

Tomografía computarizada y algoritmos de reconstrucción de cortes

Anna Candela Gioia Perez, Mariano Agustín Dolhare, Cristian Damián Meichtry,
Juan Martin Rodriguez, y Tomás Agustin Castro
Instituto Tecnológico de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina

Resumen—La reconstrucciones de imágenes a través de una tomografía son realizadas por distintos algoritmos que difieren en sus hipótesis, condiciones, tiempo y calidad de resolución. Para dos dimensiones, aquellos más destacados son ART y *filtered backprojection*, pero también se encuentran la reconstrucción por el método de Fourier como también el método de los gradientes conjugados. La realización de la comparación entre estos algoritmos de reconstrucción permite saber no sólo cómo interpretar los datos obtenidos, sino también la justificación de por qué en la actualidad se terminan usando unos u otros dependiendo el caso.

Index Terms—transformada de Radón, scan, transformada de Fourier, rayos X, ondas electromagnéticas, frecuencia, *slice*, Teorema de corte de Fourier, k-space

I. INTRODUCCIÓN

La reconstrucción por *Computed Tomography* (CT) se basa en obtener la imagen de un plano de un corte de un objeto a partir de las proyecciones de éste. Estas distintas vistas son posibles debido a la emisión y transmisión de rayos X, pues estos pueden atravesar objetos para luego ser detectados generando una proyección relacionada con la densidad interna, ya que, si bien pueden atravesar objetos, también pueden ser absorbidos por estos y la intensidad transmitida será menor en estos casos. Una vez obtenidas suficientes proyecciones a través de diversos algoritmos se puede obtener la imagen del corte por donde pasan los rayos-X. Todos estos métodos se basan en el Teorema del Corte de Fourier o Teorema del Corte de Proyección, el cual demuestra la posibilidad de generar la imagen a partir de las proyecciones y su transformada Radón.

II. OBTENCIÓN DE DATOS Y PROYECCIONES

II-A. Emisión de rayos X

La tomografía es un procedimiento que se lleva a cabo con el fin de obtener una imagen de un cuerpo de dos o tres dimensiones. Como se mencionó anteriormente, se basa específicamente en el uso de rayos X.

Los rayos X son un tipo de radiación electromagnética cuya energía es dependiente de la carga que conforman el espacio. La tomografía hace uso de una característica de estas ondas electromagnéticas: su intensidad se modifica con la interacción o contacto de un objeto sólido. Cuanto más denso sea un objeto, mayor impacto tendrá sobre la intensidad. Por lo tanto, al irradiar un cuerpo con rayos X se puede medir la pérdida de energía o, en otras palabras, el decrecimiento de la intensidad del haz de la onda, para poder construir la imagen deseada.

La descripción anterior es la base de las tomografías del cuerpo humano. Sin embargo, éste está conformado por distintos materiales (agua, sangre, tejidos, huesos, músculos, etc), por lo que genera una complejidad más grande al querer obtener una imagen. Irradiar un haz en una sola dirección y medir diferencia de intensidad ya no brinda suficiente información. La solución propuesta es medir el cambio del haz en distintas direcciones, lo que permite obtener un compilado de mediciones que dan la información correcta para la reconstrucción. En otras palabras, obtener proyecciones mediante un conjunto de haces provenientes de una fuente emisora que va rotando sobre el plano de la imagen (o del corte).

Las mediciones tomadas terminan plasmándose en un sinograma, un gráfico donde cada punto representa el cambio de intensidad de la onda según la distancia de los haces hacia el origen (eje vertical) y el ángulo de la dirección en el que el plano o *slice* deseado del cuerpo es medido (eje horizontal). A partir de este gráfico, se reconstruye la imagen.

II-B. Modelo matemático

La intensidad I medida en un scanner se puede modelar matemáticamente a través de la intensidad inicial I_0 y el coeficiente de atenuación μ del objeto estudiado.

$$\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = \int \mu(x, y) ds \quad (1)$$

Este coeficiente de atenuación se define como la proporción de protones absorbidos por milímetro de sustancia a una distancia dada del origen. En este caso, se integra en ds , una línea recta a través del cuerpo. Esto logra conseguir una relación entre la intensidad y un parámetro característico de cada material del cuerpo, permitiendo la obtención de datos que permitan discriminar los tejidos de los huesos o de la sangre por ejemplo.

Por simplicidad, se denominarán a $\ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$ como $\rho(r, \theta)$ (también llamado proyección) y a $\mu(x, y)$ como $f(x, y)$. El parámetro θ es el ángulo donde se mide el corte y r es la posición horizontal en el scanner. Estos son las variables que conforman el sinograma mencionado con anterioridad. Por lo tanto, es el siguiente el desafío de la tomografía: lograr obtener $f(x, y)$ a través de $\rho(r, \theta)$.

II-C. La transformada Radón

Una entre las tantas herramientas matemáticas para obtener el coeficiente de atenuación de la [Ecuación 1](#).

Para la definición de esta transformada se necesita definir una función $f(x, y)$ y una función denominada detector que se representa por $\rho_\theta(t)$.

Considerando la función $f(x, y)$ representativa de un objeto, se puede trazar una recta $L(\theta, t)$ que pase por ella, cuya ecuación implícita sea:

$$L(\theta, t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta = t\}$$

Esta recta se denomina *x-ray* y es dependiente del ángulo que forma ella misma con el eje y , como también es dependiente de t , punto donde se cruza con la función detectora.

Las definiciones anteriores permiten definir la proyección de f como:

$$\rho_\theta(t) = \mathcal{R}f = \int_{L(\theta, t)} f(x, y) ds \quad (2)$$

La última expresión es lo que se denomina transformada de Radón, donde ds es el incremento de la longitud a lo largo de la línea L . En el caso de rotar la función detector y cambiar θ , podemos obtener distintas proyecciones que se van a mostrar en un gráfico de t y θ , es decir, en el *projection domain* o sinograma. La relación entre (x, y) con θ termina siendo:

$$\begin{aligned} x &= t \cos \theta - s \sin \theta \\ y &= t \sin \theta + s \cos \theta \end{aligned}$$

donde s es el nuevo eje debido a la rotación. Entonces, la Ecuación 2 se puede expresar como:

$$\rho_\theta(t) = \mathcal{R}f = \int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \cos \theta + s \sin \theta) ds \quad (3)$$

Por simplicidad de anotación, se suele escribir esta transformada a través de vectores:

$$\rho_\theta(t) = \mathcal{R}f = \int_{-\infty}^{\infty} f(t\zeta + s\zeta^\perp) ds \quad (4)$$

donde:

$$\begin{aligned} \zeta &= (\cos \theta, \sin \theta) \\ \zeta^\perp &= (-\sin \theta, \cos \theta) \end{aligned}$$

Se puede probar que la transformada Radón representa un isomorfismo, es decir, que para cada $f(x, y)$ que verifique ciertas condiciones hay una única función asociada resultante de hacer la transformada Radón. Si $f(x, y)$ es continua y tiene soporte compacto¹, entonces su transformada de Radón está unívocamente determinada si se integra sobre todas las líneas positivas de L .

Siendo $f(x, y)$ una densidad desconocida que se desea averiguar, la transformada es la proyección de la información y es el conjunto de datos que se recompilan en una tomografía. Esto conlleva a que si se aplica la transformada inversa de Radón a las mediciones del CT scanner, entonces se puede obtener la densidad original del plano medido del cuerpo.

¹El soporte de una función son los puntos en donde no se anula. Por otro lado, un conjunto es compacto si es cerrado y acotado. Por lo tanto, f tiene soporte compacto si y sólo si el conjunto $\{x | f(x) \neq 0\}$ es cerrado y acotado.

II-D. El problema de la reconstrucción

La existencia de la transformada inversa de Radón demuestra que es posible reconstruir una imagen con total exactitud en base a los datos de sus proyecciones. De todas formas, en la práctica se presentan problemas debido al carácter discreto de los datos de medición y las imágenes digitales.

La transformada de Radón se encuentra definida para funciones continuas, sin embargo se cuenta con una cantidad finita de datos, lo cual trae asociado dos problemas, el primero, una pérdida de información y el segundo, la imposibilidad de aplicar la transformada inversa a los datos discretos.

La primera dificultad viene asociada a la pérdida de información que proviene de la discretización de los datos, lo cual puede recaer en una distorsión de la imagen, en falta de detalles o en resultados con artefactos, como líneas o manchas. Si bien hay técnicas para mitigar estos efectos, como por ejemplo incrementar la cantidad de datos, estas medidas solo reducen la posibilidad de error y pueden introducir problemas como un incremento en el tiempo de cálculo o en el consumo de recursos.

Para el segundo problema (no poder aplicar la transformada sobre un conjunto discreto) se busca aplicar una aproximación de la transformada inversa de Radón que permita reconstruir la imagen deseada. Para ello existen algoritmos capaces de encontrar desde una versión aproximada de la imagen hasta una imagen reconstruida con exactitud.

Los algoritmos y la reconstrucción depende de la geometría asumida de los rayos. En primer lugar se encuentran las reconstrucciones más simples y eficientes que determinan que los rayos-X se parametricen con el mismo θ y el mismo t . Este algoritmo se denomina *Parallel beam projection* y las proyecciones se obtienen tomando muestras de la función original a lo largo de líneas paralelas. La expresiones para la transformada de Radón tienen en cuenta esta aproximación.

Por otro lado, se encuentran las reconstrucciones basadas en *Fan beam projection*, un algoritmo más complejo donde las proyecciones se obtienen tomando muestras de la función original a lo largo de líneas que convergen en un punto, consiguiendo así una forma de abanico.

Finalmente, el algoritmo más complejo de los tres, el *Cone beam projection*, donde las proyecciones son tomadas siguiendo una forma de cono. Este algoritmo es utilizado en situaciones particulares ya que se pueden obtener imágenes de cuerpos complejos a costa de un gran uso de recursos.

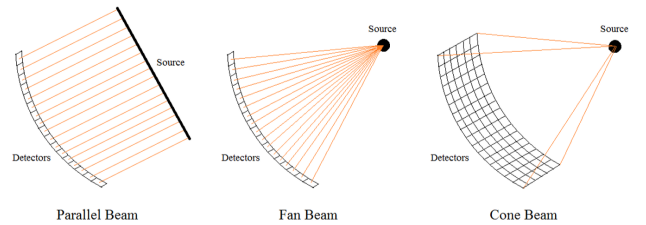


Figura 1: Parallel, fan and cone beam projection.

III. RECONSTRUCCIONES BÁSICAS PARA 2D

III-A. Introducción

En esta sección se describirán con detalles ciertos algoritmos que permiten obtener o reconstruir imágenes en dos dimensiones, considerando que los rayos son paralelos entre sí.

III-B. Técnicas de reconstrucción algebraica

En el caso de un dominio discreto, la univocidad se sigue manteniendo. Y puesto que la transformada Radón es lineal, puede ser equiparada a una matriz de transformación. Se puede definir entonces una imagen digital de tamaño $N \times N$ en forma contraída como un vector unidimensional $\mathbf{f} : 1 \times N \cdot N$ el cual contiene todas las columnas de la imagen en orden (recorrido en orden natural). Si se tiene un sinograma con proyecciones correspondientes a N rayos para P ángulos, una representación del mismo tipo se puede obtener para las proyecciones, definida como el vector $\mathbf{p} : 1 \times N \cdot P$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_I \\ f_{N+1} \\ \vdots \\ f_{2N} \\ \vdots \\ f_{NN} \end{bmatrix} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_P \\ p_{P+1} \\ \vdots \\ p_{2P} \\ \vdots \\ f_{NP} \end{bmatrix} \quad (5)$$

De esta forma la transformada discreta, que permite pasar desde la imagen digital a sus proyecciones puede representarse como la matriz \mathbf{W} y se obtiene la Ecuación 6.

$$\mathbf{p} = \mathbf{W} \mathbf{f} \quad (6)$$

Definiendo de esta manera la situación, se muestra que puede reconstruirse la imagen desde sus proyecciones en forma algebraica al encontrar \mathbf{W}^{-1} ; esta matriz existe debido a que la transformada discreta sigue siendo un isomorfismo.

Como en la práctica invertir una matriz del gran tamaño que tendrá \mathbf{W} al incluir el gran volumen de datos obtenido en la recopilación de datos puede volverse muy pesado computacionalmente, se puede utilizar alguno de los métodos ART, para bajar la complejidad computacional. Si bien las siglas ART significan *Algebraic Reconstruction Techniques* o Técnicas de Reconstrucción Algebraica, estas suelen referir a un subgrupo de algoritmos que incluyen simplificaciones además de aproximar el vector \mathbf{f} , es decir, la imagen, en forma iterativa.

Puede definirse entonces el vector \mathbf{f}_t un vector intermedio que surge de iterar sobre un algoritmo t veces. Teniendo este vector, también se podría multiplicarlo por la matriz \mathbf{W} . La respuesta es la Ecuación 7, en donde \mathbf{q}_t es el vector de proyección intermedia para el instante t .

$$\mathbf{q}_t = \mathbf{W} \mathbf{f}_t \quad (7)$$

Adicionalmente, la matriz \mathbf{W} puede simplificarse. Dado que esta matriz define los caminos recorridos por cada rayo, valiendo entre 0 y 1 dependiendo de cuanta área del rayo atraviesa cada píxel, los cuales permiten obtener la proyección en cada una de las direcciones, ésta puede transformarse en una matriz binaria en donde se le da el valor de 1 a los puntos de la matriz que marcan el camino de cada rayo mientras que todos los otros puntos valdrán 0. De esta manera no se requieren multiplicaciones adicionales, si no que se pesarán por igual todos los puntos en el camino de un rayo al momento de calcular una proyección.

Un ciclo del algoritmo tomará una sola proyección, calculará la proyección temporal \mathbf{q}_t de \mathbf{f}_t en la dirección de esta proyección y obtendrá el residuo entre ambos vectores. Este residuo se le sumará a \mathbf{f}_t para obtener \mathbf{f}_{t+1} y luego pasar a la siguiente iteración del ciclo, utilizando la proyección en el ángulo siguiente.

$$\Delta f_{t,n} \simeq \frac{1}{L_m} (p_m - q_{t-1,m}) \quad (8)$$

III-C. Backprojection

Una de las formas más simples de reconstrucción de imagen es *Backprojection*. Consiste en, como insinúa el nombre, proyectar hacia atrás desde las proyecciones. Es decir, para cada ángulo θ de proyección, se le da a cada píxel de la imagen (que es recorrido por el rayo responsable por la proyección en ese par (τ, θ)) el valor de proyección en el par. De esta manera al finalizar la operación cada píxel tendrá como valor la suma de todos los valores de proyección que fueron obtenidos debido a ese píxel. Puede verse esta operación en la Ecuación 9.

Utilizar *Backprojection* no producirá una recreación exacta de la imagen original, pero si la cantidad de proyecciones es suficiente se puede aproximar la imagen original satisfactoriamente.

$$b(x, y) = \int_0^\pi p(x \cos(\theta) + y \sin(\theta), \theta) d\theta \quad (9)$$

La relación entre la imagen original $f(x, y)$ y la reconstrucción $b(x, y)$ es la encontrada en la Ecuación 10, en donde d es la distancia desde el píxel, y $*$ es el operador de convolución. Se entiende de esta manera que, al reconstruir la imagen por este método, cada píxel está adicionalmente distorsionado por la respuesta al impulso del sistema a los píxeles de alrededor.

$$b(x, y) = \frac{1}{d} * f(x, y) \quad (10)$$

III-D. Reconstrucción Fourier

Un enfoque distinto que puede utilizarse para reconstruir una imagen en base a sus proyecciones es el de la transformada de Fourier.

El teorema de corte de Fourier indica que la transformada Fourier 1D de una determinada proyección de la imagen es equivalente a la proyección sobre el mismo ángulo de

la transformada 2D de la imagen. Entonces, el espectro de frecuencia de una proyección $P(\tau, \theta)$ es igual al corte que pasa por el centro del espectro de frecuencia bidimensional de la imagen en un ángulo θ (Ecuación 11).

$$P_\theta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j\omega(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))} dx dy \quad (11)$$

Por lo tanto, se puede apreciar que, al obtener la transformada de Fourier de una proyección, a su vez se mapea esta misma transformada de $f(x, y)$ y solo son necesarias proyecciones con θ entre 0 y π . Posteriormente, al aplicar la transformada inversa bidimensional de Fourier sobre el mapeo completo se termina por reconstruir $f(x, y)$.

En este tipo de reconstrucción se deben tomar en cuenta problemas provenientes de la discretización y cantidad limitada de datos. La transformada discreta de Fourier bidimensional inversa requiere que los valores de frecuencia discreta bidimensional se encuentren equiespaciados, pero si el espectro en frecuencia es reconstruido utilizando las transformadas discretas unidimensionales de las proyecciones se encontrará que la densidad de puntos crece a medida que acerca al centro. La solución entonces es la interpolación, para obtener valores equiespaciados a lo largo de todo el espectro bidimensional, lo cual requiere datos suficientes y aun así puede introducir errores en la reconstrucción.

III-E. Filtered Backprojection (FBP)

Conociendo el teorema de corte de Fourier se puede analizar la transformada inversa de Fourier bidimensional en coordenadas polares:

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j(ux + vy)} du dv \quad (12)$$

$$f(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega, \theta) e^{j\omega(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))} |\omega| d\omega d\theta \quad (13)$$

$$f(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} P_\theta(\omega) |\omega| e^{j\omega(x \cos(\theta) + y \sin(\theta))} d\omega d\theta \quad (14)$$

Visto en la Ecuación 12, la imagen puede ser recuperada a través de la antitransformada de Fourier bidimensional. Dentro de la antitransformada, además, la función representativa del espectro de frecuencia bidimensional puede representarse en coordenadas polares (Ecuación 13). Este cambio de coordenadas produce adicionalmente una multiplicación en el plano de las frecuencias por $|\omega|$. Por lo tanto, utilizando el teorema de corte de Fourier para pasar a la Ecuación 14, se encuentra que para construir una imagen en base a la antitransformada de Fourier de sus proyecciones en forma correcta, se necesita además aplicar un filtro derivador ($|\omega|$).

En otras palabras, existe un problema con la reconstrucción Fourier: El plano de Fourier hallado por las transformadas de las proyecciones posee una distorsión del tipo de la Ecuación 15.

$$\frac{1}{|\omega|} = \frac{1}{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}} \quad (15)$$

En consecuencia, se debe filtrar $P_\theta(\omega)$ para obtener el conjunto de valores que representa el espectro de $f(x, y)$ sin distorsión.

$$Q_\theta(\omega) = P_\theta(\omega) \cdot |\omega| \rightarrow q(x, y) = F^{-1}\{Q_\theta(w)\} \quad (16)$$

$$f(x, y) = \int_0^\pi q(x \cos(\theta) + y \sin(\theta), \theta) d\theta \quad (17)$$

Del resultado (16) se llega a la correspondiente fórmula de inversión de Radón la cual permite una correcta reconstrucción de la imagen y la Ecuación 17 representa la reconstrucción correcta tras filtrar y realizar *Back Projection*.

Este es el método *Filtered Back-Projection*, pues se realiza *Back-Projection* de los datos previamente filtrados $q_\theta(t) = F^{-1}\{Q_\theta(w)\} = F^{-1}\{P_\theta(w) \cdot |\omega|\} = \rho_\theta(t) * h(t)$, siendo $h(t)$ la respuesta impulsiva del filtro.

III-E1. Consideraciones en diseño digital: En el contexto digital se deben considerar las réplicas de las frecuencias en el armado del filtro, es decir, que el filtro estará limitado entre $-f_{\max}$ y f_{\max} de las frecuencias de las proyecciones. Típicamente, los filtros utilizados en FBP se diseñan en el dominio de la frecuencia con el objetivo de multiplicarlos con las frecuencias de las proyecciones. De esta manera, si en el ámbito digital se quiere implementar un filtro de tipo $|f|$, este en frecuencia deberá ser muestreado y además multiplicado por una ventana cuadrada. Este es conocido como el filtro de Ram-Lak. La discretización del filtro puede generar artefactos y además, multiplicar por una ventana cuadrada en frecuencia equivale a convolucionar por una función sinc en el dominio del tiempo, es decir que en las proyecciones filtradas se puede tener *leakage* temporal. Mediante diferentes ventanas, el filtro puede modificarse para poder obtener filtros más favorables para la reconstrucción.

El filtro de Shepp-Logan multiplica al filtro de Ram-Lak por una ventana de tipo *sinc*. Esto logra mantener la cualidad pasa-altos del filtro y reducir el *leakage* al cambiar la ventana. Al tener menor amplitud en las frecuencias altas también puede reducir el ruido en altas frecuencias.

Los filtros de tipo coseno, Hann y Hamming se logran multiplicando el filtro Ram-Lak por las más tradicionales ventanas de coseno, Hann y Hamming. Los beneficios obtenidos son similares a los de Shepp-Logan aunque estos pasan de ser filtros pasa-altos a ser filtros pasa-bandas.

En la Figura 2 muestra las respuestas en frecuencia de los distintos filtros.

Al estar en el dominio digital, la operación de proyección hacia atrás pasa de ser una integral a una sumatoria, como en la Ecuación 18, en donde se ve el *backprojection* de las proyecciones ya filtradas. Esto lo vuelve muy similar a los métodos ART ya que una vez más los píxeles en el camino de la proyección son ensuciados con el valor de la proyección filtrada en esa dirección.

2. Inicializar f_0 arbitrariamente y $k = 1$.
3. $\alpha_k = d_k^T (b - W f_{k-1}) / d_k^T W d_k$
4. $f_k = f_{k-1} + \alpha_k d_k$
5. Repetir 3 y 4 con k de 1 a N .
6. La solución es x_N .

Se puede probar que x_N es efectivamente el mínimo, es decir, el método converge en un número finito de pasos N . Se puede lograr una reconstrucción muy precisa con una cantidad suficiente de proyecciones. Sin embargo y como se verá en una sección siguiente, el principal inconveniente es el gran tiempo que lleva calcular la matriz Radón lo que hace que el método sea muy impráctico.

III-G. Transformada Inversa de Radón

Fue mencionado en la Subsección III-E que es posible reconstruir con exactitud una imagen continua en base a sus proyecciones al convolucionar el intento de reconstrucción en base a únicamente las proyecciones con la respuesta impulsiva de un filtro pasa-altos. Específicamente éste es un filtro de transferencia $H(s) = |s|$. Éste también es conocido como un filtro derivador debido al efecto que tiene sobre su entrada, y es la transformada inversa de Radón lo que permite obtener la Ecuación 22.

$$f(x, y) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial p(\tau, \theta)}{\partial \tau} \frac{1}{x \cos(\theta) + y \sin(\theta) - \tau} d\tau d\theta \quad (22)$$

Puede verse en la ecuación la derivada de cada una de las proyecciones con respecto a τ , como es esperado.

Si bien la transformada inversa existe, en el ámbito digital no es posible derivar, por lo que la Ecuación 22 solo podrá ser aproximada, por algoritmos como FBP, los cuales requieren un filtro digital el cual deberá aproximar al filtro derivador.

IV. RECONSTRUCCIÓN Fan Beam EN 2D

IV-A. Introducción

En la actualidad, una tomografía computarizada no crea rayos paralelos en la adquisición de información, sino que utiliza un conjunto de rayos que presentan un origen en un punto o fuente, y que luego divergen.

El *fan beam* tiene la particularidad de presentar dos configuraciones dependiendo de la forma. Este mismo puede ser recto o curvo, y eso conlleva discrepancias al momento de tratar algebraicamente los datos.

La forma para proceder para este tipo de geometría es transformar los datos algebraicamente para que puedan ser tratados como rayos paralelos para así poder aplicar ya los algoritmos anteriormente explicados. En la mayoría de las veces, se termina aplicando *Backprojection* una vez modificados los datos.

IV-B. Modelo matemático de fan beam a parallel beam

El modelo matemático se obtendrá para el detector plano por simplicidad.

La intensidad de la onda de rayos-X se denominará $R_\beta(s)$ donde β es el ángulo entre el eje y con la línea del rayo que

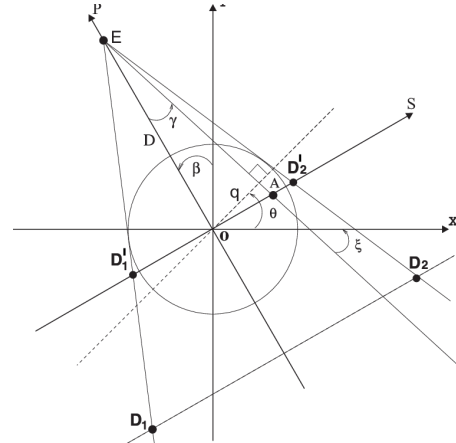


Figura 4: Detector plano.

cruza por el origen; s es la distancia del punto de proyección en la línea D_1 y D_2 a la intersección de D con la misma línea. Esta intensidad no es equivalente a la medida con *parallel beam* llamada ρ , pero sí están relacionadas entre sí. En otras palabras, cada $R_\beta(s)$ tiene asociada una intensidad $\rho_\theta(t)$.

Si el detector se mueve hacia la línea de D'_1 y D'_2 , la cuentas se simplifican, pues luego para obtener los datos según cualquier posición del detector sólo hay que escalar la distancia D con la distancia total entre la fuente y la verdadera posición del detector. En este caso, se considerará que el scan es de corto alcance, permitiendo mover el detector al lugar mencionado anteriormente. Con este cambio, las relaciones entre los datos de la geometría paralela y la de abanico son:

$$\begin{aligned} \theta &= \gamma + \beta \\ \frac{t}{s} &= \cos \gamma \\ \tan \gamma &= \frac{s}{D} \end{aligned}$$

donde γ es el ángulo entre la proyección deseada y la que cruza por el origen.

V. RECONSTRUCCIÓN Cone Beam EN 3D

Anteriormente, se explicó detalladamente las reconstrucciones para imágenes 2D. En el caso de reconstruir una imagen 3D de un cuerpo volumétrico, se debe aplicar otros algoritmos de reconstrucciones basados específicamente en la transformada de Radón de 3 dimensiones. El valor de esta última es la integral de superficie o plano del objeto a estudiar. Cada plano es representado por un punto que es la intersección de este plano con su vector normal. Generalmente, se utiliza la geometría de *cone beam* con una trayectoria circular.

Sin embargo, hay limitaciones relacionadas a la cantidad de datos o, en cierta medida, de rayos X que se deben tomar para que sea posible la reconstrucción. La condición de Tuy-Smith establece que la reconstrucción exacta es posible si todos los planos que intersectan el objeto también intersectan la trayectoria de la fuente (el camino de la fuente de rayos X) al menos una vez.

La trayectoria circular tiene la particularidad de no satisfacer la condición anterior. Esto no es un problema de demasiada importancia, ya que se soluciona extendiendo la trayectoria con el agregado de una línea o un círculo. Otro recurso, un poco más elegante, es mover la fuente de rayos en una forma de elipse.

En la siguiente figura se pueden apreciar distintos casos donde la condición de Tuy-Smith se satisface o otros donde no.

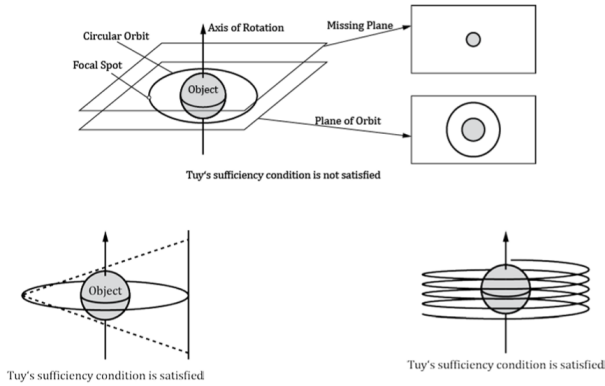


Figura 5: Condición de Tuy-Smith.

La data disponible para la transformada de Radón queda confiscada en un cuerpo en forma de dona o toro, tal como se muestra en [Figura 6](#). Se aprecia que en el eje z hay una zona donde no se puede adquirir información y se denomina la zona de sombra o *shadow bone*.

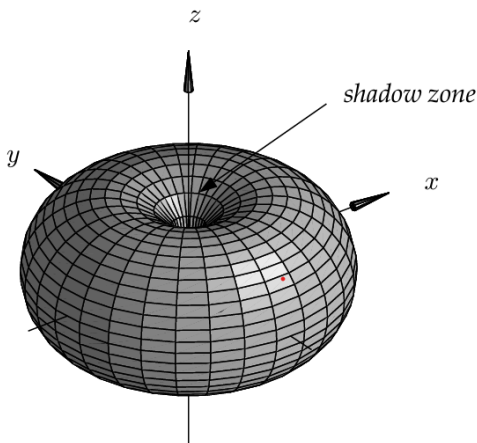


Figura 6: Valores de la transformada de Radón que se pueden adquirir.

Uno de sus algoritmos de reconstrucción para 3 dimensiones más conocidos es el FDK (Feldkamp, Devis y Kress) que se basa en *filtered backprojection*. La ventaja principal del FDK es que requiere menor intensidad de computación que los algoritmos anteriores (que son iterativos).

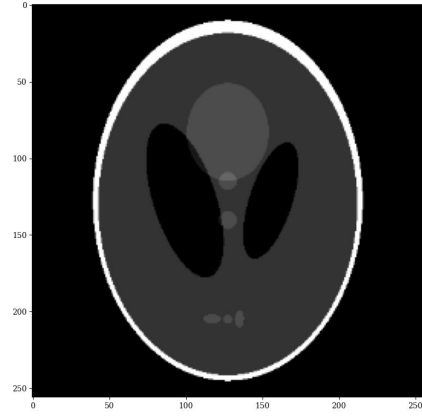


Figura 7: Fantasma de Shepp-logan (256x256)

VI. RESULTADOS

Para probar los distintos algoritmos de reconstrucción se decide usar una imagen de prueba estándar típicamente utilizada al trabajar con algoritmos de reconstrucción. Esta es el fantasma de Shepp-Logan el cual puede verse en la [Figura 7](#). Se eligió un tamaño de 256x256 píxeles. El motivo del uso frecuente de esta imagen para probar los algoritmos es el hecho de que esta puede representar un corte de una cabeza humana.

Adicionalmente, y a menos que lo contrario sea aclarado, para las distintas pruebas se utilizaron 180 proyecciones con ángulos equi-espaciados y valores equi-espaciados en cada una de ellas. Para cada algoritmo se midió el tiempo que tardó y el error cometido respecto de la imagen inicial, definiendo el error cuadrático a partir de la norma Frobenius de la diferencia entre la matriz original y la reconstrucción, es decir $E = \sqrt{\sum_{i,j} (F_{ij} - F^*_{ij})^2}$, donde F es la matriz original y F^* es la imagen reconstruida.

La transformada Radón para convertir la imagen en sinograma es de implementación propia debido a que la implementación de Python produjo resultados mucho peores y se verifica que los sinogramas son diferentes. Ante la duda, se escoge la implementación propia por el simple hecho de que se conoce el método empleado para hallar la transformada Radón.

VI-A. ART

Se puede ver en la [Figura 8](#) la reconstrucción de la imagen utilizando un algoritmo de reconstrucción algebraica como el explicado en la [Subsección III-B](#) completando una iteración por las distintas proyecciones. Con tan solo una iteración pueden reconocerse todos los aspectos de la imagen original si bien algunas diferencias se encuentran. Estas diferencias son mas notables en las áreas en donde la imagen originalmente tiene píxeles de valor cero ya que con una sola iteración el método ART puede darles un valor bajo pero no uno nulo. Por ultimo, debido a que la implementación del algoritmo requiere para cada proyección rotar la imagen por un $\Delta\theta$ determinado, se puede encontrar la sombra de una circunferencia que choca contra los bordes de la imagen.

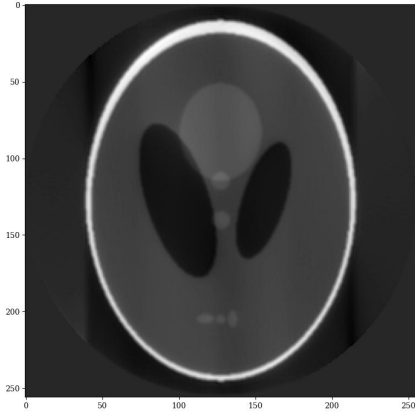


Figura 8: Reconstrucción ART ($t = 5,57$ s; $E = 21\,338$)

VI-B. Reconstrucción Fourier

La reconstrucción a través de la transformada de Fourier se presenta en [Figura 9](#), donde se distingue gran parte de la imagen original, con algunos matices en los colores y formas. Las discrepancias se dan no sólo a la discretización sino a que la implementación puede no generar un resultado perfecto. A mayor cantidad de proyecciones realizadas para el sinograma, mejor será la coincidencia con la imagen real.

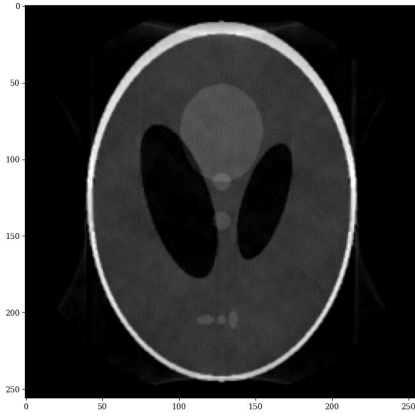


Figura 9: Reconstrucción Fourier ($t = 0,86$ s; $E = 16,86$)

VI-C. Backprojection

El resultado de reconstruir la imagen utilizando *backprojection* simple se puede ver en la [Figura 10](#). Se ve con facilidad en la figura los problemas de utilizar en la construcción las proyecciones sin filtrar ya que la imagen se encuentra borrosa, de la forma descrita en la [Subsección III-C](#). Además, la imagen tiene mucho brillo, debido a que los valores obtenidos en la reconstrucción provienen de sumatorias de píxeles de la imagen original por lo que el valor promedio por píxel inevitablemente es mas alto que en la imagen original. Se puede también ver la circunferencia generada por las rotaciones.

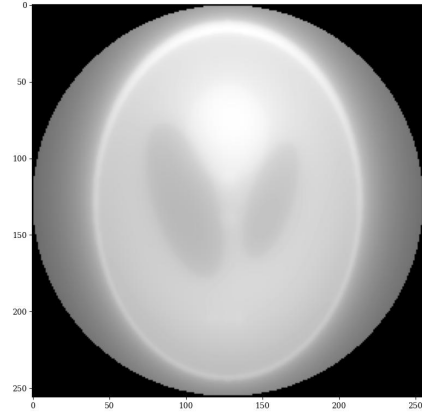


Figura 10: Reconstrucción por FBP sin filtro ($t = 0,24$ s; $E = 1\,456\,776$)

VI-D. FBP

Para obtener resultados mejores utilizando *backprojection* se aplica *filtered backprojection* y se prueban los distintos filtros detallados en la [Figura 2](#). Las diferencias entre cada reconstrucción son leves y en todas se encuentran resultados muy positivos.

Se pueden dividir las imágenes en dos categorías: las figuras [11](#) y [12](#) utilizan filtros pasa-altos mientras las figuras [13](#), [14](#) y [15](#) se obtienen con filtros pasa-bandas.

Debido al uso del filtro pasa-bandas se puede notar perdidas en detalle, ya que este está relacionado a las frecuencias altas, las cuales se encuentran menos presentes que en el caso con filtro pasa-altos. Adicionalmente, comparado al nivel general de brillo de la imagen reconstruida usando *backprojection* sin filtro, este es mucho menor en todos los casos, gracias a que todos los filtros atenúan las frecuencias bajas y el componente continuo.

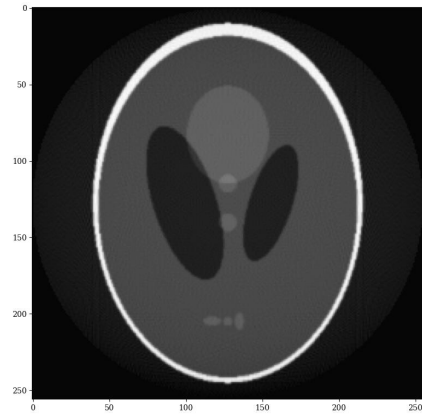


Figura 11: Reconstrucción por FBP con filtro Ram-Lak ($t = 0,27$ s; $E = 8653$)

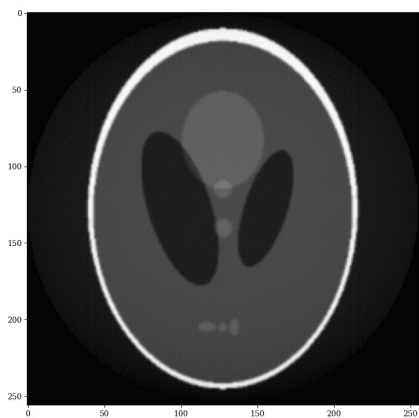


Figura 12: Reconstrucción por FBP con filtro Shepp-Logan ($t = 0,27$ s; $E = 8620$)

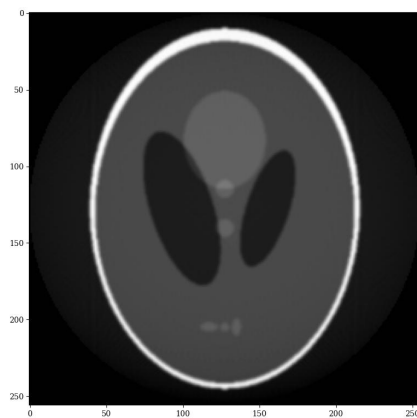


Figura 15: Reconstrucción por FBP con filtro Hann ($t = 0,27$ s; $E = 8496$)

VI-E. Gradientes Conjugados

En la práctica, la principal dificultad hallada consistió en el gran tiempo que lleva calcular la matriz Radón. Para una imagen de 256×256 píxeles y 180 proyecciones, el algoritmo tardó casi tres minutos sólo en construir la matriz, mientras que el algoritmo de Gradientes Conjugados lleva menos de veinte segundos. Sin embargo, de todos los métodos éste fue el que dio la imagen más nítida y cercana a la original. Esto implica que si se conocen las dimensiones del sinograma a priori, de modo tal que la matriz Radón se haya pre-computado y pre-almacenado en memoria, se podrían obtener reconstrucciones de buena calidad en un tiempo que aún es relativamente bajo o no es demasiado alto en comparación con los otros métodos.

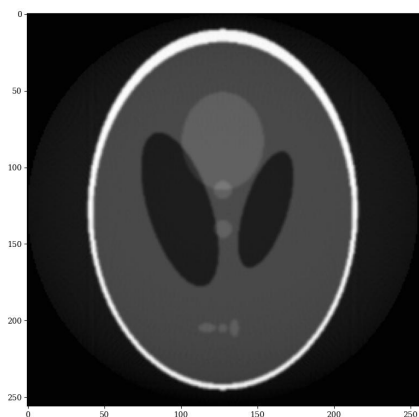


Figura 13: Reconstrucción por FBP con filtro Coseno ($t = 0,27$ s; $E = 8564$)

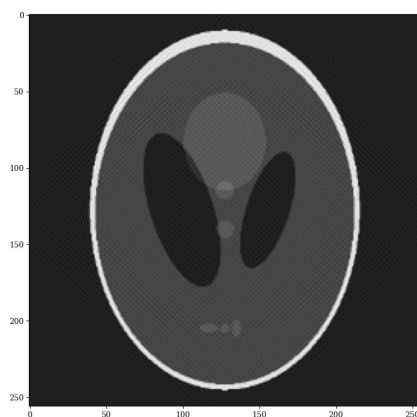


Figura 16: Reconstrucción por FBP por Gradientes Conjugados ($t = 123$ s (107 s para la matriz Radón + 16 s para encontrar la solución al método de Gradientes Conjugados); $E = 8,04$)

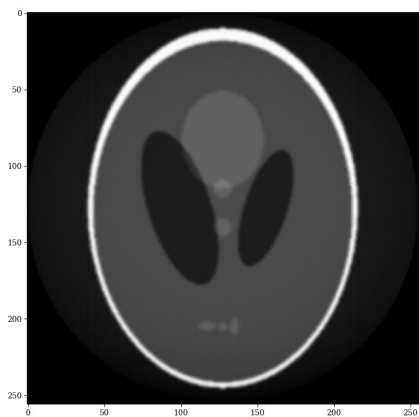


Figura 14: Reconstrucción por FBP con filtro Hamming ($t = 0,27$ s; $E = 8507$)

VI-F. Variación en la cantidad de proyecciones

Las figuras 17, 18 y 19 muestran la reconstrucción de la imagen cuando de esta se obtienen 45, 90, y 180 proyecciones (todas equi-espaciadas y cubriendo toda la imagen). Fueron reconstruidas con la implementación de la transformada inversa de radón de la biblioteca scikit-image de python. Puede verse como sube el detalle a medida que aumenta la cantidad de

proyecciones utilizadas y además, en la [Figura 17](#) pueden verse con mas claridad los caminos recorridos por los valores que se usan en *backprojection* además del efecto de la interpolación al rotar la imagen obtener los ángulos necesarios.

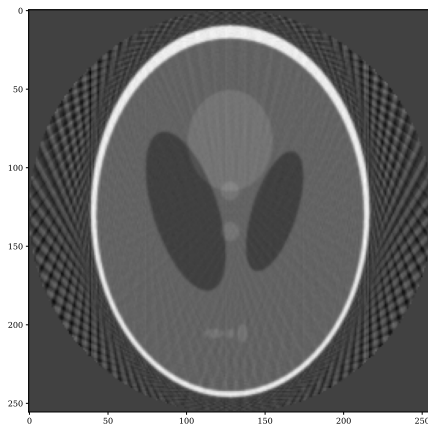


Figura 17: Reconstrucción con 45 proyecciones

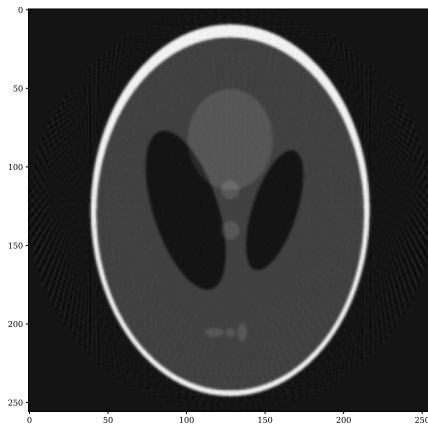


Figura 18: Reconstrucción con 90 proyecciones

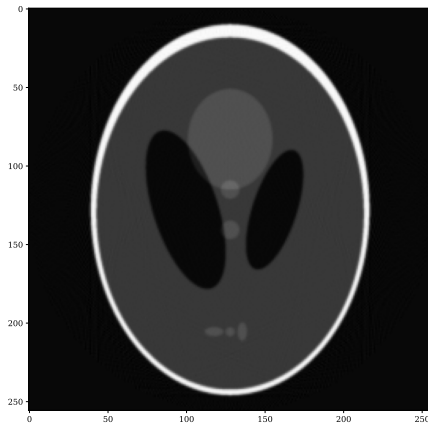


Figura 19: Reconstrucción con 180 proyecciones

BIBLIOGRAFÍA

- [1] G. L. Zeng, «Medical Image Reconstruction,»
- [2] J. Jan, «Medical Image Processing, Reconstruction and Restoration,» *Concepts and Methods*, 2006.
- [3] J. Beatty y C. College, «The Radon Transform and the Mathematics of Medical Imaging,» 2012.
- [4] J. Jan, «Medical Image Processing, Reconstruction and Restoration,» *Concepts and Methods*, 2006.
- [5] H. Miao, H.-j. Zhao, F. Gao y S.-r. Gong, «Implementation of FDK Reconstruction Algorithm in Cone-Beam CT Based on the 3D Shepp-Logan Model,» 2009. DOI: [10.1109/BMEI.2009.5304987](https://doi.org/10.1109/BMEI.2009.5304987).
- [6] R. Radke, *DIP Lecture 19: Fan-beam reconstruction*, abr. de 2015.
- [7] NPTEL, *Lec 43 Cone beams, parallel beams and the Feldkamp algorithm*, mar. de 2023.
- [8] Y. S. Alexandra Roberts Anye Shi. «Conjugate gradient methods.» (), dirección: https://optimization.cbe.cornell.edu/index.php?title=Conjugate_gradient_methods.