Miércoles: Mix IMC Geometría

Ana Camila Cuevas González

27 de marzo de 2024

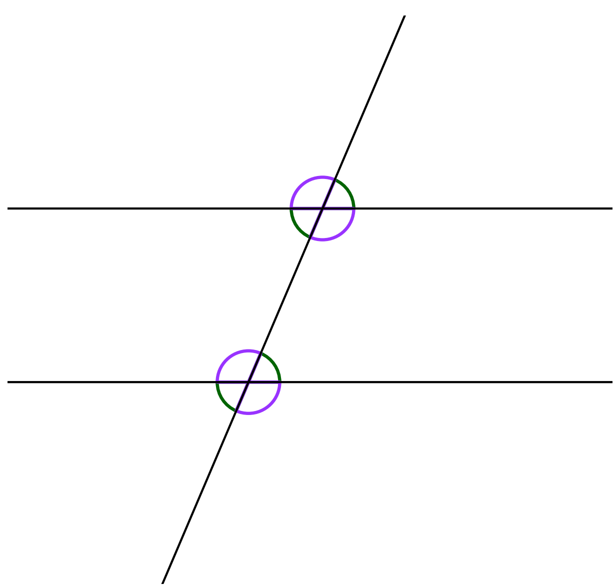
1 Introducción

¡Hola! En este entrenamiento resolveremos algunos problemas de temas variados de geometría que serán indispensables a lo largo de la Olimpiada de Matemáticas. Estos temas son: Áreas, Perímetros, Ángulos, Teorema de Pitágoras, Teorema de Thales, Semejanza y Congruencia de Triángulos. Me gustaría hacer especial énfasis en los cíclicos y en las semejanzas.

Los problemas vienen más o menos en orden de dificultad, pero eso es a mi criterio.

2 Ángulos

1. La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$. La suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es $360\ldots$ Así, para un n-ágono, la suma de sus ángulos internos es $180(n-2)$.
2. Cuando tenemos paralelas, tenemos muchas igualdades de ángulos (observar imagen).
3. En un triángulo, el ángulo exterior en un vértice es igual a la suma de los ángulos internos no adyacentes.



3 Teorema de Pitágoras

El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

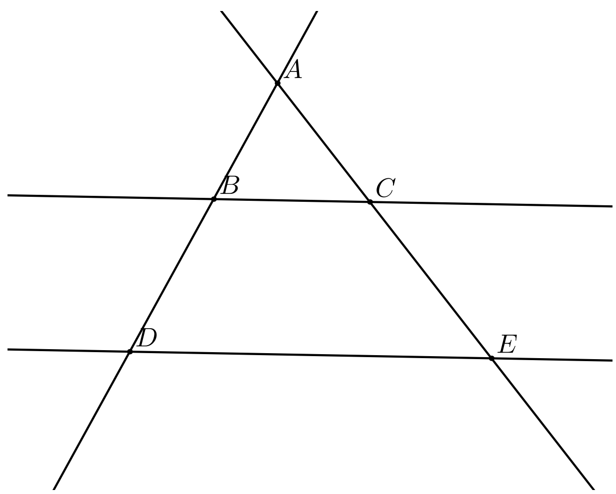
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Además, con base en esto, tenemos 2 triángulos bien interesantes:

1. El 30-60-90, que guarda una proporción x, $\sqrt[2]{3}$x y 2x
2. El 45-45, que guarda la proporción x, x, $\sqrt[2]{2}$x.

4 Teorema de Thales

Cuando en un triángulo hay una paralela a un lado, los segmentos formados son proporcionales.



5 Geometría del círculo

5.1 Tangentes

1. Las tangentes desde un mismo punto a una misma circunferencia son iguales.
2. Los centros de dos circunferencias tangentes son colineales con el punto de tangencia.
3. El radio que toca al punto de tangencia es perpendicular a la tangente.

5.2 Ángulos en la circunferencia

- Ángulo central
- Ángulo inscrito

- Ángulo semi-inscrito
- Ángulo interno
- Ángulo externo

6 Semejanza

Los triángulos semejantes tienen los mismos ángulos y sus lados correspondientes son proporcionales.

- Criterio AA
- Criterio LAL
- Criterio LLL

7 Congruencia

2 triángulos son congruentes si son exactamente iguales.

- Criterio LLL
- Criterio LAL
- Criteio ALA

8 Tips para atacar los problemas

Los temas de los problemas son esencialmente sencillos, pero a veces se vuelve difícil emplearlos de manera creativa. Por lo que les dejo algunos consejos para atacarlos:

1. **Trazos auxiliares**. Seguido pasa que la figura no nos dice suficiente, entonces tenemos que hacer trazos que nos den otra visión del problema. Algunos ejemplos son: trazar alturas, unir puntos importantes del dibujo que aún no estén unidos, trazar paralelas, prolongar líneas, dibujar triángulos especiales (equiláteros, por ejemplo), o hasta reflejar. Estos son algunos de los importantes, pero las posibilidades son infinitas. ¡Confía en tu intuición!

2. **Hacer álgebra**. En los problemas de áreas y perímetros resulta útil definir variables e ir haciendo cálculos con ellas. Por ejemplo, definir ”a” como un lado, y con ayuda de Pitágoras, Thales o puntos medios ir sacando los demás lados.

3. **Pasar ángulos**. Este es bien importante. No hay mucha explicación.

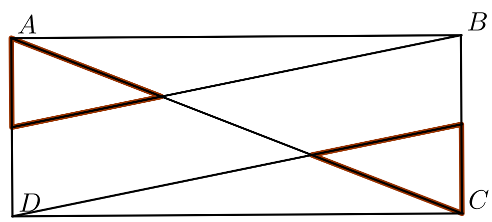
9 Problemas

9.1 Áreas y perímetros

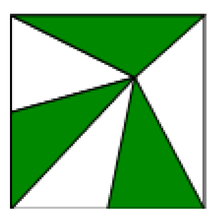
1. Rosa y Carlos cortaron a la mitad dos rectángulos iguales, uno cada uno, pero lo hicieron de forma distinta. Rosa obtuvo dos rectángulos de perímetro 70cm cada uno y Carlos obtuvo dos rectángulos de 80cm cada uno. ¿Cuál era el perímetro de los rectángulos originales?

2. En un triángulo ABC consideramos a=AB, b=BC y c=AC, como las medidas de los lados. Se elige un punto D cualquiera dentro del triángulo (es decir, no coincide con ninguno de los lados de dicha figura), de manera que se forman los 3 nuevos triángulos ABD, ADC y BCD. Considerando los lados AB, BC y CA como las bases de estos triángulos y los segmentos m, n, r respectivamente como las alturas de los mismos (es decir, son perpendiculares a los lados correspondientes), explica por qué el área del triángulo ABC está dada por la siguiente expresión. A=(am+bn+cr)/2

3. Se trazan segmentos desde B y D hasta el punto medio de AD y BC, respectivamente. ¿Qué parte de la figura está sombreada?

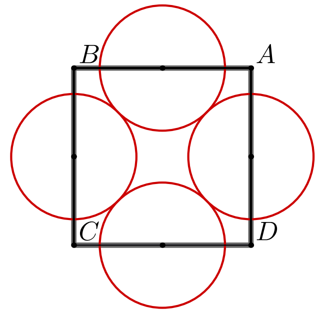


4. Un cuadrado de 81 cm2 está dividido en 6 triángulos de igual área como se muestra en la figura. ¿Cuántos centímetros mide la distancia del vértice común a los triángulos, al lado inferior del cuadrado?

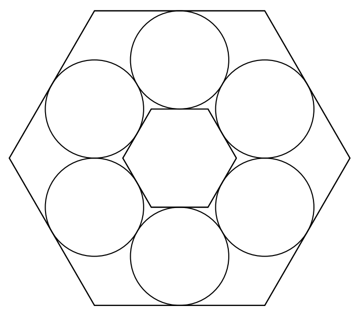


5. Considera el triángulo ABC y un punto D sobre el lado BC. Nombremos como E, F, G y H los puntos medios de los segmentos CD, DB, AC y AB, respectivamente. Explique por qué el cuadrilátero EGHF es un paralelogramo y por qué su área es la mitad del área del triángulo ABC

6. Considera un cuadrado cuyo lado tiene longitud 2 y cuatro círculos del mismo radio con centros respectivos en los puntos medios de los lados del cuadrado, de tal modo que los círculos correspondientes a lados adyacentes son tangentes. Encuentra el área de la región dentro del cuadrado y fuera de los círculos.



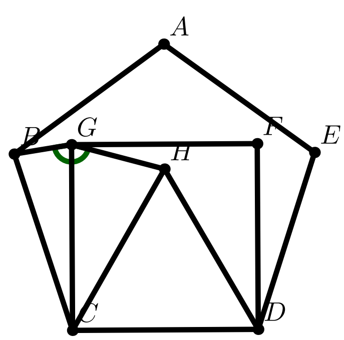
7. En la figura, los círculos son iguales y cada uno es tangente a sus dos círculos vecinos. Además, cada círculo es tangente a un lado de cada uno de los dos hexágonos, como se muestra. Si el área del hexágono pequeño es 1, ¿cuánto es el área del hexágono grande?



9.2 Ángulos

8. En la figura hay un triángulo equilátero dentro de un cuadrado, dentro de un pentágono regular. Encuentra el valor del ángulo marcado.

9. A, B, C, D, E, F son vértices consecutivos de un polígono regular de 20 lados. DCYZ es un cuadrado y DEVWX es un pentágono regular. Ambos polígonos están contenidos en el 20-ágono. Muestra que X está sobre la línea DY.

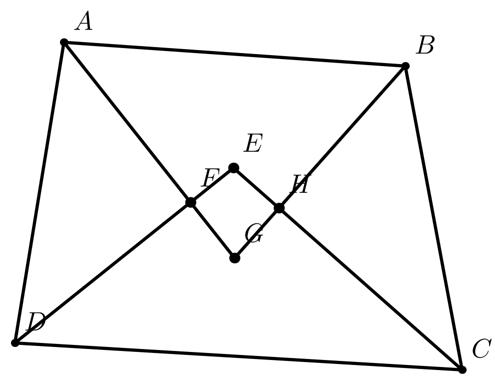


10. Dos circunferencias de centros O_1 y O_2 se intersectan en los puntos A y B. La línea CD es tangente a ambas circunferencias (C y D son los puntos de tangencia). Demuestra que:

$$\angle CAD = \frac{1}{2}\angle O_1AO_2 \tag{1}$$

11. Se toma un punto P en el interior de un rectángulo ABCD de tal manera que $\angle APD + \angle BPC = 180°$. Encuentra la suma de los ángulos $\angle DAPy\angle BCP$

12. En la siguiente figura están trazadas las bisectrices de los ángulos interiores del cuadrilátero ABCD, las cuales se intersectan en los puntos E, F, G y H, como se muestra en la figura. Demuestra que el cuadrilátero EFGH es cíclico.



9.3 Otros

13. Sea D un punto cualquiera dentro de un triángulo equilátero. Demuestra que la suma de la distancia desde D a los lados del triángulo es constante.

14. Sea ABC un triángulo acutángulo. M es el punto medio de BC. K es un punto del lado AB y F la intersección de AM con CK de manera que AK = KF. Demuestra que AB = CF.

15. El triángulo ABC tiene inscrita una circunferencia cuyo diámetro pasa por el punto de tangencia con el lado BC y corta la cuerda que une los otros dos puntos de tangencia en el punto N. Demuestra que AN parte a BC por la mitad.

16. Sea ABCD un cuadrilátero cíclico tal que los rayos AB y CD se intersecan en P y los rayos BC y AD se intersecan en Q. Demuestra que las bisectrices de BPC y CQD son perpendiculares.

17. Sea ABCD un cuadrado de diagonal BD. Usando el segmento AC se construye el triángulo equilátero ACE con E más cerca de B que de D. Supongamos que la longitud de ED es 2. La longitud de la mitad del segmento AC se puede expresar como $(\sqrt[2]{A})/(\sqrt[2]{B}+\sqrt[2]{C})$ Determina el valor de 100A+ 10B+C.

18. En la figura AB=AC. El punto medio de AC es M. Se cumple que MN es perpendicular a BC y el punto L es tal que CL = 2ML. Si BC 60 cm y MN 18 cm. Encuentra la medida, en cm, de NL.

19. Sea ABCDEF un hexágono regular de lado 3. Sobre los lados AF y ED se marcan puntos M y N tales que FM = EN = 2. Sea P la interseccion de BE con MN. Calcula la medida del segmento PD.

9.4 Problemas más difíciles

20. Dado un cuadrilátero cíclico ABCD, las diagonales AC y BD se cortan en E y los lados AD y BC se cortan en F. Los puntos medios de AB y CD son G y H, respectivamente. Demuestra que EF es tangente al circuncírculo de EGH.

21. Sea ABC un triángulo acutángulo con AB $\neq$ AC, M el punto medio de BC y H el ortocentro de ABC. La circunferencia que pasa por B, H y C corta a la mediana AM en N. Muestra que $\angle ANH = 90°$

22. Sea ABC un triángulo con AB=AC y BAC=36. Sea X un punto en el interior de ABC de manera que XAB=30 y XBA=24. Encuentra la medida de AXC.

10 Referencias

1. Bobadilla, Gómez y Villanueva (2019). *Problemas de geometría para Olimpiadas de Secundaria*. Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas.

2. Castro, J. (2010). *Geometría en Olimpiadas de Matemáticas*. Universidad Autónoma de Querétaro.
https://ommgto.cimat.mx/sites/default/files/OMMGto/2020$_L$*ibro*$_S$*huyriguin.pdf*

3. Flores, E. (2019). *factorial!*, volumen 12.
https://www.dropbox.com/scl/fi/0ibahtxur1w4pzls908eg/Ff12-2019.pdf?rlkey=8g63fyilss0fas02m76c020mge=

4. García, Gómez y Pérez (2021). *Problemas Introductorios para la 35° Olimpiada Mexicana de Matemáticas*. Olimpiada Mexicana de Matemáticas.
https://www.ommenlinea.org/wp-content/uploads/practica/folletos/Introductorio$_3$5*.pdf*

5. ONMAPS en Tamaulipas.