2011 年全国普通高等学校招生统一考试 (上海卷)

数学 (理科)

(本试卷满分 150 分, 考试时间 120 分钟)

一. 填空题: 本大题共 14 题, 满分 56 分. 请在横线上方填写最终的、最准确的、最完整的结果. 每题填写正确得 4 分, 否则一律得 0 分.

1. 已知 $\boldsymbol{a}=(k,-9)$、$\boldsymbol{b}=(-1,k)$, $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为平行向量, 则 $k=\underline{\ \pm3\ }$.

2. 若函数 $f(x)=x^{6m^2-5m-4}\,(m\in\mathbb{Z})$ 的图像关于 y 轴对称, 且 $f(2)<f(6)$, 则 $f(x)$ 的解析式为 $\underline{\ f(x)=x^{-4}\ }$.

3. 若 $f(x+1)=x^2\,(x\leqslant 0)$, 则 $f^{-1}(1)=\underline{\ 0\ }$.

4. 在 bg 糖水中含糖 ag $(b>a>0)$, 若再添加 mg 糖 $(m>0)$,

5. 已知 $f(x)=1-\mathbf{c}_8^1x+\mathbf{c}_8^2x^2-\mathbf{c}_8^3x^3+\cdots+\mathbf{c}_8^8x^8$, 则 $f\big(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}\big)$ 的值是 $\underline{\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}\ }$.

6. 自然数 $1,2,3,\ldots,10$ 的方差记为 σ^2, 其中的偶数 $2,4,6,8,10$ 的方差记为 σ_1^2, 则 σ^2 与 σ_1^2 的大小关系为 $\sigma^2\ \underline{\ >\ }\ \sigma_1^2$.

7. 若 θ 为三角形的一个内角, 且 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{2}{3}$, 则方程 $x^2\csc\theta-y^2\sec\theta=1$ 表示的曲线的焦点坐标是 $\underline{\ \big(\pm\frac{\sqrt{6}}{3},0\big)\ }$.

8. 高为 h 的棱锥被平行于棱锥底面的截得棱台侧面积是原棱锥的侧面积的 $\frac{5}{9}$, 则截得的棱台的体积与原棱锥的体积之比是 $\underline{\ 19:27\ }$.

9. 以椭圆 $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ 的右焦点为圆心, 且与双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的渐近线相切的圆方程是 $\underline{\ (x-5)^2+y^2=16\ }$.

10. 若 $\sqrt{\sin x}$ 是有理数且 x 不是 $\frac{\pi}{6}$ 的整数倍, 则 x 可能取的值是 $\underline{\ \arcsin\frac{1}{4}\text{ 等}\ }$.（只要求写出一个）

11. 马路上有编号 1 到 10 的 10 盏路灯, 为节约用电又不影响照明, 可以关掉其中的 3 盏, 但又不能同时关掉相邻的两盏, 也不能关掉两端的路灯, 满足条件的关灯方法有 $\underline{\ 20\ }$ 种.

12. 以椭圆 $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ 的右焦点为圆心, 且与双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的渐近线相切的圆方程是 $\underline{\ (x-5)^2+y^2=16\ }$.

13. 若 $\sqrt{\sin x}$ 是有理数且 x 不是 $\frac{\pi}{6}$ 的整数倍, 则 x 可能取的值是 $\underline{\ \arcsin\frac{1}{4}\text{ 等}\ }$.（只要求写出一个）

14. 马路上有编号 1 到 10 的 10 盏路灯, 为节约用电又不影响照明, 可以关掉其中的 3 盏, 但又不能同时关掉相邻的两盏, 也不能关掉两端的路灯, 满足条件的关灯方法有 $\underline{\ 20\ }$ 种.

15. 以椭圆 $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$ 的右焦点为圆心, 且与双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的渐近线相切的圆方程是 $\underline{\ (x-5)^2+y^2=16\ }$.

二. 选择题：本大题共 4 题，满分 16 分. 请选择你认为最正确的答案（每小题有且只有一个）写在括号内. 每题填写正确得 4 分，否则得 0 分.

16. 已知集合 $A=\{x \mid x-1<3\}$, 集合 $B=\{y|y=x^2+2x+1, x\in\mathbb{R}\}$, 则 $A\cap \complement_U B$ 为 $\underline{\text{ C }}$.

A. $[0,4)$　　B. $(-\infty,-2]\cup[4,+\infty)$

C. $(-2,0)$　　D. $(0,4)$

17. 若 a、b 是直线, α、β 是平面, 则以下命题中真命题是 $\underline{\text{ D }}$.

A. 若 a、b 异面, $a\subset\alpha$,$b\subset\beta$, 且 $a\perp b$, 则 $\alpha\perp\beta$

B. 若 $a\parallel b$, $a\subset\alpha$, $b\subset\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$

C. 若 $a\parallel\alpha$, $b\subset\beta$, 则 a、b 异面

D. 若 $a\perp b$, $a\perp\alpha$,$b\perp\beta$, 则 $\alpha\perp\beta$

18. 已知集合 $A=\{x \mid x-1<3\}$, 集合 $B=\{y|y=x^2+2x+1, x\in\mathbb{R}\}$, 则 $A\cap \complement_U B$ 为 $\underline{\text{ C }}$.

A. $[0,4)$　　B. $(-\infty,-2]\cup[4,+\infty)$

C. $(-2,0)$　　D. $(0,4)$

19. 若 a、b 是直线, α、β 是平面, 则以下命题中真命题是 $\underline{\text{ D }}$.

A. 若 a、b 异面, $a\subset\alpha$,$b\subset\beta$, 且 $a\perp b$, 则 $\alpha\perp\beta$

B. 若 $a\parallel b$, $a\subset\alpha$, $b\subset\beta$, 则 $\alpha\parallel\beta$

C. 若 $a\parallel\alpha$, $b\subset\beta$, 则 a、b 异面

D. 若 $a\perp b$, $a\perp\alpha$,$b\perp\beta$, 则 $\alpha\perp\beta$

三. **简答题**: **本大题共 5 题, 满分 78 分. 请在题后空处写出必要的推理计算过程.**

20. 已知复数 z 满足: $z - z^* = \dfrac{10}{1 - w\mathbf{i}}$ (其中 z^* 是 z 的共轭复数).

(1) (7 分) 求复数 z;

(2) (7 分) 若复数 $w = \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta\,(\theta \in \mathbb{R})$, 求 $z - 2$ 的取值范围.

解:

(1) $z = 3 + 4\mathbf{i}$

(2) $z - w \in [4, 6]$

21. (14 分) 函数 $f(x) = 4\sin\dfrac{\pi}{12}x \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{12}x\right), x \in [a, a+1]$, 其中常数 $a \in [0, 5]$, 求函数 $f(x)$ 的最大值 $g(a)$.

解: 略

22. (16 分) 函数 $f(x)=4\sin\dfrac{\pi}{12}x\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{12}x\right), x\in[a,a+1]$, 其中常数 $a\in[0,5]$, 求函数 $f(x)$ 的最大值 $g(a)$.

解：略

23. 已知复数 z 满足：$z - z^* = \dfrac{10}{1 - w\mathbf{i}}$（其中 z^* 是 z 的共轭复数）.

(1)（8 分）求复数 z；

(2)（8 分）若复数 $w = \cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta\,(\theta \in \mathbb{R})$, 求 $z - 2$ 的取值范围.

解: (1) $z = 3 + 4\mathbf{i}$ (2) $z - w \in [4, 6]$

24. (18 分) 函数 $f(x)=4\sin\dfrac{\pi}{12}x\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{12}x\right),x\in[a,a+1]$, 其中常数 $a\in[0,5]$, 求函数 $f(x)$ 的最大值 $g(a)$.

解：略