**FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES**

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN JUAN**

**DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA**

# Teoría de la Información

**TRABAJO PRÁCTICO N° 2**

**CANAL DE INFORMACIÓN**


DOCENTES:

- Klenzi Raul
- Manuel Ortega
- Amaya Fabricio

ALUMNOS:

- Aubone Franco
- Morandi, Jeremías
- Santillan, Joaquin
- Zumel, Candela


**2025**

## PRÁCTICO 2 CANAL DE INFORMACIÓN

1. Sea el siguiente canal:

| | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | 0,6 | 0,3 | 0,1 |
| $a_2$ | 0,2 | 0,5 | 0,3 |
| $a_3$ | 0,4 | 0,2 | 0,4 |

Calcular los valores de $p(a_i/b_j)$ y las probabilidades de salida para el caso particular de $p(a_1)=0.5$, $p(a_2)=0.25$, $p(a_3)=0.25$

-

2. Considera un Canal Binario Asimétrico con las siguientes probabilidades:
   - $p(a_1)=0,4$
   - $p(b_1/a_1)=4/5$
   - $p(b_1/a_2)=1/4$

   a) Calcula las probabilidades condicionales hacia atrás y las probabilidades conjuntas.

   b) Obtén la entropía del emisor, y las entropías condicionales de la fuente para

   cualquier símbolo de salida.

   c) Calcula la información mutua y la capacidad del canal.

3. Considera un canal determinista con cuatro símbolos de entrada ($a_1$ ,$a_2$ ,$a_3$ ,$a_4$ ) y cuatro símbolos de salida ($b_1$ ,$b_2$ ,$b_3$ ,$b_4$ ), donde cada símbolo de entrada se corresponde exclusivamente con un símbolo de salida. Define las probabilidades para cada símbolo de entrada y calcula la información mutua.
4. Dada la siguiente matriz de canal, obtén las respectivas codificaciones de la fuente.

   $p(a)=1/3$, $p(b)=1/6$, $p(c)=1/2$

| | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | 2/5 | 2/5 | 1/5 |
| b | 1/5 | 1/4 | 1/4 |
| c | 1/4 | 1/2 | 1/4 |

## Ejercicio 1

Probabilidad de salida: $p(b_j) = \Sigma p(a_i) * p(b_j|a_i)$

$p(b_1) = 0.5 * 0.6 + 0.25 * 0.2 + 0.25 * 0.4 = 0.45$

$p(b_2) = 0.5 * 0.3 + 0.25 * 0.5 + 0.25 * 0.2 = 0.325$

$p(b_3) = 0.5 * 0.1 + 0.25 * 0.3 + 0.25 * 0.4 = 0.225$

Entonces para calcular $p(a_i|b_j)$ se utiliza el Teorema de Bayes:

$$p(a_i|b_j) = \frac{p(a_i)*p(b_j|a_i)}{p(b_j)}$$

Para $b_1$:

$$p(a_1|b_1) = \frac{0.5*0.6}{0.45} = 0.667$$

$$p(a_2|b_1) = \frac{0.25*0.2}{0.45} = 0.111$$

$$p(a_3|b_1) = \frac{0.25*0.4}{0.45} = 0.222$$

Para $b_2$:

$$p(a_1|b_2) = \frac{0.5*0.3}{0.325} = 0.462$$

$$p(a_2|b_2) = \frac{0.25*0.5}{0.325} = 0.385$$

$$p(a_3|b_2) = \frac{0.25*0.2}{0.325} = 0.154$$

Para $b_3$:

$$p(a_1|b_1) = \frac{0.5*0.1}{0.225} = 0.22$$

$$p(a_2|b_1) = \frac{0.25*0.3}{0.225} = 0.333$$

$$p(a_3|b_1) = \frac{0.25*0.4}{0.225} = 0.444$$

**Ejercicio 2**

p(a1)= 0,4 p(b1/a1)= 0,8 p(b1/a2)= 0,25
p(a2)= 0,6 p(b2/a1)= 1-0,8= 0,2 p(b2/a2)= 1-0,25= 0,75

como $P(b|a) = \frac{p(a \cap b)}{p(a)}$

Probabilidades conjuntas:

$p(a1,\ b1) = p(a1) * p(b1|a1) = 0,4 * 0,8 = 0,32$
$p(a1,\ b2) = p(a1) * p(b2|a1) = 0,4 * 0,2 = 0,08$
$p(a2,\ b1) = p(a2) * p(b1|a2) = 0,6 * 0,25 = 0,15$
$p(a2,\ b2) = p(a2) * p(b2|a2) = 0,6 * 0,75 = 0,45$

Probabilidades de salida:
$p(b1) = p(a1) * p(b1|a1) + p(a2) * p(b1|a2) = p(a1.b1) + p(a2,b1) = 0,32 + 0,15 = 0,47$
$p(b2) = p(a1) * p(b2|a1) + p(a2) * p(b2|a2) = p(a1.b2) + p(a2,b2) = 0,08 + 0,45 = 0,53$

Probabilidades condicionales hacia atrás:

$$P(a1|b1) = \frac{p(a1)*p(b1|a1)}{p(b1)} = \frac{0{,}4*0{,}8}{0{,}47} = 0,6808511$$
$$P(a1|b2) = \frac{p(a1)*p(b2|a1)}{p(b2)} = \frac{0{,}4*0{,}2}{0{,}53} = 0,1509434$$
$$P(a2|b1) = \frac{p(a2)*p(b1|a2)}{p(b1)} = \frac{0{,}4*0{,}8}{0{,}47} = 0,3191489$$
$$P(a2|b2) = \frac{p(a2)*p(b2|a2)}{p(b2)} = \frac{0{,}4*0{,}8}{0{,}47} = 0,8490566$$

Entropía del emisor y entropías condicionales de la fuente para cualquier símbolo de salida:

$H(A) = p(a1) * log_2(1/p(a1)) + p(a2) * log_2(1/p(a2)) = 0,4 * log_2(1/0,4)) + 0,6 * log_2(1/0,6))$
H(A)= 0.97095059445
$H(A|B) = p(b1)(p(a1|b1) * log_2(1/p(a1|b1)) + p(a2|b1) * log_2(1/p(a2|b1)) +$
$p(b2)((p(a1|b2) * log_2(1/p(a1|b2)) + (p(a2|b2) * log_2(1/p(a2|b2)))$
o
$H(A|B = b1) = -(0,6808511* log_2 0,6808511 + 0,3191489* log_2 0,3191489) = 0.9034\, bits.$
$H(A|B = b1) = -(0,1509434* log_2 0,1509434 + 0,8490566* log_2 0,8490566) = 0.6122\, bits.$
$H(A|B) = 0.47 * 0.9034 + 0.53 * 0.6122 \approx 0.74908\, bits.$

Información mutua
$I(A; B) = H(A) - H(A|B) = 0.97095059445 - 0.74908 \approx 0.221\, bits.$

**Ejercicio 3**

Tomamos las probabilidades individuales como una distribución uniforme para los símbolos de entrada:

P(a1) = P(a2) = P(a3) = P(a4) = $\frac{1}{4}$

Como es un canal determinista:

| | b1 | b2 | b3 | b4 |
|---|---|---|---|---|
| a1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| a2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| a3 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| a4 | 0 | 0 | 0 | 1 |

P(a1) = P(b1) ; P(a2) = P(b2) ; P(a3) = P(b3) ; P(a4) = P(b4)

<u>Calculamos la entropía:</u>

H(X) = $\sum_{i=1}^{4} p_i\, log_2(p_i)$

H(X) = - ( 4 * $\frac{1}{4}$ * $log_2(p_i)$

H(X) = - ( 1 * (-2) ) = **2 bits**

Dado que el mapeo es biyectivo, Y = $b_j$ , X está determinado (es $a_j$).

Por lo tanto H(X | Y = $b_j$) = 0 para todo j , entonces:

H(X|Y) = $\sum_{j=1}^{4} P(b_j) \ * \ 0 \ = \ 0$

<u>Información mutua</u>

Al ser un canal determinista:

I(X,Y) = H(X) - H(X|Y) = 2 - 0 = **2 bits**

Aquí se puede ver que la información mutua es igual a la entropía de entrada X. Esto significa que toda la información contenida en la variable a se transfiere a la salida Y sin pérdida

**Ejercicio 4**

| Tabla Corregida | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | 2/5 | 2/5 | 1/5 |
| b | 2/5 | 1/5 | 2/5 |
| c | 1/4 | 1/2 | 1/4 |

**p(a)=⅓, p(b)=⅙, p(c)=1/2**

**Calculamos las probabilidades de salida**

$$P(S_A) = P(A|A)*P(A) + P(A|B)*P(B) + P(A|C)*P(C)$$
$$P(S_A) = 2/5 * 1/3 + 2/5 * 1/6 + 1/4 * 1/2 = 13/40 = 0.325$$

$$P(S_B) = P(B|A)*P(A) + P(B|B)*P(B) + P(B|C)*P(C)$$
$$P(S_B) = 2/5 * 1/3 + 1/5 * 1/6 + 1/2 * 1/2 = 5/12 = 0.41\overline{6}$$

$$P(S_C) = P(C|A)*P(A) + P(C|B)*P(B) + P(C|C)*P(C)$$
$$P(S_C) = 1/5 * 1/3 + 2/5 * 1/6 + 1/4 * 1/2 = 31/120 = 0.258\overline{3}$$

**Con las probabilidades de salida codificamos según Huffman**