

Problemas de Álgebra

Nivel II y III

por Ana Camila Cuevas González

1. Introducción

El correcto manejo algebraico es una herramienta súper útil, tanto para la vida cotidiana como para la resolución de problemas. Saber factorizar y resolver ecuaciones es lo esencial, y lo que normalmente viene en los exámenes de la OMMEB. En este entrenamiento nos enfocaremos en resolver problemas, pero dejaré un poco de teoría para que puedan consultarla mientras los resuelven.

2. Factorizar

Factorizar es, en resumen, convertir una suma a una multiplicación. Esto resulta muy útil para comprender mejor una ecuación, y llegar a una solución de manera más rápida y sobre todo segura. No siempre vamos a necesitar factorizar en un problema. Normalmente lo hacemos en uno de los siguientes 2 casos:

- Vemos una expresión y la asociamos con un tipo de factorización de manera inmediata.
- No sabemos qué hacer...

CASOS	FORMA	DESARROLLO	TÉRMINOS	PRODUCTO NOTABLE
FACTOR COMÚN MONOMIO	$ax + bx + cx$	$x(a + b + c)$	2 ó más	_____
FACTOR COMÚN POLINOMIO	$(x - a)(y + z) + b(y + z)$	$(y + z)(x - a + b)$	2 ó más	_____
FACTOR COMÚN POR AGRUPACIÓN	$am + ax + bm + bx + cm + cx$	$(am + bm + cm) + (ax + bx + cx)$ $m(a + b + c) + x(a + b + c)$ $(m + x)(a + b + c)$	4 ó más	_____
TRINOMIO CUADRADO PERFECTO	$a^2 + 2ax + x^2 \longrightarrow (a + x)^2$ $a^2 - 2ax + x^2 \longrightarrow (a - x)^2$		3	Cuadrado de la suma o diferencia de un binomio
DIFERENCIA DE CUADRADOS PERFECTOS	$x^2 - b^2$	$(x + b)(x - b)$	2	Producto de la suma por la diferencia de dos cantidades
SUMA DE CUBOS PERFECTOS	$x^3 + y^3$	$(x + y)(x^2 - xy + y^2)$	2	_____
DIFERENCIA DE CUBOS PERFECTOS	$x^3 - y^3$	$(x - y)(x^2 + xy + y^2)$	2	_____
TRINOMIO DE LA FORMA: $x^2 + bx + c$	$x^2 + 5x + 6 \longrightarrow (x + 3)(x + 2)$ $x^2 - 19x - 20 \longrightarrow (x - 20)(x + 1)$		3	Producto de la forma $(x + a)(x + b)$
TRINOMIO DE LA FORMA: $ax^2 + bx + c$	$2x^2 - 7x + 6$	$2x^2 - \underline{\quad} - \underline{\quad} + 6$ $2x^2 - \underline{4x} - \underline{3x} + 6$ $(2x^2 - 4x) - (3x - 6)$ $2x(x - 2) - 3(x - 2)$ $(x - 2)(2x - 3)$	3	Producto de la forma $(mx + a)(nx + b)$

3. Fórmula cuadrática

Probablemente no la necesites, pero siempre es necesario saberla.

Quadratic Formula

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

4. Problemas

No vienen en orden de dificultad. Todos son de concursos OMMEB anteriores.

- 2) Ana tiene cuatro hermanas: Berta, Ceci, Diana y Elena. Su edad actual es un número impar menor que 30. Cuando Berta tenga el triple de la edad actual de Ana, se cumplirán las siguientes relaciones:

- a) La suma de las edades que tendrán en ese entonces Ana y Ceci será igual a la suma de las edades actuales de todas las hermanas.
- b) La edad de Diana será el triple de su edad actual.
- c) La edad de Elena será un año más que el doble de la edad actual de Berta.

Halla la suma de las edades de Ana y Berta.

- 10) En una competencia internacional de matemáticas, el 28 % de los concursantes son de Asia, el 10 % de Oceanía. Los concursantes de África junto con los de Europa son el 40 % del total, además Asia tiene 66 alumnos más que los alumnos de África y entre alumnos de Europa y de Oceanía hay 187 alumnos. ¿Cuántos concursantes europeos participaron?

- 1) ¿Cuántos números primos dividen a $73^2 - 31^2 - 91$?

- 3) Sean a y c números reales diferentes de cero y diferentes entre sí, tales que

$$a + \frac{4}{a} = c + \frac{4}{c}.$$

Determina el valor del producto ac .

- 7) Eugenio tiene 4 borregos y una báscula que solo le permite pesar borregos en parejas (esto es, de dos en dos). ¿Cuál es la mínima cantidad de veces que Eugenio debe usar la báscula para conocer el peso de cada uno de sus borregos?

- 5) La lista $1, x_2, x_3, \dots, x_n, 200$ es la sucesión más larga de enteros positivos tal que cada término a partir del tercero es la suma de los anteriores, es decir,

$$x_3 = 1 + x_2, \quad x_4 = 1 + x_2 + x_3, \quad x_5 = 1 + x_2 + x_3 + x_4$$

y así sucesivamente. Determina el valor de x_2 .

- 6) Los números reales distintos a, b, c, d satisfacen que $a + c = b + d$ y $a + b + cd = c + d + ab$. Determina la suma de los posibles valores de $a + c$.

- 11) Los números reales positivos x, y, z satisfacen

$$\frac{x+y}{z} = \frac{y+z}{5x} = \frac{z+x}{2y}.$$

Si el valor de la expresión $\frac{x+2y}{3z}$ se puede escribir de la forma $\frac{m}{n}$ con m y n enteros positivos cuyo máximo común divisor es igual a 1, encuentra $m + n$.

- 1) En una olimpiada participan cinco hermanos: Saúl, César, Luis, Aldo y Rodrigo. Sus edades son 12, 13, 14, 17 y 25 años, pero no se sabe quién tiene cada edad. Si se suma la edad de Saúl con la de César se obtiene la edad de Luis. Si se suma la edad de Saúl con la de Aldo se obtiene el doble de la edad de César. ¿Cuántos años tiene Rodrigo?
- 3) Encuentra todas las parejas de números reales (x, y) que cumplen las siguientes dos igualdades: $x^3 + y^3 = 1$ y $x^2 + y^2 = 1$.
- 4) Encuentra todas las parejas de enteros positivos (a, r) tales que el número $N = a^2 + (a+r)^2 + (a+2r)^2 + (a+3r)^2 + (a+4r)^2$ tenga todos sus dígitos iguales.
- 5) Ivannia escribió en el pizarrón la siguiente ecuación: $m^2 - n^2 = 2021$. Calcula la suma de todos los posibles valores del último dígito de n^m , tomando en cuenta que m y n son enteros positivos.
- 5) En una fiesta donde se baila en parejas chica-chico, se sabe que el 60 % de los chicos está bailando y el 80 % de las chicas está bailando. ¿Cuánta gente está bailando si en la fiesta hay exactamente 35 personas?
- 14) David, Américo y Nicho tienen 12, 13 y 14 años, respectivamente. Al inicio, cada uno de ellos tiene un número. Por turnos, siguiendo el orden de acuerdo a su edad del menor al mayor, juegan al "Oportuno veinte veintiuno" que consiste en, durante su turno, elegir y hacer uno de los siguientes movimientos:

- Restar 3 a su número.
- Multiplicar por 7 su número y al resultado sumarle 9.
- Multiplicar por 4 su número y al resultado restarle 3.

Gana el primero que obtenga como resultado el número 2021. Si cada uno comienza con el número de su edad, ¿quién ganará?

- 2) En una olimpiada participan cinco hermanos: Aldo, César, Hugo, Luis y Saúl. Sus edades son 12, 13, 14, 17 y 25 años, pero no se sabe quién tiene cada edad. Sin embargo, se sabe que si sumas la edad de Saúl y la de César, obtienes la edad de Luis, mientras que si sumas la edad de Saúl y la de Aldo, obtienes el doble de la edad de César. ¿Cuál es la edad de Hugo?
- 6) Sean a , b y c números reales que cumplen $a^2 - ab = b^2 - bc = c^2 - ca = 1$. Determina el valor numérico de $abc(a + b + c)$.
- 2) Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos polinomios de grado 2 y a, b, c, d números reales tales que $f(a) = 500$, $f(b) = 100$, $f(c) = 1000$, $f(d) = 2015$, $g(a) = 1519$, $g(b) = 1919$ y $g(c) = 1019$. ¿Cuánto vale $g(d)$?