УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Лекция 3. Исчисление высказываний
Исчисление предикатов
Булевы функции

Высказывание

- Высказывание – это утверждение или повествовательное предложение, о котором можно сказать, что оно истинно или ложно.
- Значение истинности или истинностное значение – это истинность или ложность, приписываемые некоторому утверждению.

Высказывание

- Примеры.

p и *q* - высказывания:

p: Джейн водит автомобиль

q: У Боба русые волосы

- Не является высказыванием:

Кто вы? (Вопрос)

Прочтите эту главу до следующего занятия. (Приказ или восклицание).

Высказывание

- Простое высказывание – высказывание, не содержащие связок.
- Сложное высказывание - высказывание, содержащее связки.

Сложное высказывание. Конъюнкция

- Пример высказывания: Джейн водит автомобиль, и у Боба русые волосы.
- Обозначение: «∧» , «&» или «и».
- Пример записи: p и q, $p \wedge q$.
- Таблица истинности:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Сложное высказывание. Дизъюнкция

- Пример высказывания: Джейн водит автомобиль, или у Боба рыжие волосы.
- Обозначение: «V» или «или».
- Пример записи: *p* или *q*, $p \vee q$.
- Таблица истинности:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Сложное высказывание. Отрицание

- Пример высказывания: Джейн не водит автомобиль.
- Обозначение: $\neg$, $\sim$, $\bar{}$
- Пример записи: $\bar{p}$.
- Таблица истинности:

p	$\bar{p}$
0	1
1	0

Условные высказывания. Импликация

- Пример высказывания: Если целое число равно 3, то его квадрат равен 9.
- Обозначение: $\rightarrow$
- Пример записи: $p \rightarrow q$.
- Таблица истинности:

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Условные высказывания

- Условные высказывания могут выражаться в виде различных языковых конструкций, но символически все они записываются как $p \to q$.
- Примеры:

Если p, то q.

p достаточно для q.
p является достаточным условием для q.

q необходимо для p.
q является необходимым условием для p.

p только если q (или: только если q, то p).

Условные высказывания. Импликация

- Пусть дано высказывание-импликация $(p \to q)$:

  Если он играет в футбол, то он популярен.

- Конверсия $(q \to p)$:

  Если он популярен, то он играет в футбол.

- Инверсия $(\bar{p} \to \bar{q})$:

  Если он не играет в футбол, то он не популярен.

- Контрапозиция $(\bar{q} \to \bar{p})$:

  Если он не популярен, то он не играет в футбол.

Эквивалентные высказывания

- Пример высказывания:

Сэм играет в гольф тогда и только тогда, когда тепло.

- Обозначение: $\leftrightarrow$, $\equiv$, $=$
- Пример записи: $p \leftrightarrow q$

Прочтение:

p если и только если q

p необходимо и достаточно для q

p есть необходимое и достаточное условие для q

p выполняется тогда и только когда, когда выполняется q

Эквивалентные высказывания

- Таблица истинности:

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Исключающие «или»

- Пример высказывания: Дик сдаст экзамен по логике или он не сдаст этот экзамен.
- Обозначение: $\oplus$, $\underline{\vee}$
- Пример записи: $p \oplus q$.
- Таблица истинности:

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Штрих Шеффера

- Обозначение: |
- Пример записи: $p \mid q$.
- Таблица истинности (антиконъюнкция):

p	q	$p \mid q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Стрелка Пирса

- Обозначение: $\downarrow$
- Пример записи: $p \downarrow q$.
- Таблица истинности (антидизъюнкция):

p	q	$p \downarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Эквивалентные высказывания

- Пример высказывания:

Пусть

p: Сегодня шел дождь.

q: Сегодня шел снег.

Рассмотрим сложные высказывания:

$\overline{p \vee q}$: Неверно, что сегодня шел дождь или снег.

$\bar{p} \wedge \bar{q}$: Сегодня не шел дождь и сегодня не шел снег.

Эквивалентные высказывания

- Таблица истинности:

p	q	$(p \vee q)$	$\overline{p \vee q}$	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0

- Обозначение: $\leftrightarrow$, $\equiv$, $=$
- Пример записи: $\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$.

Логические эквивалентности

- Законы идемпотентности:

$$p \wedge p = p;$$

$$p \vee p = p.$$

- Закон двойного отрицания: $\bar{\bar{p}} = p.$
- Законы де Моргана:

$$\overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{q};$$

$$\overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}.$$

- Свойства коммутативности:

$$p \wedge q = q \wedge p;$$

$$p \vee q = q \vee p.$$

Логические эквивалентности

- Свойства ассоциативности:

$$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r;$$

$$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r.$$

- Свойства дистрибутивности:

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r);$$

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

- Закон контрапозиции: $p \to q = \bar{q} \to \bar{p}$.
- Другие полезные свойства:

$$p \to q = \bar{p} \vee q;$$

$$p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p).$$

Тавтология и противоречие

- Высказывание, истинное во всех случаях, называется логически истинным, или тавтологией.
- Пример. Он сдаст или не сдаст экзамен.
- Высказывание, построенное так, что оно ложно в каждом случае, называется логически ложным, или противоречием.
- Пример. Неверно, что он сдаст или не сдаст экзамен.
- Сложное высказывание, логическое значение которого меняется в зависимости от логических значений его составляющих, называется выполнимым.

Теорема

Пусть А – некоторое высказывание. Тогда:

1) если А – тавтология, то $\bar{A}$ – противоречие, и наоборот;
2) если А – противоречие, то $\bar{A}$ – тавтология, и наоборот;
3) если А – тавтология, то неверно, что А – противоречие, но не наоборот;
4) если А – противоречие, то неверно, что А – тавтология, но не наоборот;
5) если $\bar{A}$ выполнимо, то неверно, что А – тавтология;
6) если А выполнимо, то неверно, что А – противоречие.

Умозаключения

- Умозаключение – это совокупность утверждений, называемых гипотезами, или посылками, и утверждениями, называемого заключения.
- Посылки или гипотезы – это утверждения, предназначенные для обоснования или объяснения некоторого аргумента.
- Правильное умозаключение – это такое умозаключение, заключение которого истинно всякий раз, когда истинны его гипотезы.
- Для доказательства истинности умозаключений кроме таблиц истинности могут использоваться правила вывода, которые приводя к правильным умозаключениям.

Правила вывода

- Правило вывода – это логические правила, которые используются для вывода новых теорем из аксиом, постулатов и ранее доказанных в данной системе теорем.
- Правило отделения (Modus Ponens)

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \qquad\quad} \\ \therefore q \end{array}$$

- Силлогизм

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \to r} \\ \therefore p \to r \end{array}$$

Правила вывода

- Modus Tollens

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\bar{q}\qquad} \\ \therefore \bar{p} \end{array}$$

- Расширение

$$\begin{array}{l} \underline{p\qquad} \\ \therefore p \lor q \end{array}$$

- Специализация

$$\begin{array}{l} \underline{p \land q} \\ \therefore p \end{array}$$

Правила вывода

- Конъюнкция

$$\begin{array}{l} p \\ \underline{q \quad\quad} \\ \therefore p \wedge q \end{array}$$

- Выбор

$$\begin{array}{l} p \\ p \to (r \vee s) \\ r \to q \\ \underline{s \to q} \\ \therefore q \end{array}$$

Правила вывода

- Исключающий выбор

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{p \to (r \wedge \bar{r})} \\ \therefore q \end{array}$$

- Сведение к абсурду (Reductio ad Absurdum)

$$\begin{array}{l} \underline{\sim p \to (r \wedge \bar{r})} \\ \therefore p \end{array}$$

Исчисление предикатов. Определения

- Предикат – это утверждение, содержащее переменные, от которых зависит, является утверждение истинным, или ложным.
- Одноместный предикат – предикат с одной переменной.

Пример: $P(x)$: $3+x=5$

- Двуместный предикат – предикат, имеющий две переменные.

Пример: $R(x, y)$: $x^2+y^2 \geq 0$

- N-местный предикат – предикат, имеющий n переменных.
- Предикат становится высказыванием, когда его переменным присваиваются значения.

Исчисление предикатов. Определения

- Квантор всеобщности $\forall$ - логическая операция, позволяющая определить предикат, истинный для каждого возможного набора значений переменных.
- Пример: $\forall$ x S(x)
- Квантор существования $\exists$ - логическая операция, позволяющая определить предикат, истинный для по крайней мере одного значения переменной.
- Пример: $\exists$ x P(x)
- Предметная область квантора – множество значений, которое может принимать переменная.

Исчисление предикатов. Определения

- Предикат P называется тождественно истинным (тождественно ложным), если на всех наборах своих переменных он принимает значения *1 (0)*.
- Предикат называется выполнимым, если на некотором наборе своих переменных он принимает значение *1*. Такой набор переменных является областью истинности предиката.
- В формулах $\forall x\ (A)$ и $\exists x\ (A)$ подформула A называется областью действия квантора по x.
- Обычно связки и кванторы упорядочивают по приоритету следующим образом: ¬(простого высказывания), ∀, ∃, ∧, ∨, ⊕, →, ↔, ¬(сложного высказывания).

Логические следования и эквивалентности

- $\neg\forall x\,(A(x)) = \exists x\,(\neg A(x))$.
- $\neg\exists x\,(A(x)) = \forall x\,(\neg A(x))$.
- $\forall x\,((A(x) \wedge B(x))) = \forall x\,(A(x)) \wedge \forall x\,(B(x))$.
- $\exists x\,(A(x) \vee B(x)) \Rightarrow \exists x\,(A(x)) \vee \exists x\,(B(x))$.
- $\exists x\,(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x\,(A(x)) \wedge \exists x\,(B(x))$.
- $\forall x\,(A(x)) \vee \forall x\,(B(x)) \Rightarrow \forall x\,(A(x) \vee (B(x))$.
- $\forall x\,(\forall y\,(A(x, y)) = \forall y\,(\forall x\,(A(x, y)))$.
- $\exists x\,(\exists y\,(A(x, y)) = \exists y\,(\exists x\,(A(x, y)))$.
- $\forall x\,(A(x) \wedge C) = \forall x\,(A(x)) \wedge C$.

Логические следования и эквивалентности

- $\forall x\ (A(x) \vee C) = \forall x\ (A(x)) \vee C.$
- $\exists x\ (A(x) \wedge C) = \exists x\ (A(x)) \wedge C.$
- $\exists x\ (A(x) \vee C) = \exists x (A(x)) \vee C.$
- $C \rightarrow \forall x\ (A(x)) = \forall x\ (C \rightarrow (A(x)).$
- $C \rightarrow \exists x\ (A(x)) = \exists x\ (C \rightarrow (A(x)).$
- $\exists x(\forall y(A(x, y))) \Rightarrow \forall y\ (\exists x(A(x, y))).$
- $\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x\ (A(x)) \rightarrow \forall x(B(x)).$

Формула C не содержит никаких вхождений переменной x.

Логические следования и эквивалентности

- Говорят, что предикатная формула находится в приведенной форме, если в ней используются лишь операции квантификации, отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, причем отрицание относится лишь к предикатным буквам.
- Говорят, что предикатная формула находится в предварённой нормальной форме, если она имеет вид $D_{n1}D_{n2} \dots D_{nk}\ (A)$, где $D_{ni}, i = 1..k$ – либо квантор общности, либо квантор существования, A – формула, находящаяся в приведённой форме, не содержащая кванторов.

Алгебраические структуры. Булева алгебра

- Алгебраическая система (структура) - это множество A (носитель) с заданным на нем набором операций и отношений (сигнатурой) и удовлетворяющее некоторой системе аксиом.
- Полугруппа- множество с заданной на нем одной ассоциативной бинарной операцией.
- Моноид (полугруппа с единицей) - полугруппа с нейтральным элементом (единицей).
- Алгебра $A = \langle X, * \rangle$ называется группой, если она полугруппа с единицей (моноид), в которой каждый элемент обратим.

Алгебраические структуры. Булева алгебра

- Кольцом называется алгебра $\langle X,+,\cdot\rangle$ с двумя ассоциативными бинарными операциями: сложением $(+)$ и умножением $(\cdot)$, которая удовлетворяет аксиомам:

1. $\langle X,+\rangle$ - коммутативная группа (по сложению);
2. $\langle X,\cdot\rangle$ - полугруппа (по умножению);
3. Для любых элементов $x, y, z \in X$ имеет место дистрибутивность (распределительный закон):

$$(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z;$$
$$z\cdot(x+y) = z\cdot x + z\cdot y.$$

- Если при этом существует нейтральный элемент (единица) для умножения, то кольцо называется кольцом с единицей.
- Если операция умножения коммутативна, то кольцо

Алгебры с тремя алгебраическими операциями. Булевы алгебры

- Алгебра $\langle X, \vee, \wedge, \neg \rangle$ с тремя алгебраическими операциями, которые называются дизъюнкцией, конъюнкцией и отрицанием, называется булевой, если операции дизъюнкции (или) $\vee$ и конъюнкции (и) $\wedge$ - бинарные, операция отрицания (не) $\neg x$ или $\bar{x}$ - унарная, и все они обладают свойствами:

1) $\langle X, \vee \rangle$ - коммутативный моноид с нейтральным элементом «0».
2) $\langle X, \wedge \rangle$ - коммутативный моноид с нейтральным элементом «1».

Алгебры с тремя алгебраическими операциями. Булевы алгебры

Выполняются следующие равенства для $\forall\, x, y, z \in X$:

3) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ – дистрибутивность.

4) $x \wedge (x \vee y) = x$ – поглощение.

5) $\bar{\bar{x}} = \mathrm{x}$ – двойное отрицание.

6) $\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$ - первый закон де Моргана.

7) $\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$ - второй закон де Моргана.

8) $x \wedge \bar{x} = 0$ – существует дополнительный элемент.

Алгебры с тремя алгебраическими операциями. Булевы алгебры

- Теорема

Пусть $\langle X, \vee, \wedge, \neg \rangle$ - булева алгебра. Положим:

$$x \oplus y = (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}),$$

$$x \cdot y = x \wedge y.$$

Тогда $\langle X, \oplus, \cdot \rangle$ будет булевым кольцом.

И обратно, если $\langle X, \oplus, \cdot \rangle$ - булево кольцо, то, полагая

$$x \vee y = x \oplus y \oplus x \cdot y,$$

$$x \wedge y = x \cdot y,$$

$$\bar{x} = 1 \oplus x,$$

Получим булеву алгебру.

Функции алгебры логики

- Функции $f\colon E_2^n \to E_2$, где $E_2 \stackrel{\text{def}}{=} \langle\{0,1\},\vee,\wedge,\neg\rangle$, $E_2^n = E_2 \times .. \times E_2$, называются функциями алгебры логики или булевыми функции от n переменных. Множество булевых функций от n переменных обозначим P_n, $P_n \stackrel{\text{def}}{=} \{f \mid f\colon E_2^n \to E_2\}$.
- Булеву функцию от n переменных можно задать таблицей истинности:

x_1	…	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, \dots, x_n)$
0	…	0	0	$f(0, \dots, 0, 0)$
0	…	0	1	$f(0, \dots, 0, 1)$
0	…	1	0	$f(0, \dots, 1, 0)$
…	…	…	…	…
1	…	1	1	$f(1, \dots, 1, 1)$

Функции алгебры логики

- Установленный порядок – это перечисление набора переменных в определенном порядке (например, переменных в лексикографическом, а кортежи булевых значений – в порядке возрастания целых чисел, задаваемых кортежами как двоичными шкалами).

Равносильное определение

- Функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, принимающую одно из двух значений 0 или 1, от n переменных, каждая из которых принимает одно из двух значений 0 или 1, будем называть <u>булевой функцией</u> $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от n переменных.
- Число булевых функций n переменных с ростом n растет весьма быстро:

$$|P_n| = 2^{2^n}$$

- Две булевых функции называются <u>равными</u>, если для любых одинаковых наборов значений переменных обе функции принимают одинаковые значения.

Существенные и несущественные переменные

- Булева функция $f \in P_n$ существенно зависит от переменной x_i, если существует такой набор значений $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$, что $f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_n) \neq f(a_1, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_n)$.

В этом случае x_i называют существенной переменной, в противном случае x_i называют несущественной (фиктивной) переменной.

Существенные и несущественные переменные

- Пример

Пусть булевы функции $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1, x_2)$ заданы таблицей истинности:

x_1	x_2	f_1	f_2
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	1	0

Для этих функций переменная x_1 - <u>существенная</u>, а переменная x_2 - <u>несущественная</u>.

Булевы функции одной переменной

- Таблица истинности булевой функции одной переменной:

x		$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0		0	0	1	1
1		0	1	0	1

Функции $f_1(x)$ и $f_4(x)$ называются константами – соответственно 0 и 1.

Функция $f_2(x)$ совпадает с переменной x и называется тождественной $f_2(x) = x$.

Функция $f_3(x)$ принимает значения противоположные значениям аргумента x, и называется отрицанием x, обозначается $\bar{x}$: $f_3(x) = \bar{x}$.

Булевы функции двух переменных

- Таблица истинности булевой функции двух переменных:

x_1	x_2		f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0		0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1		0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0		0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1		0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

- Следует отметить, что здесь к функциям двух переменных относятся и такие, которые в действительности зависят от одной переменной.

1) f_1 и f_{16} - константы 0 и 1;
2) f_4, f_6, f_{11}, f_{13} существенно зависят только от одной переменной $f_4 = x_1, f_6 = x_2, f_{11} = \overline{x_2}, f_{13} = \overline{x_1}$;

Булевы функции двух переменных

3) $\boldsymbol{f_2}$ - конъюнкция;

4) $\boldsymbol{f_8}$ - дизъюнкция;

5) $\boldsymbol{f_{10}}$ - эквивалентность;

6) $\boldsymbol{f_7}$ - сумма по модулю два, или сумма Жегалкина;

7) $\boldsymbol{f_{12}}$ - конверсия;

8) $\boldsymbol{f_{14}}$ - импликация;

9) $\boldsymbol{f_{15}}$ - штрих Шеффера;

10) $\boldsymbol{f_9}$ - стрелка Пирса;

11) $\boldsymbol{f_3}$ и $\boldsymbol{f_5}$ - функции запрета.

Двойственная функция

- Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in P_n$- булева функция. Тогда функция $f^*(x_1, \dots, x_n)$ определенная следующим образом: $f^*(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{f(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})}$, называется двойственной к функции f.
- Двойственность инволютивна: $f^{**} = f$.

Двойственная функция

- Если в таблице истинности булевой функции f инвертировать *все* значения, то получим таблицу истинности двойственной функции f^*.
- Пример

x_1	x_2	$x_1 \wedge x_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x_1	x_2	$(x_1 \wedge x_2)^*$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

=

x_1	x_2	$(x_1 \wedge x_2)^*$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таким способом можно определить двойственную функцию для любой булевой функции.

Двойственная функция

- Пример

Двойственные функции:

f	1	0	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \wedge x_2$	x	$\bar{x}$
f^*	0	1	$x_1 \wedge x_2$	$x_1 \vee x_2$	x	$\bar{x}$

- Функция называется самодвойственной, если $f^* = f$.

Принцип двойственности

- $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 \Longrightarrow \mathcal{F}_1^* = \mathcal{F}_2^*.$
- Пример

Из $\overline{x_1 \wedge x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2}$ по принципу двойственности сразу имеем $\overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \wedge \overline{x_2}$