Principio de Casillas

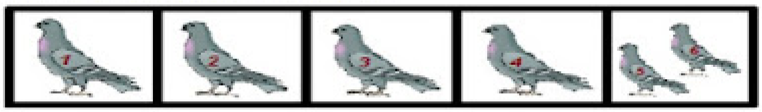
Niveles II y III

por Ana Camila Cuevas González

En este documento aprenderemos qué es el principio de casillas, y cómo aplicarlo a problemas de cualquier dificultad.

1. Concepto

El Principio de Casillas, Teorema de Dirichlet o Principio del Palomar, entre otras, tiene distintas versiones, aunque en realidad todas tienen la misma idea en común: si tienes más palomas que casillas en un palomar, entonces habrá más de una paloma en una casilla.



Estas son las 2 principales formas donde podemos verlo en un problema:

- Si se tienen n casillas y al menos n + 1 objetos, habrá al menos una casilla con dos o más objetos.
- Si se tienen n casillas y al menos nk + 1 objetos, habrá al menos una casilla con k + 1 o más objetos.

2. Problemas

1. Una bolsa contiene bolas de dos colores: blanco y negro. ¿Cuál es el mínimo número de bolas que hay que extraer de la bolsa para garantizar que haya dos del mismo color? ¿Y para 10?

2. Un millón de pinos crecen en el bosque. Se sabe que ningún pino tiene más de 600, 000 agujas. Prueba que en el bosque hay dos pinos que tienen el mismo número de agujas. ¿Puedes asegurar 3?

3. 51 mujeres y 49 hombres se sientan en una mesa redonda. Prueba que existen dos mujeres que están sentadas diametralmente opuestas.

4. Si un marciano tiene un numero infinito de calcetines rojos, azules, amarillos y negros en un cajón, ¿cuántos calcetines debe sacar para garantizar que tendrá un par? ¿Cuántos si el marciano tiene 6 pies y quiere calcetines del mismo color para todos ellos?

5. Si se eligen cinco números de los enteros del 1 al 8, entonces dos de ellos deben sumar nueve.

6. Sea A un conjunto de 19 enteros distintos tomados de la progresión aritmética 1, 4, 7, $\cdots$, 100. Prueba que deben existir 2 enteros distintos cuya suma sea 104.

7. Prueba que si se tienen 100 números enteros, se pueden escoger 15 tal que la diferencia entre cualesquiera.

8. Algunos de los cuadritos de una cuadrícula de 19×4 se pintan de rojo, otros de azul y otros de verde (no se deja ninguno en blanco). Probar que forzosamente las líneas de la cuadrícula forman un rectángulo cuyas cuatro esquinas tienen el mismo color.

9. Cada uno de un grupo de 10 niños es amigo de exactamente otros 7 del mismo grupo (la amistad es mutua). Probar que no es posible dividirlos en tres equipos de tal manera que en cada uno de los tres equipos no haya un par de amigos.

10. Se quiere diseñar una competencia entre 7 jugadores de tal manera que de cualquier colección de tres de ellos al menos dos compitan entre sí. ¿Cuál es el mínimo número de juegos con el que se puede lograr esta condición?

11. En una escuela hay 8 alumnos que desean formar equipos de tres. ¿Cuántos equipos se pueden formar si se permite que dos equipos tengan a lo más un alumno en común?

12. En una bolsa hay 9 canicas, de las cuales al menos una de ellas es verde. Además, cuando sacas cualesquiera 4 canicas hay al menos 2 que son del mismo color y, cuando sacas cualesquiera 5 de ellas, hay a lo más 3 del mismo color. ¿Cuántas canicas verdes hay en la bolsa?

13. Muestra que no importa cómo se acomoden todos los números 1, 2, . . . , 25 en los cuadritos de un tablero de 5×5, siempre hay un subtablero de 2×2 que satisface que los cuatro números de este subtablero suman más de 41.

3. Referencias

1° OMMEB.

3° OMMEB.

Lulú (2016). *Teorema de los Pichones*. Olimpiada Mexicana de Matemáticas en Baja California. http://ommbc.org/sitio/Material/Combinatoria/C3_Casillas.pdf

Pérez Seguí, M. (s.f.). *Combinatoria*. Instituto de Matemáticas UNAM.