Chapter10 势和场

麦克斯韦方程

$$(i)\ \nabla\cdot\vec{E}=\frac{1}{\varepsilon_0}\rho,\quad (iii)\ \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$(ii)\ \nabla\cdot\vec{B}=0,\qquad (iv)\ \nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

由于$\vec{B}$的散度总为零，总是有$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$，将其代入$(iii)$可得：

$$\nabla\times(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})=0\ \leftrightarrow\ \vec{E}=-\nabla V-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

代入$(i)(iv)$得到：

$$\nabla^2V+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{A})=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$(\nabla^2\vec{A}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2})-\nabla(\nabla\cdot\vec{A}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t})=-\mu_0\vec{J}$$

二式包含了麦克斯韦方程的所有信息。

规范变换

对于势V和$\vec{A}$，可以对其附加额外的条件（在不影响$\vec{E}$和$\vec{B}$的情况下）：

$$\vec{A}'=\vec{A}+\nabla\lambda$$

$$V'=V-\frac{\partial\lambda}{\partial t}$$

其中λ是任意的标量函数，容易证明这对物理量$\vec{E}$和$\vec{B}$没有任何影响。

库仑规范：

在静磁学中，规定$\nabla\cdot\overrightarrow{A}=0$，因此有：

$$\nabla^2 V=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\nabla^2\overrightarrow{A}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\overrightarrow{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\overrightarrow{J}+\mu_0\varepsilon_0\nabla(\frac{\partial V}{\partial t})$$

洛伦兹规范：

在洛伦兹规范中，规定$\nabla\cdot\overrightarrow{A}=-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial V}{\partial t}$，因此有：

$$\nabla^2 V-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\nabla^2\overrightarrow{A}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\overrightarrow{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\overrightarrow{J}$$

定义达朗贝尔算子为：

$$\Box^2\equiv\nabla^2-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

因此有：

$$(i)\ \Box^2 V=-\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$(ii)\ \Box^2\overrightarrow{A}=-\mu_0\overrightarrow{J}$$

在洛伦兹规范中，V和$\overrightarrow{A}$**满足非齐次波方程**，在二阶微分方程右端有“源”。