Coloraciones

Javier Caram e Isabela Loredo

7 de diciembre de 2024

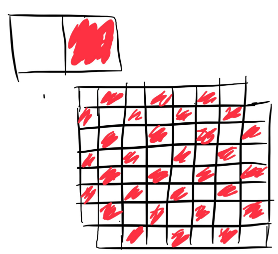
1. Introducción

1.1. Invarianza

Una invarianza es una propiedad que no varía dentro del problema a pesar de que se hagan ciertos cambios. En combinatoria, se usan para demostrar que algún acomodo o configuración no es posible o que únicamente lo puede ser bajo determinadas condiciones. Puede que no conocieran el término "invarianza" pero... ¡es algo que llevan usando desde que iniciaron en la olimpiada! Por ejemplo ver que si n es entero n^2+n siempre es par o que $n^2 \equiv 0 \; o \; 1 \; (mod\, 4)$ son invarianzas, ya que son propiedades que no cambian a pesar de que cambie n. Una de las estrategias más comunes para encontrar invarianzas dentro de un problema de combinatoria son las coloraciones.

Ejemplo 1: ¿Se puede llenar un tablero de 8×8 al que se le quitaron esquinas opuestas con fichas de 2×1 (y 1×2) sin que se traslapen o se salgan del tablero?

Al empezar a intentar este problema, parece que si es posible, ya que hay 62 casillas y 62 es múltiplo de 2. Por ello, la manera de resolverlo involucra buscar otra invarianza que no es la paridad. Coloreamos de 2 colores como tablero de ajedrez:



Notamos que cada ficha de 2×1 cubre una casilla azul y una roja pero, hay 30 casillas coloreadas y 32 blancas por lo que no es posible llenarlo ya que no podemos colocar las 31 fichas de 2×1 necesarias.

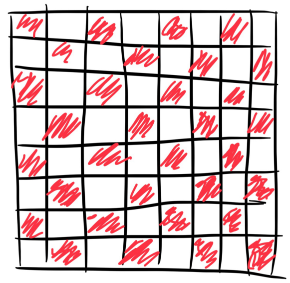
En el ejemplo anterior, la invarianza nos la colorear la y notar que cada ficha de 2×1 ocupa una casilla de cada color.

1.2. Coloración

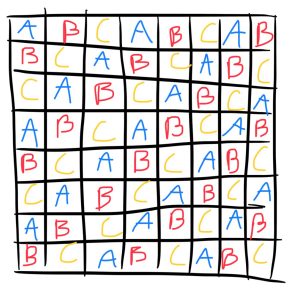
Como muestra el ejemplo anterior, una coloración es "marcar" parte de la figura y fijarnos en ella. Esto se hace para encontrar invarianzas de una manera más sencilla. Cada problema usa una coloración específica por ello, la difcultad de estos problemas está en determinar cuál usar y porque usarla. En algunos problemas, además de la coloración, es útil usar simetría ("rotar" la coloración). A pesar de esto, hay coloraciones que aparecen más en los problemas y es importante siempre tenerlas presente.

2. Coloraciones Comunes

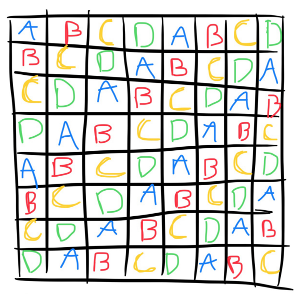
2.1. Coloración de ajedrez



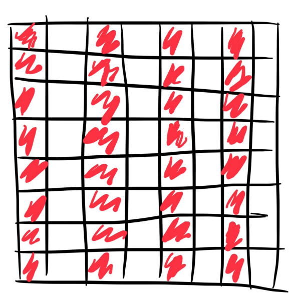
2.2. Coloración de 3 colores



2.3. Coloración de 4 colores



2.4. Coloración de filas



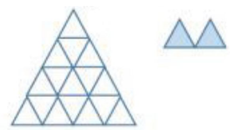
No todos los problemas usan estas coloraciones por lo que también tienes que intentar crear coloraciones distintas en algunos de ellos. Los problemas que salen en olimpiadas internacionales generalmente usan coloraciones poco intuitivas y muy especificas pero eso los hace más divertidos ¿no?

3. Más Ejemplos

1. En un salón de alumnos hay 35 sillas ordenadas en un arreglo de 7×5 cada una con un alumno sentado en ella. La maestra ordena que cada alumno se siente en una silla vecina a la suya. ¿Se puede hacer esto sin que 2 alumnos queden en la misma silla?

2. ¿Puede un caballo de ajedrez iniciar su recorrido en la esquina inferior izquierda de un tablero de 8×8 y terminar en la esquina superior derecha pasando por todas las casillas del tablero sin repetir alguna?

3. ¿De cuantas formas se puede llenar el siguiente tablero usando piezas como la sombreada?



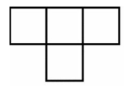
4. En cada casilla de un tablero de 9×9 se encuentra un bicho. Al mismo tiempo, cada bicho se va a una casilla que comparta exactamente un vértice con la casilla que está actualmente. ¿Cuál es el mínimo de casillas que pueden quedar vacías?

4. Problemas

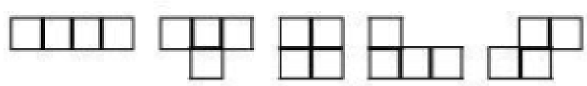
Los problemas están divididos en 3 niveles según su dificultad. Adicionalmente, se intenta que dentro de cada nivel, los problemas también estén en orden de dificultad aunque esta sea muy similar.

4.1. Nivel 1

1. ¿Se puede llenar un tablero de 10×10 con fichas de 1x4?
2. ¿Se puede llenar un tablero de 10×10 con las siguientes fichas?



3. En cada casilla de un tablero de 7×7 hay un caballo. Hacemos que estos 49 caballos se muevan simultaneamente. ¿Es posible que luego de que todos los caballos se hayan movido, no haya dos caballos en una misma casilla?
4. ¿Es posible formar un rectángulo con los 5 diferentes tetraminos?



5. ¿Se puede llenar una caja de $10 \times 10 \times 10$ con ladrillos de $1 \times 1 \times 4$?
6. Se divide un triángulo equilatero de lado n en triángulos equiláteros de lado 1 de la siguiente manera:

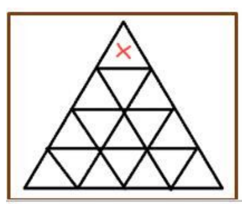


Figura 1: Ejemplo para n=4

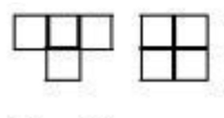
   Un bicho se encunetra en el triángulo equilátero marcado y cada movimiento consiste en ir a un triángulo que comparta un lado con el triángulo donde se encuentra en ese momento. Si el bicho no quiere pasar 2 veces por el mismo triángulo, ¿cuál es la máxima cantidad de movimientos que puede hacer?

7. (OMCC P6/2019) Un triminó es una ficha rectangular de 1×3. ¿Es posible cubrir un tablero de ajedrez 8×8 usando 21 triminós, de tal manera que quede exactamente un cuadrado 1×1 sin cubrir? En caso de que la respuesta sea afirmativa, determina todas las ubicaciones posibles de dicha casilla en el tablero de ajedrez.

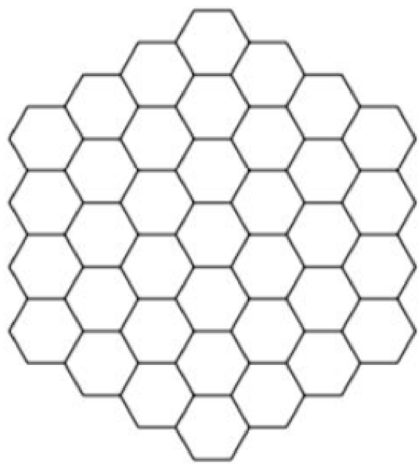
4.2. Nivel 2

Los problemas de este nivel usan coloraciones más difíciles de encontrar que los del Nivel 1 o utilizan algún paso extra además de la coloración.

1. Se llena un tablero de 8×8 usando las siguientes figuras. Demuestra que se debe de usar una cantidad par de cuadrados de 2×2.



2. (OMMEB Nivel 2 P15/2020) En la figura de abajo se muestra un panal de abejas. Dos hexágonos son vecinos si comparten una arista. Si en cada hexágono cabe a lo más una abeja, ¿cuál es la mayor cantidad de abejasque pueden vivir en dicho panal de modo que no haya abejas que pueden vivir en dicho panal de modo que no haya abejas vecinas?



3. En los cuadrados de un tablero de 9×9 se colocan 65 insectos. Cada uno en el centro de un cuadrado. Los insectos comienzan a moverse al mismo tiempo y a la misma velocidad hacia el centro de un cuadrado que comparta lado con el cuadrado en el que están, en ese momento dan un giro de 90 grados y se siguen moviendo. Muestra que en algún momento habrán dos insectos en una misma casilla.

4. En cada casilla de un tablero de 8×8 hay un foco. En un principio todos están apagados. Un movimiento consiste en elegir un rectángulo de 1×3 o 3×1 y cambiar el estado de todos los focos (apagado a encendido o encendido a apagado). Demuestra que después de una cantidad finita de movimientos no puede quedar solo un foco encendido.

5. Prueba que un rectángulo de $m \times n$, donde m,$n \geq 2$, puede ser llenado con tetraminos en forma de L (ver figura) si y solo si $8|mn$

Nota: No estoy seguro de que la fuente del problema sea correcta

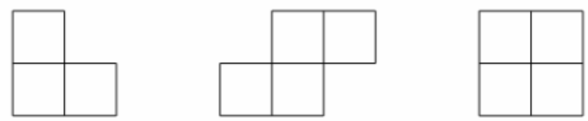
4.3. Nivel 3

Los problemas de este nivel usan coloraciones menos intuitivas que en los Niveles 1 y 2 o las invarianzas usadas no son dadas diractamente por la coloración.

1. Muestra que un tablero de $a \times b$ puede cubrirse con piezas de $1 \times n$ y $n \times 1$ si y solo si, $n|a$ o $n|b$.

2. Un piso rectangular esta cubierto con mosaicos de 2×2 y de 1×4. Uno de estos mosaicos se rompió y hay uno nuevo disponible del otro tipo. Demuestra que no importa cómo se reacomoden los mosaicos, no se puede sustituir el roto por el nuevo.

3. Cubrimos un tableros de $(2n-1) \times (2n-1)$ co los siguientes tipos de piezas.



Muestra que se necesita usar al menos $4n-1$ piezas del primer tipo.

4. (Short List para la OIM 2009) En un tablero de 8×8 hay un foco en cada casilla. Inicialmente todos los focos están apagados. Un movimiento consiste en elegir un foco y una dirección (puede ser la dirección vertical o la dirección horizontal) y cambiar el estado de ese foco y todos sus vecinos en esa dirección. Después de cierta cantidad de movidas, queda exactamente un foco prendido. Encuentra todas las posibles posiciones del foco.
Nota: vecinos = focos en casillas adyacentes

5. (APMO P5/2007) En cada casilla de un tablero de 5×5 hay un foco apagado. Al tocar un foco se cambian el estado de ese foco y todos los focos en casillas vecinas. Después de tocar algunas veces los focos (se puede tocar más de una vez cada foco) queda únicamente uno prendido. Encuentra las posibles posiciones de ese foco.