Лабораторная работа № 1.11

Измерение ускорения свободного падения с помощью оборотного маятника

Содержание

Цель работы

1. Экспериментальная проверка закономерностей движения физического маятника.

Задачи

1. Определение периода колебаний маятника при совпадении приведенной длины с расстоянием между призмами.

2. Определение ускорения свободного падения с абсолютной и относительной погрешностями.

3. Сравнение найденного ускорения свободного падения со справочным значением для широты лаборатории.

Введение

Математический маятник

Математический маятник представляет собой точечный груз массой m, подвешенный на нерастяжимой невесомой нити длиной ℓ (рис. 1).

При отклонении маятника от положения равновесия его потенциальная энергия увеличивается на величину

$$U = mgh = mg\ell(1 - \cos\varphi). \tag{1}$$

Момент инерции маятника относительно точки подвеса равен $I = m\ell^2$. Учтем, что при малых углах отклонения $\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$, тогда выражение (1) можно переписать как

$$U = \frac{Ig\varphi^2}{2\ell}. \tag{2}$$

На маятник действует возвращающий момент силы, равный

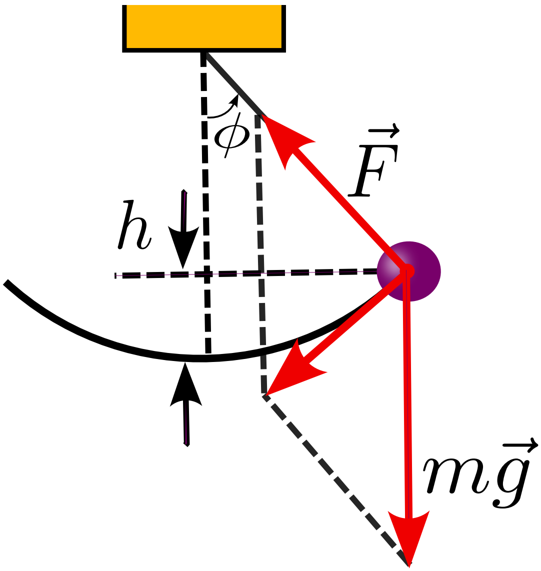

Рис. 1. Математический маятник.

$$M = -\frac{dU}{d\varphi} = -mg\ell\varphi = -\frac{Ig\varphi}{\ell}. \tag{3}$$

Второй закон Ньютона для вращательного движения имеет вид $M = I\ddot{\varphi}$, в нашем случае имеем

$$\frac{Ig\varphi}{\ell} = -I\ddot{\varphi}. \tag{4}$$

Решением дифференциального уравнения $\ddot{\varphi}+\omega^2\varphi = 0$ является гармоническое колебание

$$\varphi = Acos(\omega t + \varphi_0). \tag{5}$$

Из (4) следует, что для математического маятника циклическая частота колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}, \tag{6}$$

а период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}. \tag{7}$$

Физический маятник

Физическим маятником называется твердое тело, имеющее возможность совершать колебания под действием силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси (рис. 2).

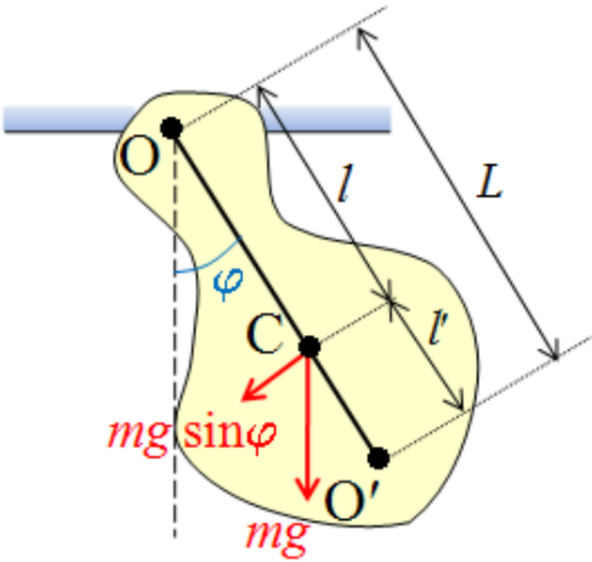

Рис. 2. Физический маятник.O - точка подвеса, C - центр инерции,O' - центр качания.

Обозначим расстояние от точки подвеса до центра инерции как ℓ, возвращающий момент по-прежнему будет равен

$M = -mg\ell\varphi$ (при малых углах отклонения), но второй закон Ньютона теперь запишется в виде

$$mg\ell\varphi = -I\ddot{\varphi}, \tag{8}$$

где I — момент инерции маятника относительно оси подвеса, который зависит от распределения масс.

Соответственно период малых колебаний физического маятника равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg\ell}}, \tag{9}$$

В частности, для математического маятника, масса которого сосредоточена в центре инерции $I = m\ell^2$ и формула (9) переходит в (7).

Соотношение (9) удобно преобразовать, используя теорему Штейнера:

$$I = I_0 + m\ell^2, \tag{10}$$

где I_0 — момент инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр инерции параллельно оси подвеса. Тогда для периода колебаний получаем:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + m\ell^2}{mgl}}. \tag{11}$$

Проанализируем зависимость $T(\ell)$. График этой функции приведен на рис. 3.

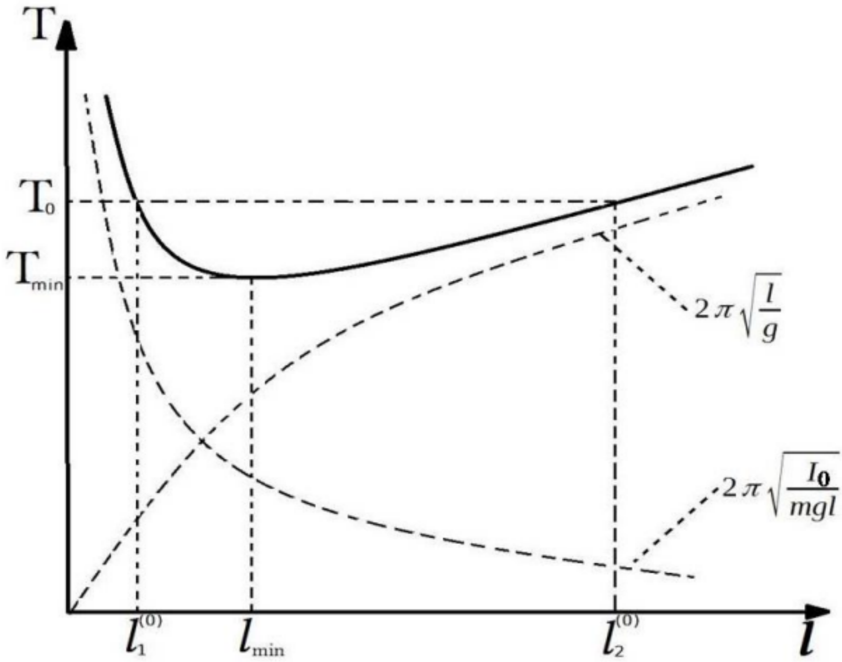

Рис. 3. Зависимость периода колебаний физического маятника от расстояния от оси подвеса до центра масс.

В предельном случае больших значений ℓ соотношение (11) переходит в (7), то есть физический маятник по своим свойствам становится похожим на математический маятник:

$$T(\ell)_{\ell\to\infty} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}. \tag{12}$$

При увеличении ℓ период колебаний растет.

При малых ℓ маятник близок к положению безразличного равновесия. В этом случае из (11) получаем

$$T(\ell)_{\ell\to 0} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mg\ell}} \to \infty. \qquad (13)$$

В отличие от математического маятника, период колебаний физического маятника при уменьшении длины тоже растет.

Взяв производную от правой части (11) и приравняв ее нулю, найдем, что минимальный период колебаний физического маятника получается при $\ell_{min} = \sqrt{\frac{I_0}{m}}$ и равен

$$T_{min} = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell_{min}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{g}\sqrt{\frac{I_0}{m}}}. \qquad (14)$$

Рассмотрим математический маятник, имеющий такой же период колебаний, как и физический. Очевидно, что его длина должна быть

$$L = \frac{I}{m\ell} = \frac{I_0}{m\ell} + \ell. \qquad (15)$$

Величина L называется приведенной длиной физического маятника. Точка на прямой, соединяющей точку подвеса с центром инерции, лежащая на расстоянии L от точки подвеса, называется центром качания физического маятника (точка O' на рис. 2). Из (15) видно, что $L > \ell$, следовательно, точка подвеса и центр качания лежат по разные стороны от центра инерции.

Если перевернуть физический маятник и подвесить его в точке, совпадающей с центром качания, то новое расстояние до центра инерции будет равно $\ell' = L - \ell$ (рис. 2). Нетрудно доказать, что приведенная длина, а значит и период колебания при этом не изменятся. Следовательно, при переносе точки подвеса в центр качания прежняя точка подвеса становится новым центром качания.

Графически это свойство иллюстрирует рис. 3. Из него следует, что один и тот же период колебаний физического маятника T_0 реализуется при двух значениях $\ell = \ell_{01}$ и $\ell' = \ell_{02}$.

Оборотный маятник

Рассмотренное свойство физического маятника можно использовать для измерения ускорения свободного падения. Заметим, что недостаточно просто измерить период колебания маятника, т. к. в расчетные формулы входят трудноопределимые величины момента инерции и расстояния до центра инерции. Поэтому используют специальный вариант физического маятника, называемый оборотным (рис. 4).

Маятник состоит из металлического стержня 1, на котором закреплены массивные грузы 4 и 5. Осями подвеса служат ребра двух призм 2, закрепленных вблизи концов стержня. Расстояние между призмами фиксировано. В рабочем положении призмы устанавливаются в V-образные опоры 3. Центр инерции маятника находится где-то между призмами.

Регулируемым параметром является положение груза 4. Очевидно, что при перемещении этого груза в направлении призмы 2 центр инерции будет смещаться вниз, увеличивая расстояние ℓ от точки подвеса. Если же маятник перевернуть, то такое же смещение регулировочного груза приведет к поднятию центра инерции и уменьшению ℓ. В обоих случаях меняются периоды колебаний T_1 и T_2.

Если при каком-то положении регулировочного груза окажется, что $T_1 = T_2 = T_0$, то это будет означать, что вторая призма находится в центре качания, а расстояние между призмами (которое легко измерить) равно приведенной длине маятника. Измерив

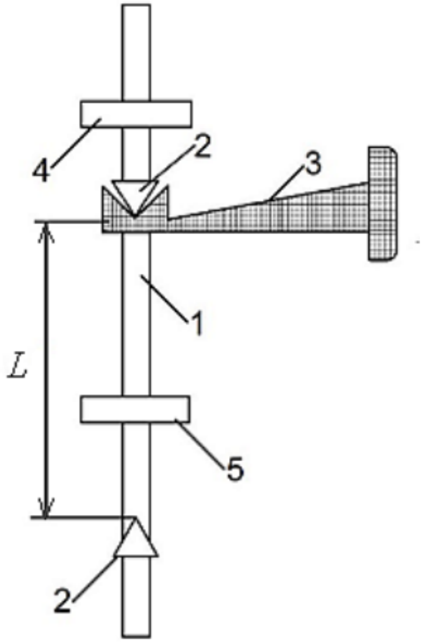

Рис. 4. Оборотный маятник.

T_0, находим ускорение свободного падения

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T_0^2} \tag{16}$$

Экспериментальная установка

Экспериментальная установка показана на рис. 5.

Рис. 5. Экспериментальная установка.

Основой установки служит оборотный маятник, схема которого приведена на рис. 4. Для измерения расстояния между призмами и положения регулировочного груза на стержне нанесены риски с шагом 1 см.

Погрешность измерений расстояний по этой шкале принять 2 мм.

Измерение времени колебаний производится электронным секундомером. При нажатии клавиши «СБРОС» начинается отсчет времени с момента прохождения маятником положения равновесия. При нажатии клавиши «СТОП» секундомер выключается после завершения текущего периода колебаний, индикатор показывает целое число периодов колебаний N и время t , за которое маятник их совершил.

Погрешность измерений времени 0,01 с.

Период колебаний маятника можно определить по формуле

$$T = \frac{t}{N} \tag{17}$$

где t — время, за которое совершается полное число N колебаний.

Для более точного измерения величины T_0 в работе исследуется зависимость периодов колебаний маятника в прямом и перевернутом положении T_1 и T_2 от положения регулировочного груза (см рис. 6).

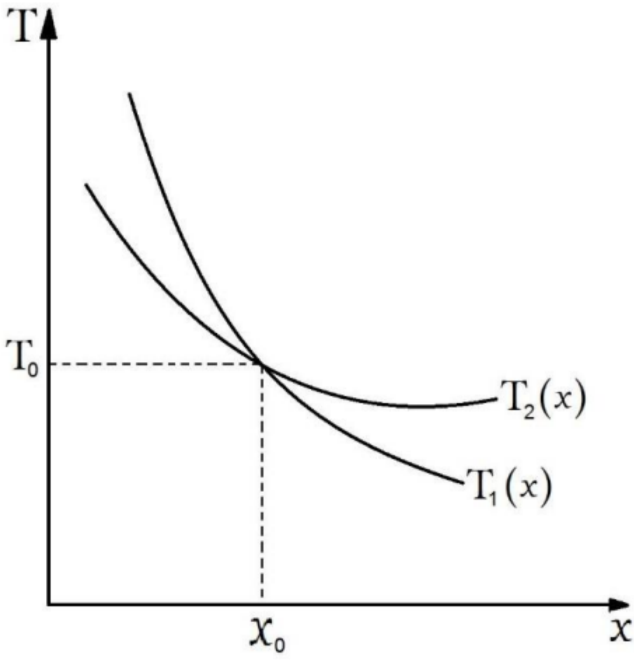

Рис. 6. Графики зависимостей $T_1(x)$ и $T_2(x)$.

Точка пересечения этих графиков соответствует значению T_0 при котором приведенная длина маятника равна расстоянию между призмами.

При измерениях удобно регистрировать время t одного и того же числа колебаний N. Тогда нет необходимости сразу переходить к величине T. Практически удобнее исследовать зависимости $t(x)$ для прямого и обратного положений маятника. Тогда с учетом выражений (16), (17) получаем для расчета ускорения свободного падения соотношение

$$g = 4\pi^2 L\left(\frac{N}{t_0}\right)^2 \tag{18}$$

Вследствие погрешностей измерений, экспериментальные точки на графике $t(x)$ могут иметь определенный разброс относительно теоретической кривой. Поэтому при обработке результатов измерений кривые $t_1(x)$ и $t_2(x)$ следует провести приближенно, стремясь минимизировать их средние отклонения от полученных из опыта точек.

Проведение измерений

1. Измерить расстояние L между ребрами призмы, служащими осями подвеса маятника.

2. Установить маятник так, чтобы регулировочный груз находился в крайнем верхнем положении. ***Внимание!*** При работе с маятником следует соблюдать осторожность убедиться, что ребро призмы, служащей осью подвеса, находится в углублении V-образной опоры. Амплитуда колебаний должна составлять около 10°.

3. Измерить время t_1 для $N = 10$ полных колебаний маятника; записать значения t и положения груза x. Провести измерения t при различных значениях x, перемещая регулировочный груз от конца стержня до ближайшей призмы с шагом 1 см. Для повышения точности измерений при каждом повторить опыт 3 раза. Результаты занести в таблицу 1.

4. Перевернуть маятник и повторить задание п. 3, измеряя время t_2.

Обработка результатов

1 Построить графики зависимостей $t_1(x)$ и $t_2(x)$ для прямого и обратного положений маятника. Найти величину t_0 как ординату точки пересечения соответствующих кривых. По формуле (18) рассчитать величину g.

2 Используя правила вычисления погрешности косвенных измерений, из выражения (18) получаем следующую формулу для относительной погрешности величины g:

$$\delta g = \sqrt{(\delta L)^2 + (2\delta t_0)^2} \tag{19}$$

где δL и δt_0 - относительные погрешности величин L и t_0. Расстояние L измеряется непосредственно, его погрешность практически равна инструментальной погрешности шкалы.

3 Величина t_0 определяется косвенным методом по графикам зависимостей $t_1(x)$ и $t_2(x)$. При этом, вследствие наличия погрешностей δt при измерении времени t, график $t(x)$ фактически должен изображаться не линией, а полосой шириной около $2\delta t$.

4 Погрешность δt следует найти по данным многократных измерений промежутков времени t_{1i} и t_{2i} и нанести на график. Тогда в результате пересечения кривых $t_1(x)$ и $t_2(x)$, проведенных с учетом погрешности, получим некоторую область. Величина t_0 находится как ордината ее центра. Оценку погрешности δt_0 получаем, учитывая, что максимальный размер указанной области вдоль оси ординат составляет $2\delta t_0$. При оценке δt_0 следует учитывать, что точность построенной на графике линии не превосходит 1 мм.

В отчет по лабораторной работе должны входить:

- Графики $t_1(x)$ и $t_2(x)$.
- Период T_0 колебаний маятника при совпадении приведенной длины с расстоянием между призмами.
- Значение ускорения свободного падения g с абсолютной и относительной погрешностями.
- Абсолютное и относительное отклонения измеренного ускорения свободного падения от справочного значения для широты лаборатории.

Контрольные вопросы

1. Чем объясняется то, что ускорение свободного падения одинаково для всех тел?

2. Почему ускорение свободного падения зависит от географической широты места?

3. Как величина ускорения свободного падения связана с массой и радиусом Земли?

4. Как величина ускорения свободного падения связана с массой и радиусом Земли?

5. Что такое центр тяжести тела? Как можно найти его положение из опыта?

6. Чем отличаются понятия “центр тяжести” и “центр инерции”?

7. Имеется стержень, подвешенный на оси, проходящей через его конец. В каком месте к нему следует прикрепить добавочный груз, чтобы изменение периода колебаний было наибольшим?

8. В каком случае заданное перемещение регулировочного груза приведет к большему изменению периода колебаний оборотного маятника: a) груз находится в нижнем положении; b) груз находится в верхнем положении?

Литература

1. Детлаф А. А., Яворский Б. М. Курс физики.— 8-е изд., стер. — М. : Издательский центр "Академия 2009 .

2. Курепин В.В., Баранов И.В. Обработка экспериментальных данных: Методические указания к лабораторным работам. – СПб, 2003.–57 с.

Приложение

Таблица 1: Время колебаний маятника при различных положениях груза

x,см									
t_1, с									
t_2, с									