Tarea II, Álgebra Lineal I

Dimensión y transformaciones lineales

Santillán González Abraham Candelario
Trejo Rodríguez Dara Tiferet

Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Ciencias
Septiembre 2025

Nota Importante de la versión

Esta versión contiene el avance parcial del documento en LaTeX. Por razones de las contingencias actuales, actividades correspondientes y el ajuste a los horarios en clases en línea, no fue posible concluir el formato completo antes del cierre en Classroom. El documento se encuentra actualmente en desarrollo.

El progreso actual puede consultarse en los siguientes enlaces:

- GitHub: Repositorio GitHub
- Overleaf: Proyecto Overleaf
- Google Drive: Carpeta Drive

1. Dimensión

1. 1.1_1 Supongamos que U y W son subespacios de $\mathbb{R}^8$ tales que $\dim U = 3$, $\dim W = 5$ y $U + W = \mathbb{R}^8$. Prueba que:

$$\mathbb{R}^8 = U \oplus W$$

2. 1.2_2 Supongamos que U y W son subespacios de $\mathbb{R}^9$ tales que $\dim U = 5$, $\dim W = 5$. Prueba que:

$$U \cap W \neq \{0\}$$

Demostración:

Sea $U, W \subseteq \mathbb{R}^9$ con $\dim U = \dim W = 5$.

Sabemos:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

Sustituimos:

$$\begin{aligned} \dim(U + W) &= 5 + 5 - \dim(U \cap W) \\ &\implies \dim(U + W) = 10 - \dim(U \cap W) \\ &\implies \dim(U + W) \leq 9 \\ &\implies 10 - \dim(U \cap W) \leq 9 \end{aligned}$$

Despejando:

$$\begin{aligned} -\dim(U \cap W) &\leq -1 \\ \implies \dim(U \cap W) &\geq 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\therefore U \cap W \neq \{0\}}$$

2. Transformaciones lineales

2.1_5 Determina cuáles de las siguientes aplicaciones F son lineales:

1. 2.1_a $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y, z) = (x, z)$
2. 2.1_c $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $F(x, y, z) = (x, y, z) + (0, -1, 0)$

   Calculando:
   $$\begin{aligned} & F(0,0,0)(\text{vector } 0) \\ \Longrightarrow\ & F(0,0,0) = (0,0,0) + (0,-1,0) \\ & = (0,-1,0) \\ & \neq (0,0,0) \end{aligned}$$

   Aditividad:

   Tomemos dos vectores $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$
   $$\begin{aligned} \Longrightarrow\ F(u+v) &= (u+v) + a \\ &= u + v + a \\ \Longrightarrow\ F(u) + F(v) &= (u+a) + (v+a) \\ &= u + v + 2a \end{aligned}$$

   Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y v cualquiera:
   $$\begin{aligned} F(\lambda v) &= \lambda v + a \\ \lambda F(v) &= \lambda(v + a) \end{aligned}$$

   Ej: tenemos $v = (0, 1, 0)$ y $\lambda = 2$
   $$\begin{aligned} \Longrightarrow\ F(v) &= (0,1,0) + (0,-1,0) = (0,0,0) \\ \Longrightarrow\ F(2v) &= F(0,2,0) \\ &= (0,2,0) + (0,-1,0) = (0,1,0) \end{aligned}$$

   Si fuera lineal deberíamos obtener $(0, 0, 0)$, sin embargo se obtiene $(0, 1, 0)$, lo cual es una contradicción

   $$\boxed{\therefore F(x,y,z) = (x,y,z) + (0,-1,0)} \text{ no es lineal.}$$

3. 2.1_e $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $F(x, y) = (2x, y - x)$

   Aditividad:

   Sea $u = (x_1, y_1)$ y $v = (x_2, y_2)$
   $$\begin{aligned} \Longrightarrow\ F(u+v) &= F(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ &= (2(x_1 + x_2), (y_1 + y_2) - (x_1 + x_2)) \end{aligned}$$

Homogeneidad:

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u = (x, y)$

$$\begin{aligned}\implies F(\lambda u) &= (2(\lambda x), \lambda_y - \lambda_x) \\ &= (\lambda 2x, \lambda(y - x)) \\ &= \lambda(2x, y - x) \\ &= \lambda F(u)\end{aligned}$$

Cumple con aditividad y homogeneidad

$$\boxed{\therefore F(x, y) = (2x, y - x)} \text{ es lineal.}$$

2.2_6 Determina cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales:

1. 2.2_a $F : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$F(A) = tr(A) \text{ (la traza de A)}$$

2. 2.2_c $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definida por:

$$F(z_1, z_2) = (\overline{z_1}, z_2)$$

donde $\overline{z_1}$ es el conjugado complejo de z_1

3. 2.2_d $F : \mathbb{R}^3 \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por:

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

Aditividad:
Si $u = (x_1, y_1, z_1)$ y $v = (x_2, y_2, z_2)$

$$\begin{aligned}F(u + v) &= F(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 \\ 0 & z_1 + z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \\ &= F(u) + F(v)\end{aligned}$$

Homogenidad:
Para $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u = (x, y, z)$

$$\begin{aligned}\implies F(\alpha u) &= F(\alpha x, \alpha y, \alpha z) \\ &= \begin{pmatrix} \alpha x & \alpha y \\ 0 & \alpha z \end{pmatrix} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \\ &= \alpha F(u)\end{aligned}$$

2.3_7 Sea T una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $T(1,0) = (2,1)$ y $T(0,1) = (-1,2)$. Sea $\mathscr{C}$ el cuadrado cuyos vértices son $(0,0),(1,0),(1,1)$ y $(0,1)$. Muestra que la imagen de este cuadrado bajo T es un paralelogramo.

2.4_8 Sea $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal, con el siguiente efecto sobre los vectores indicados:

1. 2.4_a $L(3,1) = (1,2)$ y $L(-1,0) = (1,1)$

   Suponiendo a L como :

   $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

   $$\implies L(x,y) = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

   Sabemos
   $$\begin{aligned} L(3,1) = (1,2) &\implies 3a+b=1 \\ &\implies 3c+d=2 \\ L(-1,0)=(1,1) &\implies -a=1 \\ &\implies a=-1 \\ &\implies -c=1 \\ &\implies c=-1 \end{aligned}$$

   Sustituimos $a=-1$ y $c=-1$

   $$\begin{aligned} &\implies 3(-1)+b=1 \implies b=4 \\ &\implies 3(-1)+d=2 \implies d=5 \end{aligned}$$

   Obtenemos $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

   $$\implies L(1,0) = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   $$\boxed{\therefore L(1,0) = (-1,-1)}$$

2. 2.4_b $L(4,1) = (1,1)$ y $L(1,1) = (2,-2)$

3. Núcleo e Imagen

3.1_{10} Para cada una de las funciones dadas en los siguientes incisos demuestra que T es una transformación lineal y encuentra las bases para $N(T)$ e $Im(T)$. Luego calcula la nulidad y el rango de T y verifica que la nulidad(T) + rango$(T) = \dim V$. Finalmente determina si T es inyectiva o suprayectiva.

$$\text{a) } T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; \quad T(a_1, a_2, a_3) = (a_1 + 2a_2 - a_1)$$

Sea $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = v_1, v_2, v_3$ y $c \in \mathbb{R}$

Aditividad:

$$\begin{aligned}
\text{Tenemos } T(u+v) &= T(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \\
&= ((u_1 + v_2) + 2(u_2 + v_2), 2(u_3 + v_3) - (u_1 + v_1)) \\
&= (u_1 + 2u_2, 2u_3 - u_1) + (v_1 + 2v_2, 2v_3 - v_1) \\
&= T(u) + T(v)
\end{aligned}$$

Homogeneidad:

$$\begin{aligned}
\text{Tenemos } T(cu) &= T(cu_1, cu_2, cu_3) \\
&= (cu_1 + 2cu_2, 2cu_3 - cu_1) \\
&= c(u_1 + 2u_2, 3u_3 - u_1) \\
&= cT(u)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\therefore T, \text{ es lineal}}$$

Núcleo $N(T)$:

Buscamos a_1, a_2, a_3 tales que $T(a_1.a_2, a_3 = 0, 0)$ y obtenemos:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 & = 0 \\ -a_1 + 2a_3 & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow -(-2a_2) + 2a_3 = 0 \\
&\Longrightarrow 2a_2 + 2a_3 = 0 \\
&\Longrightarrow a_2 + a_3 = 0 \\
&\Longrightarrow a_3 = -a_2 \\
&\Longrightarrow (a_1, a_2, a_3) = (-2a_2, a_2 + 2a_3) = a_2(-2, 1, -1) \\
&\Longrightarrow N(T) = (-2, 1, -1), \text{ Nulidad=1}
\end{aligned}$$

$Im(T)$ **y rango:**

Sabemos que las imágenes de la base canónica:

$$\begin{aligned}
T(e_1) &= T(1, 0, 0) = (1, -1) \\
T(e_2) &= T(0, 1, 0) = (2, 0) \\
T(e_3) &= T(0, 0, 1) = (0, 2)
\end{aligned}$$

Entonces: $(0,2) = -2(1,-1) + 1(2,0)$. Por lo que $(1,-1),(2,0)$ son una base de $Im(T)$ y $\dim Im(T) = 2$. (rango 2)
Como el codominio es $\mathbb{R}^2$ y $\dim Im(T) = 2$, se sigue que $Im(T) = \mathbb{R}^2$

$$\boxed{\therefore T, \text{ es sobreyectiva.}}$$

$$\begin{aligned} \implies \dim N(T) + \dim Im(T) &= 1 + 2 \\ &= 3 \\ &= \dim \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

$$\boxed{T, \text{ no es inyectiva, ya que } Ker(T) \neq 0.}$$

$$\boxed{T, \text{ es sobreyectiva, ya que } Im(T) = \mathbb{R}^2.}$$

b) $T : M_{2\times 3}(\mathbb{C}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{C});\quad T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} - 2a_{12} & a_{13} - 2a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{c) } T : P_n(\mathbb{R}) \to P_{n-1}(\mathbb{R});\quad T(p) = p' + p''$$

Si $p, q \in P_n$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \implies T(\alpha p + \beta q) &= (\alpha p + \beta q)' + 2(\alpha p + \beta q)'' \\ &= \alpha(p' + 2p'') + \beta(a' + 21'') \\ &= \alpha T(p) + \beta T(q) \end{aligned}$$

Núcleo:
Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots +_n x^n$

$$\begin{aligned} \implies p'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + na_n x^{n-1} \\ p''(x) &= 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \cdots + n(n-1)a - nx^{n-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies T(p) &= q' + 2p'' \\ &= (a_1 + 4a_2) + (2a_2 + 12a_3)x + (3a_3 + 24a_4)x^2 + \cdots + na_n x^{n-1} \end{aligned}$$

Para que $T(p)' = 0$, todos los coeficientes deben anularse:

$$na_n = 0 \implies an \quad = 0$$

Con esto el término anterior de $a_{n-1} = 0$, luego $a_{n-2=0}$, y así sucesivamente hasta $a_1 = 0$

$$\boxed{\therefore N(T) = \text{span}\{1\}, \dim N(T) = 1.}$$

Imagen:
Tenemos

$$\begin{aligned}
p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots +_n x^n \\
p'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} \\
p''(x) &= 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \cdots + n(n-1)a - nx^{n-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\implies T(p) &= p' + 2p'' \\
&= (a_1 + 4a_2) + (2a_2 + 12a_3)x + (3a_3 + 24a_4)x^2 + \cdots + na_nx^{n-}
\end{aligned}$$

Sea:

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} \in P_{n-1}$$

3.2_{11} Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita tales que $\dim V < \dim W$ y $T : V \to W$ una transformación lineal. Demuestra que T no es suprayectiva.

Comparando coeficientes:

$$\begin{aligned}
na_n &= b_{n-1} \\
\implies a_n &= \frac{b_{n-1}}{n} \\
(n-1)_{an-1} + 2n(n-1)_{an} &= b_{n-2} \\
\implies a_{n-1} &= \frac{b_{n-2-2n(n-1)_{an}}}{n-1} \\
(n-2)_{an-2} + 2(n-1)(n-2)_{an-1} &= b_{n-3} \\
\implies an - 2 &= \frac{b_{n-3} - 2(n-1)(n-2)_{an-1}}{n-2} \\
&\vdots \\
2_{a2} + 12_{a3} &= b_1 \\
a1 + 4_{a2} &= b_0, a_0 \text{ libre.}
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
Im(T) &= P_{n-1} \\
\dim Im(T) &= n \\
\text{nulidad } (T) &= 1, \text{ rango } (T) = n \\
\text{nulidad}(T) + \text{rango}(T) = 1 + n &= n + 1 \\
&= \dim Pn
\end{aligned}$$

$$\boxed{T\text{, no es inyectiva, ya que el núcleo no es 0.}}$$

$$\boxed{T\text{, si es suprayectiva, ya que su imagen es todo } P_{n-1}.}$$

3.3_{13} Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $Ker(T) = Im(T)$

a) Demuestra que T es una transformación lineal

P.D. T es una transformación lineal, para cualesquiera polinomios $f, g \in P(\mathbb{R})$ y cualquier escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple:

$$\begin{aligned} T(f+g) &= T(f) + T(g) \\ T(\alpha f) &= \alpha, T(f) \end{aligned}$$

Entonces, tomemos $f, g \in P(\mathbb{R})$.
Sabemos que:

$$\begin{aligned} (f+g)' &= f' + g' \\ T(f+g) &= (f+g)' \\ &= f' + g' \\ &= T(f) + T(g) \end{aligned}$$

Para α

$$\begin{aligned} (\alpha f)' &= \alpha f' \\ T(\alpha f) &= (\alpha f)' \\ &= \alpha f' \\ &= \alpha T(f) \end{aligned}$$

$$\boxed{\therefore T\text{, es lineal}}$$

b) Demuestra que T es suprayectiva

c) Muestra con un ejemplo que T no es inyectiva

Sea un polinomio general:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \implies p(x)' \quad a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1}$$

Si $p(x) = 0$, entonces anulamos todos los coeficientes:

$$a_1 = 0, 2a_2 = 0, 3a_3 = 0, \ldots, na_n = 0$$

Entonces los únicos polinomios en el núcleo son $p(x) = a_0$

$$\implies Ker(T) = \{p(x) = c : c \in \mathbb{R}\} = span\{1\}$$

$\therefore$ El núcleo no es 0 si no que todas las constantes $\neq 0$

$$\boxed{\therefore T \text{ no es inyectiva.}}$$

3.4_{16} Supongamos que U y V son espacios vectoriales de dimensión finita y que $S \in \mathscr{L}(V, W), T \in \mathscr{L}(U, V)$. Demuestra que:

$$\dim\ Im(ST) \leq \dim\ \mathrm{Ker}S + \dim\ \mathrm{Ker}T$$

Hint: Usar el Teorema de la dimensión y la contención $Im(ST) \subseteq Im(S)$

$3.5_{18.a}$ Supongamos que $\dim V = 5$ y que $S, T \in \mathscr{L}(V)$ son tales que $ST = 0$. Demuestra que:

$$\dim\ \mathrm{Im}(TS) \leq 2$$

Primero definimos $N = TS \implies N^2 = (TS)(TS)$

Entonces:

$$T(ST) = T0S = 0$$

Como $N^2 = 0$ se deduce que laImN contenida en el $KerN$:
Se deduce una inclusión entre imagen y núcleo
$\implies$ Se toma cualquier $y \in ImN$

Entonces:

$$\exists x \in V, \text{ tal que } y = Nx$$

Aplicando N a y:

$$Ny = N(Nx) \quad = N^2x = 0$$

$$\boxed{\therefore y \in KerN}$$

Usando rango-nulidad:

$$\forall N : V \to V$$
$$\dim KerN + \dim ImN = \dim V = 5$$

Como vimos que:

$$ImN \subseteq KerN$$
$$\dim ImN \geq 2 \dim ImN$$

Sumamos:

$$\dim KerN + \dim ImN \geq 2 \dim ImN$$
$$\implies \dim ImN \leq 5$$

Obtenemos:

$$\dim ImN \leq \left[\frac{5}{2}\right]$$
$$= 2$$
$$N = TS$$

$$\boxed{\therefore \dim Im(TS) \leq 2}$$