Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет Программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа по

Вычислительной математике №5

Вариант «Улучшенный метод Эйлера»

Работу выполнила:

Касьяненко В.М.

Группа:

P3220

Санкт-Петербург,

2024

Описание численного метода.

Улучшенный метод Эйлера является численным методом для решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с начальными условиями. Этот метод является улучшением классического метода Эйлера и обеспечивает более точное приближенное решение.

Пусть дано обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка вида:

$$\frac{dx}{dy} = f(x, y)$$

с начальным условием $y(x_0) = y_0$.

Основная идея улучшенного метода Эйлера заключается в том, чтобы использовать среднее значение производной на интервале для приближенного изменения функции $y(x)$. Этот метод состоит из следующих шагов:

1. Начнем с начального значения y_0 и x_0.

2. Используем текущее значение y_n и x_n для вычисления приближенного значения производной $f(x_n, y_n)$.

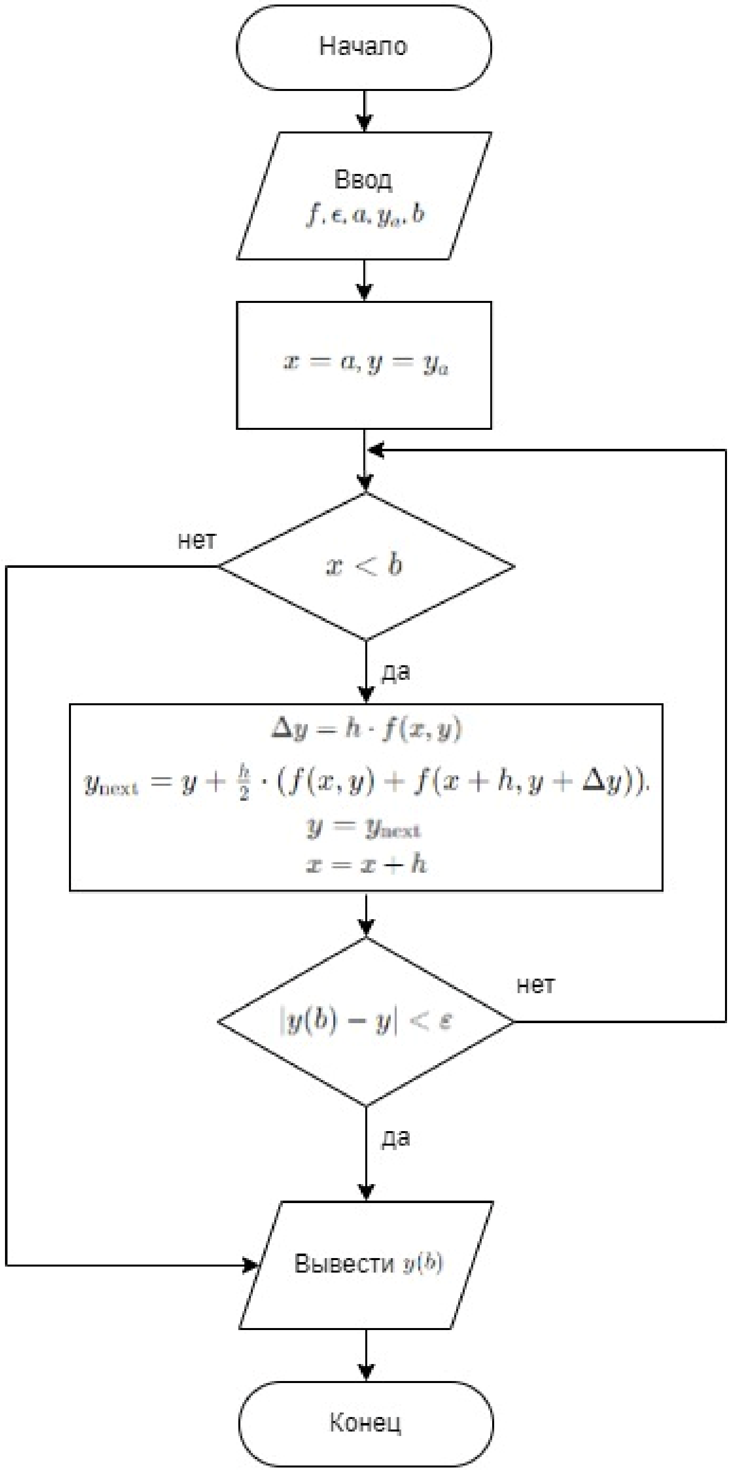
3. С помощью полученного значения производной $f(x_n, y_n)$ оценим изменение y на некотором шаге h (обычно небольшом). Обозначим это как Δy.

4. Используем улучшенное приближение $y(x_{n+1})$ с учетом изменения производной на интервале:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\big(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + \Delta y)\big)$$

5. Повторяем шаги до достижения желаемого значения x или определенного количества итераций.

Блок-схема


Начало
Ввод
f, ϵ, a, y_a, b
$x = a, y = y_a$
нет
$x < b$
да
$\Delta y = h \cdot f(x, y)$
$y_{\text{next}} = y + \frac{h}{2} \cdot (f(x, y) + f(x + h, y + \Delta y)).$
$y = y_{\text{next}}$
$x = x + h$
нет
$|y(b) - y| < \varepsilon$
да
Вывести $y(b)$
Конец

Код численного метода

```
def solveByEulerImproved(f, epsilon, a, y_a, b):
    try:
        func = Result.get_function(f)
        h = 0.01
        y = y_a
        while a < b:
            y_pred = y + h * func(a, y)
            y_corrected = y + h * (func(a, y) + func(a + h, y_pred)) / 2
            error = abs(y_corrected - y_pred)
            h *= min(1.0, epsilon / error) ** 0.5
            y = y_corrected
            a += h
        return y
    except:
        return None
```

Примеры работы программы

1)
Входные данные:
1
0.001
0
0
1.5708
Выходные данные:
1.0091951332252647

2)
Входные данные:
2
0.001
0
1
1
Выходные данные:
1.2840247099352695

3)
Входные данные:
4
0.001
0
0
1
Выходные данные:
0.7182368625599581

4)
Входные данные:
4
0.001
0.0
0.0
1.0
Выходные данные:
0.7182368625599581

5)
Входные данные:
3
0.001
1.0
2.0
1.0
Выходные данные:
2.0

Выводы

В результате выполнения лабораторной работы был реализован улучшенный метод Эйлера для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений по начальному значению (задаче Коши) на интервале от a до b.
Примеры запуска и работы метода могут варьироваться в зависимости от выбранных параметров уравнения, точности и интервала. Возможны ситуации, когда метод требует большего числа итераций для достижения необходимой точности или когда увеличение точности приводит к уменьшению шага и, как следствие, увеличению времени выполнения. Увеличение точности также может потребовать большего числа итераций для достижения решения.
Сравнение улучшенного метода Эйлера с методом Рунге-Кутты и методом Адамса. Метод Рунге-Кутты меньше зависим от выбора шага, чем метод Эйлера, но при этом более сложная реализация и больше вычислительных затрат на каждом шаге по сравнению с методом Эйлера.
Метод Адамса может быть нестабильным для некоторых уравнений или при больших шагах интегрирования, а также он требует хранения предыдущих значений функции, что может потребовать дополнительной памяти. Таким образом, улучшенный метод Эйлера более прост в реализации по сравнению с методом Рунге-Кутты и методом Адамса, однако может быть менее точным, особенно при больших значениях шага или для сложных уравнений, а также он требует дополнительных итераций для достижения той же точности, что и более сложные методы, что может привести к увеличению времени выполнения.
Анализ применимости улучшенного метода Эйлера требует учета нескольких факторов: метод не является самым точным численным методом для решения дифференциальных уравнений. Он может быть полезен для начального анализа и численного решения дифференциальных уравнений, особенно когда требуется простота реализации и вычислительная эффективность на относительно небольших интервалах интегрирования. Однако, при работе с задачами, требующими высокой точности или сталкивающимися с особыми условиями, может потребоваться использование более сложных методов.
В общем случае алгоритмическая сложность улучшенного метода Эйлера может быть оценена как O(n), где n - количество итераций, необходимых для достижения требуемой точности.
Численная ошибка может возникать при приближенном вычислении производных исходной функции, что может привести к ошибке аппроксимации. В методе Эйлера производная функции $f(x, y)$ оценивается на основе значения функции в текущей точке, что может привести к неточным результатам, особенно при больших изменениях функции между точками. Более того, ошибка округления может накапливаться на каждом шаге метода Эйлера и становиться значительной при большом числе шагов.
Таким образом, улучшенный метод Эйлера представляют собой полезные инструменты для простых задач численного решения ОДУ, особенно в начальной стадии анализа. Однако, для более сложных задач или задач с высокими требованиями к точности может потребоваться использование более продвинутых методов.