Juegos

Javier Caram

7 de diciembre de 2024

1. Introducción

Supongo que todos saben que es un juego (:

1.1. Posiciones Ganadoras y Perdedoras

Una posición ganadora es donde puedes mandar al otro jugador a una pocisión perdedora y una perdedora es donde únicamente puedes mandar al otro a pocisiones ganadoras.

Ejemplo: AnaKamz y Bikel juegan a quitar piedras de un montón de 2024 piedras empezando por AnaKamz. En cada turno pueden quitar 1, 2 o 3 piedras y gana quien quite la última piedra. ¿Quién tiene estrategia ganadora y cuál es?

Vemos que:
1 - 0 (gana AnaKamz)
2 - 0 (gana AnaKamz)
3 - 0 (gana AnaKamz)
4 - 3, 2 o 1 - 0 (gana Bikel)
5 - 4 - 3, 2 o 1 - 0 (gana AnaKamz)
6 - 4 - 3, 2 o 1 - 0 (gana AnaKamz)
7 - 4 - 3, 2 o 1 - 0 (gana AnaKamz)
8 - 7, 6 o 5 - 4 - 3, 2 o 1 - 0 (gana Bikel)
Viendo casos pequeños notamos que en las pocisiones donde la cantidad de piedras es múltiplo de 4 gana Bikel y en el resto AnaKamz.

Cuando la cantidad de piedras es múltiplo de 4 si AnaKamz quita k piedras, Bikel puede quitar 4-k piedras y haciendo eso, asegura que siempre que termine el turno de Bikel haya una cantidad múltiplo de 4 de piedras y cuando AnaKamz termina su turno no hay una cantidad múltiplo de 4 de piedras. En particular 0 es múltiplo de 4 por lo tanto Bikel gana. En este caso las pocisiones perdedoras eran los múltiplos de 4 ya que Bikel podía asegurar que cuando fuera el turno de AnaKamz siempre hubiera una cantidad múltiplo de 4 de piedras y cuando juegue Bikel no.

1.2. Robo de Estrategia

A veces no es tan fácil saber que posiciones son ganadoras y perdedoras. En este tipo de problemas nos puede llegar a servir el robo de estrategia". Esto consiste en demostrar que el segundo jugador no puede ganar ya que se llega a una contradicción.

Ejemplo: El "Ajedrez Root" se juega igual que el ajedrez normal pero cada jugador tiene 2 movimientos por turno. Demuestra que es segundo jugador no tiene estrategia ganadora.

Intentar ver cuales son posiciones ganadoras y perdedoras no es útil ya que hay muchas posibilidades por movimiento y no son "manejables". Lo que podemos hacer es emplear un robo de estrategia.

Suponemos que el segundo jugador (2) tiene estrategia ganadora. Esto significa que por cada movimiento inicial del primer jugador, el segundo tiene una (o unas) jugadas que le aseguran ganar. Notemos que si el primer jugador (1) mueve el caballo y lo regresa a su posición original, usó su turno pero la posición sigue siendo igual. Ahora el primer movimiento es del jugador 2 pero, esto es como si el hubiera sido el jugador 1 pero con el tablero reflejado por lo que si tenía estrategia ganadora para todo movimiento inicial del jugador 1, ahora el jugador 1 tiene esrategia ganadora para todo movimiento del jugador 2, lo cuál es una contradicción por tanto, el jugador 2 no puede tener estrategia ganadora, que es lo que queríamos demostrar.

1.3. Biyecciones

A veces los problemas de juegos necesitan otras cosas para resolverlos. Una idea muy común (sobretodo en los problemas donde pierdes si ya no puedes hacer un movimiento) es crear una biyección entre movimientos de los jugadores por lo que, si uno puede jugar el otro también y esto asegura que no pierda o que gane.
Una biyección especialmente útil en los problemas de tableros es reflejar los movimientos del rival por uno de los ejes de simetría o por el centro.

1.4. Fun Facts bien graciosos

- Por robo de estrategia, se puede demostrar que el segundo jugador no puede ganar en ”gato”(tic tac toe). Si quieren intenten demostrarlo.
- En “Go”se agregaron puntos adicionales al segundo jugador ya que se pueden saltar turnos, por lo que podría existir robo de estrategia.
- No me sé la demostración de la segunda parte del último problema pero, sé que es cierto :P. (ya me la sé Lol)

2. Problemas

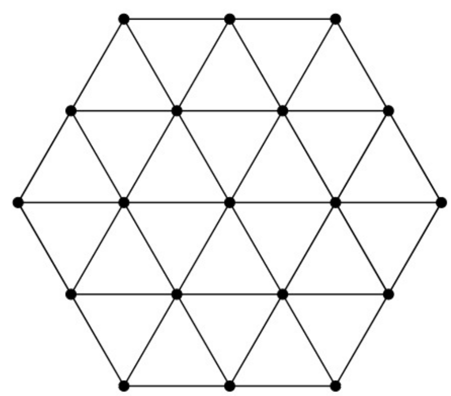
2.1. Nivel :D

1. En una mesa hay 2024 cerillos. Samu y Hugo juegan a quitar cerillos empezando por Samu. En cada turno deben de quitar 1, 2, 3, 4, 5, 6 ó 7 cerillos y gana quien quite el último cerillo. ¿Quién tiene estrategia ganadora?

2. En un tablero de ajedrez Minina y Kamz juegan a poner caballos negros y blancos respectivamente. Pierde quien ya no pueda poner un caballo sin que esté siendo atacado por uno del otro color. Si empieza Kamz, ¿quién tiene estrategia ganadora?

3. (OMCC 1/2001) Dos jugadores A, B y otras 2001 personas forman un círculo, de manera que A y B no están en posiciones consecutivas. A y B juegan en turnos alternos, empezando por A. Una jugada consiste en tocar a una de las personas vecinas, la cual una vez tocada sale del círculo. El ganador es el último que queda en pie. Demuestre que uno de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora, y dé dicha estrategia.

4. (OMCC 1/2017) La figura siguiente muestra una red hexagonal formada por muchos triángulos equiláteros congruentes.



   Por turnos, Gabriel y Arnaldo juegan de la siguiente manera. En su turno, el jugador colorea un segmento, incluyendo los puntos extremos, siguiendo estas tres reglas:

   - Los puntos finales deben coincidir con los vértices de los triángulos equiláteros marcados.
   - El segmento debe estar formado por uno o varios de los lados de los triángulos.
   - El segmento no puede contener ningún punto (puntos finales incluidos) de un segmento previamente coloreado.

   Gabriel juega primero, y el jugador que no puede hacer un movimiento legal pierde. Encuentra una estrategia ganadora y descríbela.

5. (OMCC 1/2018) Hay 2018 cartas numeradas del 1 al 2018. Los números de las cartas están visibles en todo momento. Tito y Pepe juegan a un juego. Empezando por Tito, se van turnando para agarrar las cartas hasta que terminan. Entonces cada jugador suma los números de sus cartas y gana quien tenga una suma par. Determina qué jugador tiene una estrategia ganadora y descríbela.

2.2. Nivel :l

1. (OMCC 2/2019) Tenemos un polígono regular P con 2019 vértices, y en cada vértice hay una moneda. Dos jugadores Azul y Rojo se turnan alternativamente, empezando por Azul, de la

siguiente manera: primero, Azul elige un triángulo con vértices en P y colorea su interior de azul, luego Rojo elige un triángulo con vértices en P y colorea su interior de rojo, de manera que los triángulos formados en cada jugada no se cruzan internamente con los triángulos coloreados anteriores. Continúan jugando hasta que no sea posible elegir otro triángulo para colorear. Entonces, un jugador gana la moneda de un vértice si coloreó la mayor cantidad de triángulos incidentes en ese vértice (si las cantidades de triángulos coloreados con azul o rojo incidentes en el vértice son iguales, entonces nadie gana esa moneda y la moneda se borra). El jugador con la mayor cantidad de monedas gana la partida. Encuentra una estrategia ganadora para uno de los jugadores.
Nota. Dos triángulos pueden compartir vértices o lados.

2. En un pizarrón están escritos los números del 1 al n. Un movimiento consiste en elegir un número $1 \leq k \leq n$ que aún este escrito en el pizarrón, y borrarlo junto con todos los divisores de k que sigan en el pizarrón. Andy y Biki hacen movimientos por turnos empezando por Andy y pierde quien ya no pueda hacer un movimiento. Encuentra para cada n quien gana. '

3. (Selectivo Nuevo Leon 2/2023) Víctor e Isaías juegan el siguiente juego en un pizarrón:
Inicialmente hay un 1 escrito en el pizarrón y de forma alternada empezando por Víctor borran el número x escrito en el pizarrón y lo sustituyen por el número $x + d$ tal que d es un divisor positivo de x. Gana el primero en conseguir un número que sea al menos 2023. ¿Quién tiene estrategia ganadora?

4. (Chomp) Minina y AnaKamz tienen una barra de chocolate de $m \times m$ cuadritos. Numeramos las filas y las columnas del 1 al m y en la casilla $(1, 1)$ el chocolate tiene pasas (no les gustan las pasas). Un movimiento consiste en elegir un cuadrito (a, b) y comerse todos los cuadritos que aún quedaran en la barra (i, j) con $a \leq i$ y $b \leq j$. Pierde quien se come el chocolate con pasas. Si Minina empieza, encuentra quien tiene estrategia ganadora y describela.

5. (Chomps de nuevo) Es el mismo juego pero ahora con una barra de $m \times n$. Demuestra que Minina tiene estrategia ganadora.

6. (OMCC 3/2009) Hay 2009 casillas numeradas del 1 al 2009, algunas de las cuales contienen piedras. Dos jugadores, A y B, juegan alternativamente, empezando por A. Una jugada consiste en seleccionar una casilla no vacía i, tomar una o varias piedras de esa casilla y colocarlas en la casilla $i + 1$. Si $i = 2009$, las piedras seleccionadas se eliminan. El jugador que elimina la última piedra gana.
   - Si hay 2009 piedras en la caja 2 y las otras están vacías, determina qué jugador tiene una estrategia ganadora.
   - Si hay exactamente una piedra en cada casilla, determina qué jugador tiene una estrategia ganadora.

7. (OMM 3/2020) Sea $n \geq 3$ un número entero. Dos jugadores, Ana y Beto, juegan al siguiente juego. Ana etiqueta los vértices de un n-ágono regular con los números del 1 al n, en el orden que quiera. Cada vértice debe ser etiquetado con un número diferente. A continuación, colocamos un guajolote en cada uno de los n vértices.
Estos guajolotes se entrenan para lo siguiente. Si Beto silba, cada guajolote se mueve al vértice adyacente con mayor etiqueta. Si Beto aplaude, cada guajolote se mueve al vértice adyacente con la etiqueta menor.
Beto gana si, tras un cierto número de silbidos y palmadas, consigue mover todos los guajolotes al mismo vértice. Ana gana si consigue etiquetar los vértices para que Beto no pueda hacerlo. Para cada $n \geq 3$, determina qué jugador tiene una estrategia ganadora.

2.3. Nivel ;(

1. (IMO SL C1/2009) Considera 2009 cartas, cada una con un lado dorado y un lado negro, colocadas en fila sobre una mesa larga. Inicialmente todas las cartas muestran sus caras doradas. Dos jugadores, de pie en el mismo lado largo de la mesa, juegan un juego con movimientos alternos. Cada movimiento consiste en elegir un bloque de cartas consecutivas de 50, de las cuales la más

a la izquierda es dorada, y darles la vuelta, de modo que las que mostraban la cara dorada ahora muestran la cara negra y viceversa. Gana el último jugador que pueda realizar un movimiento legal.

- ¿El juego necesariamente termina?
- ¿Existe una estrategia ganadora para el jugador inicial?.

2. (Juego m, n, k) Dos jugadores se turnan para colocar una piedra de su color en un tablero $m \times n$, y el ganador es el jugador que obtiene primero k piedras de su propio color seguidas, horizontal, vertical o diagonalmente.

   - Demuestra que el segundo jugador no tiene estrategia ganadora.
   - Fun Fact: para k suficientemente grande, ninguno tiene estrategia ganadora (intenten demostrarlo bajo su propio riesgo).