

2011 年全国普通高等学校招生统一考试 (上海卷)

数学 (理科)

(本试卷满分 150 分, 考试时间 120 分钟)

一. 填空题: 本大题共 14 题, 满分 56 分. 请在横线上方填写最终的、最准确的、最完整的结果. 每题填写正确得 4 分, 否则一律得 0 分.

1. 已知 $\mathbf{a} = (k, -9)$ 、 $\mathbf{b} = (-1, k)$, \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 为平行向量, 则 $k = \underline{\pm 3}$.
2. 若函数 $f(x) = x^{6m^2-5m-4}$ ($m \in \mathbb{Z}$) 的图像关于 y 轴对称, 且 $f(2) < f(6)$, 则 $f(x)$ 的解析式为 $\underline{f(x) = x^{-4}}$.
3. 若 $f(x+1) = x^2$ ($x \leq 0$), 则 $f^{-1}(1) = \underline{0}$.
4. 在 b g 糖水含糖 a g ($b > a > 0$), 若再添加 m g 糖 ($m > 0$),
5. 已知 $f(x) = 1 - c_8^1 x + c_8^2 x^2 - c_8^3 x^3 + \cdots + c_8^8 x^8$, 则 $f\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ 的值是 $\underline{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$.
6. 自然数 $1, 2, 3, \dots, 10$ 的方差记为 σ^2 , 其中的偶数 $2, 4, 6, 8, 10$ 的方差记为 σ_1^2 , 则 σ^2 与 σ_1^2 的大小关系为 $\sigma^2 \geq \sigma_1^2$.
7. 若 θ 为三角形的一个内角, 且 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{2}{3}$, 则方程 $x^2 \csc \theta - y^2 \sec \theta = 1$ 表示的曲线的焦点坐标是 $\underline{\left(\pm \frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right)}$.
8. 高为 h 的棱锥被平行于棱锥底面的截得棱台侧面积是原棱锥的侧面积的 $\frac{5}{9}$, 则截得的棱台的体积与原棱锥的体积之比是 $\underline{19:27}$.
9. 以椭圆 $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ 的右焦点为圆心, 且与双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的渐近线相切的圆方程是 $\underline{(x-5)^2 + y^2 = 16}$.
10. 若 $\sqrt{\sin x}$ 是有理数且 x 不是 $\frac{\pi}{6}$ 的整数倍, 则 x 可能取的值是 $\underline{\arcsin \frac{1}{4}}$ 等. (只要求写出一个)
11. 马路上有编号 1 到 10 的 10 盏路灯, 为节约用电又不影响照明, 可以关掉其中的 3 盏, 但又不能同时关掉相邻的两盏, 也不能关掉两端的路灯, 满足条件的关灯方法有 $\underline{20}$ 种.
12. 以椭圆 $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ 的右焦点为圆心, 且与双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的渐近线相切的圆方程是 $\underline{(x-5)^2 + y^2 = 16}$.
13. 若 $\sqrt{\sin x}$ 是有理数且 x 不是 $\frac{\pi}{6}$ 的整数倍, 则 x 可能取的值是 $\underline{\arcsin \frac{1}{4}}$ 等. (只要求写出一个)
14. 马路上有编号 1 到 10 的 10 盏路灯, 为节约用电又不影响照明, 可以关掉其中的 3 盏, 但又不能同时关掉相邻的两盏, 也不能关掉两端的路灯, 满足条件的关灯方法有 $\underline{20}$ 种.
15. 以椭圆 $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ 的右焦点为圆心, 且与双曲线 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的渐近线相切的圆方程是 $\underline{(x-5)^2 + y^2 = 16}$.

二. 选择题: 本大题共 4 题, 满分 16 分. 请选择你认为最正确的答案 (每小题有且只有一个) 写在括号内. 每题填写正确得 4 分, 否则得 0 分.

16. 已知集合 $A = \{x \mid x - 1 < 3\}$, 集合 $B = \{y \mid y = x^2 + 2x + 1, x \in \mathbb{R}\}$, 则 $A \cap \complement_U B$ 为 C.
(A) $[0, 4)$
(C) $(-2, 0)$

17. 若 a, b 是直线, α, β 是平面, 则以下命题中真命题是 D.

- (A) 若 a, b 异面, $a \subset \alpha, b \subset \beta$, 且 $a \perp b$, 则 $\alpha \perp \beta$
(B) 若 $a \parallel b, a \subset \alpha, b \subset \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$
(C) 若 $a \parallel \alpha, b \subset \beta$, 则 a, b 异面
(D) 若 $a \perp b, a \perp \alpha, b \perp \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$

18. 已知集合 $A = \{x \mid x - 1 < 3\}$, 集合 $B = \{y \mid y = x^2 + 2x + 1, x \in \mathbb{R}\}$, 则 $A \cap \complement_U B$ 为 C.
(A) $[0, 4)$
(C) $(-2, 0)$

19. 若 a, b 是直线, α, β 是平面, 则以下命题中真命题是 D.

- (A) 若 a, b 异面, $a \subset \alpha, b \subset \beta$, 且 $a \perp b$, 则 $\alpha \perp \beta$
(B) 若 $a \parallel b, a \subset \alpha, b \subset \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$
(C) 若 $a \parallel \alpha, b \subset \beta$, 则 a, b 异面
(D) 若 $a \perp b, a \perp \alpha, b \perp \beta$, 则 $\alpha \perp \beta$

三. 简答题: 本大题共 5 题, 满分 78 分. 请在题后空处写出必要的推理计算过程.

20. 已知复数 z 满足: $z - z^* = \frac{10}{1 - wi}$ (其中 z^* 是 z 的共轭复数) .

(1) (7 分) 求复数 z ;

(2) (7 分) 若复数 $w = \cos \theta + i \sin \theta (\theta \in \mathbb{R})$, 求 $z - 2$ 的取值范围.

解:

(1) $z = 3 + 4i$

(2) $z - w \in [4, 6]$

21. (14 分) 函数 $f(x) = 4 \sin \frac{\pi}{12} x \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} x \right), x \in [a, a + 1]$, 其中常数 $a \in [0, 5]$, 求函数 $f(x)$ 的最大值 $g(a)$.

解: 略

22. (16 分) 函数 $f(x) = 4\sin \frac{\pi}{12}x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}x\right), x \in [a, a+1]$, 其中常数 $a \in [0, 5]$, 求函数 $f(x)$ 的最大值 $g(a)$.

解：略

23. 已知复数 z 满足: $z - z^* = \frac{10}{1 - wi}$ (其中 z^* 是 z 的共轭复数) .

(1) (8 分) 求复数 z ;

(2) (8 分) 若复数 $w = \cos \theta + i \sin \theta (\theta \in \mathbb{R})$, 求 $z - 2$ 的取值范围.

解:

(1) $z = 3 + 4i$

(2) $z - w \in [4, 6]$

24. (18 分) 函数 $f(x) = 4\sin \frac{\pi}{12}x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}x\right), x \in [a, a+1]$, 其中常数 $a \in [0, 5]$, 求函数 $f(x)$ 的最大值 $g(a)$.

解：略