1. Точка движется с постоянным тангенсальным ускорением по окружности радиуса $R = 10$ см. Рассчитать нормальное ускорение точки через время $t = 4$ с после начала движения, если к концу четвёртого оборота после начала движения модуль её скорости $v = 50$ см/с.
Ответ: $a_n = 0.4$ м/с^2.

С ; $= 0{,}1$ м
$v = 0{,}5\ \frac{м}{с}$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2 = R\varepsilon^2 t^2$$

$$\bar{n} = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N}{t_1} \Rightarrow N = \bar{n} t_1$$

t_1 – момент времени к концу 4 оборот

$$\bar{n} = \frac{n_0 + n}{2}; \quad n_0 = 0 \Rightarrow N = \frac{n}{2} t_1$$

$$n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{2\pi R}$$

$$t_1 = \frac{2N}{n} = \frac{4N\pi R}{v}; \quad ; \omega_1 = \frac{v}{R}$$

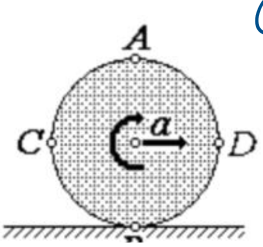
$$\varepsilon = \frac{\omega_1}{t_1} = \frac{\frac{v}{R}}{\frac{4N\pi R}{v}} = \frac{v^2}{4N\pi R^2}$$

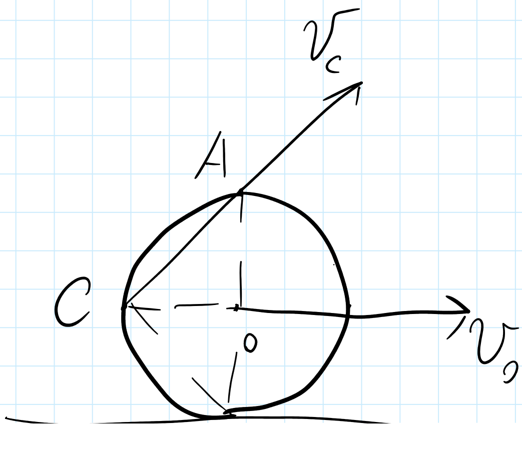
$$a = \frac{v^4}{16N^2\pi^2R^4} \cdot t^2 R = \frac{t^2 v^4 R}{16N^2\pi^2 R} = \frac{16 \cdot 0{,}0625}{16 \cdot 16 \cdot 3{,}14^2 \cdot 0{,}001} \approx 0{,}4\ \frac{м}{с^2}$$

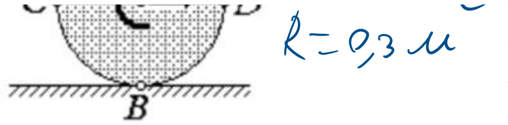
Ответ: $a = 0{,}4\ \frac{м}{с^2}$

2. Диск радиуса $R = 30$ см катится без скольжения по горизонтальной поверхности так, что его центр движется с постоянным ускорением модуль которого $a = 5$ см/с^2. В момент времени $t = 8$ с точка C, расположенная на ободе диска расположена, как показано на (рис. 1). Рассчитать модуль скорости и ускорения точки C в указанный момент времени.
Ответ: $v_C = 0.57$ м/с, $a_C = 0.59$ м/с.

СИ:
$a = 0{,}05\ \frac{м}{с^2}$
$R = 0{,}3$ м

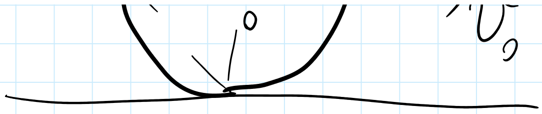






$R = 0{,}3\ м$

Рис. 1



$$v_0 = at$$

$$\omega = \frac{v_0}{R} = \frac{at}{R}$$

$$v_C = \sqrt{2}\,\omega R = \sqrt{2}\,at \qquad a_{\tau C} = \sqrt{2}\,a$$

$$v_C = \sqrt{2}\cdot 0{,}05\cdot 8 \approx 0{,}57\left(\frac{м}{с}\right) \qquad a_{nC} = \frac{v_C^2}{\sqrt{2}R} = \frac{\sqrt{2}a^2t^2}{R}$$

$$a_C = \sqrt{a_{\tau C}^2 + a_{nC}^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\cdot 0{,}05\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}\cdot 0{,}05^2\cdot 8^2}{0{,}3}\right)^2} \approx 0{,}76\ \frac{м}{с^2}$$

Ответ: $v_C = 0{,}57\ \frac{м}{с}$; $a_C = 0{,}76\ \frac{м}{с^2}$

3. Рассчитать каким должно быть соотношение масс $\frac{m_2}{m_1}$, чтобы в системе изображённой на (рис. 2) тело m_2:

- опускалось;
- поднималось.

1

https://study.physics.itmo.ru

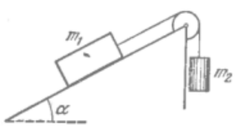
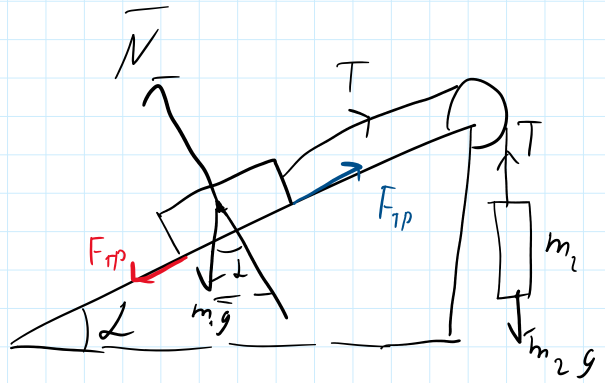


Рис. 2



Массой блока пренебречь, трения в блоке нет. Коэффициент трения между телом m_1 и наклонной плоскостью μ, угол наклона α.
Ответ: a) $\frac{m_2}{m_1} > \sin\alpha + \mu\cos\alpha$, b) $\frac{m_2}{m_1} < \sin\alpha - \mu\cos\alpha$

1) 1 сл. – тело 1 опуск.

2) 2 сл. – тело 1 подним.

1) тело 2: $Oy: T = m_2 g$

тело 1: $T = F_{тр} + mg\cdot\sin\alpha$

$N = m_1 g\cos\alpha$

$$F_{тр} = \mu\cdot N = \mu\cdot m_1 g\cos\alpha$$

$$F_{тр} = \mu \cdot N = \mu \cdot m_1 g \cos\alpha$$

$$m_2 g = \mu m_1 g \cos\alpha + m_1 g \sin\alpha$$

$$m_2 = m_1(\mu \cos\alpha + \sin\alpha)$$

$$\frac{m_2}{m_1} = \mu \cos\alpha + \sin\alpha$$

2) тело 2: $T = m_2 g$

тело 1: $m_1 g \sin\alpha = T + F_{тр}$

$$T = m_1 g \sin\alpha - \mu m_1 g \cos\alpha$$

$$m_2 g = m_1 g(\sin\alpha - \mu \cos\alpha)$$

$$\frac{m_2}{m_1} = \sin\alpha - \mu \cos\alpha$$

Ответ: а) $\frac{m_2}{m_1} = \sin\alpha + \mu \cos\alpha$

б) $\frac{m_2}{m_1} = \sin\alpha - \mu \cos\alpha$

4. На покоившийся объект массы $m = 100$ г в момент времени $t = 0$ начала действовать сила, зависящая от времени по закону $F = bt(\tau - t)$, где $\tau = 3$ с – время в течении которого действует сила. Найти импульс, который приобретёт тело в результате действия силы и путь, пройденный телом за время действия силы.
Ответ: $p = 8.1 \quad H \cdot c$, $s = 0.12$ км.

СИ: $m = 0{,}1$ кг

$b = ?$

$$a(t) = \frac{F}{m} = \frac{b}{m} t(\tau - t)$$

$$v(t) = \int_0^t a(t)\,dt = \frac{b}{m}\int_0^t t(\tau - t)\,dt = \frac{bt^2(3\tau - 2t)}{6m}$$

$$p(\tau) = mv(\tau) = \frac{b\tau^3}{6} = \frac{b\,9}{2} = 4{,}5b \ (H \cdot c)$$

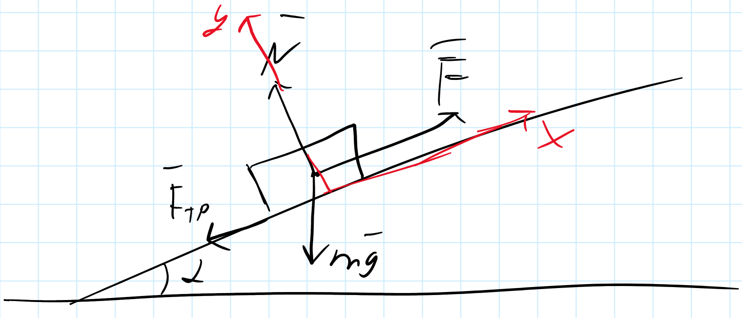
$$S(\tau) = \int_0^\tau v(t)\,dt = \frac{b}{6m}\int_0^\tau t^2(3\tau - 2t)\,dt = \frac{b\tau^4}{12m} =$$

$$= \frac{b \cdot 27}{4 \cdot 0{,}1} = 67{,}5b \ (м)$$

$$= \frac{6 \cdot 27}{4 \cdot 0{,}1} = 67{,}5b\,(м)$$

Ответ: $p = 4{,}5 \cdot b$ Н·с ; $S' = 67{,}5 \cdot b$ м

5. Груз массы m медленно втащили на горку, действуя силой $\mathbf{F}$, которая в каждой точке направлена по касательной к траектории. Найти работу этой силы, если высота горки h, а длина основания l, коэффициент трения груза о поверхность горки μ.
Ответ: $A = mg(h + kl)$.



$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_i$$

$$Ox: \quad F - F_{тр} - mg\sin\alpha = ma = 0$$

$$Oy: \quad N - mg\cos\alpha = 0$$

$$F = F_{тр} + mg\sin\alpha$$

$$F = \mu N + mg\sin\alpha$$

$$F = \mu mg\cos\alpha + mg\sin\alpha$$

$$F \cdot ds = \mu \cdot mg\cos\alpha + mg\sin\alpha\, ds$$

$$F\,ds = \mu mg\,dL + mg\,dh$$

$$\int F\,ds = \int \mu mg\,dL + \int mg\,dh$$

$$A = mg\mu \int dL + mg\int dh$$

$$A = mg(\mu L + h)$$

Ответ: $mg(h + \mu L)$

6 Материальная точка массы $m = 100$ г движется по окружности радиуса $R = 20$ см, с постоянным тангенсальным ускорением. Рассчитать это ускорение, если за $N = 6$ оборотов, она

СИ:

6 Материальная точка массы $m = 100$ г движется по окружности радиуса $R = 20$ см, с постоянным тангенсальным ускорением. Рассчитать это ускорение, если за $N = 6$ оборотов, она приобрела кинетическую энергию $T = 50$ мДж.
Ответ: $a_\tau = 6.6$ м/с^2.

СИ:

$m = 0{,}01$ кг

$R = 0{,}2$ м

$T = 50 \cdot 10^{-3}$ Дж

$$T = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2T}{m}}$$

$$2\pi N = \frac{\varepsilon t^2}{2} \qquad a_t = \frac{v}{t} = \varepsilon R$$

$$\varepsilon = \frac{v}{Rt} \qquad 2\pi N = \frac{v t^2}{2Rt} = \frac{vt}{2R};$$

$$t = \frac{4\pi N R}{v}$$

$$a_t = \frac{v}{t} = \frac{v^2}{4\pi N R} = \frac{T}{2\pi m N R} =$$

$$= \frac{0{,}5}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}1 \cdot 6 \cdot 0{,}2} = 6{,}6\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$$

7. Путь проходимый телом, масса которого $m = 2$ кг, описывается уравнением $s(t) = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$, где t – время, $A = 1.5$

м, $B = 6$ м/с, $C = 3.5$ м/с^2, $D = 3$ м/с^3. Рассчитать мощность силы, действующей на тело в момент времени $t = 1.5$ с.
Ответ: $P = 0.63$ кВт.

$$v(t) = S'(t) = -B + 2Ct - 3Dt^2$$

$$a(t) = v'(t) = 2C - 6Dt$$

$$P(t) = F(t) \cdot v(t) = m a(t) v(t) =$$

$$= m(2C - 6Dt)(-B + 2Ct - 3Dt^2) =$$

$$= m(2C - 6Dt)\cdot(-B + 2Ct - 3Dt^2) =$$

$$= 2(2\cdot 3{,}5 - 6\cdot 3\cdot 1{,}5)(-6 + 2\cdot 3{,}5\cdot 1{,}5 - 3\cdot 3\cdot 1{,}5^2) =$$

$$= 630\ Вт = 0{,}63\ кВт$$

Ответ: $P = 0{,}63$ кВт

8. Локомотив массы $M = 10$ т начинает движение так, что модуль его скорости меняется по закону $v = \alpha\sqrt{s}$, где $\alpha = 1\ \sqrt{\text{м}}/\text{с}$, а s – пройденный путь. Рассчитать работу всех сил, действующих на локомотив, за первую минуту после начала движения.
Ответ: $A = 4.5$ МДж.

СИ:

$M = 10000$ кг $= 1\cdot 10^4$ кг

$a = 1\ \frac{м}{с^2}$

$t = 60$ с

$$A = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2};\quad v_0 = 0 \Rightarrow \quad A = \frac{mv^2}{2}$$

$$v^2 = a^2 S \Rightarrow \quad v = \frac{dS}{dt} \qquad S = \int_0^{60} v\,dt$$

$$v^2 = a^2\int_0^{60} v\,dt \qquad dv^2 = a^2 v\,dt$$

$$2v\,dv = a^2 v\,dt \qquad v = \int_0^{60}\frac{a^2}{2}dt = \frac{a^2}{2}t\Big|_0^{60}$$

$$A = \frac{ma^2\cdot t^2}{8} = \frac{1\cdot 10^4\cdot 1\cdot 3600}{8} = 4{,}5\ МДж$$

Ответ: $A = 4{,}5$ МДж

9. Вертикально вверх запущена пиротехническая ракета. Начальная масса ракеты $m_0 = 4$ кг, продукты сгорания выбрасываются со скоростью $u = 0.09$ м/с относительно ракеты. Через время $t = 6$ с масса ракеты стала равной $m = 2$ кг. Рассчитать скорость ракеты в этот момент времени.
Ответ: $v = 3.6$ м/с.

$$\mu = \frac{m_0 - m}{t} = \frac{1}{3}$$

$$\mu = \frac{\dots}{t} = \frac{\dots}{3}$$

Ур-е Мещерского

$$(m_0 - \mu t) v = \mu u - (m_0 - \mu t) g$$

$$v = \frac{\mu u}{m_0 - \mu t} - g = u \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \mu t}\right) - gt =$$

$$= 90 \cdot \ln\left(\frac{4}{4 - \frac{1}{3} \cdot 6}\right) - 9{,}8 \cdot 6 = 90 \cdot \ln 2 - 58{,}6 \approx$$

$$\approx 3{,}6 \ \frac{м}{с}$$

Ответ: $v = 3{,}6 \ \frac{м}{с}$

10. На платформе вращающейся вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью $\omega = 5$ рад/с, движется небольшое тело массы $m = 700$ г. Рассчитать работу, совершаемую центробежной силой инерции при перемещении этого тела из точки 1 в точку 2, расположенных на расстоянии $r_1 = 30$ см и $r_2 = 50$ см от оси вращения.
Ответ: $A = 1.4$ Дж.

СИ:

$m = 0{,}7$ кг

$r_1 = 0{,}3$ м $\quad r_2 = 0{,}5$ м

$$A = \int_{0,3}^{0,5} F\,dr = \int_{0,3}^{0,5} m\omega^2 r\,dr = m\omega^2 \int_{0,3}^{0,5} r\,dr = m\omega^2 \left(\frac{r^2}{2}\Big|_{0,3}^{0,5}\right) =$$

$v = \omega r$

$$= m\omega^2 \left(\frac{0{,}25 - 0{,}09}{2}\right) =$$

$$F = \frac{mv^2}{r} = \frac{m\omega^2 r^2}{r} = m\omega^2 r$$

$$= m\omega^2 \frac{0{,}16}{2} =$$

$$= 0{,}7 \cdot 25 \cdot \frac{0{,}16}{2} = 1{,}4 \text{ Дж}$$

Ответ: $A = 1{,}4$ Дж