УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Дискретная математика

Преподаватель:

к.ф.-м.н., доцент НОЦ математики

Фалеева Мария Петровна

mpfaleeva@itmo.ru

Санкт-Петербург, 2022

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Лекция 2. Бинарные отношения

Декартово произведение множеств

- Пусть $A_1, A_2 \dots A_n$ - множества.
- Декартовым или прямым произведением множеств

$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ называется множество всех упорядоченных наборов $(a_1, a_2, \dots a_n)$, где $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, \dots$ $a_n \in A_n$

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots a_n) |\, a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots\, a_n \in A_n\}$$

Если $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$, то $A^n = \underbrace{\mathrm{A} \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ раз}}$ - степень A

Набор $(a_1, a_2, \dots a_n)$ называют кортежем

- Для двух множеств A и B: $\mathrm{A} \times B = \{(a, b) |\, a \in A, b \in B\}$
- Если $|\mathrm{A}| = \mathrm{m}, |B| = n,$ то $|\mathrm{A} \times B| = \mathrm{m} \cdot \mathrm{n}$

Декартово произведение множеств

- Примеры.

1. Пусть в прямоугольной декартовой системе координат на числовых осях *OX* и *OY* заданы отрезки $A = [a, b], B = [c, d]$. Тогда $A \times B = [a, b] \times [c, d]$ - множество точек прямоугольника со сторонами $[a, b]$ и $[c, d]$.

2. Пусть $A = \{1, 2\}, B = \{a, b, c\}$.

Тогда $A \times B = \{(1, a), (2, a), (1, b), (2, b), (1, c), (2, c)\}$,

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

3. Пусть A – множество студентов в группе. B – множество мест в аудитории. Тогда $A \times B$ – множество всевозможных пар (студент, место в аудитории)

Бинарные отношения

- Подмножество R декартового произведения $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ называется <u>n-местным отношением</u> на множествах $A_1, A_2 \dots A_n$.

$$\mathrm{R} \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

- Подмножество декартова произведения $\mathrm{A} \times B$ называется <u>бинарным отношением</u>, определенным на паре множеств *A* и *B*.

$$\mathrm{R} \subseteq \mathrm{A} \times B$$

<u>Обозначение.</u> $(x, y) \in R$ или xRy

- *A* называется <u>областью отправления</u> отношения, *B* – <u>областью прибытия</u>

Бинарные отношения

- Примеры.
- Пусть $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $|\mathrm{A} \times B| = 18$

1. $R = \{(a, b) \in \mathrm{A} \times B |\, a > b\}$

$R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$

2. $R = \{(a, b) \in \mathrm{A} \times B |\, a \text{ делит } b, \quad a \neq b\}$

$R = \{(1, 2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2, 4), (3, 6), (2, 6)\}$

3. A – множество товаров некоторого магазина, B - множество действительных чисел

R – множество пар (название товара, общая стоимость товара)

Область определения и область значений отношения

- Областью определения отношения R на $A \times B$ называется множество всех $x \in A$ таких, что для некоторых $y \in B$ имеем $(x, y) \in R$: $DomR = \{x \in A | \exists\, y \in B: ((x, y) \in R)\}$
- Областью значений отношения R на $A \times B$ называется множество всех $y \in B$ таких, что для некоторых $x \in A$ имеем $(x, y) \in R$: $\mathrm{Im}R = \{y \in B \mid \exists x \in A: ((x, y) \in R)\}$
- Пример 1. $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$$
$$DomR = \{2, 3\}$$
$$ImR = \{1, 2\}$$

Виды отношений

Пусть $R \subseteq \mathrm{A} \times B$ есть отношение на $A \times B$. Тогда

- Обратное отношение R^{-1} на $B \times A$:

$$R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$$

Пример 1. $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$$
$$R^{-1} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$$

- Тождественное отношение I на $A \times A$: $I = \{(x, x) \mid x \in A\}$
- Универсальное отношение U : $U = A \times B$
- Дополнение отношения на $A \times B$: $\bar{R} = \{(x, y) \mid (x, y) \notin R\}$

Композиция отношений

Пусть $R \subseteq \mathrm{A} \times B$, а $S \subseteq B \times C$.

Композицией отношений $R \circ S$ называется отношение $T \subseteq A \times C$:

$$\mathrm{T} = R \circ S = \{(x, z) \mid \exists y \in B : (x, y) \in R, (y, z) \in S\}$$

Пример. $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$$
$$S = \{(1, 6), (1, 3), (2, 2), (2, 5), (3, 4)\}$$

$$R \subseteq \mathrm{A} \times B, \text{ а } S \subseteq B \times B$$
$$\mathrm{T} = R \circ S = \{(2, 6), (2, 3), (3, 6), (3, 3), (3, 2), (3, 5)\}$$
$$T \subseteq \mathrm{A} \times B$$

Свойства композиции и обратного отношения

Пусть $R \subseteq \mathrm{A} \times B,\ \ S \subseteq B \times C,\ \ V \subseteq C \times D.$ Тогда

1. $(R^{-1})^{-1} = R$
2. $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$
3. $R \circ (S \circ V) = (R \circ S) \circ V$ (ассоциативность композиции)

Свойства отношений

- Пусть $R \subseteq \mathrm{A} \times A$.
- Отношение R называется <u>рефлексивным</u>, если для любого $x \in A \quad (x, x) \in R$
- Отношение R называется <u>антирефлексивным</u>, если из $(x, y) \in R$ следует, что $x \neq y$.
- Отношение R называется <u>симметричным</u>, если для любых $x, y \in A$ из $(x, y) \in R$ следует, что $(y, x) \in R$
- Отношение R называется <u>антисимметричным</u>, если для любых $x, y \in A$ из $(x, y) \in R$ и $(y, x) \in R$ следует, что $x = y$.
- Отношение R называется <u>транзитивным</u>, если для любых $x, y, z \in A$ из $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$ следует, что $(x, z) \in R$.

Свойства отношений

- Отношение R называется <u>линейным</u>, если для любых $x, y \in A$, $x \neq y$ либо $(x, y) \in R$, либо $(y, x) \in R$.
- <u>Теорема</u>

Пусть $R \subseteq A \times A$.

$$R - \text{рефлексивно} \Leftrightarrow I \subseteq R$$

$$R - \text{симметрично} \Leftrightarrow R = R^{-1}$$

$$R - \text{транзитивно} \Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$$

$$R - \text{антисимметрично} \Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I$$

$$R - \text{антирефлексивно} \Leftrightarrow R \cap I = \emptyset$$

$$R - \text{линейно} \Leftrightarrow R \cup I \cup R^{-1} = U$$

Свойства отношений

- Пример 1.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$R = \{(1,1), (2,2), (3,1), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$ - рефлексивное отношение

$S = \{(1,6), (1,3), (2,2), (3,1), (6,1)\}$ - симметричное отношение

Т$= \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (1,3), (3,5), (1,5), (2,5)\}$ - транзитивное отношение

$\mathrm{U} = \{(1,6), (1,3), (3,1), (5,6)\}$ - антирефлексивное отношение

$\mathrm{V} = \{(1,6), (2,2), (3,1), (4,4)\}$ - антисимметричное отношение

Свойства отношений

- Пример 2. Пусть $A = \mathbb{R}$

Отношение *равно* на множестве действительных чисел- рефлексивное отношение, т.к. для любого $x \in \mathbb{R}$ $x = x$.

Отношение *меньше* на множестве действительных чисел - транзитивное отношение, т.к. для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$

если $x < y$ и $y < z$, то $x < z$.

Отношение *меньше или равно* на множестве действительных чисел - антисимметричное отношение, т.к. для любых $x, y \in \mathbb{R}$

если $x \le y$ и $y \le x$, то $x = y$.

Свойства отношений

- Пусть $R \subseteq A \times A$.
- Рефлексивное замыкание R – наименьшее рефлексивное отношение на A, содержащее R как подмножество.
- Симметричное замыкание R – наименьшее симметричное отношение на A, содержащее R как подмножество.
- Транзитивное замыкание R – наименьшее транзитивное отношение на A, содержащее R как подмножество.

Свойства отношений

- Пусть $R \subseteq \mathrm{A} \times A$.
- Отношение R называется отношением эквивалентности, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.
- Отношение эквивалентности R разбивает множество A на классы эквивалентности, т.е. на подмножества, элементы которых эквивалентны друг другу и не эквивалентны элементам других подмножеств.
- $[x] = \{y \in A \mid (x, y) \in R\}$, где R – отношение эквивалентности

Свойства отношений

- Пусть $R \subseteq \mathrm{A} \times A$ – отношение эквивалентности.
- Совокупность классов эквивалентности образует разбиение множества *A*, т.е. разделение множества А на непересекающиеся подмножества
- Множество всех классов эквивалентности называется фактор-множеством множества А по отношению эквивалентности R.
- Обозначение: $[A]_R$ или A/R

Отношение эквивалентности

- Пример.

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, R \subseteq A \times A,$

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,2), (1,4), (2,1), (4,1), (2,4), (4,2), (3,5), (5,3)\}$$

R – рефлексивно, симметрично, транзитивно, следовательно,

R – отношение эквивалентности.

Классы эквивалентности: $[1] = \{1, 2, 4\}, [3] = \{3, 5\}$

Фактор-множество: $[A]_R = \{[1], [3]\} = \{\{1, 2, 4\}, \{3, 5\}\}$

Отношения порядка

- Отношение порядка позволяет сравнивать между собой различные элементы одного множества.
- Отношением порядка $\prec$ называется антисимметричное транзитивное отношение.
- Отношением нестрогого порядка $\leq$ называется рефлексивное отношение порядка.
- Отношением строгого порядка $<$ называется антирефлексивное отношение порядка.
- Отношением линейного порядка называется линейное отношение порядка, в противном случае отношение называется отношением частичного порядка.

Отношения порядка

- Примеры.

1. Отношение $<$ на множестве действительных чисел является отношением строгого линейного порядка.

2. Отношение $\leq$ на множестве действительных чисел является отношением нестрогого линейного порядка.

3. Отношение $\subset$ на булеане $B(A)$ множества A является отношением нестрогого частичного порядка.

Частично упорядоченное множество – множество, на котором задано отношение частичного порядка.

Линейно упорядоченное множество – множество, на котором задано отношение линейного порядка.

Отношения порядка

Теорема

Если $\prec$ - отношение частичного порядка, то обратное отношение $\succ$ также является отношением частичного порядка.

Следствие

Если $\prec$ - отношение частичного порядка, то отношения $\prec \setminus I$ и $\succ \setminus I$ являются отношениями строгого частичного порядка.

Теорема

Если $<$ - отношение строгого частичного порядка, то дополнительное отношение $\geq$ является отношением нестрогого частичного порядка.

Матричный способ представления отношений

- Пусть $R \subseteq \mathrm{A} \times B$, где $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots b_m\}$
- Матрицей бинарного отношения R называется матрица $\|R\| = \|r\|_{i,j}, i = 1, 2 \,..\, n,\ j = 1, 2 \,..\, m$, такая, что:

$$r_{i,j} = \begin{cases} 1, (a_i, b_j) \in R \\ 0, (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Свойства матрицы бинарного отношения:

1) $\|R^{-1}\| = \|R\|^T$
2) Если $R \subseteq Q$, где $R, Q \subseteq \mathrm{A} \times B$ и $\|R\|, \|Q\|$– матрицы отношений, то $r_{i,j} \leq q_{i,j}$.

Матричный способ представления отношений

3) Пусть $R, Q \subseteq \mathrm{A} \times B$ и $\|R\|$, $\|Q\|$– матрицы отношений. Тогда $\|R \cup Q\| = \|R\|$+$\|Q\|$=$\left\|r_{i,j} + q_{i,j}\right\|$ и $\|R \cap Q\| = \|R\| * \|Q\| =$ $= \left\|r_{i,j} * q_{i,j}\right\|$, где сложение элементов матрицы осуществляется по правилам:

0+0=0, 1+1=1, 1+0=0+1=1,

а умножение $*$ почленное:

0 · 0=0, 1 · 1=1, 1 · 0=0 · 1=0.

4) Пусть $R \subseteq \mathrm{A} \times B$, $Q \subseteq B \times C$. Тогда $\|R \circ Q\| = \|R\| \cdot \|Q\|$, где умножение · матричное, но сложение и умножение элементов матриц производится по правилам п.3.

Матричный способ представления отношений

- Пусть $R \subseteq A \times A$.
- Отношение *R* на множестве *A* является рефлексивным, если главная диагональ матрицы отношения полностью состоит из единиц.
- Отношение *R* является симметричным, если $\|R\| = \|R\|^T$.
- Отношение *R* является антисимметричным, если у матрицы $\|R \cap R^{-1}\|$ все элементы вне главной диагонали будут нулевыми (на главной диагонали тоже могут быть нули), причем $\|R \cap R^{-1}\| = \|R\| * \|R\|^T$.
- Отношение *R* является транзитивным, если $R \circ R \subseteq R$.

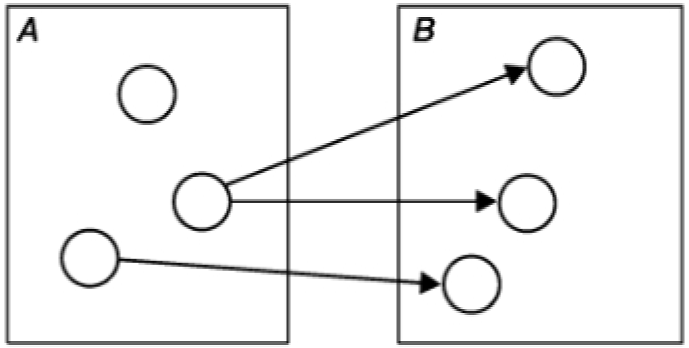
Функциональные отношения

- Пусть $f \subseteq \mathrm{A} \times B$.
- Отношение f называют функциональным, или функцией, если для любого $x \in A$ и $y, z \in B$ из $(x, y) \in f$ и $(x, z) \in f$ следует, что $y = z$.
- Обозначение: $f\colon \mathrm{A} \to B$, или если $(x, y) \in f$, $f(x) = y$
- Отношение f называют всюду определенным или тотальным, если область его отправления совпадает с областью определения отношения.

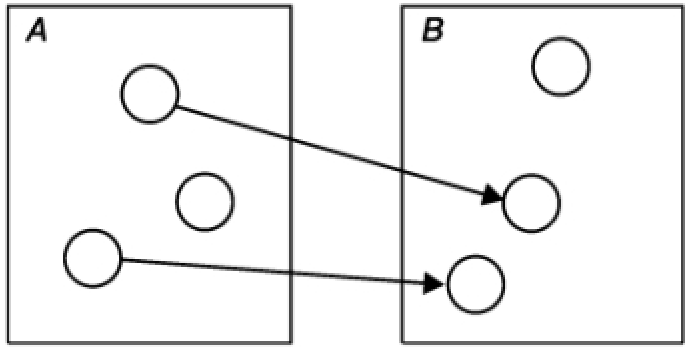
Функциональные отношения

- Пусть $f \subseteq \mathrm{A} \times B$.
- Отношение f называют <u>инъективным</u>, если для любого $z \in B$ и $x, y \in A$ из $(x, z) \in f$ и $(y, z) \in f$ следует, что $\mathrm{x} = \mathrm{y}$.
- Отношение f называют <u>сюръективным</u>, если для любого $y \in B$ существует $x \in A$ такой, что $(x, y) \in f$.
- Отношение f называют <u>биективным или взаимно-однозначным соответствием</u>, если оно функционально, инъективно и сюръективно.

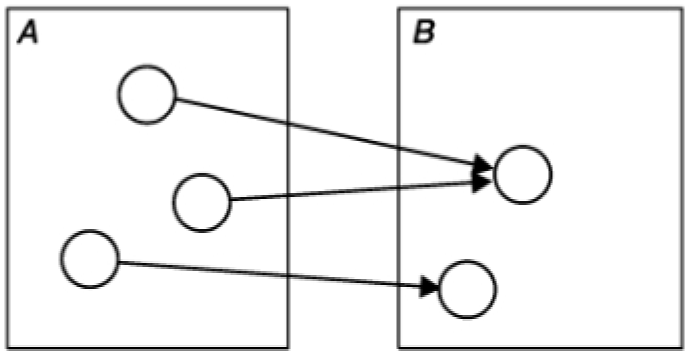
Функциональные отношения



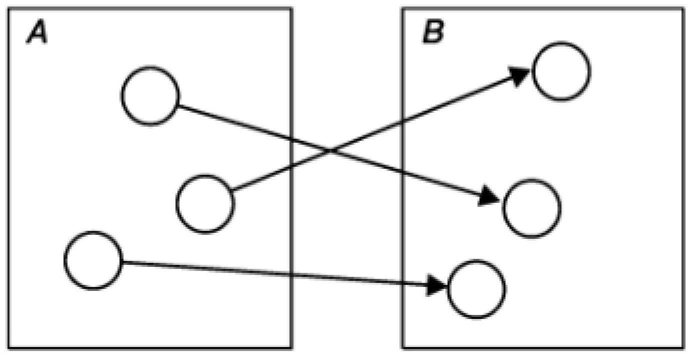
Отношение, но не функция



Инъекция, но не сюръекция



Сюръекция, но не инъекция



Биекция

Конечные и бесконечные множества

- Если между множествами можно установить биекцию, то такие множества являются равномощными (а также изоморфными или эквивалентными).
- Множество, равномощное множеству всех натуральных чисел, называется счетным.
- Всякое бесконечное множество является счетным, если найдется способ показать, как нумеровать его элементы.
- Кардинальное число – величина, характеризующая количество элементов, содержащихся в множестве.
- Для конечных множеств кардинальное число = мощности множества.

Конечные и бесконечные множества

- Кардинальное число мощности счетного множества:

$$|A| = \aleph_0 \text{ («алеф нуль»)}$$

$\aleph_0$- наименьшее бесконечно большое кардинальное число

- Кардинальное число мощности несчетного множества или континуума: $|B(A)| = \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, где A – счетное множество. $\aleph_1$- следующее по порядку бесконечно большое кардинальное число (Гипотеза континуума).
- Пример континуума: множество точек отрезка [0, 1].
- Кардинальное число мощности булеана континуума: $\aleph_2 = 2^{\aleph_1}$.
- Множества с наибольшей мощностью не существует.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Спасибо за внимание!

Санкт-Петербург, 2022