Алгебра. Базовый уровень. Программа экзамена.
Весенний семестр 2022-23 уч. г., лектор Р. А. Попков

Модуль «Полилинейная алгебра»

1. Билинейные функции и их матрицы. Преобразование матрицы билинейной функции при замене базиса. Ранг и ядра билинейной функции.

2. Симметрические и кососимметрические билинейные функции, их матрицы. Ортогональное дополнение к подпространству относительно билинейной функции, его свойства.

3. Квадратичные функции, поляризация. Канонический и нормальный виды симметрической билинейной и квадратичной функций.

4. Методы Лагранжа и Якоби приведения квадратичной функции к каноническому виду. Закон инерции.

5. Положительно определённые билинейные и квадратичные функции. Критерий Сильвестра.

6. Тензоры как полилинейные функции. Примеры тензоров малых валентностей. Арифметические операции над тензорами, тензорное умножение.

7. Тензорный базис и размерность пространства тензоров типа (p, q). Компоненты тензора, их преобразование при замене базиса. Матричная запись тензоров. Свёртка тензоров.

8. Симметрические и кососимметрические тензоры. Симметризация и альтернирование.

9. Внешнее произведение, его связь с определителями.

Модуль «Линейные операторы»

1. Понятие линейного оператора. Ядро и образ оператора. Связь между размерностями ядра и образа оператора и размерностью пространства.

2. Матрица линейного оператора. Связь между матрицами оператора в разных базисах. Геометрический смысл ранга матрицы оператора. Пространство линейных операторов и его изоморфизм пространству квадратных матриц.

3. Инвариантное подпространство. Ограничение оператора на него. Связь между матрицей оператора и матрицей ограничения на инвариантное подпространство. Блочно-диагональная матрица и разложение пространства в прямую сумму инвариантных подпространств. Диагонализируемый оператор.

4. Собственные значения и собственные векторы. Собственные подпространства. Размерность собственного подпространства. Собственный базис. Линейная независимость собственных подпространств, соответствующих разным собственным значениям.

5. Характеристический многочлен и его корни. Спектральное разложение оператора. Алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения, неравен-

ство для них. Смысл этих кратностей.

6. Критерий диагонализируемости оператора. Собственные значения вещественной симметрической матрицы

7. Корневые векторы и корневое подпространство. Высота корневого вектора. Свойства корневых подпространств. Нильпотентный оператор.

8. Линейная независимость корневых подпространств, соответствующих разным собственным значениям. Разложение пространства в прямую сумму корневых подпространств.

9. Понятие циклического подпространства. Жорданова цепочка. Свойства циклических подпространств. Теорема о структуре нильпотентного оператора. Жорданов базис. Нильпотентная жорданова клетка.

10. Жорданова клетка. Связь между жордановыми клетками и диаграммами Юнга. Теорема о структуре оператора.

11. Аннулирующий многочлен. Минимальный многочлен. Теорема Гамильтона-Кэли. Свойства минимального многочлена. Связь между минимальным многочленом и жордановой нормальной формой.

12. Вычисление многочленов и аналитических функций от операторов и матриц с использованием а) ЖНФ, б) совпадения многочлена и его остатка от деления на минимальный/характеристический на спектре оператора.

Модуль «Евклидовы пространства»

1. Евклидовы векторные пространства: определение и примеры. Неравенство Коши-Буняковского, неравенство треугольника, теорема Пифагора. Длина и угол между векторами.

2. Ортогональность векторов. Ортогональное дополнение к подпространству, его свойства. Ортогональная проекция и ортогональная составляющая. Ортонормированные базисы и ортогональные матрицы.

3. Матрица и определитель Грама системы векторов евклидова пространства, их свойства. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта. QR-разложение.

4. Расстояние и угол между вектором и подпространством.

5. Сопряжённый оператор и его свойства.

6. Ортогональные операторы, их свойства. Канонический вид матрицы ортогонального оператора.

7. Симметрические (самосопряжённые) операторы, канонический вид их матриц. Приведение симметрической билинейной или квадратичной функции к главным осям.

8. Неотрицательные и положительные симметрические операторы, извлечение корней.

9. Полярное разложение невырожденного линейного оператора в евклидовом пространстве.

10. Представление об эрмитовом (унитарном) пространстве: полуторалинейные функции, эрмитовы и косоэрмитовы функции и их нормальный вид.

Примеры билетов:

№ 100

1. Полярное разложение невырожденного линейного оператора в евклидовом пространстве.

2. Аннулирующий многочлен. Минимальный многочлен. Теорема Гамильтона-Кэли.

3. Представьте матрицу A в виде произведения ортогональной Q на верхнетреугольную R с положительными числами на диагонали: $A = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -5 \\ 2 & 1 & -11 \\ 3 & 12 & 50 \end{pmatrix}$.

4. В базисе e_1, e_2, e_3 линейного пространства V компоненты тензора $T \in \mathbb{T}_3^1(V)$ имеют вид $T_{ijk}^l = j \cdot k$. Найдите компоненту $\tilde{T}_{232}^1$ этого тензора в базисе $\tilde{e}_1$, $\tilde{e}_2$, $\tilde{e}_3$, где $\tilde{e}_1 = e_1 - 2e_2 + 3e_3$, $\tilde{e}_2 = e_2 - 3e_3$, $\tilde{e}_3 = e_3$.

№ 200

1. Неравенство Коши-Буняковского, неравенство треугольника, теорема Пифагора.

2. Тензорный базис и размерность пространства тензоров типа (p, q).

3. Найдите канонический вид ортогонального оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Найдите ЖНФ оператора $\mathcal{A}$, если $\chi_{\mathcal{A}} = t^4(t-1)^3(t-2)^2$, $\mu_{\mathcal{A}} = t^3(t-1)^2(t-2)$.