

## Алгебра. Базовый уровень.

### Программа коллоквиума по модулю «Линейные операторы»

1. Понятие линейного оператора. Ядро и образ оператора. Связь между размерностями ядра и образа оператора и размерностью пространства.
2. Матрица линейного оператора. Связь между матрицами оператора в разных базисах. Геометрический смысл ранга матрицы оператора. Пространство линейных операторов и его изоморфизм пространству квадратных матриц.
3. Инвариантное подпространство. Ограничение оператора на него. Связь между матрицей оператора и матрицей ограничения на инвариантное подпространство. Блочно-диагональная матрица и разложение пространства в прямую сумму инвариантных подпространств. Диагонализируемый оператор.
4. Собственные значения и собственные векторы. Собственные подпространства. Размерность собственного подпространства. Собственный базис. Линейная независимость собственных подпространств, соответствующих разным собственным значениям.
5. Характеристический многочлен и его корни. Спектральное разложение оператора. Алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения, неравенство для них. Смысл этих кратностей.
6. Критерий диагонализируемости оператора. Собственные значения вещественной симметрической матрицы
7. Корневые векторы и корневое подпространство. Высота корневого вектора. Свойства корневых подпространств. Нильпотентный оператор.
8. Линейная независимость корневых подпространств, соответствующих разным собственным значениям. Разложение пространства в прямую сумму корневых подпространств.
9. Понятие циклического подпространства. Жорданова цепочка. Свойства циклических подпространств. Теорема о структуре нильпотентного оператора. Жорданов базис. Нильпотентная жорданова клетка.
10. Жорданова клетка. Связь между жордановыми клетками и диаграммами Юнга. Теорема о структуре оператора.
11. Аннулирующий многочлен. Минимальный многочлен. Теорема Гамильтона-Кэли. Свойства минимального многочлена. Связь между минимальным многочленом и жордановой нормальной формой.
12. Вычисление многочленов и аналитических функций от операторов и матриц с использованием а) ЖНФ, б) совпадения многочлена и его остатка от деления на минимальный/характеристический на спектре оператора.

## Примеры билетов:

### № 100

1. Теорема Гамильтона-Кэли.

2. Что можно сказать о ЖНФ, размерностях собственных и корневых подпространств оператора  $\mathcal{A}$ , минимальный многочлен которого  $\mu_{\mathcal{A}}(t) = (t - 1)(t - 2)$ , а характеристический  $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (t - 1)^3(t - 2)^2$ ?

### № 200

1. Свойства корневых подпространств.

2. Линейный оператор  $\mathcal{A}$  на пространстве геометрических векторов задан матрицей  $A$ . Выясните геометрический смысл этого оператора.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & -0,5 \\ 0 & -0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$