Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет Программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа по

Вычислительной математике №3

Вариант «Метод простых итераций»

Работу выполнила:

Касьяненко В.М.

Группа:

P3220

Санкт-Петербург,

2024

Описание численного метода.

Метод простых итераций – это численный метод для нахождения корней системы нелинейных уравнений, основанный на принципе последовательных итераций, в которых текущее приближение корней системы используется для вычисления следующего приближения.

Допустим, у нас есть система нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Мы можем переписать её в виде:

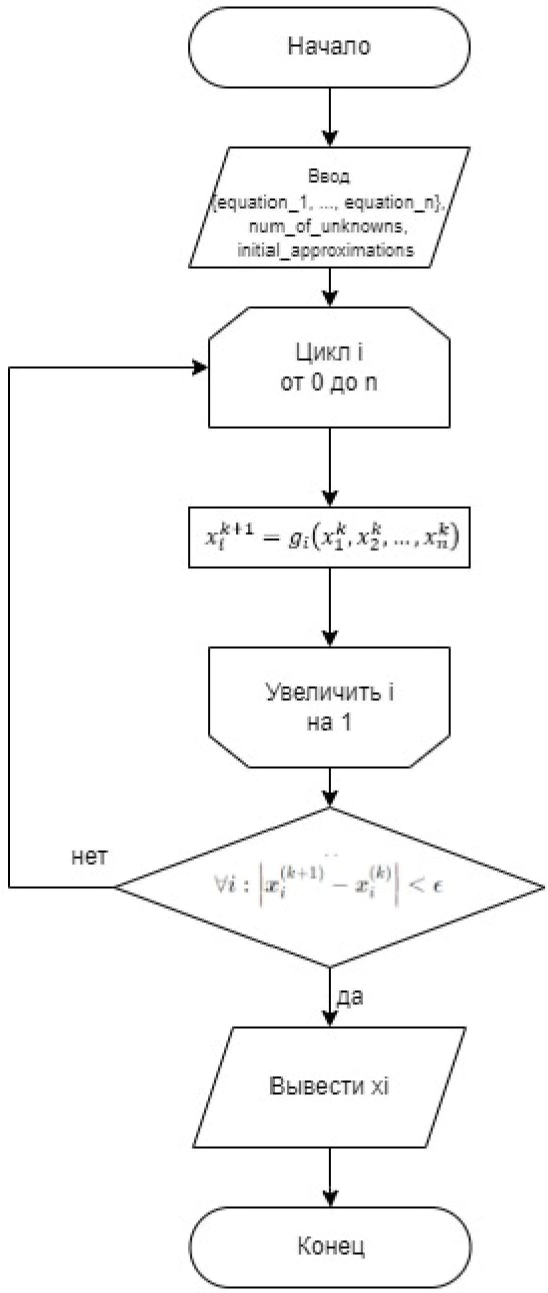
$$\begin{cases} x_1 = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2 = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_n = g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Где $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является некоторой функцией, преобразовывающей систему в эквивалентную форму. Затем мы начинаем с некоторого начального приближения x_1^0 , $x_2^0, \dots, x_n^0$ и итеративно обновляем их значения по следующему правилу:

$$x_i^{k+1} = g_i\left(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k\right)$$

Процесс повторяется до тех пор, пока изменения x_i станут достаточно малы или до достижения максимального числа итераций.

Блок-схема


Начало
Ввод
{equation_1, ..., equation_n},
num_of_unknowns,
initial_approximations
Цикл i
от 0 до n
$x_i^{k+1} = g_i(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$
Увеличить i
на 1
нет
$\forall i : \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| < \epsilon$
да
Вывести xi
Конец

Код численного метода

```
def solve_by_fixed_point_iterations(system_id, number_of_unknowns, initial_approximations):
    max_iterations = 100
    tolerance = 1e-5
    step_length = 0.0001

    def fixed_point_iteration(func, initial_guesses, max_iter, tol, step_length):
        iterations = 0
        x_prev = initial_guesses
        while iterations < max_iter:
            x_next = func(x_prev, step_length)
            if all(abs(x_next[i] - x_prev[i]) < tol for i in range(number_of_unknowns)):
                break
            x_prev = x_next
            iterations += 1
        return x_next, iterations

    functions = get_functions(system_id)

    def system(x, step_length):
        return [x[i] - step_length * functions[i](x) for i in range(number_of_unknowns)]

    solution, iterations = fixed_point_iteration(system, initial_approximations, max_iterations,
tolerance, step_length)
    return solution
```

Примеры работы программы

1)
Входные данные:
1
2
1.0
2.0
Выходные данные:
0.9916078527646449
1.9900660838909958

2)
Входные данные:
3
3
0.5
-1.0
2.0
Выходные данные:
0.4538072181466193
-1.0304576235085257
1.9538281206568267

3)
Входные данные:
3
3
0.0
0.0
0.0
Выходные данные:
0.0009950238612479096
-0.001990174530636173
0.0029851821351471173

4)
Входные данные:
1
1
0.0
Выходные данные:
0.0

5)
Входные данные:
2
2
1.0
2.0
Выходные данные:
1.445721981124815
2.1435695839180386

Выводы

В результате выполнения лабораторной работы был реализован метод простых итераций для решения систем нелинейных уравнений, основанный на идее последовательного уточнения начального приближения до достижения требуемой точности. Метод простых итераций легко реализуем и понятен, а также дает возможность решения большого класса нелинейных систем уравнений. Метод простых итераций преобразует исходную систему уравнений в эквивалентную систему, где каждое уравнение содержит одну из неизвестных в явном виде, а остальные неизвестные выражены через уже найденные значения на предыдущей итерации. Это позволяет свести решение к поиску неподвижной точки функции итерации.
Сравнение с методом Ньютона и методом бисекции. Метод простых итераций является простым в реализации. Он не требует вычисления производных функций и может быть применен к широкому спектру задач. Однако его сходимость может быть медленной, что может привести к необходимости выполнять большое количество итераций для достижения требуемой точности. Метод Ньютона, с другой стороны, обеспечивает быструю сходимость, особенно вблизи решения. Однако для его применения требуется вычисление производных функций, что может быть сложно или даже невозможно в некоторых случаях. Кроме того, метод Ньютона может быть неустойчивым при выборе неправильного начального приближения или для некоторых видов систем. Метод бисекции является простым и гарантирует сходимость к решению на отрезке, где функция меняет знак. Он не требует вычисления производных и легко реализуется. Однако метод бисекции медленно сходится и применим только к уравнениям с одной переменной.
Анализ применимости метода: метод простых итераций хорошо подходит для простых систем нелинейных уравнений, особенно если есть хорошее начальное приближение и известно, что решение находится вблизи этого приближения. В случае многомерных систем уравнений (с большим числом неизвестных) метод простых итераций может быть менее эффективным из-за необходимости итерировать по всем переменным сразу. Также метод простых итераций склонен к нахождению только локальных решений системы уравнений. Если необходимо найти глобальные решения, может потребоваться использовать другие методы, такие как метод Ньютона.
Общая алгоритмическая сложность метода простых итераций может быть выражена как $O(nm)$, где n – количество неизвестных, а m – максимальное количество итераций.
Метод простых итераций может иметь ограниченную точность из-за приближенных вычислений. Это может привести к накоплению погрешности на каждой итерации, что в итоге может ухудшить точность результата. Число итераций, необходимых для достижения заданной точности, также важно для анализа численной ошибки. Большое число итераций может быть затратным с точки зрения вычислительных ресурсов, в то время как недостаточное количество итераций может привести к неточному результату. Метод простых итераций также может быть чувствителен к

начальным приближениям. Небольшие изменения в начальных условиях могут привести к значительным изменениям в итоговом решении.

Таким образом, метод простых итераций является хорошим инструментом для численного решения систем нелинейных уравнений, но требует внимательной настройки и анализа для достижения точных и стабильных результатов.