УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Дискретная математика

Преподаватель:

к.ф.-м.н., доцент НОЦ математики

Фалеева Мария Петровна

mpfaleeva@itmo.ru

Санкт-Петербург, 2022

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Лекция 4. Основные комбинаторные объекты: сочетания, размещения, перестановки

Основные комбинаторные принципы

- Теорема (Комбинаторный принцип умножения)
- Пусть задана последовательность событий

$$E_1, E_2, E_3, \dots, E_m$$

таких, что событие E_1 осуществляется n_1 способами, и, если события $E_1, E_2, E_3, \dots, E_{k-1}$ осуществились, то событие E_k может осуществиться n_k способами.

- Тогда существует $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \cdots \times n_m$ способов осуществления всей последовательности событий.

Основные комбинаторные принципы

- Битовая строка – это строка, состоящая из элементов, каждый из которых имеет значение 1 или 0.
- Пример
  1) Сколько существует битовых строк, имеющих длину 5?
  2) Сколько существует битовых строк длины k?

Основные комбинаторные принципы

- Решение

1) Поскольку каждый символ строк может иметь значение 1 или 0, то существует два варианта выбора для каждой позиции. Следовательно существует $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$ битовых строк длины 5.

2) По аналогичным соображениям, имеется 2^k битовых строк длины k.

Основные комбинаторные принципы

- Теорема (Комбинаторный принцип сложения)
- Пусть $S_1, S_2, S_3, \dots, S_m$ - попарно непересекающиеся множества (т.е. $S_i \cap S_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$), и пусть для каждого i, множества S_i содержит n_i элементов.
- Количество вариантов выбора из S_1 или S_2 или S_3 или … или S_m равно $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m$.
- На языке теории множеств утверждение теоремы имеет вид

$$|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \dots \cup S_m| = |S_1| + |S_2| + |S_3| + \cdots + |S_m|,$$

где $|S|$ обозначает количество элементов множества S.

Основные комбинаторные принципы

- Пример

Сколькими способами можно выбрать две книги по разным темам, когда на полке находятся 15 книг по информатике, 12 книг по математике и 10 книг по химии?

Основные комбинаторные принципы

Решение

1) Если выбрать книгу по информатике и книгу по математике, то существуют 15 вариантов выбора книги по информатике и 12 вариантов выбора книги по математике, поэтому существует $12 \times 15 = 180$ возможностей.

2) Если выбирать книги по информатике и по химии, то имеются 15 вариантов книги по информатике и 10 вариантов выбора книги по химии, поэтому существует $15 \times 10 = 150$ возможностей.

Основные комбинаторные принципы

3) Если выбирается книга по математике и книга по химии, то имеется 12 способов выбора математической книги и 10 – книги по химии, поэтому имеется $12 \times 10 = 120$ возможностей.

Следовательно, существуют 180+150+120=450 возможных способов выбора двух книг.

Основные комбинаторные принципы

- Теорема (Формула включений и исключений)
- Пусть S и T – множества.
- Количество элементов, которое можно выбрать из S или T, равно $|S| + |T| - |S \cap T|$.
- Иными словами, $|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|$.
- Обобщение теоремы (для трех множеств)
  $|A \cup B \cup C| =$
  $= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$
- Для n произвольных конечных множеств
  $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| =$
  $= \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots$

Основные комбинаторные принципы

- Пример

Предположим, что в группе из 100 студентов 60 человек изучают математику, 75 – историю, а 45 человек – и то, и другое.

1) Сколько студентов изучают математику или историю?

2) Сколько студентов не изучают ни математику, ни историю?

Основные комбинаторные принципы

- <u>Решение</u>

Пусть универсум U – группа из 100 студентов. M – множество студентов, изучающих математику, H – множество студентов, изучающих историю.

1) Тогда, количество студентов, изучающих математику или историю, равно

$$|M \cup H| = |M| + |H| - |M \cap H| = 60 + 75 - 45 = 90.$$

2) Количество студентов, не изучающих ни математику, ни историю, равно $|M' \cap H'|$. Но $M' \cap H' = (M \cup H)'$, поэтому

$$|M' \cap H'| = |(\mathrm{M} \cup H)'| = 100 - 90 = 10.$$

Основные комбинаторные принципы

- Пример

Найти количество положительных целых чисел, меньших 1001, которые делятся на 3 или на 5.

Основные комбинаторные принципы

Решение

Количество элементов множества S положительных целых чисел, меньших 1001, которые делятся на 3, равно $|\frac{1001}{3}|$ или 333.

Количество элементов множества T положительных целых чисел, меньших 1001, которые делятся на 5, равно $|\frac{1001}{5}|$ или 200.

Элементами множества $S \cap T$ являются целые числа, меньшие 1001, которые делятся на 5 и 3, и поэтому делятся на 15. Следовательно, $|S \cap T| = |\frac{1001}{15}|$ или 66. Значит

$$|S \cup T| = 333 + 200 - 66 = 467$$

Комбинаторные конфигурации

- Для формулировки и решения комбинаторных задач используются различные модели комбинаторных конфигураций. Рассмотрим следующие две наиболее популярные:

1) Дано n предметов. Их нужно разместить по m ящикам так, чтобы выполнялись заданные ограничения. Сколькими способами это можно сделать?

2) Рассмотрим множество функций

$$F\colon X \longrightarrow Y, \text{ где } |X| = n, |Y| = m.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что

$$X = \{1, \ldots, n\}, Y = \{1, \ldots, m\}, F = \langle F(1), \ldots, F(n) \rangle, 1 \leq F(i) \leq m.$$

Сколько существует функций F, удовлетворяющих заданным ограничениям?

Размещения без повторений

- Число инъективный функций, или число способов разместить n предметов по m ящикам, не более чем по одному в ящик, или число кортежей длины n из различных элементов m - элементного множества называется <u>числом размещений без повторений из *m* элементов по *n*</u> и обозначается A_m^n, или $A(m,n)$.

- <u>Теорема</u> $\boxed{A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}, 1 \le n \le m}$

<u>Доказательство</u>

Ящик для первого предмета можно выбрать *m* способами, ящик для второго *m-1* способами, и т.д. Таким образом,

$$A_m^n = m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Размещения без повторений

- Замечание

$A_m^n \stackrel{\text{def}}{=} 0$ при $n > m$ и $A_m^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$.

- Пример

В некоторых видах спортивных соревнований исходом является определение участников, занявших первое, второе и третье места.

Сколько возможно различных исходов, если в соревновании участвуют 8 участников?

Размещения без повторений

- Решение

Каждый возможный исход соответствует функции $F: \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ (аргумент – номер призового места, результат – номер участника).

Таким образом, всего возможно $A_8^3 = 8(8-1)(8-2) = 336$ различных исходов.

Размещения с повторениями

- Число всех функций (при отсутствии ограничений), или число всех возможных способов разместить n предметов по m ящикам, или число кортежей длины n из m -элементного множества называется числом размещений с повторениями из m элементов по n и обозначается $\overline{A_m^n}$ или $\overline{A(m,n)}$
- Теорема $\boxed{\overline{A_m^n} = m^n}$

  Доказательство.

  Поскольку ограничений нет, предметы размещаются независимо друг от друга и каждый из n предметов можно разместить m способами.

Размещения с повторениями

- Пример

При игре в кости бросаются две кости и выпавшие на верхних гранях очки складываются. Какова вероятность выбросить 12 очков?

Размещения с повторениями

- Решение

Каждый возможный исход соответствует функции $F: \{1,2\} \to \{1,2,3,4,5,6\}$ (аргумент – номер кости, результат – очки на верхней грани).

Таким образом всего возможно $\bar{A}_6^2 = 6^2 = 36$ различных исходов. Из них только один (6+6) дает 12 очков. Вероятность 1/36.

Перестановки без повторений

- Если $|X| = |Y| = n$, то существуют взаимно-однозначные функции $f: X \to Y$. Число взаимно-однозначных функций, или <u>число перестановок</u> n предметов, обозначается P_n или $P(n)$.
- Числом перестановок также называется число кортежей длины n из различных элементов n -элементного множества
- <u>Теорема</u> $\boxed{P_n = n!}$
- <u>Доказательство</u>

$$P_n = A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-n+1) =$$
$$= n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$$

Перестановки без повторений

- Пример

Сколько существует трехразрядных десятичных чисел, не содержавших повторяющихся цифр, если используются только цифры 3, 5, 9?

Перестановки без повторений

Решение

В данном случае $n = 3$, следовательно, искомое число равно $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Все эти перестановки имеют вид: 359, 395, 539, 593, 953, 935.

Перестановки с повторениями

- Число последовательностей, получаемых перестановкой элементов мультимножества $\hat{X} = \{x_1, \dots, x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_m\}$ называется числом перестановок с повторениями и обозначается как $\mathrm{P}(n_1, \dots, n_m)$, где n_1 - количество элементов x_1, … n_m - количество элементов x_m.
- Теорема $\boxed{\mathrm{P}(n_1, \dots, n_m) = \frac{n!}{n_1! \dots n_m!},}$ где $n = n_1 + \dots + n_m$

  Обоснование формулы:

  Всего перестановок последовательностей длины n: $n!$

  Если переставляются одинаковые элементы, например x_i, то получается та же самая последовательность. Таких последовательностей n_i. Таким образом, число различных последовательностей элементов мультимножества $\frac{n!}{}$

Перестановки с повторениями

- Пример

Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы слова «ротор»?

Перестановки с повторениями

Решение

В слове «ротор» из 5 букв. Из них две буквы «р», две буквы «о», одна буква «т». Следовательно

$$n = 5, n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 1.$$

Искомое число различных слов равно

$$\mathrm{P}(2,2,1) = \frac{5!}{2!2!1!} = 30,$$

Среди которых такие «слова», как рроот, тоорр, ортро, оортр и т.д.

Сочетания без повторений

- Число строго монотонно возрастающих функций, или число размещений n неразличимых предметов по m ящикам не более чем по одному в ящик, то есть число способов выбрать из m ящиков n ящиков с предметами, и называется <u>числом сочетаний</u> и обозначается $C(m,n)$, или C_m^n, или $\binom{n}{m}$.
- Числом сочетаний также называется число различных n-элементных подмножеств m-элементного множества.
- <u>Теорема</u> $\boxed{C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!},}$ $1 \leq n \leq m$.

  По определению $C_m^n \stackrel{\text{def}}{=} 0$ при $n > m$.

Сочетания без повторений

- Обоснование формулы.

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

- Комментарий к определению.

Пусть

$$F: X \longrightarrow Y,$$

где $|X| = n, |Y| = m, X = \{1, \dots, n\}, Y = \{1, \dots, m\},$

$$F = \langle F(1), \dots, F(n) \rangle, 1 \le F(i) \le m$$

Тогда F строго монотонно возрастающая функция, если

$$1 \le F(1) < \dots < F(n) \le m$$

Сочетания без повторений

- Пример

Сколько существует различных комбинаций из 7 костей в домино, если всего имеется 28 костей?

Сочетания без повторений

- Решение

Очевидно, что искомое число равно числу 7-элементных подмножеств 28-элементного множества. Имеем

$$C_{28}^{7} = \frac{28!}{7!\,(28-7)!} = \frac{28\cdot 27\cdot 26\cdot 25\cdot 24\cdot 23\cdot 22}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = $$
$$= 1\,184\,040$$

Сочетания с повторениями

- Число монотонно возрастающих функций, или число размещений n неразличимых предметов по m ящикам, называется <u>числом сочетаний с повторениями</u> и обозначается $\overline{C_m^n}$.
- <u>Теорема</u> $\boxed{\overline{C_m^n} = C_{m+n-1}^n}$

<u>Обоснование формулы</u>.

Монотонно возрастающей функции $F\colon \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, m\}$ однозначно соответствует строго монотонно возрастающая функция $F'\colon \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, m+n-1\}$.

Соответствие устанавливается формулой: $F'(k) = F(k) + k - 1$

- $\overline{C_m^n} = P(n, m-1)$
- $C_m^n = P(n, m-n)$

Сочетания с повторениями

- Пример

Сколькими способами можно рассадить 8 вновь прибывших гостей среди 5 гостей, уже сидящих за круглым столом?

Сочетания с повторениями

- Решение

Очевидно, что между пятью сидящими за круглым столом гостями имеется пять промежутков, в которые можно рассаживать вновь прибывших.

Таким образом, число способов равно

$$\overline{C_5^8} = C_{5+8-1}^8 = \frac{12!}{8!\,4!} = 495$$

Двойные факториалы

- Двойным факториалом натурального числа n (обозначается как $n!!$) называется произведение числа n и всех меньших натуральных чисел той же чётности.
- Пример

$$10!! = 10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 3840.$$

- Теорема

1) $(2k)!! = 2^k \cdot k!$

2) $(2k+1)!! = \frac{(2k+1)!}{2^k \cdot k!}$

Биноминальные коэффициенты

- Из формулы для числа сочетаний

$$C_m^n = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}$$

следуют тождества:

1)$C_m^n = C_m^{m-n}$

2)$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}$

3)$C_n^i C_i^m = C_n^m C_{n-m}^{i-m}$

Бином Ньютона

- Числа сочетаний C_m^n называются также биномиальными коэффициентами.
- Теорема (Формула бинома Ньютона)

$$(x+y)^m = \sum_{n=0}^{m} C_m^n x^n y^{m-n}$$

- Следствие 1

$$\sum_{n=0}^{m} C_m^n = 2^m$$

- Следствие 2

$$\sum_{n=0}^{m} (-1)^n C_m^n = 0$$

Свойства биномиальных коэффициентов

- Теорема 1

$$\sum_{n=0}^{m} nC_m^n = m2^{m-1}$$

- Теорема 2

$$C_{m+n}^k = \sum_{i=0}^{k} C_m^i C_n^{k-i}$$

Треугольник Паскаля

- Треугольник Паскаля - способ рекуррентного вычисления биноминальных коэффициентов

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
. & & . & & . & & . & & . & & .
\end{array}
$$

- В данном равнобедренном треугольнике каждое число (кроме единиц на боковых сторонах) является суммой двух чисел, стоящих над ним. Число сочетаний C_m^n находится в $(m+1)$-м ряду на $(n+1)$-м месте.

Полиномиальные коэффициенты

- Теорема (Полиномиальная формула)

$$(x_1 + \dots + x_m)^n = \sum_{n_1+\dots+n_m=n} P(n_1, \dots, n_m) x_1^{n_1} \dots x_m^{n_m}$$

Суммирование производится по всем решениям уравнения $n_1 + \dots + n_m = n$ в целых неотрицательных числах

- $P(n_1, \dots, n_m)$ называют полиномиальным (мультиномиальным) коэффициентом.
- $P(n_1, \dots, n_m) = \frac{n!}{n_1! \dots n_m!}, n_1 + \dots + n_m = n$
- Следствие

$$\sum_{n_1+\dots+n_m=n} \frac{n!}{n_1! \dots ! n_m!} = m^n$$

Группа перестановок

- Группа перестановок называется симметрической группой.
- Биективная функция $f: X \to X$ называется перестановкой множества X.
- Замечание

Если множество X конечно ($|X| = n$), то, не ограничивая общности, можно считать, что $X = 1..n$.

В этом случае перестановку $f: 1..n \to 1..n$ удобно задавать таблицей из двух строк. В первой строке – значения аргументов, во второй – соответствующие значения функции.

Такая таблица называется подстановкой. В сущности, перестановка и подстановка – синонимы.

Группа перестановок

- Пример

$$f = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \mathrm{g} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Произведением перестановок f и g (обозначается fg) называется их суперпозиция $g \circ f$.

- Пример

$$fg = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Тождественная перестановка – это перестановка e, такая что $e(x) = x$.

Группа перестановок

- Пример

$$e = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Обратная перестановка – это обратная функция, которая всегда существует, поскольку перестановка является биекцией.

Группа перестановок

- Замечание

Таблицу обратной подстановки можно получить, если просто поменять местами строки таблицы исходной подстановки.

- Пример

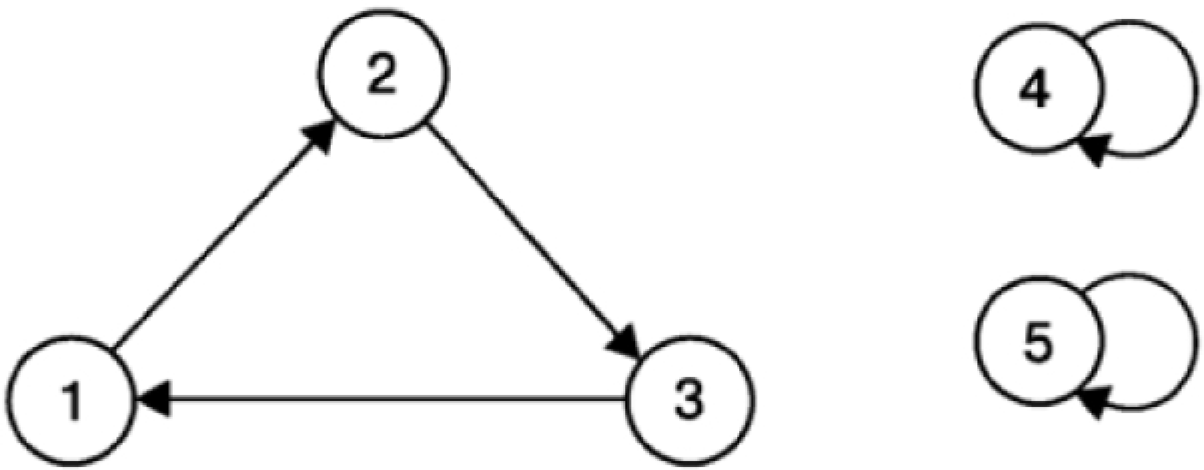
$$f = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}, \quad f^{-1} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, поскольку суперпозиция функций ассоциативна, а единичный и обратный элементы существуют, множество перестановок *n*-элементного множества образует группу относительно операции суперпозиции. Эта группа называется <u>симметрической</u> степени *n* и обозначается S_n.

Группа перестановок

- Пример

$$f = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$



Графическое представление перестановки

Группа перестановок

- Если задана перестановка f, то циклом называется последовательность элементов $x_0, \dots, x_k$, такая, что

$$f(x_i) = \begin{cases} x_{i+1}, & 0 \le i < k, \\ x_0, & i = k. \end{cases}$$

Пример. В подстановке $f = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ имеется 1 цикл длины 4: (1, 3, 2, 4).

- Цикл длины 2 называется транспозицией.
- Замечание. Всякая сортировка может быть выполнена перестановкой соседних элементов.
- Метод сортировки, основанный на предшествующем замечании, известен как метод пузырька.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Спасибо за внимание!

Санкт-Петербург, 2022