

# 2011 年全国普通高等学校招生统一考试 (上海卷)

## 数学 (理科)

(本试卷满分 150 分, 考试时间 120 分钟)

一. 填空题: 本大题共 14 题, 满分 56 分. 请在横线上方填写最终的、最准确的、最完整的结果. 每题填写正确得 4 分, 否则一律得 0 分.

1. 已知  $\mathbf{a} = (k, -9)$ 、 $\mathbf{b} = (-1, k)$ ,  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  为平行向量, 则  $k =$  \_\_\_\_\_ .
2. 若函数  $f(x) = x^{6m^2-5m-4}$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ) 的图像关于  $y$  轴对称, 且  $f(2) < f(6)$ , 则  $f(x)$  的解析式为\_\_\_\_\_ .
3. 若  $f(x+1) = x^2$  ( $x \leq 0$ ), 则  $f^{-1}(1) =$  \_\_\_\_\_ .
4. 在  $bg$  糖水含糖  $ag$  ( $b > a > 0$ ), 若再添加  $mg$  糖 ( $m > 0$ ),
5. 已知  $f(x) = 1 - \mathbf{c}_8^1 x + \mathbf{c}_8^2 x^2 - \mathbf{c}_8^3 x^3 + \cdots + \mathbf{c}_8^8 x^8$ , 则  $f\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}\right)$  的值是\_\_\_\_\_ .
6. 自然数  $1, 2, 3, \dots, 10$  的方差记为  $\sigma^2$ , 其中的偶数  $2, 4, 6, 8, 10$  的方差记为  $\sigma_1^2$ , 则  $\sigma^2$  与  $\sigma_1^2$  的大小关系为  $\sigma^2$  \_\_\_\_\_  $\sigma_1^2$ .
7. 若  $\theta$  为三角形的一个内角, 且  $\sin \theta + \cos \theta = \frac{2}{3}$ , 则方程  $x^2 \csc \theta - y^2 \sec \theta = 1$  表示的曲线的焦点坐标是\_\_\_\_\_ .
8. 高为  $h$  的棱锥被平行于棱锥底面的截得棱台侧面积是原棱锥的侧面积的  $\frac{5}{9}$ , 则截得的棱台的体积与原棱锥的体积之比是\_\_\_\_\_ .
9. 以椭圆  $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$  的右焦点为圆心, 且与双曲线  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$  的渐近线相切的圆方程是\_\_\_\_\_ .
10. 若  $\sqrt{\sin x}$  是有理数且  $x$  不是  $\frac{\pi}{6}$  的整数倍, 则  $x$  可能取的值是\_\_\_\_\_ . (只要写出一个)
11. 马路上有编号 1 到 10 的 10 盏路灯, 为节约用电又不影响照明, 可以关掉其中的 3 盏, 但又不能同时关掉相邻的两盏, 也不能关掉两端的路灯, 满足条件的关灯方法有\_\_\_\_\_ 种.
12. 以椭圆  $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$  的右焦点为圆心, 且与双曲线  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$  的渐近线相切的圆方程是\_\_\_\_\_ .

13. 若  $\sqrt{\sin x}$  是有理数且  $x$  不是  $\frac{\pi}{6}$  的整数倍, 则  $x$  可能取的值是\_\_\_\_\_ . (只要写出一个)
14. 马路上有编号 1 到 10 的 10 盏路灯, 为节约用电又不影响照明, 可以关掉其中的 3 盏, 但又不能同时关掉相邻的两盏, 也不能关掉两端的路灯, 满足条件的关灯方法有\_\_\_\_\_种.
15. 以椭圆  $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$  的右焦点为圆心, 且与双曲线  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$  的渐近线相切的圆方程是\_\_\_\_\_ .

二. 选择题: 本大题共 4 题, 满分 16 分. 请选择你认为最正确的答案 (每小题有且只有一个) 写在括号内. 每题填写正确得 4 分, 否则得 0 分.

16. 已知集合  $A = \{x \mid |x - 1| < 3\}$ , 集合  $B = \{y \mid y = x^2 + 2x + 1, x \in \mathbb{R}\}$ , 则  $A \cap \complement_U B$  为\_\_\_\_\_.  
(A)  $[0, 4)$  (B)  $(-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$   
(C)  $(-2, 0)$  (D)  $(0, 4)$

17. 若  $a, b$  是直线,  $\alpha, \beta$  是平面, 则以下命题中真命题是\_\_\_\_\_.

- (A) 若  $a, b$  异面,  $a \subset \alpha, b \subset \beta$ , 且  $a \perp b$ , 则  $\alpha \perp \beta$   
(B) 若  $a \parallel b, a \subset \alpha, b \subset \beta$ , 则  $\alpha \parallel \beta$   
(C) 若  $a \parallel \alpha, b \subset \beta$ , 则  $a, b$  异面  
(D) 若  $a \perp b, a \perp \alpha, b \perp \beta$ , 则  $\alpha \perp \beta$

18. 已知集合  $A = \{x \mid |x - 1| < 3\}$ , 集合  $B = \{y \mid y = x^2 + 2x + 1, x \in \mathbb{R}\}$ , 则  $A \cap \complement_U B$  为\_\_\_\_\_.  
(A)  $[0, 4)$  (B)  $(-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$   
(C)  $(-2, 0)$  (D)  $(0, 4)$

19. 若  $a, b$  是直线,  $\alpha, \beta$  是平面, 则以下命题中真命题是\_\_\_\_\_.

- (A) 若  $a, b$  异面,  $a \subset \alpha, b \subset \beta$ , 且  $a \perp b$ , 则  $\alpha \perp \beta$   
(B) 若  $a \parallel b, a \subset \alpha, b \subset \beta$ , 则  $\alpha \parallel \beta$   
(C) 若  $a \parallel \alpha, b \subset \beta$ , 则  $a, b$  异面  
(D) 若  $a \perp b, a \perp \alpha, b \perp \beta$ , 则  $\alpha \perp \beta$

三. 简答题: 本大题共 5 题, 满分 78 分. 请在题后空处写出必要的推理计算过程.

20. 已知复数  $z$  满足:  $|z| - z^* = \frac{10}{1 - w\mathbf{i}}$  (其中  $z^*$  是  $z$  的共轭复数).

(1) (7 分) 求复数  $z$ ;

(2) (7 分) 若复数  $w = \cos \theta + \mathbf{i} \sin \theta$  ( $\theta \in \mathbb{R}$ ), 求  $|z - 2|$  的取值范围.

21. (14 分) 函数  $f(x) = 4 \sin \frac{\pi}{12} x \cdot \sin \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} x \right)$ ,  $x \in [a, a + 1]$ , 其中常数  $a \in [0, 5]$ , 求函数  $f(x)$  的最大值  $g(a)$ .

22. (16 分) 函数  $f(x) = 4 \sin \frac{\pi}{12} x \cdot \sin \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} x \right)$ ,  $x \in [a, a+1]$ , 其中常数  $a \in [0, 5]$ , 求函数  $f(x)$  的最大值  $g(a)$ .

23. 已知复数  $z$  满足:  $|z| - z^* = \frac{10}{1 - w\mathbf{i}}$  (其中  $z^*$  是  $z$  的共轭复数) .

(1) (8 分) 求复数  $z$ ;

(2) (8 分) 若复数  $w = \cos \theta + \mathbf{i} \sin \theta$  ( $\theta \in \mathbb{R}$ ), 求  $|z - 2|$  的取值范围.

24. (18 分) 函数  $f(x) = 4 \sin \frac{\pi}{12} x \cdot \sin \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} x \right)$ ,  $x \in [a, a+1]$ , 其中常数  $a \in [0, 5]$ , 求函数  $f(x)$  的最大值  $g(a)$ .