

Линейная алгебра. Базовый уровень. Программа экзамена.  
Осенний семестр 2022-23 уч. г., лектор Р. А. Попков

1. Отображения, композиция отображений. Образ и прообраз. Сюръекция, биекция, инъекция.
2. Основные алгебраические системы. Бинарная операция на множестве. Ассоциативность, коммутативность. Группа, абелева группа. Кольцо. Поле. Порядок группы/кольца/поля. Порядок элемента. Подгруппа, подкольцо, подполе. Есть ли в поле делители нуля. Характеристика поля. Изоморфизм алгебраических систем.
3. Отношение эквивалентности. Фактормножество. Эквивалентность, согласованная с операциями. Кольцо вычетов  $\mathbb{Z}_n$ . Арифметика в кольце вычетов. Когда кольцо вычетов является полем
4. Арифметика матриц: сложение, умножение, транспонирование. Кольцо квадратных матриц над полем. Перестановочные матрицы.
5. Определители квадратных матриц и их свойства. Обратная матрица. Теорема Крамера.
6. Поле комплексных чисел  $\mathbb{C}$ : операции над комплексными числами, геометрическое описание сложения и умножения, формула Муавра, извлечение корней.
7. Кольцо многочленов над полем. Делимость в кольце многочленов, алгоритм Евклида. НОД многочленов. Схема Горнера. Приводимые и неприводимые многочлены. Аналог основной теоремы арифметики. Основная теорема алгебры. Теорема Виета. Корни многочленов с рациональными коэффициентами
8. Векторные (линейные) пространства. Аксиомы векторного пространства и следствия из них.
9. Линейная (не)зависимость систем векторов и свойства линейно (не)зависимых систем. Линейная оболочка системы векторов.
10. Метод Гаусса. Классификация СЛАУ (определённые, неопределённые, совместные, несовместные). Структура решения СЛАУ.
11. Основная лемма о линейной зависимости. Базис и размерность векторного пространства. Описание конечномерных пространств с точностью до изоморфизма. Теорема о размерности пространства решений однородной СЛАУ. Базис пространства решений однородной СЛАУ — ФСР.
12. Переход от одного базиса к другому. Матрица перехода и её свойства.
13. Ранг и база системы векторов. Ранг матрицы, теорема о ранге матрицы (= теорема о базисном миноре). Лемма о вычислении ранга матрицы. Теорема Кронекера-Капелли.
14. Базис, согласованный с подпространством. Теорема о существовании базиса, согласованного с парой подпространств. Формула Грассмана. Прямая сумма двух подпространств. Проекция вектора на подпространство из прямой суммы. Поиск базиса суммы и пересечения подпространств.
15. Линейные отображения. Матрица линейного отображения. Ядро и образ линейного отображения. Теорема о сумме размерностей ядра и образа.

16. Геометрические векторы. Коллинеарность, компланарность. Деление отрезка в заданном отношении. Правые и левые тройки векторов. Скалярное, векторное, смешанное произведения геометрических векторов и свойства этих произведений. Критерии ортогональности, коллинеарности и компланарности геометрических векторов. Выражения для произведений векторов в декартовых координатах. Тождества «бац минус цаб» и Якоби.

17. Прямые и плоскости. Различные уравнения прямых и плоскостей как следствия свойств произведений геометрических векторов. Основные задачи на прямые и плоскости: нахождение расстояния от точки до прямой/плоскости, расстояние между параллельными/скрещивающимися прямыми и т.п.

18. Кривые второго порядка. Эллипс, гипербола, парабола и их канонические уравнения. Полуоси, директрисы, эксцентриситет. Оптические свойства кривых второго порядка. Кривые второго порядка как конические сечения.

### Примеры билетов:

#### № 100

1. Постройте кривую  $25x^2 - 50x - 4y^2 - 16y + 66 = 0$  в изначальной системе координат. Найдите её эксцентриситет.
2. Найдите рациональные корни многочлена  $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$ .
3. Что такое прямая сумма двух подпространств? Может ли она совпадать со всем пространством?
4. Теорема Кронекера-Капелли.

#### № 200

1. Найдите размерность и базис пересечения подпространств  $V_1$  и  $V_2 \subseteq \mathbb{R}^4$ :  
$$V_1 : \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0; \end{cases} \quad V_2 : \begin{cases} x_1 - 2x_4 = 0 \\ 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$
2. Изобразите множество точек  $4\operatorname{Re}^2(z) + \operatorname{Im}^2(z) \leq 4$  на комплексной плоскости.
3. Что такое поле? Что такое характеристика поля? Существуют ли конечные поля?
4. Теорема о базисном миноре.