¡¡APRUEBE SU EXAMEN CON SCHAUM!!

# Matemáticas discretas

Schaum

3ª EDICIÓN

Seymour Lipschutz • Marc Lipson

- 467 PROBLEMAS RESUELTOS PASO A PASO
- REVISIONES COMPLETAS DE ARITMÉTICA POR COMPUTADORA Y CRIPTOLOGÍA
- CUBRE TODOS LOS FUNDAMENTOS DEL CURSO: ES EL TEXTO IDEAL PARA EL AULA

Utilícelo para las siguientes asignaturas:

☑ INTRODUCCIÓN A LAS MATEMÁTICAS DISCRETAS ☑ MATEMÁTICAS DISCRETAS

Mc Graw Hill

# 4 Lógica y cálculo de proposiciones

## CAPÍTULO

### 4.1 INTRODUCCIÓN

En muchos algoritmos y demostraciones se usan expresiones lógicas como:

"SI $p$ ENTONCES" o "si $p_1$ Y $p_2$, ENTONCES $q_1$ O $q_2$"

Por consiguiente, es necesario conocer los casos en que estas expresiones son VERDADERAS o FALSAS; es decir, conocer el "valor de verdad" de tales expresiones. Estos temas se analizan en este capítulo.

También se investiga el valor de verdad de declaraciones cuantificadas, que son proposiciones en las que se usan los cuantificadores lógicos "para todo" y "existe".

### 4.2 PROPOSICIONES Y DECLARACIONES COMPUESTAS

Una *proposición* (o *declaración*) es una afirmación declarativa que es falsa o verdadera, pero no ambas. Considere, por ejemplo, las seis oraciones siguientes:

*i*) El hielo flota en el agua.
*ii*) China está en Europa.
*iii*) $2 + 2 = 4$.
*iv*) $2 + 2 = 5$.
*v*) ¿A dónde vas?
*vi*) Haz tu tarea.

Las cuatro primeras son proposiciones; las dos últimas, no. También, *i*) y *iii*) son verdaderas, pero *ii*) y *iv*) son falsas.

#### Proposiciones compuestas

Muchas proposiciones son *compuestas*; es decir, están compuestas de *subproposiciones* y varios conectivos que se analizarán dentro de poco. Estas proposiciones se denominan *proposiciones compuestas*. Se dice que una proposición es *primitiva* si no es posible separarla en proposiciones más simples; es decir, si no es compuesta.

Por ejemplo, las proposiciones anteriores *i*) a *iv*) son primitivas. Por otra parte, las dos siguientes proposiciones son compuestas:

"Las rosas son rojas y las violetas son azules" y "Juan es inteligente o estudia cada noche".

La propiedad fundamental de una proposición compuesta es que su valor de verdad lo determinan los valores de verdad de sus subproposiciones junto con la forma en que se conectan para formar las proposiciones compuestas. En la siguiente sección se estudian algunos de estos conectivos.

## 4.3 OPERACIONES LÓGICAS BÁSICAS

En esta sección se analizan las tres operaciones lógicas básicas de conjunción, disyunción y negación que corresponden, respectivamente, a las palabras "y", "o" y "no" en lenguaje coloquial.

### Conjunción, $p \wedge q$

Dos proposiciones arbitrarias se combinan mediante la palabra "y" para formar una proposición compuesta que se denomina *conjunción* de las proposiciones originales. Se escribe así:

$$p \wedge q$$

que se lee "$p$ y $q$", denota la conjunción de $p$ y $q$. Puesto que $p \wedge q$ es una proposición, tiene un valor de verdad, que depende sólo de los valores de verdad de $p$ y $q$. En específico:

**Definición 4.1:** Si $p$ y $q$ son verdaderas, entonces $p \wedge q$ es verdadera; en otro caso, $p \wedge q$ es falsa.

El valor de verdad de $p \wedge q$ tiene una forma equivalente de definición mediante la tabla 4-1*a*). Ahí, la primera línea es una forma abreviada de decir que si $p$ es verdadera y $q$ es verdadera, entonces $p \wedge q$ es verdadera. La segunda línea establece que si $p$ es verdadera y $q$ es falsa, entonces $p \wedge q$ es falsa. Y así en las sucesivas. Observe que hay cuatro líneas correspondientes a las cuatro combinaciones posibles de $V$ y $F$ para las dos subproposiciones $p$ y $q$. También que $p \wedge q$ es verdadera sólo cuando ambas son verdaderas.

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

*a*) "$p$ y $q$"

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

*b*) "$p$ o $q$"

| $p$ | $\neg p$ |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

*c*) "no $q$"

**Figura 4-1**

**EJEMPLO 4.1** Considere las cuatro proposiciones siguientes:

*i*) El hielo flota en el agua y $2 + 2 = 4$.
*ii*) El hielo flota en el agua y $2 + 2 = 5$.
*iii*) China está en Europa y $2 + 2 = 4$.
*iv*) China está en Europa y $2 + 2 = 5$.

Sólo la primera proposición es verdadera. Cada una de las otras es falsa puesto que por lo menos una de sus subproposiciones es falsa.

### Disyunción, $p \vee q$

Dos proposiciones arbitrarias se combinan mediante el conectivo "o" para formar una proposición compuesta denominada *disyunción* de las proposiciones originales. Se escribe así,

$$p \vee q$$

que se lee "$p$ o $q$", denota la disyunción de $p$ y $q$. El valor de verdad de $p \vee q$ sólo depende de los valores de verdad de $p$ y $q$ como sigue.

**Definición 4.2:** Si $p$ y $q$ son falsas, entonces $p \vee q$ es falsa; en otro caso , $p \vee q$ es verdadera.

El valor de verdad de $p \vee q$ tiene una forma equivalente de definición por medio de la tabla 4-1*b*). Observe que $p \vee q$ es falsa sólo en el cuarto caso, cuando ambas $p$ y $q$ son falsas.

**EJEMPLO 4.2** Considere las cuatro proposiciones siguientes:

*i*) El hielo flota en el agua o 2 + 2 = 4.
*ii*) El hielo flota en el agua o 2 + 2 = 5.
*iii*) China está en Europa o 2 + 2 = 4.
*iv*) China está en Europa o 2 + 2 = 5.

Sólo la proposición *iv*) es falsa. Cada una de las otras es verdadera puesto que por lo menos una de sus subproposiciones es verdadera.

**Observación:** La palabra "o" en español se usa en dos formas distintas. Algunas veces se utiliza en el sentido de "$p$ o $q$ o ambas" —es decir, por lo menos una de las dos alternativas ocurre, como acaba de observarse— y otras veces se utiliza en el sentido de "$p$ o $q$ pero no ambas"; es decir, ocurre exactamente una de las dos alternativas. Por ejemplo, en la oración "Él estudiará en Yale o en Harvard" la "o" se utiliza en el segundo sentido, denominado *disyunción exclusivo*. A menos que se establezca otra cosa, "o" se usará en el primer sentido. Esta argumentación indica la precisión que se adquiere a partir el lenguaje simbólico: $p \vee q$ se define mediante su tabla de verdad y *siempre* significa "$p$ y/o $q$".

### Negación, $\neg p$

Dada cualquier proposición $p$, es posible formar otra proposición, denominada *negación* de $p$, al escribir "no es verdad que..." o "Es falso que..." antes de $p$ o, de ser posible, al insertar en $p$ la palabra "no". El símbolo de la negación de $p$ se lee "no $p$", se denota por

$$\neg p$$

El valor de verdad de $\neg p$ depende del valor de verdad de $p$ como sigue:

**Definición 4.3:** Si $p$ es verdadera, entonces $\neg p$ es falsa; y si $p$ es falsa, entonces $\neg p$ es verdadera.

El valor de verdad de $\neg p$ tiene una forma equivalente de definición por medio de la tabla en la figura 4-1*c*). Así, el valor de verdad de la negación de $p$ siempre es el opuesto al valor de verdad de $p$.

**EJEMPLO 4.3** Considere las seis proposiciones siguientes:

$a_1$) El hielo flota en el agua. $a_2$) Es falso que el hielo flota en el agua. $a_3$) El hielo no flota en el agua.
$b_1$) $2 + 2 = 5$. $b_2$) Es falso que $2 + 2 = 5$. $b_3$) $2 + 2 \neq 5$.

Entonces $a_2$) y $a_3$) son, cada una, la negación de $a_1$); y $b_2$) y $b_3$) son, cada una, la negación de $b_1$). Puesto que $a_1$) es verdadera, $a_2$) y $a_3$) son falsas; y puesto que $b_1$) es falsa, $b_2$) y $b_3$) son verdaderas.

**Observación:** La notación lógica para los conectivos "y", "o" y "no" aún no está completamente estandarizada. Por ejemplo, en algunos textos se usa:

$$\begin{array}{ccc} p \,\&\, q,\ p \cdot q \text{ o } pq & \text{para} & p \wedge q \\ p + q & \text{para} & p \vee q \\ p',\ \bar{p} \text{ o } \sim p & \text{para} & \neg p \end{array}$$

## 4.4 PROPOSICIONES Y TABLAS DE VERDAD

Sea $P(p, q, \ldots)$ una expresión construida a partir de variables lógicas $p, q, \ldots$, que tienen el valor VERDADERO (V) o FALSO (F), y los conectivos lógicos $\wedge$, $\vee$ y $\neg$ (además de otros que se analizarán). Una expresión como $P(p, q, \ldots)$ se denomina *proposición*.

La propiedad más importante de una proposición $P(p, q, \ldots)$ es que su valor de verdad depende exclusivamente de los valores de verdad de sus variables; es decir, el valor de verdad de una proposición se conoce una vez que se conoce el valor de verdad de cada una de sus variables. Una forma concisa de mostrar esta relación es por medio de una *tabla de verdad*. A continuación se describe un método para obtener esta tabla de verdad.

Considere, por ejemplo, la proposición $\neg(p \wedge \neg q)$. En la figura 4-2*a*) se indica la forma en que se construye la tabla de verdad de $\neg(p \wedge \neg q)$. Observe que las primeras columnas de la tabla son para las variables $p, q, \ldots$, y que en la tabla hay suficientes renglones a fin de permitir todas las combinaciones posibles de $V$ y $F$ para estas *variables*. (Para 2 variables, como antes, se requieren 4 renglones; para 3 variables se necesitan 8 renglones; y, en general, para $n$ variables se requieren $2^n$ renglones.) Entonces, hay una columna para cada etapa "elemental" de la construcción de la proposición, donde el valor de verdad en cada paso se determina a partir de las etapas previas por las definiciones de los conectivos $\wedge$, $\vee$, $\neg$. Por último, se obtiene el valor de verdad de la proposición, que aparece en la última columna.

La tabla de verdad real de la proposición $\neg(p \wedge \neg q)$ se muestra en la figura 4-2*b*). Consta precisamente de las columnas en la figura 4-2*a*) que aparecen bajo las variables y bajo la proposición; las otras columnas se usaron sólo para la construcción de la tabla de verdad.

| $p$ | $q$ | $\neg q$ | $p \wedge \neg q$ | $\neg(p \wedge \neg q)$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | V |
| V | F | V | V | F |
| F | V | F | F | V |
| F | F | V | F | V |

*a*)

| $p$ | $q$ | $\neg(p \wedge \neg q)$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

*b*)

**Figura 4-2**

**Observación:** Para evitar una cantidad excesiva de paréntesis, algunas veces se adopta un orden de precedencia para los conectivos lógicos:

$$\neg \text{ tiene precedencia sobre } \wedge \text{ que tiene precedencia sobre } \vee$$

Por ejemplo, $\neg p \wedge q$ significa $(\neg p) \wedge q$ y no $\neg(p \wedge q)$.

## Método alterno para construir una tabla de verdad

Otra forma de construir la tabla de verdad de $\neg(p \wedge \neg q)$ es la siguiente:

*a*) Primero se construye la tabla de verdad que se muestra en la figura 4-3. Es decir, primero se enumeran todas las variables y las combinaciones de sus valores de verdad. También hay un renglón final identificado por "Paso". Luego, se escribe la proposición en el renglón superior a la derecha de sus variables con espacio suficiente de modo que haya una columna bajo cada variable y bajo cada operación lógica en la proposición. Por último (paso 1), los valores de verdad de las variables se escriben en la tabla bajo las variables en la proposición.

*b*) Ahora se escriben valores de verdad adicionales en la tabla de verdad, columna por columna, bajo cada operación lógica, como se muestra en la figura 4-4. También se indica el paso en que se introducen los valores de verdad de cada columna.

La tabla de verdad de la proposición consta entonces de las columnas originales bajo las variables y el último paso; es decir, la última columna se escribe en la tabla.

| $p$ | $q$ | $\neg$ | $(p$ | $\wedge$ | $\neg$ | $q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | | V | | | V |
| V | F | | V | | | F |
| F | V | | F | | | V |
| F | F | | F | | | F |
| Paso | | | | | | |

**Figura 4-3**

| $p$ | $q$ | $\neg$ | $(p$ | $\wedge$ | $\neg$ | $q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | | V | | F | V |
| V | F | | V | | V | F |
| F | V | | F | | F | V |
| F | F | | F | | V | F |
| Paso | | | 1 | | 2 | 1 |

*a*)

| $p$ | $q$ | $\neg$ | $(p$ | $\wedge$ | $\neg$ | $q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | | V | F | F | V |
| V | F | | V | V | V | F |
| F | V | | F | F | F | V |
| F | F | | F | F | V | F |
| Paso | | | 1 | 3 | 2 | 1 |

*b*)

| $p$ | $q$ | $\neg$ | $(p$ | $\wedge$ | $\neg$ | $q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | F | F | V |
| F | V | F | V | V | V | F |
| F | F | V | F | F | F | V |
| F | F | V | F | F | V | F |
| Paso | | 4 | 1 | 3 | 2 | 1 |

*c*)

**Figura 4-4**

## 4.5 TAUTOLOGÍAS Y CONTRADICCIONES

Algunas proposiciones $P(p, q, \ldots)$ sólo contienen $V$ en la última columna de sus tablas de verdad o, en otras palabras, son verdaderas para cualesquiera valores de verdad de sus variables. Estas proposiciones se denominan *tautologías*. En forma semejante, una proposición $P(p, q, \ldots)$ se denomina *contradicción* si sólo contiene $F$ en la última columna de su tabla de verdad o, en otras palabras, si es falsa para cualesquiera valores de verdad de sus variables. Por ejemplo, la proposición "$p$ o no $p$", $p \vee \neg p$, es una tautología, y la proposición "$p$ y no $p$", $p \wedge \neg p$, es una contradicción. Esto se comprueba al ver sus tablas de verdad en la figura 4-5. (Las tablas de verdad sólo tienen dos renglones puesto que cada proposición sólo tiene una variable: $p$.)

| $p$ | $\neg p$ | $p \vee \neg p$ |
|---|---|---|
| V | F | V |
| F | V | V |

*a*) $p \vee \neg p$

| $p$ | $\neg p$ | $p \wedge \neg p$ |
|---|---|---|
| V | F | F |
| F | V | F |

*b*) $p \wedge \neg p$

**Figura 4-5**

Observe que la negación de una tautología es una contradicción, ya que siempre es falsa, y que la negación de una contradicción es una tautología, puesto que siempre es verdadera.

Ahora, sea $P(p, q, \ldots)$ una tautología, y sean $P_1(p, q, \ldots)$, $P_2(p, q, \ldots), \ldots$ proposiciones arbitrarias. Puesto que $P(p, q, \ldots)$ no depende de los valores de verdad particulares de sus variables $p, q, \ldots$, es posible sustituir $P_1$ por $p$, $P_2$ por $q, \ldots$, en la tautología $P(p, q, \ldots)$ y mantenerse una tautología. En otras palabras:

**Teorema 4.1 (principio de sustitución):** Si $P(p, q, \ldots)$ es una tautología, entonces $P(p_1, q_2, \ldots)$ es una tautología para proposiciones arbitrarias $P_1, P_2, \ldots$.

## 4.6 EQUIVALENCIA LÓGICA

Dos proposiciones $P(p, q, \ldots)$ y $Q(p, q, \ldots)$ son *lógicamente equivalentes*, *equivalentes* o *iguales*, lo cual se denota por

$$P(p, q, \ldots) \equiv Q(p, q, \ldots)$$

si tienen tablas de verdad idénticas. Considere, por ejemplo, las tablas de verdad de $\neg(p \wedge q)$ y $\neg p \vee \neg q$ que aparecen en la figura 4-6. Observe que ambas tablas de verdad son la misma; es decir, ambas proposiciones son falsas en el primer caso y verdaderas en los otros tres casos. En consecuencia, puede escribirse

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

En otras palabras, las proposiciones son lógicamente equivalentes.

**Observación:** Sean $p$ "Las rosas son rojas" y $q$ "Las violetas son azules". Sea $S$ la proposición:

"No es verdad que las rosas son rojas y las violetas son azules."

Entonces $S$ se escribe en la forma $\neg(p \wedge q)$. No obstante, como ya se observó, $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$. En consecuencia, $S$ tiene el mismo significado que la proposición:

"Las rosas no son rojas, o las violetas no son azules."

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $\neg(p \wedge q)$ |
|---|---|---|---|
| V | V | V | F |
| V | F | F | V |
| F | V | F | V |
| F | F | F | V |

*a*) $\neg(p \wedge q)$

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $\neg p \vee \neg q$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | F |
| V | F | F | V | V |
| F | V | V | F | V |
| F | F | V | V | V |

*b*) $\neg p \vee \neg q$

**Figura 4-6**

## 4.7 ÁLGEBRA DE PROPOSICIONES

Las proposiciones satisfacen varias leyes que se listan en la tabla 4-1. (En esta tabla, $V$ y $F$ se restringen a los valores de verdad "Verdadera" y "Falsa".) El planteamiento formal de este resultado es:

**Teorema 4.2:** Las proposiciones satisfacen las leyes de la tabla 4-1.

(Observe la semejanza entre esta tabla 4-1 y la tabla 1-1 sobre conjuntos.)

**Tabla 4-1 Leyes del álgebra de proposiciones**

| | | |
|---|---|---|
| **Leyes idempotentes:** | (1a) $p \vee p \equiv p$ | (1b) $p \wedge p \equiv p$ |
| **Leyes asociativas:** | (2a) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ | (2b) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ |
| **Leyes conmutativas:** | (3a) $p \vee q \equiv q \vee p$ | (3b) $p \wedge q \equiv q \wedge p$ |
| **Leyes distributivas:** | (4a) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ | (4b) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ |
| **Leyes de identidad:** | (5a) $p \vee F \equiv p$<br>(6a) $p \vee V \equiv V$ | (5b) $p \wedge V \equiv p$<br>(6b) $p \wedge F \equiv F$ |
| **Leyes de doble negación:** | (7a) $\neg\neg p \equiv p$ | |
| **Leyes de complementos:** | (8a) $p \vee \neg p \equiv V$<br>(9a) $\neg V \equiv F$ | (8b) $p \wedge \neg p \equiv V$<br>(9b) $\neg F \equiv V$ |
| **Leyes de DeMorgan:** | (10a) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ | (10b) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ |

## 4.8 PROPOSICIONES CONDICIONALES Y BICONDICIONALES

Muchas proposiciones, en particular las que se hacen en matemáticas, son de la forma "Si $p$ entonces $q$". Estas proposiciones se denominan *condicionales* y se denotan por

$$p \to q$$

La condicional $p \to q$ suele leerse "$p$ implica $q$" o "$p$ sólo si $q$".

Otra proposición común es de la forma "$p$ si y sólo si $q$". Estas proposiciones se denominan *bicondicionales* y se denotan por

$$p \leftrightarrow q$$

Los valores de verdad de $p \to q$ y $p \leftrightarrow q$ están definidos por las tablas en la figura 4-7*a*) y *b*). Observe que:

*a*) La condicional $p \to q$ es falsa sólo cuando la primera parte, $p$, es verdadera y la segunda parte, $q$, es falsa. En consecuencia, cuando $p$ es falsa, la condicional $p \to q$ es verdadera sin importar el valor de verdad de $q$.

*b*) La bicondicional $p \leftrightarrow q$ es verdadera siempre que $p$ y $q$ tienen los mismos valores de verdad; y es falsa en otro caso.

La tabla de verdad de $\neg p \wedge q$ se muestra en la figura 4-7*c*). Observe que las tablas de verdad de $\neg p \vee q$ y $p \to q$ son idénticas; es decir, ambas son falsas sólo en el segundo caso. Por consiguiente, $p \to q$ es lógicamente equivalente a $\neg p \vee q$; es decir,

$$p \to q \equiv \neg p \vee q$$

En otras palabras, la proposición condicional "Si $p$ entonces $q$" es lógicamente equivalente a la proposición "No $p$ o $q$" que sólo implica los conectivos $\vee$ y $\neg$, que ya formaba parte del lenguaje que se estableció antes, de modo que $p \rightarrow q$ se considera una abreviación de una proposición la cual se utiliza a menudo.

| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

*a*) $p \rightarrow q$

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

*b*) $p \leftrightarrow q$

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg p \vee q$ |
|---|---|---|---|
| V | V | F | V |
| V | F | F | F |
| F | V | V | V |
| F | F | V | V |

*c*) $\neg p \vee q$

**Figura 4-7**

## 4.9 ARGUMENTOS

Un *argumento* es una aseveración de que un conjunto dado de proposiciones $P_1, P_2, \ldots, P_n$, que se denominan *premisas*, conduce (tiene una consecuencia) a otra proposición $Q$, que se denomina *conclusión*. Un argumento se denota por

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, \vdash Q$$

A continuación se formaliza el concepto de "argumento lógico" o "argumento válido":

**Definición 4.4:** Un argumento $P_1, P_2, \ldots, P_n, \vdash Q$ es *válido* si $Q$ es verdadera siempre que todas las premisas $P_1, P_2, \ldots, P_n$ son verdaderas.

Un argumento que no es válido se denomina *falacia*.

### EJEMPLO 4.4

*a*) El siguiente argumento es válido:

$$p, p \rightarrow q \vdash q \quad \textbf{(\textit{Ley de separación})}$$

La demostración de esta regla se concluye a partir de la tabla de verdad de la figura 4-7*a*). En específico, $p$ y $p \rightarrow q$ son verdaderas simultáneamente sólo en el caso (renglón) 1, y en este caso $q$ es verdadera.

*b*) El siguiente argumento es una falacia:

$$p \rightarrow q, \; q \vdash p$$

Ya que ambas $p \rightarrow q$ y $q$ son verdaderas en el caso (renglón) 3 en la tabla de verdad de la figura 4-7*a*), pero en este caso $p$ es falsa.

Así, las proposiciones $P_1, P_2, \ldots, P_n$ son verdaderas simultáneamente si y sólo si la proposición $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots P_n$ es verdadera. Por tanto, el argumento $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ es válido si y sólo si $Q$ es verdadera siempre que $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$ es verdadero o, en forma equivalente, si la proposición $(P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow Q$ es una tautología. Este resultado se plantea formalmente a continuación.

**Teorema 4.3:** El argumento $P_1, P_2, \ldots, P_n, \vdash Q$ es válido si y sólo si la proposición $(P_1 \wedge P_2 \ldots \wedge P_n) \rightarrow Q$ es una tautología.

Este teorema se aplica en el siguiente ejemplo.

**EJEMPLO 4.5** Un principio fundamental del razonamiento lógico establece:

"Si $p$ implica $q$ y $q$ implica $r$, entonces $p$ implica $r$."

| $p$ | $q$ | $r$ | $[(p$ | $\rightarrow$ | $q)$ | $\wedge$ | $(q$ | $\rightarrow$ | $r)]$ | $\rightarrow$ | $(q$ | $\rightarrow$ | $r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V | V | V | V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | V | V | V | F | V | F | F | V | V | F | F |
| V | F | V | V | F | F | F | F | V | V | V | V | V | V |
| V | F | F | V | F | F | F | F | V | F | V | V | F | F |
| F | V | V | F | V | V | V | V | V | V | V | F | V | V |
| F | V | F | F | V | V | F | V | F | F | V | F | V | F |
| F | F | V | F | V | F | V | F | V | V | V | F | V | V |
| F | F | F | F | V | F | V | F | V | F | V | F | V | F |
| Paso | | | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 1 | 4 | 1 | 2 | 1 |

**Figura 4-8**

Es decir, el siguiente argumento es válido:

$$p \rightarrow q,\ q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r \quad \textbf{(\textit{Ley del silogismo})}$$

Este hecho se comprueba mediante la tabla de verdad en la figura 4-8, donde se muestra que la siguiente proposición es una tautología:

$$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

En forma equivalente, el argumento es válido puesto que las premisas $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow r$ son verdaderas simultáneamente sólo en los casos (renglones) 1, 5, 7 y 8, y en estos casos la conclusión $p \rightarrow r$ también es verdadera. (Observe que la tabla de verdad requirió $2^3 = 8$ líneas porque hay tres variables: $p$, $q$ y $r$.)

Ahora se aplica la teoría anterior a argumentos que implican proposiciones específicas. Se recalca que la validez de un argumento no depende de los valores de verdad ni del contenido de las proposiciones que aparecen en el argumento, sino de la forma particular del argumento. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo.

**EJEMPLO 4.6** Considere el siguiente argumento:

$S_1$: Si un hombre es un licenciado, es infeliz.
$S_2$: Si un hombre es infeliz, muere joven.

---

$S$ : Los licenciados mueren jóvenes.

Aquí la proposición $S$ bajo la línea es la conclusión del argumento, y las proposiciones $S_1$ y $S_2$ arriba de la línea son las premisas. Se afirma que el argumento $S_1, S_2 \vdash S$ es válido. Como el argumento es de la forma

$$p \rightarrow q,\ q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$$

donde $p$ es "él es un licenciado", $q$ es "él es infeliz y $r$ es " él muere joven"; y por el ejemplo 4.5, este argumento (ley del silogismo) es válido.

## 4.10 FUNCIONES PROPOSICIONALES, CUANTIFICADORES

Sea $A$ un conjunto dado. Una *función proposicional* (*oración* o *proposición abierta*) definida sobre $A$ es una expresión

$$p(x)$$

que posee la propiedad de que $p(a)$ es verdadera o falsa para cada $a \in A$. Es decir, $p(x)$ se convierte en una proposición (con un valor de verdad) siempre que cualquier elemento $a \in A$ se sustituya por la variable $x$. El conjunto $A$ se denomina *dominio* de $p(x)$, y el conjunto $T_p$ de todos los elementos de $A$ para los cuales $p(a)$ es verdadera se denomina *conjunto de verdad* de $p(x)$. En otras palabras,

$$T_p = \{x \mid x \in A,\ p(x) \text{ es verdadera}\} \quad \text{o} \quad T_p = \{x \mid p(x)\}$$

A menudo, cuando $A$ es algún conjunto de números, la condición $p(x)$ tiene la forma de una ecuación o desigualdad que contiene la variable $x$.

**EJEMPLO 4.7** Encuentre el conjunto de verdad para cada función proposicional $p(x)$ definida sobre el conjunto **N** de enteros positivos.

*a*) Sea $p(x)$ "$x + 2 > 7$". Su conjunto de verdad es $\{6, 7, 8, \ldots\}$, que consta de todos los enteros mayores que 5.

*b*) Sea $p(x)$ "$x + 5 < 3$". Su conjunto de verdad es el conjunto vacío $\varnothing$. Es decir, $p(x)$ no es verdadera para ningún entero en **N**.

*c*) Sea $p(x)$ "$x + 5 > 1$". Su conjunto de verdad es **N**. Es decir, $p(x)$ es verdadera para todo elemento en **N**.

**Observación:** El ejemplo anterior muestra que si $p(x)$ es una función proposicional definida sobre un conjunto $A$, entonces $p(x)$ puede ser verdadera para toda $x \in A$, para alguna $x \in A$ o para ninguna $x \in A$. En las dos subsecciones siguientes se analizan cuantificadores relacionados con tales funciones proposicionales.

## Cuantificador universal

Sea $p(x)$ una función proposicional definida sobre un conjunto $A$. Considere la expresión

$$(\forall x \in A)p(x) \quad \text{o} \quad \forall x\, p(x) \tag{4.1}$$

que se lee "Para toda $x$ en $A$, $p(x)$ es una proposición verdadera", o simplemente "Para toda $x$, $p(x)$". El símbolo

$$\forall$$

que se lee "para toda" o "para cada" se denomina *cuantificador universal*. La proposición (*4.1*) es equivalente a la proposición

$$T_p = \{x \mid x \in A,\ p(x)\} = A \tag{4.2}$$

es decir, que el conjunto de verdad de $p(x)$ es todo el conjunto $A$.

La expresión $p(x)$ es una oración o proposición abierta y en consecuencia carece de valor de verdad. Sin embargo, $\forall x\, p(x)$, que es $p(x)$ precedida por el cuantificador $\forall$ tiene un valor de verdad que se concluye a partir de la equivalencia de (*4.1*) y (*4.2*). En específico:

| |
|---|
| $Q_1$: Si $\{x \mid x \in A,\ p(x)\} = A$ entonces $\forall x\, p(x)$ es verdadera; en otro caso, $\forall x\, p(x)$ es falsa. |

**EJEMPLO 4.8**

*a*) La proposición $(\forall n \in \mathbf{N})(n + 4 > 3)$ es verdadera puesto que $\{n \mid n + 4 > 3\} = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbf{N}$.

*b*) La proposición $(\forall n \in \mathbf{N})(n + 2 > 8)$ es falsa puesto que $\{n \mid n + 2 > 8\} = \{7, 8, \ldots\} \neq \mathbf{N}$.

*c*) El símbolo $\forall$ define la intersección de una colección indexada $\{A_i \mid i \in I\}$ de conjuntos $A_i$ como sigue:

$$\cap(A_i \mid i \in I) = \{x \mid \forall_i \in I,\ x \in A_i\}$$

## Cuantificador existencial

Sea $p(x)$ una función proposicional definida sobre un conjunto $A$. Considere la expresión

$$(\exists x \in A)p(x) \quad \text{o} \quad \exists x,\ p(x) \tag{4.3}$$

que se lee "Existe una $x$ en $A$ tal que $p(x)$ es una proposición verdadera" o, simplemente, "Para alguna $x$, $p(x)$". El símbolo

$$\exists$$

que se lee "existe" o "para algún" o "al menos para un" se denomina *cuantificador existencial*. La proposición (*4.3*) es equivalente a la proposición

$$T_p = \{x \mid x \in A,\ p(x)\} \neq \varnothing \tag{4.4}$$

es decir, que el conjunto de verdad de $p(x)$ no es vacío. En consecuencia, $\exists x\, p(x)$; es decir, $p(x)$ precedida por el cuantificador $\exists$ tiene un valor de verdad. En específico:

| |
|---|
| $Q_2$: Si $\{x \mid p(x)\} \neq \varnothing$ entonces $\exists x\, p(x)$ es verdadera; en otro caso, $\exists x\, p(x)$ es falsa. |

**EJEMPLO 4.9**

*a*) La proposición $(\exists n \in N)(n + 4 < 7)$ es verdadera puesto que $\{n \mid n + 4 < 7\} = \{1,\ 2\} \neq \varnothing$.

*b*) La proposición $(\exists n \in N)(n + 6 < 4)$ es falsa puesto que $\{n \mid n + 6 < 4\} = \varnothing$.

*c*) El símbolo $\exists$ define la unión de una colección indexada $\{A_i \mid i \in I\}$ de conjuntos $A_i$ como sigue:

$$\cup(A_i \mid i \in I) = \{x \mid \exists\, i \in I,\ x \mid \in A_i\}$$

## 4.11 NEGACIÓN DE PROPOSICIONES CUANTIFICADAS

Considere la proposición: "Todos los especializados en matemáticas son varones". Su negación es:

> "No es cierto que todos los especializados en matemáticas son varones" o, en forma equivalente, "Existe por lo menos un especializado en matemáticas que es mujer (no varón)"

Con símbolos, si se usa $M$ para denotar el conjunto de especializados en matemáticas lo anterior se escribe así

$$\neg(\forall x \in M)(x \text{ es varón}) \equiv (\exists\, x \in M)\ (x \text{ no es varón})$$

o, cuando $p(x)$ denota "$x$ es varón",

$$\neg(\forall x \in M)\, p(x) \equiv (\exists\, x \in M)\neg p(x) \quad \text{o} \quad \neg\forall x\, p(x) \equiv \exists x \neg p(x)$$

Lo anterior es verdadero para cualquier proposición $p(x)$. Es decir:

**Teorema 4.4 (de DeMorgan):** $\neg(\forall x \in A)\, p(x) \equiv (\exists\, x \in A)\neg p(x)$.

En otras palabras, las dos proposiciones siguientes son equivalentes:

1) No es cierto que para toda $a \in A$, $p(a)$ es verdadera. 2) Existe una $a \in A$ tal que $p(a)$ es falsa.

Hay un teorema semejante para la negación de una proposición que contiene el cuantificador existencial.

**Teorema 4.5 (de DeMorgan):** $\neg(\exists x \in A)\, p(x) \equiv (\forall x \in A)\neg p(x)$.

Es decir, las dos proposiciones siguientes son equivalentes:

1) No es cierto que para alguna $a \in A$, $p(a)$ es verdadera. 2) Para toda $a \in A$, $p(a)$ es falsa.

**EJEMPLO 4.10**

*a*) Las siguientes proposiciones son negaciones mutuas:

"Para todos los enteros positivos $n$ se cumple $n + 2 > 8$"
"Existe un entero positivo $n$ tal que $n + 2 \not> 8$"

*b*) Las siguientes proposiciones también son negaciones mutuas:

"Existe una persona (viva) que tiene 150 años de edad"
"Toda persona viva no tiene 150 años de edad"

**Observación:** La expresión $\neg p(x)$ tiene el significado evidente:

"La proposición $\neg p(a)$ es verdadera cuando $p(a)$ es falsa, y viceversa"

Antes $\neg$ se usó como una operación sobre proposiciones; aquí $\neg$ se usa como una operación sobre funciones proposicionales. En forma semejante, $p(x) \wedge q(x)$ que se lee "$p(x)$ y $q(x)$", se define por:

"La proposición $p(a) \wedge q(a)$ es verdadera cuando $p(a)$ y $q(a)$ son verdaderas"

En forma semejante, $p(x) \vee q(x)$ que se lee "$p(x)$ o $q(x)$", se define por:

"La proposición $p(a) \vee q(a)$ es verdadera cuando $p(a)$ o $q(a)$ es verdadera"

Por tanto, en términos de conjuntos de verdad:

*i*) $\neg p(x)$ es el complemento de $p(x)$.
*ii*) $p(x) \wedge q(x)$ es la intersección de $p(x)$ y $q(x)$.
*iii*) $p(x) \vee q(x)$ es la unión de $p(x)$ y $q(x)$.

También es posible demostrar que las leyes para las proposiciones se cumplen para las funciones proposicionales. Por ejemplo, se tienen las leyes de DeMorgan:

$$\neg(p(x) \wedge q(x)) \equiv \neg p(x) \vee \neg q(x) \quad \text{y} \quad \neg(p(x) \vee q(x)) \equiv \neg p(x) \wedge \neg q(x)$$

## Contraejemplo

El teorema 4.6 establece que demostrar que una proposición $\forall x, p(x)$ es falsa, es equivalente a demostrar que $\exists x \neg p(x)$ es verdadera o, en otras palabras, que existe un elemento $x_0$ con la propiedad de que $p(x_0)$ es falsa. Este elemento $x_0$ se denomina *contraejemplo* de la proposición $\forall x, p(x)$.

**EJEMPLO 4.11**

*a*) Considere la proposición $\forall x \in \mathbf{R}, |x| \neq 0$. La proposición es falsa puesto que 0 es un contraejemplo; es decir, $|0| \neq 0$ no es verdadera.

*b*) Considere la proposición $\forall x \in \mathbf{R},\ x^2 \geq x$. La proposición no es verdadera puesto que, por ejemplo, $\frac{1}{2}$ es un contraejemplo. En específico, $(\frac{1}{2})^2 \geq \frac{1}{2}$ no es verdadera; es decir, $(\frac{1}{2})^2 < \frac{1}{2}$.

*c*) Considere la proposición $\forall x \in \mathbf{N}, x^2 \geq x$. Esta proposición es verdadera donde $\mathbf{N}$ es el conjunto de enteros positivos. En otras palabras, no existe ningún entero positivo $n$ para el cual $n^2 < n$.

## Funciones proposicionales con más de una variable

Una función proposicional (de $n$ variables) definida sobre un conjunto producto $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ expresiones se expresa con

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

con la propiedad de que $p(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es verdadera o falsa para cualquier $n$-eada $(a_1, \ldots, a_n)$ en $A$. Por ejemplo,

$$x + 2y + 3z < 18$$

es una función proposicional sobre $\mathbf{N}^3 = \mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Tal función proposicional no tiene valor de verdad. Sin embargo, se hace lo siguiente:

**Principio básico:** Una función proposicional precedida por un cuantificador para cada variable, por ejemplo,

$$\forall x \exists y, \ p(x, y) \quad \text{o} \quad \exists x \, \forall y \, \exists z, \ p(x, y, z)$$

denota una proposición y tiene un valor de verdad.

**EJEMPLO 4.12** Sea $B = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ y sea $p(x, y)$ que denota "$x + y = 10$". Entonces $p(x, y)$ es una función proposicional sobre $A = B^2 = B \times B$.

*a*) La siguiente es una proposición puesto que para cada variable hay un cuantificador:

$$\forall x \exists y, \ p(x, y) \quad \text{es decir,} \quad \text{"Para toda } x \text{ existe una } y \text{ tal que } x + y = 10\text{"}$$

Esta proposición es verdadera. Por ejemplo, si $x = 1$, sea $y = 9$; si $x = 2$, sea $y = 8$ y así en lo sucesivo.

*b*) La siguiente también es una proposición:

$$\exists y \forall x, \ p(x, y), \quad \text{es decir,} \quad \text{"Existe una } y \text{ tal que, para toda } x\text{, se tiene } x + y = 10\text{"}$$

No existe ninguna $y$ así; por tanto, esta proposición es falsa.

Observe que la única diferencia entre *a*) y *b*) es el orden de los cuantificadores. Entonces, un orden distinto de los cuantificadores lleva a una proposición diferente. Se observa que al traducir estas proposiciones cuantificadas a lenguaje coloquial, la expresión "tal que" a menudo aparece a continuación de "existe".

## Negación de proposiciones cuantificadas con más de una variable

La negación de las proposiciones cuantificadas con más de una variable se obtiene al aplicar los teoremas 4.5 y 4.6. Así, cada $\forall$ se cambia por $\exists$ y cada $\exists$ se cambia por $\forall$ a medida que el símbolo de negación $\neg$ recorre la proposición de izquierda a derecha. Por ejemplo

$$\begin{aligned} \neg[\forall x \exists y \exists z, \ p(x, y, z)] &\equiv \exists x \neg[\exists y \exists z, \ p(x, y, z)] \equiv \neg \exists z \forall y [\exists z, \ p(x, y, z) \\ &\equiv \exists x \forall y \forall z, \ \neg p(x, y, z) \end{aligned}$$

Por supuesto, al negar estas proposiciones cuantificadas no se escriben todos los pasos.

**EJEMPLO 4.13**

*a*) Considere la proposición cuantificada:

"Todo estudiante tiene por lo menos un curso en el cual el docente es un asistente del profesor titular".

Su negación es la proposición:

"Existe un estudiante tal que en todo curso el docente no es un asistente del profesor titular".

*b*) A continuación se proporciona la definición formal de que $L$ es el límite de una sucesión $a_1, a_2, \ldots$:

$$\forall \in > 0, \exists\, n_0 \in \mathrm{N},\ \forall n > n_0 \text{ se tiene } |a_n - L| < \in$$

Entonces, $L$ no es el límite de la sucesión $a_1, a_2, \ldots$, cuando:

$$\exists \in > 0, \forall n_0 \in \mathrm{N},\ \exists\, n > n_0 \text{ tal que } |a_n - L| \geq \in$$

## PROBLEMAS RESUELTOS

### PROPOSICIONES Y TABLAS DE VERDAD

**4.1** Sean $p$ "Hace frío" y $q$ "Está lloviendo". Proporcionar una oración coloquial sencilla que describa cada una de las siguientes proposiciones: *a*) $\neg p$; *b*) $p \vee q$; *c*) $p \wedge q$; *d*) $q \vee \neg q$.

En cada caso, $\wedge$, $\vee$ y $\sim$ se traducen por "y", "o" y "es falso que" o "no", respectivamente, y luego se simplifica la oración en lenguaje coloquial.

*a*) No hace frío.
*b*) Hace frío y está lloviendo.
*c*) Hace frío o está lloviendo.
*d*) Está lloviendo o no hace frío.

**4.2.** Encontrar la tabla de verdad de $\neg p \wedge q$.

La tabla de verdad de $\neg p \wedge q$ se construye como en la figura 4-9*a*).

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg p \wedge q$ |
|---|---|---|---|
| V | V | F | F |
| V | F | F | F |
| F | V | V | V |
| F | F | V | F |

*a*) $\neg p \wedge q$

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $\neg(p \wedge q)$ | $p \vee \neg(p \wedge q)$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | V | F | V |
| V | F | F | V | V |
| F | V | F | V | V |
| F | F | F | V | V |

*b*) $p \vee \neg(p \wedge q)$

**Figura 4-9**

**4.3** Compruebe que la proposición $p \vee \neg(p \wedge q)$ es una tautología.

La tabla de verdad de $p \vee \neg(p \wedge q)$ se construye como se muestra en la figura 4-9*b*). Puesto que el valor de verdad de $p \vee \neg(p \wedge q)$ es $V$ para todos los valores de $p$ y $q$, la proposición es una tautología.

**4.4** Demuestre que las proposiciones $\neg(p \wedge q)$ y $\neg p \vee \neg q$ son lógicamente equivalentes.

Las tablas de verdad de $\neg(p \wedge q)$ y $\neg p \vee \neg q$ se construyen como en la figura 4-10. Puesto que las tablas de verdad son las mismas (ambas proposiciones son falsas en el primer caso y verdaderas en los otros tres), las proposiciones $\neg(p \wedge q)$ y $\neg p \vee \neg q$ son lógicamente equivalentes y puede escribirse

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q.$$

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $\neg(p \wedge q)$ |
|---|---|---|---|
| V | V | V | F |
| V | F | F | V |
| F | V | F | V |
| F | F | F | V |

*a*) $\neg(p \wedge q)$

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $\neg p \vee \neg q$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | F |
| V | F | F | V | V |
| F | V | V | F | V |
| F | F | V | V | V |

*b*) $\neg p \vee \neg q$

**Figura 4-10**

**4.5** Con las leyes de la tabla 4-1, demostrar que $\neg(p \wedge q) \vee (\neg q \wedge q) \equiv \neg q$.

| **Proposición** | | **Razón** |
|---|---|---|
| 1) $\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q)$ | $\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ | Ley de DeMorgan |
| 2) | $\equiv \neg p \wedge (\neg q \vee q)$ | Ley distributiva |
| 3) | $\equiv \neg p \wedge T$ | Ley de complementos |
| 4) | $\equiv \neg p$ | Ley de identidad |

## PROPOSICIONES CONDICIONALES

**4.6** Reescriba las siguientes proposiciones sin usar el condicional:

*a*) Si hace frío, él lleva sombrero.
*b*) Si aumenta la productividad, entonces suben los salarios.

Recuerde que "Si $p$ entonces $q$" es equivalente a "No $p$ o $q$"; es decir, $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$. Por tanto,

*a*) No hace frío o él lleva sombrero.
*b*) La productividad no aumenta o suben los salarios.

**4.7** Considere la proposición condicional $p \rightarrow q$. Las proposiciones simples $q \rightarrow p$, $\neg p \rightarrow \neg q$ y $\neg q \rightarrow \neg p$ se denominan, respectivamente, *recíproca*, *inversa* y *contrapositiva* de la condicional $p \rightarrow q$. ¿Cuáles de estas proposiciones son lógicamente equivalentes a $p \rightarrow q$, en caso de haber alguna?

Sus tablas de verdad se construyen como en la figura 4-11. Sólo la contrapositiva $\neg q \rightarrow \neg p$ es lógicamente equivalente a la proposición condicional original $p \rightarrow q$.

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | Condicional $p \rightarrow q$ | Recíproca $q \rightarrow p$ | Inversa $\neg p \rightarrow \neg q$ | Contrapositiva $\neg q \rightarrow \neg p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | V | V | V | V |
| V | F | F | V | F | V | V | F |
| F | V | V | F | V | F | F | V |
| F | F | V | V | V | V | V | V |

**Figura 4-11**

**4.8** Determine la contrapositiva de cada proposición:

*a*) Si Eric es poeta, entonces es pobre.
*b*) Sólo si Marcos estudia aprobará el examen.

*a*) La contrapositiva de $p \rightarrow q$ es $\neg q \rightarrow \neg p$. Por tanto, la contrapositiva es:

Si Eric no es pobre, entonces no es poeta.

*b*) La proposición es equivalente a: "Si Marcos aprueba el examen, entonces estudió." Por tanto, su contrapositiva es:

Si Marcos no estudia, entonces no aprobará el examen.

**4.9** Escriba la negación de cada una de las siguientes proposiciones en la forma más sencilla posible:

*a*) Si ella trabaja, ganará dinero.
*b*) Él nada si y sólo si el agua está tibia.
*c*) Si nieva, entonces ellos no conducen el automóvil.

*a*) Observe que $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$; por tanto, la negación de la proposición es:

Ella trabaja o no ganará dinero.

*b*) Observe que $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q \equiv \neg p \leftrightarrow q$; por tanto, la negación de la proposición es cualquiera de las siguientes:

Él nada si y sólo si el agua no está tibia.
Él no nada si y sólo si el agua está tibia.

*c*) Observe que $\neg(p \to \neg q) \equiv p \wedge \neg\neg q \equiv p \wedge q$; por tanto, la negación de la proposición es:

Nieva y ellos conducen el automóvil.

## ARGUMENTOS

**4.10** Demuestre que el siguiente argumento es una falacia: $p \to q, \neg p \vdash \neg q$.

La tabla de verdad de $[(p \to q) \wedge \neg p] \to \neg q$ se construye como en la figura 4-12. Puesto que la proposición $[(p \to q) \wedge \neg p] \to \neg q$ no es una tautología, el argumento es una falacia. En forma equivalente, el argumento es una falacia puesto que en la tercera línea de la tabla de verdad $p \to q$ y $\neg p$ son verdaderas pero $\neg q$ es falsa.

| $p$ | $q$ | $p \to q$ | $\neg p$ | $(p \to q) \wedge \neg p$ | $\neg q$ | $[(p \to q) \wedge \neg p] \to \neg p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | F | F | F | V |
| V | F | F | F | F | V | V |
| F | V | V | V | V | F | F |
| F | F | V | V | V | V | V |

**Figura 4-12**

**4.11** Determine la validez del siguiente argumento: $p \to q, \neg p \vdash \neg p$.

La tabla de verdad de $[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$ se construye como en la figura 4-13. Puesto que la proposición $[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$ es una tautología, el argumento es válido.

| $p$ | $q$ | $[(p$ | $\to$ | $q)$ | $\wedge$ | $\neg$ | $q]$ | $\to$ | $\neg$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | F | F | V | V | F | V |
| V | F | V | F | F | F | V | F | V | F | V |
| F | V | F | V | V | F | F | V | V | V | F |
| F | F | F | V | F | V | V | F | V | V | F |
| Paso | | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 4 | 2 | 1 |

**Figura 4-13**

**4.12** Demuestre que el siguiente argumento es válido: $p \to \neg q, r \to q, r \vdash \neg p$.

La tabla de verdad de las premisas y conclusiones se muestran en la figura 4-14*a*). Luego, $p \to \neg q$, $r \to q$, y $r$ son verdaderas simultáneamente sólo en el quinto renglón de la tabla, donde $\neg p$ también es verdadera. Por tanto, el argumento es válido.

| | $p$ | $q$ | $r$ | $p \to \neg q$ | $r \to q$ | $\neg q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | V | V | V | F | V | F |
| 2 | V | V | F | F | V | F |
| 3 | V | F | V | V | F | F |
| 4 | V | F | F | V | V | F |
| 5 | F | V | V | V | V | V |
| 6 | F | V | F | V | V | V |
| 7 | F | F | V | V | F | V |
| 8 | F | F | F | V | V | V |

*a*)

| $p$ | $q$ | $\neg q$ | $p \to \neg q$ | $\neg p$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | F |
| V | F | V | V | F |
| F | V | F | V | V |
| F | F | V | V | V |

*b*)

**Figura 4-14**

**4.13** Determine la validez del siguiente argumento:

Si 7 es menor que 4, entonces 7 no es un número primo.
7 no es menor que 4.

---

7 es un número primo.

Primero debe traducir el argumento a su forma simbólica: sean $p$ "7 es menor que 4" y $q$ "7 es un número primo". Entonces el argumento es de la forma

$$p \rightarrow \neg q,\ \neg q \vdash q$$

Luego, se construye una tabla de verdad como se muestra en la figura 4-14*b*). Se demuestra que el argumento anterior es una falacia puesto que, en la cuarta línea de la tabla de verdad, las premisas $p \rightarrow \neg q$ y $\neg p$ son verdaderas, pero la conclusión $q$ es falsa.

**Observación:** El que la conclusión del argumento sea una proposición verdadera es irrelevante respecto al hecho de que el argumento presentado es una falacia.

**4.14** Pruebe la validez del siguiente argumento:

Si dos lados de un triángulo son iguales, entonces los ángulos opuestos son iguales.
Dos lados de un triángulo no son iguales.

---

Los ángulos opuestos de un triángulo no son iguales.

Primero se traduce el argumento a la forma simbólica $p \rightarrow q, \neg p \vdash \neg q$, donde $p$ es "Dos lados de un triángulo son iguales" y $q$ es "Los ángulos opuestos son iguales". De acuerdo con el problema 4.10, este argumento es una falacia.

**Observación:** Aunque la conclusión *es una* consecuencia de la segunda premisa y los axiomas de la geometría euclidiana, el argumento anterior no constituye tal demostración puesto que el argumento es una falacia.

## CUANTIFICADORES Y FUNCIONES PROPOSICIONALES

**4.15** Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

*a*) $(\exists x \in A)\,(x + 3 = 10)$ *c*) $(\exists x \in A)\,(x + 3 < 5)$
*b*) $(\forall x \in A)\,(x + 3 < 10)$ *d*) $(\forall x \in A)\,(x + 3 \leq 7)$

*a*) Falsa, ya que ningún número en $A$ es una solución de $x + 3 = 10$.
*b*) Verdadera, ya que todo número en $A$ satisface $x + 3 < 10$.
*c*) Verdadera, ya que si $x_0 = 1$, entonces $x_0 + 3 < 5$; es decir, 1 es una solución.
*d*) Falsa, ya que si $x_0 = 5$, entonces $x_0 + 3$ no es menor o igual que 7. En otras palabras, 5 no es una solución de la condición dada.

**4.16** Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones, donde $\mathbf{U} = \{1, 2, 3\}$ es el conjunto universo:

*a*) $\exists x \forall y,\ x^2 < y + 1$; *b*) $\forall x \exists y,\ x^2 + y^2 < 12$; *c*) $\forall x \forall y,\ x^2 + y^2 < 12$.

*a*) Verdadera, ya que si $x = 1$, entonces 1, 2 y 3 son soluciones de $1 < y + 1$.
*b*) Verdadera. Para todo $x_0$, sea $y = 1$; entonces $x_0^2 + 1 < 12$ es una proposición verdadera.
*c*) Falsa, ya que si $x_0 = 2$ y $y_0 = 3$, entonces $x_0^2 + y_0^2 < 12$ no es una proposición verdadera.

**4.17** Niegue cada una de las siguientes proposiciones:

*a*) $\exists x\ \forall y,\ p(x, y)$; *b*) $\exists x\ \forall y,\ p(x, y)$; *c*) $\exists y\ \exists x\ \forall z,\ p(x, y, z)$.

Se usa $\neg \forall x\ p(x) \equiv \exists x \neg p(x)$ y $\neg \exists x\ p(x) \equiv \forall x \neg p(x)$:

*a*) $\neg(\exists x \forall y,\ p(x, y)) \equiv \forall x \exists y \neg p(x, y)$
*b*) $\neg(\forall x \forall y,\ p(x, y)) \equiv \exists x \exists y \neg p(x, y)$
*c*) $\neg(\exists y\ \exists x\ \forall z,\ p(x, y, z)) \equiv \forall y\ \forall x\ \exists z \neg p(x, y, z)$

**4.18** Sea $p(x)$ la oración "$x + 2 > 5$". Concluya si $p(x)$ es o no una función proposicional sobre cada uno de los siguientes conjuntos: *a*) $\mathbf{N}$, el conjunto de enteros positivos; *b*) $M = \{-1, -2, -3, \ldots\}$; *c*) $C$, el conjunto de números complejos.

*a*) Sí.

*b*) Aunque $p(x)$ es falsa para cualquier elemento en $M$, $p(x)$ sigue siendo una función proposicional sobre $M$.

*c*) No. Observe que $2i + 2 > 5$ no tiene ningún sentido. En otras palabras, las desigualdades no están definidas para los números complejos.

**4.19** Niegue cada una de las siguientes proposiciones: *a*) Todos los estudiantes viven en los dormitorios. *b*) Todos los especializados en matemáticas son varones. *c*) Algunos estudiantes tienen 25 o más años de edad.

Se usa el teorema 4.4 para negar los cuantificadores.

*a*) Por lo menos un estudiante no vive en los dormitorios. (Algunos estudiantes no viven en los dormitorios.)

*b*) Por lo menos un especializado en matemáticas es mujer. (Algunas especializadas en matemáticas son mujeres.)

*c*) Ninguno de los estudiantes tiene 25 o más años de edad. (Todos los estudiantes son menores de 25 años de edad.)

## PROBLEMAS SUPLEMENTARIOS

### PROPOSICIONES Y TABLAS DE VERDAD

**4.20** Sean $p$ "Es rico" y $q$ "Es feliz". Escriba cada proposición en forma simbólica, use $p$ y $q$. Observe que "Es pobre" y "Es infeliz" son equivalentes a $\neg p$ y $\neg q$, respectivamente.

*a*) Si es rico, entonces es infeliz.

*b*) No es rico ni feliz.

*c*) Es necesario ser pobre para ser feliz.

*d*) Ser pobre es ser infeliz.

**4.21** Encuentre las tablas de verdad para *a*) $p \vee \neg q$; *b*) $\neg p \wedge \neg q$.

**4.22** Compruebe que la proposición $(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)$ es una contradicción.

### ARGUMENTOS

**4.23** Pruebe la validez de cada argumento:

*a*) Si llueve, Eric se enfermará.
No llovió.
____________________
Eric no estaba enfermo.

*b*) Si llueve, Eric se enfermará.
Eric no estaba enfermo.
____________________
No llovió.

**4.24** Probar la validez del siguiente argumento:

Si estudio, entonces no reprobaré matemáticas.
Si no juego basquetbol, entonces estudiaré.
Pero reprobé matemáticas.
____________________
Por tanto, debo haber jugado basquetbol.

### CUANTIFICADORES

**4.25** Sea $A = \{1, 2, \ldots, 9, 10\}$. Considere cada una de las siguientes oraciones. Si se trata de una proposición, determine su valor de verdad; si se trata de una función proposicional, determine su conjunto de verdad.

*a*) $(\forall x \in A)(\exists y \in A)(x + y < 14)$

*b*) $(\forall y \in A)(x + y < 14)$

*c*) $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(x + y < 14)$

*d*) $(\exists y \in A)(x + y < 14)$

**4.26** Niegue cada una de las siguientes proposiciones:

*a*) Si el profesor está ausente, entonces algunos estudiantes no terminan su tarea.
*b*) Todos los estudiantes terminaron su tarea y el profesor está presente.
*c*) Algunos de los estudiantes no terminaron su tarea o el profesor está ausente.

**4.27** Niegue cada proposición en el problema 4.15.

**4.28** Proporcione un contraejemplo para cada proposición, donde $\mathbf{U} = \{3, 5, 7, 9\}$ es el conjunto universo:

*a*) $\forall x, x + \geq 7$, *b*) $\forall x$, $x$ es impar, *c*) $\forall x$, $x$ es primo, *d*) $\forall x, |x| = x$

## Respuestas a los problemas suplementarios

**4.20** *a*) $p \to \neg q$; *b*) $\neg p \wedge \neg q$; *c*) $q \to \neg p$; *d*) $\neg p \to \neg q$.

**4.21** *a*) V, V, F, V; *b*) F, F, F, V.

**4.22** Se construye su tabla de verdad. Es una contradicción puesto que su tabla de verdad es falsa para todos los valores de $p$ y $q$.

**4.23** Primero se traducen los argumentos a su forma simbólica: $p$ por "Llueve" y $q$ por "Eric está enfermo":

*a*) $p \to q, \neg p \vdash \neg q$ *b*) $p \to q, \neg q \vdash \neg p$

Por el problema 4.10, *a*) es una falacia. Por el problema 4.11, *b*) es válida.

**4.24** Sean $p$ "Estudio", $q$ "Reprobé matemáticas" y $r$ "Juego basquetbol". El argumento tiene la forma:

$$p \to \neg q, \neg r \to p, q \vdash r$$

Se construyen las tablas de verdad como en la figura 4-15, donde las premisas $p \to \neg q$, $\neg r \to p$, y $q$ son verdaderas simultáneamente sólo en la quinta línea de la tabla, y en ese caso la conclusión $r$ también es verdadera. Por tanto, el argumento es válido.

| $p$ | $q$ | $r$ | $\neg q$ | $p \to \neg q$ | $\neg r$ | $\neg r \to p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | F | F | F | V |
| V | V | F | F | F | V | V |
| V | F | V | V | V | F | V |
| V | F | F | V | V | V | V |
| F | V | V | F | V | F | V |
| F | V | F | F | V | V | F |
| F | F | V | V | V | F | V |
| F | F | F | V | V | V | F |

**Figura 4-15**

**4.25** *a*) La proposición abierta en dos variables está precedida por dos cuantificadores; por tanto, se trata de una proposición. Además, la proposición es verdadera.
*b*) La proposición abierta está precedida por un cuantificador; por tanto, se trata de una función proposicional de la otra variable. Observe que para todo $y \in A$, $x_0 + y < 14$ si y sólo si $x_0 = 1, 2$ o 3. Por tanto, el conjunto de verdad es $\{1, 2, 3\}$.
*c*) Se trata de una proposición y es falsa: si $x_0 = 8$ y $y_0 = 9$, entonces $x_0 + y_0 < 14$ no es verdadera.
*d*) Es una oración abierta en $x$. El conjunto de verdad es $A$ en sí mismo.

**4.26** *a*) El profesor está ausente y todos los estudiantes terminaron su tarea.
*b*) Algunos estudiantes no terminaron su tarea o el profesor está ausente.
*c*) Todos los estudiantes terminaron su tarea y el profesor está presente.

**4.27** *a*) $(\forall x \in A)(x + 3 \neq 10)$ *c*) $(\forall x \in A)(x + 3 \geq 5)$
*b*) $(\exists x \in A)(x + 3 \geq 10)$ *d*) $(\exists x \in A)(x + 3 > 7)$

**4.28** *a*) Aquí 3 es un contraejemplo.
*b*) La proposición es verdadera; por tanto, no existe ningún contraejemplo.
*c*) Aquí el único contraejemplo es 9.
*d*) La proposición es verdadera; por tanto, no existe ningún contraejemplo.