (A) La fórmula nos permite decir que la expresión "si preferimos vino, entonces no me como las ostras o pido una ensalada" es lógicamente equivalente a "no preferimos vino", dado que el conector que los une en la fórmula tiene un valor de verdad de V para todas las interpretaciones.

- (B) La fórmula nos permite decir que la expresión "si preferimos vino, entonces no me como las ostras o pido una ensalada" **no** es lógicamente equivalente a "no preferimos vino", dado que el conector que los une en la fórmula **no** tiene un valor de verdad de V para todas las interpretaciones.
- (C) La fórmula nos permite decir que la expresión "no preferimos vino" es una consecuencia lógica de "si preferimos vino, entonces no me como las ostras o pido una ensalada", dado que el conector que los une en la fórmula tiene un valor de verdad de V para todas las interpretaciones.
- (D) La fórmula nos permite decir que la expresión "no preferimos vino" **no** es una consecuencia lógica de "si preferimos vino, entonces no me como las ostras o pido una ensalada", dado que el conector que los une en la fórmula **no** tiene un valor de verdad de V para todas las interpretaciones.
- (E) La fórmula nos permite decir que la expresión "si preferimos vino, entonces no me como las ostras o pido una ensalada" **no** es una consecuencia lógica de "no preferimos vino", dado que el conector que los une en la fórmula **no** tiene un valor de verdad de V para todas las interpretaciones.
10. ¿Cuál de las siguientes es una fórmula bien formada que tiene 8 interpretaciones?
- (A) $[p \vee (r \wedge p)]$
- (B) $\{(p \wedge q) \Rightarrow [(p \vee p) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)]\}$
- (C) $\{p \vee \neg [(\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow \neg(\neg p \vee \neg r)]\}$
- (D) $(p \Rightarrow q \vee r)$
- (E) $\{(p \vee q) \wedge [(q \Rightarrow r) \vee (q \Leftrightarrow s)]\}$
11. Dada la fórmula $([p \Rightarrow (q \vee r)] \wedge (p \wedge \neg q)) \Rightarrow r$, una sola de las afirmaciones siguientes sobre ella es falsa:
- (A) La fórmula expresa una verdad lógica fácilmente ilustrable con situaciones cotidianas.
- (B) La fórmula es satisfacible.
- (C) Cada interpretación para la fórmula es a su vez un modelo para ella.
- (D) La fórmula es satisfacible pero no es una tautología.
- (E) La negación de la fórmula total es lógicamente equivalente con F.
12. Considere la siguiente afirmación: "Puede suceder alguna de estas cosas: en primer lugar, el timerosal causa autismo si y sólo si el autismo es el resultado del envenenamiento con mercurio; en segundo lugar, es suficiente que retiren el timerosal de las vacunas para que se reduzcan las tasas de autismo". Si p = el timerosal causa autismo, q = el autismo es el resultado del envenenamiento con mercurio, r = retiran el timerosal de las vacunas, y s = se reducen las tasas

de autismo, entonces ¿cuál de las siguientes es una representación simbólica de la afirmación anterior?

- (A) $[(p \Leftrightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)]$
- (B) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \wedge (r \Rightarrow s)$
- (C) $[(p \Leftrightarrow q) \vee (s \Rightarrow r)]$
- (D) $[(q \Leftrightarrow p) \vee (r \Rightarrow s)] \wedge \neg [(q \Leftrightarrow p) \wedge (r \Rightarrow s)]$
- (E) $[(p \Leftrightarrow q) \vee (r \Rightarrow s)]$

13. Considere la siguiente fórmula: $\{(p \vee q) \Rightarrow \neg (q \wedge r)\}$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones acerca de esa fórmula es correcta?

- (A) La fórmula tiene 2 modelos.
- (B) El valor de verdad de la fórmula es F cuando $v(p)=V$, $v(q)=V$, y $v(r)=F$.
- (C) La fórmula es una contradicción.
- (D) La fórmula es contingente, teniendo en cuenta que su valor de verdad es V cuando $v(p)=F$, $v(q)=F$, y $v(r)=F$; y su valor de verdad es F cuando $v(p)=F$, $v(q)=V$, y $v(r)=V$.
- (E) El valor de verdad de la fórmula sólo es F cuando $v(p)=V$, $v(q)=V$, y $v(r)=V$.

14. Supongamos que dos fórmulas, A y B, son lógicamente equivalentes. Podemos concluir entonces que:

- (A) Si las unimos mediante un condicional, la fórmula resultante será una contingencia.
- (B) Si las unimos mediante un bicondicional, la fórmula resultante será una contradicción.
- (C) Si el valor de verdad de A para cierta asignación de valores de verdad es V, entonces el valor de verdad de $\neg B$ para la misma asignación de valores de verdad será F.
- (D) Como A y B tienen los mismos valores de verdad para cada interpretación, la fórmula $A \wedge B$ es una tautología.
- (E) La fórmula $\neg (A \Leftrightarrow B)$ tendrá por lo menos un modelo.

15. Dada la fórmula: $p \Rightarrow \{q \wedge [r \vee (s \vee r)]\}$ determine, entre las siguientes, una fórmula que le es lógicamente equivalente y a la cual se puede llegar por simplificación algebraica.

- (A) $p \Rightarrow [(q \wedge r) \wedge (q \wedge s)]$
- (B) $[\neg (q \wedge r) \wedge \neg (q \wedge s)] \Rightarrow \neg p$
- (C) $\neg [\neg (q \wedge r) \wedge \neg (q \wedge s)] \Rightarrow \neg p$
- (D) $[\neg (q \vee r) \wedge \neg (q \vee s)] \Rightarrow \neg p$
- (E) $[\neg (q \wedge r) \wedge \neg (q \wedge s)] \Rightarrow p$

16. Supongamos que A es una consecuencia lógica de B. Podemos concluir entonces que:
- (A) A y B son lógicamente equivalentes.
 - (B) A es válida.
 - (C) A es verdadera.
 - (D) Un razonamiento en el cual A constituye las premisas y B la conclusión es un razonamiento válido.
 - (E) Un razonamiento en el cual B constituye las premisas y A la conclusión es un razonamiento válido.
17. ¿En cuál de los siguientes ejemplos vemos una aplicación de la **ley de dominación**?
- (A) $[(p \vee q) \Rightarrow r] \equiv \{[(p \vee q) \wedge (p \vee q)] \Rightarrow r\}$
 - (B) $\{[(p \wedge p) \vee (p \vee \neg p)] \Rightarrow (r \Rightarrow \neg r)\} \equiv \{[(p \wedge p) \vee V] \Rightarrow (r \Rightarrow \neg r)\}$
 - (C) $\{[(p \wedge V) \Rightarrow (p \vee V)] \Leftrightarrow (r \wedge F)\} \equiv \{[p \Rightarrow (p \vee V)] \Leftrightarrow (r \wedge F)\}$
 - (D) $\{[(p \wedge V) \Rightarrow (p \vee V)] \Leftrightarrow (r \wedge F)\} \equiv \{[(p \wedge V) \Rightarrow V] \Leftrightarrow (r \wedge F)\}$
 - (E) $\{[(p \wedge V) \Rightarrow (p \vee V)] \Leftrightarrow (r \wedge \neg r)\} \equiv \{[(p \wedge V) \Rightarrow V] \Leftrightarrow F\}$
18. Considere la expresión: $p \vee (q \wedge r)$. ¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente a ella *únicamente* por la aplicación de la ley distributiva?
- (A) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
 - (B) $(p \vee p) \vee (q \wedge r)$
 - (C) $\neg p \Rightarrow (q \wedge r)$
 - (D) $p \vee [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
 - (E) $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
19. Dada la fórmula $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$ ¿Cuál de los textos siguientes representa una lectura incorrecta de la fórmula o de una equivalente (donde p = quiero paz, y q = quiero armonía)?
- (A) Quiero paz y no armonía o quiero armonía pero no paz.
 - (B) Quiero paz o armonía, pero no ambas cosas simultáneamente.
 - (C) Quiero paz o no quiero armonía y quiero armonía o no quiero paz.
 - (D) Es falso que si quiero paz armonía o es falso que si quiero armonía quiero paz.
20. ¿Cuál de las siguientes fórmulas corresponde a un *razonamiento inconsistente*?
- (A) $\{(p \Rightarrow q) \wedge p \wedge (s \vee t) \wedge \neg(q \vee \neg p)\} \Rightarrow [s \Rightarrow (p \wedge t)]$
 - (B) $\{(p \Rightarrow q) \wedge p \wedge (s \vee t) \wedge \neg(q \vee \neg p)\} \Leftrightarrow [s \Rightarrow (p \wedge t)]$
 - (C) $\{(q \wedge s) \wedge [\neg p \Rightarrow (\neg q \vee \neg s)]\} \Rightarrow (p \vee r)$
 - (D) $\{p \wedge (p \Rightarrow \neg q)\} \Rightarrow [(q \wedge r) \Rightarrow p]$
 - (E) $\{(p \vee q) \wedge (r \wedge s) \wedge [r \Rightarrow (p \Rightarrow t)] \wedge [s \Rightarrow (q \Rightarrow u)]\} \Rightarrow (t \vee u)$

21. ¿Cuál de las siguientes es una tautología?

- (A) $\{ (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow s) \} \Rightarrow \neg(\neg s \Rightarrow \neg p)$
 (B) $\{ [p \wedge (q \vee s)] \wedge [p \Rightarrow \neg s] \} \Rightarrow \neg q$
 (C) $\{ [p \wedge (q \vee s)] \wedge [p \Rightarrow (p \Rightarrow \neg q)] \} \Rightarrow (s \wedge p)$
 (D) $\{ [(p \vee p) \vee (q \vee q)] \wedge (p \wedge q) \} \Leftrightarrow (p \wedge q)$
 (E) $\{ [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)] \wedge q \} \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

22. Considere la prueba siguiente, que utiliza deducción natural pero deja una de sus columnas en blanco:

- | | | |
|----|---|--------------------|
| 1. | $(p \wedge q) \vee (p \Rightarrow q)$ | |
| 2. | $(\neg p \vee \neg q) \wedge (q \Rightarrow r)$ | C: $\neg p \vee r$ |
| 3. | | Simplificación (2) |
| 4. | | Simplificación (2) |
| 5. | | De Morgan (3) |
| 6. | | SD (1,5) |
| 7. | | SH (4,6) |
| 8. | | Def. cond. (7) |

¿Cuál de las siguientes opciones muestra la información que completa correctamente la prueba?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
3. $\neg p \vee \neg q$	3. $\neg p \vee \neg q$	3. $q \Rightarrow r$	3. $\neg p \vee \neg q$	3. $\neg p \vee \neg q$
4. $q \Rightarrow r$	4. $q \Rightarrow r$	4. $\neg p \vee \neg q$	4. $q \Rightarrow r$	4. $q \Rightarrow r$
5. $\neg(p \wedge q)$	5. $(p \wedge q)$	5. $\neg(q \wedge \neg r)$	5. $\neg(p \vee q)$	5. $\neg(p \wedge q)$
6. $p \Rightarrow q$	6. $\neg(p \Rightarrow q)$	6. $p \Rightarrow q$	6. $p \wedge q$	6. $\neg(p \Rightarrow q)$
7. $p \Rightarrow r$	7. $p \Rightarrow r$	7. $p \Rightarrow r$	7. $p \vee r$	7. $q \Rightarrow r$
8. $\neg p \vee r$	8. $\neg p \vee r$	8. $\neg p \vee r$	8. $\neg p \vee r$	8. $\neg p \vee r$

23. Considere la siguiente prueba, que utiliza deducción natural pero deja una de sus columnas en blanco:

- | | | |
|----|--|----------------------|
| 1. | $r \wedge s$ | |
| 2. | $(q \Rightarrow t) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg t)$ | |
| 3. | $[(r \wedge s) \vee q] \Rightarrow (p \vee t)$ | C: $q \wedge \neg t$ |
| 4. | | Adj. (1) |
| 5. | | MP (3,4) |
| 6. | | De Morgan (5) |
| 7. | | MT (2,6) |
| 8. | | Def. cond. (7) |

¿Cuál de las siguientes opciones muestra la información que completa correctamente la prueba?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
4. $(r \wedge s) \wedge q$	4. $(r \wedge s) \vee q$	4. $(r \wedge s) \vee q$	4. $(r \wedge s) \vee q$	4. $(r \wedge s) \vee q$
5. $p \vee t$	5. $p \vee t$	5. $\neg(p \vee t)$	5. $p \vee t$	5. $p \vee t$
6. $(\neg p \wedge \neg t)$	6. $\neg(\neg p \wedge \neg t)$	6. $\neg(\neg p \wedge \neg t)$	6. $\neg(\neg p \vee \neg t)$	6. $\neg p \wedge \neg t$
7. $(q \Rightarrow t)$	7. $\neg(q \Rightarrow t)$	7. $q \Rightarrow t$	7. $(q \Rightarrow t)$	7. $\neg(q \Rightarrow t)$
8. $q \wedge \neg t$	8. $q \wedge \neg t$	8. $q \wedge \neg t$	8. $q \wedge \neg t$	8. $\neg(\neg q \vee t)$

24. Como en los puntos anteriores:

1. $\neg(r \Rightarrow p)$
 2. $[(p \vee \neg r) \vee q] \wedge [(p \vee \neg r) \vee s]$
 3. $[s \vee (t \Rightarrow q)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow t)$
 - 4.
 - 5.
 - 6.
 - 7.
 - 8.
 - 9.
 - 10.
- C : $p \Leftrightarrow t$**
- Dist. (2)
- Transp. (1)
- Def. cond. (5)
- SD (4,6)
- Simp. (7)
- Adj. (8)
- MP (3,9)

¿Cuál de las siguientes opciones muestra la información que completa correctamente la prueba?

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
4. $(p \vee \neg r) \wedge (q \vee s)$	4. $p \vee [\neg r \vee (q \wedge s)]$	4. $(p \vee \neg r) \vee (q \wedge s)$	4. $(p \vee \neg r) \vee (q \wedge s)$	4. $(p \vee \neg r) \vee (q \wedge s)$
5. $\neg(\neg p \Rightarrow \neg r)$	5. $\neg(\neg p \Rightarrow \neg r)$	5. $\neg(\neg p \Rightarrow \neg r)$	5. $\neg(\neg p \Rightarrow \neg r)$	5. $\neg p \Rightarrow \neg r$
6. $\neg(p \vee \neg r)$	6. $\neg(p \vee \neg r)$	6. $\neg(p \vee \neg r)$	6. $\neg(p \vee \neg r)$	6. $\neg(p \vee \neg r)$
7. $q \wedge s$	7. $[\neg r \vee (q \wedge s)]$	7. $q \wedge s$	7. $\neg(q \wedge s)$	7. $q \wedge s$
8. s	8. s	8. s	8. s	8. s
9. $s \vee (t \Rightarrow q)$	9. $s \vee (t \Rightarrow q)$	9. $s \vee (t \Rightarrow q)$	9. $s \vee (t \Rightarrow q)$	9. $s \vee (t \Rightarrow q)$
10. $p \Leftrightarrow t$	10. $p \Leftrightarrow t$	10. $p \Leftrightarrow t$	10. $p \Leftrightarrow t$	10. $p \Leftrightarrow t$

25. Sobre la regla de la deducción, es correcto decir lo siguiente:

- (A) Es aplicable adecuadamente en el primer paso de la prueba por deducción natural de la validez del razonamiento representado por la siguiente fórmula:

$$\{(p \wedge q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \Rightarrow p)\} \Rightarrow p.$$

- (B) Es aplicable adecuadamente en el primer paso de la prueba por deducción natural de la validez del razonamiento representado por la siguiente fórmula:

$$\{(p \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow t)\} \Rightarrow t.$$

- (C) Es el único método aplicable en la prueba por deducción natural de la validez del razonamiento representado por la siguiente fórmula:

$$\{(p \vee r) \wedge (\neg p \wedge q) \wedge [(r \wedge q) \Rightarrow (s \Rightarrow t)]\} \Rightarrow (s \Rightarrow t).$$

- (D) Por su carácter de ley de inferencia, puede ser aplicada a parte de una fórmula.

- (E) Es aplicable en el primer paso de la prueba por deducción natural de la validez del razonamiento representado por la siguiente fórmula:

$$\{(p \wedge r) \wedge (q \vee \neg r) \wedge [(r \wedge \neg t) \Rightarrow \neg(q \vee q)]\} \Rightarrow (r \Rightarrow t).$$

Respuestas a los ejercicios de opción múltiple

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
D	A	B	E	D	A	E	No	No	C	D	E	D	C	B	E	D	E	B	A	C	A	B	C	E