Lunes: Teoría de Números

Ana Camila Cuevas González

25 de marzo de 2024

1 Demostraciones fundamentales

1. Demuestra el criterio de divisibilidad del 2.
2. Demuestra el criterio de divisibilidad del 3.
3. Demuestra el criterio de divisibilidad del 4.
4. Demuestra el criterio de divisibilidad del 5.
5. Demuestra el criterio de divisibilidad del 6.
6. Demuestra el criterio de divisibilidad del 8.
7. Demuestra el criterio de divisibilidad del 9.
8. Demuestra el criterio de divisibilidad del 10.
9. Demuestra el criterio de divisibilidad del 11.
10. Demuestra que hay infinitos primos.
11. Demuestra que mcm(a,b) x MCD(a,b) = ab.

2 Nivel 1

Honestamente, no encontré las fuentes de estos problemas.

12. ¿Cuál es el número más grande de 7 dígitos que es divisible entre 11?
13. ¿Cuál es el último dígito de 2024!?
14. ¿Cuál es el último dígito de 2^{2024}?
15. El producto de $8000k$ es un cuadrado donde k es un número natural positivo. ¿Cuál es el valor mínimo que puede tomar k?
16. Encuentra el menor entero positivo que sea igual a 5 veces el producto de sus dígitos.

17. En un país solo existen monedas de 2 y 5 pesos. Entre 1 y 100, ¿cuántos precios distintos puedes pagar sin necesidad de dar cambio?

18. ¿Cuántos enteros positivos n son tales que el residuo de la división de 399 entre n es 14?

3 Nivel 2

19. (Módulos y Teoremas de Divisibilidad OMMBC, Ejercicio 5) ¿Cuál es el residuo cuando se divide 9^{2013} entre 8?

20. (Módulos y Teoremas de Divisibilidad OMMBC, Ejercicio 7) ¿Cuál es el último dígito de 7^{2015}?

21. (Módulos y Teoremas de Divisibilidad OMMBC, Ejercicio 10) Demuestra que 41 divide a $2^{20} - 1$

22. (Módulos y Teoremas de Divisibilidad OMMBC, Ejercicio 8 - hard version) Encuentra los últimos 2 dígitos de 3^{1234}

23. (Módulos y Teoremas de Divisibilidad OMMBC, Problema 3) Demuestra que 7 divide a $2222^{5555} + 5555^{2222}$

24. (Módulos y Teoremas de Divisibilidad OMMBC, Problema 4) Demuestra que $n^3 + 2n$ es divisible por 3 para cualquier entero positivo n.

25. (Módulos y Teoremas de Divisibilidad OMMBC, Problema 5) Demuestra que $n^5 + 4n$ es divisible por 5 para cualquier entero positivo n.

26. (Módulos y Teoremas de Divisibilidad OMMBC, Problema 12) Demuestra que la diferencia de dos cubos perfectos consecutivos no puede ser múltiplo de 3

27. (Módulos y Teoremas de Divisibilidad OMMBC, Problema 24) Demuestra que no existen enteros a, b, c tales que $a^2 + b^2 = 8c + 6$

4 Problemas de la OMM

28. (18° OMM, Problema 1) Encuentra todos los primos p,q y r tales que 25pq+r=2004 y pqr+1 es un cuadrado perfecto.

29. (1° OMM, Problema 6) Demuestra que para toda n entera sucede que 3804 divide a $(n^3 - n)(5^{8n+4} + 3^{4n+2}$

30. (22° OMM, Problema 1) Sean $1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n$ los divisores de n. Encuentra todos los valores de n tales que n = $d_2^2 + d_3^2$

31. (11° OMM, Problema 1) Encuentra todos los números primos p para los cuales $8p^4$ - 3003 es un primo positivo.

32. (6° OMM, Problema 4) Demuestra que $1+11^{11}+111^{111}+...+1111111111^{1111111111}$ es divisible por 100.

5 Referencias

1. Lulú (2016). *Módulos y Teoremas de Divisibilidad.* OMMBC. http://ommbc.org/sitio/Material/Numeros/N2$_{M}$*odulosDivisibilidad.pdf*