ДЗ2

4 июня 2023 г. 14:50

1. Рассчитать момент инерции шарового слоя относительно оси, проходящей через его центр масс, если его внутренний радиус $R_1 = 0.25$ м, а внешний радиус $R_2 = 0.35$ м. Масса шарового слоя $m = 700$ кг.
Ответ: $I_c = 44$ кг·м^2.

$$I_C = I_{шар}(R_2) - I_{шар}(R_1) = \frac{2}{5} M_2 R_2^2 - \frac{2}{5} M_1 R_1^2$$

$$M_1 = \rho \cdot V_1 = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_1^3$$

$$M_2 = \rho \frac{4}{3} \pi R_2^3$$

$$m = M_2 - M_1 = \frac{4}{3}\pi\rho(R_2^3 - R_1^3)$$

$$\rho = \frac{3m}{4\pi(R_2^3 - R_1^3)}$$

$$I_c = \frac{2}{5} \cdot \rho \frac{4}{3}\pi R_2^5 - \frac{2}{5}\rho\frac{4}{3}\pi R_1^5 = \frac{2\cdot 4}{5\cdot 3}\rho\pi(R_2^5 - R_1^5) =$$

$$= \frac{2}{5} m \frac{(R_2^5 - R_1^5)}{(R_2^3 - R_1^3)} = \frac{2}{5} \cdot 700 \frac{(0{,}35^5 - 0{,}25^5)}{(0{,}35^5 - 0{,}25^5)} \approx 44 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Ответ: $I_c = 44$ кг · м^2

2. Два тела массы $m_1 = 0.5$ кг и $m_2 = 0.9$ кг соединены нерастяжимой нитью, перекинутой через блок (рис. 1), имеющий форму сплошного цилиндра, масса которого $m_3 = 0.2$ кг. Коэффициент трения между телом 1 и поверхностью $\mu = 0.2$. Рассчитать модули сил натяжения нити T_1 и T_2 по обе стороны блок, а также модуль ускорения a этих тел.

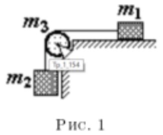


Рис. 1

Ответ: $a = 5.2$ м/с^2, $T_1 = 3.6$ Н, $T_2 = 4.1$ Н.

Ур-я движ 3 тел:

тело 1 ; $\begin{cases} m_1 a = T_1 - F_{тр} \\ 0 = N - m_1 g \end{cases}$

$F_{тр} = \mu N - \mu m_1 g$

тело 2; $m_2 a = m_2 g - T_2$ $\qquad \varepsilon = \frac{a}{R}$

тело 3; $I \cdot \varepsilon = (T_2 - T_1) R$

тело 3: $I \cdot \varepsilon = (T_2 - T_1)R$

$$I = \frac{1}{2} m_3 R^2$$

$$m_1 a = T_1 - \mu m_1 g \Rightarrow T_1 = m_1 a + \mu m_1 g$$

$$m_2 a = m_2 g - T_2 \Rightarrow T_2 = m_2 g - m_2 a$$

$$\frac{1}{2} m_3 R^2 \left(\frac{a}{R}\right) = (T_2 - T_1)R \Rightarrow \frac{1}{2} m_3 a = T_2 - T_1$$

$$a = \frac{m_2 - \mu m_1}{0{,}5 \cdot m_3 + m_2 + m_1} \cdot g = \frac{0{,}9 - 0{,}2 \cdot 0{,}5}{0{,}5 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 + 0{,}9} \cdot 9{,}8 = 5{,}2 \ \frac{м}{с^2}$$

$$T_1 = 0{,}5(5{,}2 + 0{,}2 \cdot 9{,}8) = 3{,}6 \ Н$$

$$T_2 = 0{,}9(9{,}8 - 5{,}2) = 4{,}1 \ Н$$

Ответ: $a = 5{,}2 \ \frac{м}{с^2}$; $T_1 = 3{,}6 \ Н$; $T_2 = 4{,}1 \ Н$

3. Рассчитать момент инерции тонкой пластинки, имеющей форму равнобедренного прямоугольного треугольника, относительно оси, совпадающей с одним из её катетов. Длина катета равна a, масса пластинки m.

$$m = \frac{dS}{S} = \frac{2m}{a^2}(a - x)dx$$

$$I = \int x^2 dm = \int_0^a x^2 \cdot \frac{2m}{a^2}(a - x)dx =$$

$$= \frac{2m}{a^2} \int_0^a (ax^2 - x^3)dx = \frac{2m}{a^2}\left(\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^a =$$

$$= \frac{2m}{a^2} \cdot \frac{a^4}{3} - \frac{2m}{a^2} \cdot \frac{a^4}{4} = \frac{2}{3} ma^2 - \frac{1}{2} ma^2 = \frac{1}{6} ma^2$$

Ответ: $I = \frac{1}{6} ma^2$

Ответ: $I = \frac{1}{6} m a^2$

4. Механический осциллятор совершает колебания вдоль оси OX. Его полная энергия ε, а максимальная сила F, период колебаний T, начальная фаза $\pi/3$. Напишите, как зависит $x(t)$ при данных условиях.

$$F = ma$$

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$F_{max} = m \cdot a_{max} = mA\omega^2$$

$$\varepsilon = \frac{mA^2\omega^2}{2} = \frac{AF_{max}}{2} \Rightarrow A = \frac{2\varepsilon}{F_{max}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$x(t) = \frac{2\varepsilon}{F_{max}} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right)$$

Ответ: $x(t) = \frac{2\varepsilon}{F_{max}} \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right)$

5. Частица совершает гармонические колебания вдоль оси OX с периодом T и амплитудой A. Рассчитать среднюю скорость

частицы за время, в течении которого она проходит путь $A/2$:

- из крайнего положения;
- из положения равновесия.

Ответ: а) $\langle v \rangle = \frac{3A}{T}$, б) $\langle v \rangle = \frac{6A}{T}$.

а) $\langle v \rangle = \frac{\frac{A}{2}}{\Delta t}$

$$x = A\cos(\omega t)$$

2π

$$x = A\cos(\omega t)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$x = \frac{1}{2}A \Rightarrow \cos(\omega t) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2\pi}{T}t = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{T}{6}$$

$$\langle v\rangle = \frac{\frac{A}{2}}{\frac{T}{6}} = \frac{3A}{T}$$

б) $x = A\sin(\omega t)$

$$x = \frac{1}{2}A \Rightarrow \quad \sin(\omega t) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2\pi}{T}t = \frac{\pi}{6}$$

$$t = \frac{T}{12}$$

$$\langle v\rangle = \frac{\frac{A}{2}}{\frac{T}{12}} = \frac{6A}{T}$$

ответ: а) $\langle v\rangle = \dfrac{3A}{T}$

б) $\langle v\rangle = \dfrac{6A}{T}$

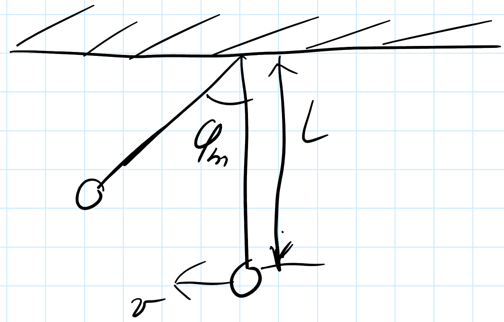
6. Получить зависимость от времени угла отклонения математического маятника, длина подвеса которого $l = 80$ см, если в начальный момент маятник:

- отклонили на угол $\varphi_0 = 3^o$ и без толчка отпустили;
- находился в состоянии равновесия и его нижнему концу сообщили горизонтальную скорость $v = 0.22$ м/с;
- отклонили на $\varphi_0 = 3^o$ и его нижнему концу сообщили горизонтальную скорость $v = 0.22$ м/с, направленную к положению равновесия.

Ответ: а) $\varphi(t) = 3\cos 3.5t$, б) $\varphi(t) = 4.5\sin 3.5t$, в) $\varphi(t) = 5.4\cos(3.5t + 1)$.

СИ:

$L = 0{,}8$ м



φ_0 – отклонили

φ_{01} – сост. равновесия $= \frac{\pi}{2}$

а) $\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega t + \varphi_{01}) =$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{9{,}8}{0{,}8}} = 3{,}5$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{9{,}8}{0{,}8}} = 3{,}5$$

$$= 3\sin\left(3{,}5t + \frac{\pi}{2}\right) = 3\sin(3{,}5t)$$

б) $$\frac{1}{2}m v_0^2 = mgh = mgl(1-\cos\varphi_m) \Rightarrow \varphi_m = 4{,}5^\circ$$

$$\varphi(t) = 4{,}5\sin(3{,}5t)$$

в) $$\frac{1}{2}m v_0^2 = mgl(1-\cos\varphi_0) - $$

$$- mgl(1-\cos\varphi_t)$$

$$v_0^2 = mgl(\cos\varphi_0 - \cos\varphi_t)$$

$$\cos\varphi_t = \cos\varphi_0 - \frac{v_0^2}{mgl} \Rightarrow \varphi = 5{,}4^\circ$$

$$\varphi(t) = 5{,}4\sin(3{,}5t + \varphi_m) \Rightarrow \varphi_m = \frac{\pi}{2} + 1$$

$$\varphi(t) = 5{,}4\sin(3{,}5t + 1)$$

Ответ: а) $\varphi(t) = 3\sin(3{,}5t)$

б) $\varphi(t) = 4{,}5\sin(3{,}5t)$

в) $\varphi(t) = 5{,}4\sin(3{,}5t+1)$

7. Однородный стержень длины $L = 0.4$ м, закреплённый перпендикулярно горизонтальной оси, совершает малые колебания под действием силы тяжести. Рассчитать расстояние от центра масс до оси подвеса, при котором частота колебаний стержня будет максимальна (силой трения можно пренебречь). **Ответ:** $l = 0.12$ м.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgl}{I}}$$

$$2\pi \quad \nu \quad I$$

$$I = \frac{mL^2}{12} + ml^2$$

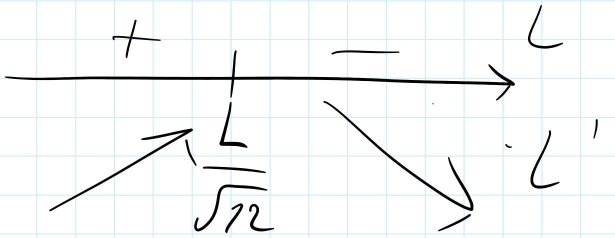
$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgl}{\frac{mL^2}{12} + ml^2}}$$

$$\left(\sqrt{\frac{mgl}{\frac{mL^2}{12}+ml^2}}\right)' = \frac{mg\left(\frac{mL^2}{12}+ml^2\right) - 2ml(mgl)}{2\sqrt{\frac{mgl}{\frac{mL^2}{12}+ml^2}}} = 0$$

$$\frac{m^2gL^2}{12} + m^2l^2g - 2m^2gl^2 = 0$$

$$-3l^2g = -\frac{gL^2}{12}$$

$$l^2 = \frac{L^2}{12} \Rightarrow l = \frac{L}{\sqrt{12}}$$



$$l = \frac{L}{\sqrt{12}} - max = \frac{0{,}4}{\sqrt{12}} \approx 0{,}12\ (м)$$

Ответ: $l = 0{,}12$ (м)

8. Классический импульс частицы в $n = 3$ раза меньше её релятивистского импульса. Рассчитать скорость с которой движется данная частица.
Ответ: $v = 2.8 \cdot 10^8$ м/с.

$$P = mV = \frac{m_0 V}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} = \frac{P_0}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

$$\frac{P}{P_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} = 3$$

$$1-\left(\frac{V}{\ }\right)^2 = \frac{1}{\ } \Rightarrow \left(\frac{V^2}{\ }\right) = \frac{8}{\ } \Rightarrow V = \frac{2\sqrt{2}}{\ }c =$$

$$1-\left(\frac{v}{c}\right)^2=\frac{1}{9} \Rightarrow \left(\frac{v}{c}\right)^2=\frac{8}{9} \Rightarrow v=\frac{2\sqrt{2}}{3}c=$$

$$=2{,}8\cdot 10^8 \frac{м}{с}$$

Ответ: $v=2{,}8\cdot 10^8 \frac{м}{с}$

9. Рассчитать работу, которую необходимо совершить, чтобы увеличить скорость электрона от $0.5c$ до $0.7c$ (c – скорость света в вакууме).
Ответ: $A = 2\cdot 10^{-14}$ Дж.

$$A=T_2-T_1$$

$$T=E-E_0=(m-m_0)c^2=\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}-1\right)m_0c^2=$$

$$=E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}-1\right)$$

$$A=E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v_2}{c}\right)^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}}\right)=$$

$$=E_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-(0{,}7)^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}}\right)\approx 2\cdot 10^{-14}\ Дж$$

Ответ: $A=2\cdot 10^{-14}$ Дж

10. У прямоугольного треугольника длина одного из катетов $a = 5$ м. Угол между этим катетом и гипотенузой $\alpha = 30^o$. Найта соответствующий угол α' и длину гипотенузы l' в системе отсчёта K', движущейся относительно этого треугольника со скоростью $v = 0.866c$ м/с вдоль катета a.
Ответ:$\alpha' \approx 49^o$, $l' = 3.8$ м.

$$a'=a\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

$$b'=b=a\,tg\,\alpha$$

$$tg\,\alpha'=\frac{b'}{a'}=\frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{0{,}866}{c}\right)^2}}\Rightarrow \alpha'=49^\circ$$

$$a' \qquad \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \qquad \sqrt{1-\left(\frac{0{,}866}{c}\right)^2}$$

$$l' = a\sqrt{1+tg^2\alpha - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = 5\sqrt{1+\frac{1}{3}-\left(\frac{0{,}866}{c}\right)^2} \approx 3{,}8 \text{ (м)}$$

Ответ: $\alpha' = 49^\circ$

$l' = 3{,}8$ м