Лекция 6. Графы

Графы

- Графом $G(V, E)$ называется совокупность двух множеств – непустого множества V (множества вершин) и множества E двухэлементных подмножеств множества V (E – множество рёбер):

$$G(V, E) \stackrel{\text{def}}{=} \langle V; E\rangle, V \neq \emptyset, E \subset 2^V \;\&\; \forall e \in E \quad |e| = 2.$$

Число вершин графа G обозначим p, а число рёбер q:

$$p \stackrel{\text{def}}{=} p(G) \stackrel{\text{def}}{=} |V|, \qquad q \stackrel{\text{def}}{=} q(G) \stackrel{\text{def}}{=} |E|.$$

- Замечание

Можно считать, что E определяет симметричное бинарное отношение на множестве V: $E \subset V \times V$, где ребро представляется парой (v_1, v_2).

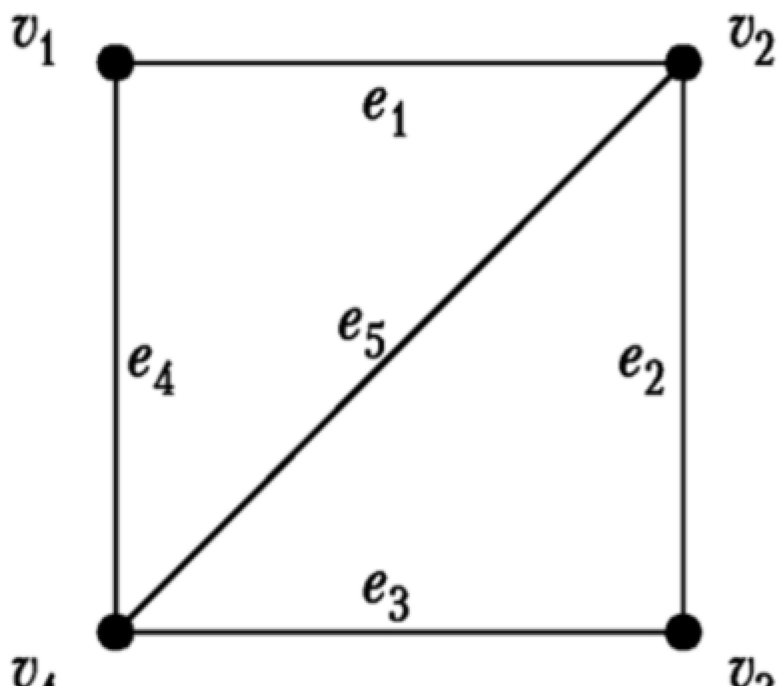
Графы

- Если $\{v_1, v_2\}$ – ребро, то вершины v_1и v_2 называются <u>концами</u> ребра $\{v_1, v_2\}$.
- Ребро $\{v_1, v_2\}$ называют <u>инцидентными</u> к вершинам v_1и v_2.
- Вершины v_1и v_2 называют <u>инцидентными</u> к ребру $\{v_1, v_2\}$.
- Две вершины называются <u>смежными</u>, если они являются концами ребра, т.е. если они инцидентны к одному ребру.
- Два ребра называются <u>смежными</u>, если они инцидентны к общей вершине.

Пример

Диаграмма графа, имеющего 4 вершины и 5 рёбер.

- Смежные вершины: v_1 и v_2, v_2 и v_3, v_3 и v_4, v_4 и v_1, v_2 и v_4.
- Несмежные вершины: v_1 и v_3.
- Смежные рёбра: e_1 и e_2, e_2 и e_3, e_3 и e_4, e_4 и e_1, e_1 и e_5, e_2 и e_5, e_3 и e_5, e_4 и e_5.
- Несмежные рёбра: e_1 и e_3, e_2 и e_4.



Основные виды графов

- Если множество ребер графа $E \subset V \times V$ является несимметричным бинарным отношением, то граф называется ориентированным (или орграфом).
- Если элементом множества E может быть пара одинаковых (не различных) элементов V, то такой элемент множества E называется петлей, а граф называется графом с петлями (или псевдографом).
- Если E является не множеством, а мультимножеством, содержащим некоторые элементы по нескольку раз, то эти элементы называются кратными рёбрами, а граф – мультиграфом.

Способы задания графов

Аналитический способ задания графов

- Граф $G(V, E)$ задан, если задано множество элементов $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ и отображение E множества V в V, $E: V \to V$.

Задать отображение V в V можно, если каждому элементу $v_i \in V$ поставить в соответствие некоторое подмножество E_{v_i} множества V.

Пример: $V = \{v_1, v_2, v_3\}, E_{v_1} = \{v_2, v_3\}, E_{v_2} = \{v_1\}, E_{v_3} = \{v_1\}$

- Граф $G(V, E)$ задан, если задано множество элементов V и множество E двухэлементных подмножеств множества V .

Пример: $V = \{v_1, v_2, v_3\}, \quad E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}\},$

Способы задания графов

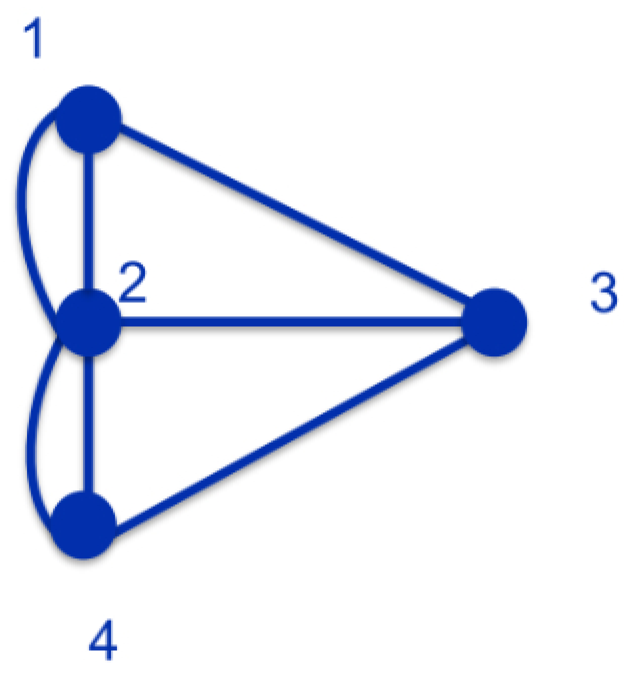
- Граф $G(V,E)$ задан, если задано множество элементов V и бинарное отношение $\mathrm{E} \in V \times V$ на множестве V.

Пример:

$$V = \{v_1, v_2, v_3\}, E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_1), (v_3, v_1)\}$$

- Геометрический способ задания графов

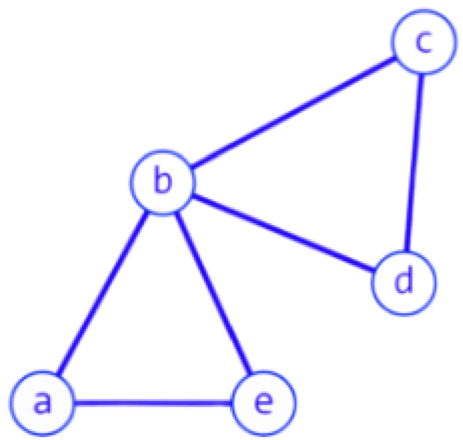
Граф $G(V,E)$ задан в виде диаграммы, где вершины изображены кругами, каждая вершина $v_i \in V$ соединена линиями с теми вершинами $v_j \in V$, для которых существует ребро $\{v_i, v_j\}$.



Пример графа

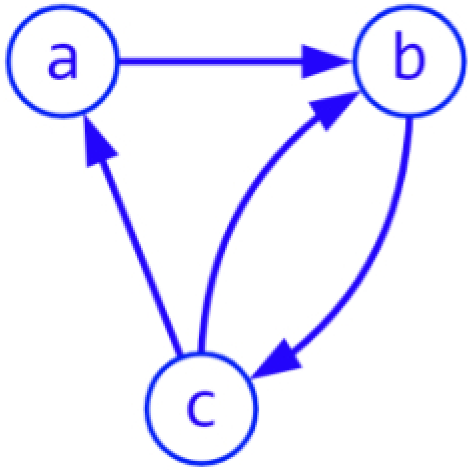
- Граф, у которого $V = \{a, b, c, d, e\}$ и
$$E = \big\{\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, e\}, \{b, d\}, \{b, c\}, \{c, d\}\big\},$$

может быть изображен диаграммой

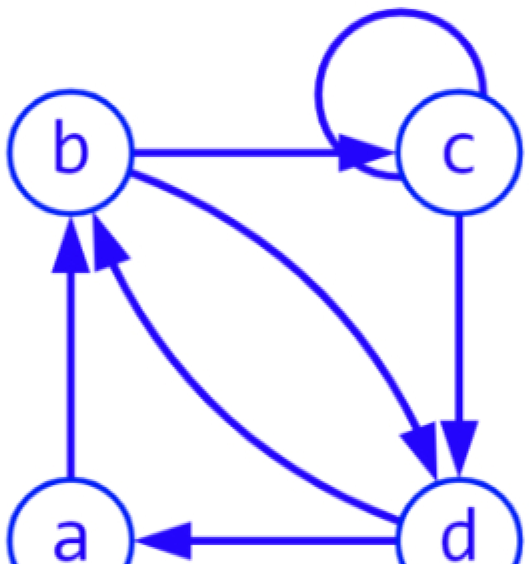


Пример

- Орграф, у которого $V = \{a, b, c\}$ и $E = \{(a,b), (b,c), (c,b), (c,a)\}$



- Орграф, у которого $V = \{a, b, c, d\}$ и $E = \{(a,b), (b,c), (c,c), (b,d), (d,b), (c,d), (d,a)\}$



Способы задания графов

<u>Матричный способ задания графов</u>

Пусть $v_i, \dots, v_n$ - вершины, а $e_1, \dots, e_m$ - ребра некоторого графа $G(V, E)$.

- *Матрицей смежности вершин* графа $G(V, E)$ *называется* квадратная матрица размера $(n \times n)$ такая, что элемент $a_{i,j}$, стоящий на пересечении v_i-й строки и v_j-го столбца, равен единице, если имеется ребро, ищущее из вершины v_i в вершину v_j, и $a_{i,j}$ равен нулю в противном случае.

$$\mathrm{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \text{ где } a_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{если } (v_i, v_j) \in E \\ 0, \text{если } (v_i, v_j) \notin E \end{cases}$$

Способы задания графов

- *Матрица инцидентности*

Матрицей инцидентности графа $G(V, E)$ называется прямоугольная матрица размера $(n \times m)$ такая, что:

$$\mathrm{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{Vmatrix}, \text{ где } a_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{если } v_i \text{ инцидентна } e_j \\ 0, \text{если } v_i \text{ не инцидентна } e_j. \end{cases}$$

Для ориентированного графа:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{если } e_j \text{ исходит из } v_i; \\ -1, \text{если } e_j \text{ заходит в } v_i; \\ 0, \text{если } e_j \text{ не инцидентна } v_i \end{cases}$$

Способы задания графов

- *Матрица смежности дуг*

Матрицей смежности дуг графа $G(V,E)$ называется квадратная матрица размера $(m \times m)$ такая, что:

$$\mathrm{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{Vmatrix}, \text{ где } a_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{если } e_i \text{ смежна с } e_j; \\ 0, \text{если } e_i \text{ не смежна с } e_j \end{cases}$$

Для ориентированного графа:

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{если } e_i \text{ предшествует } e_j; \\ 0, \text{если } e_i \text{ не предшествует } e_j. \end{cases}$$

Операции над графами

- Рассмотрим графы $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$.

1) <u>Дополнением</u> графа $G_1(V_1, E_1)$ называется граф $\overline{G_1}(V_1, \overline{E_1})$, множеством вершин которого является множество V_1, а множеством его рёбер является множество

$$\overline{E_1} = \{e \in V_1 \times V_1 : e \notin E_1\}.$$

2) <u>Объединением</u> графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ называется граф $G_1(V_1, E_1) \cup G_2(V_2, E_2)$, множеством вершин которого является множество $V_1 \cup V_2$, а множеством его рёбер является множество $E_1 \cup E_2$.

Операции над графами

3) Пересечением графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ называется граф $G_1(V_1, E_1) \cap G_2(V_2, E_2)$, множеством вершин которого является множество $V_1 \cap V_2$, а множеством его рёбер – множество $E_1 \cap E_2$.

4) Суммой по модулю два графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ называется граф $G_1(V_1, E_1) \oplus G_2(V_2, E_2)$, множеством вершин которого является множество $V_1 \cup V_2$, а множеством его рёбер – множество $E_1 \oplus E_2$. Другими словами, этот граф не имеет изолированных вершин и состоит только из рёбер, присутствующих либо в первом графе, либо во втором графе, но не в обоих одновременно.

Вышеперечисленные операции обладают свойством коммутативности.

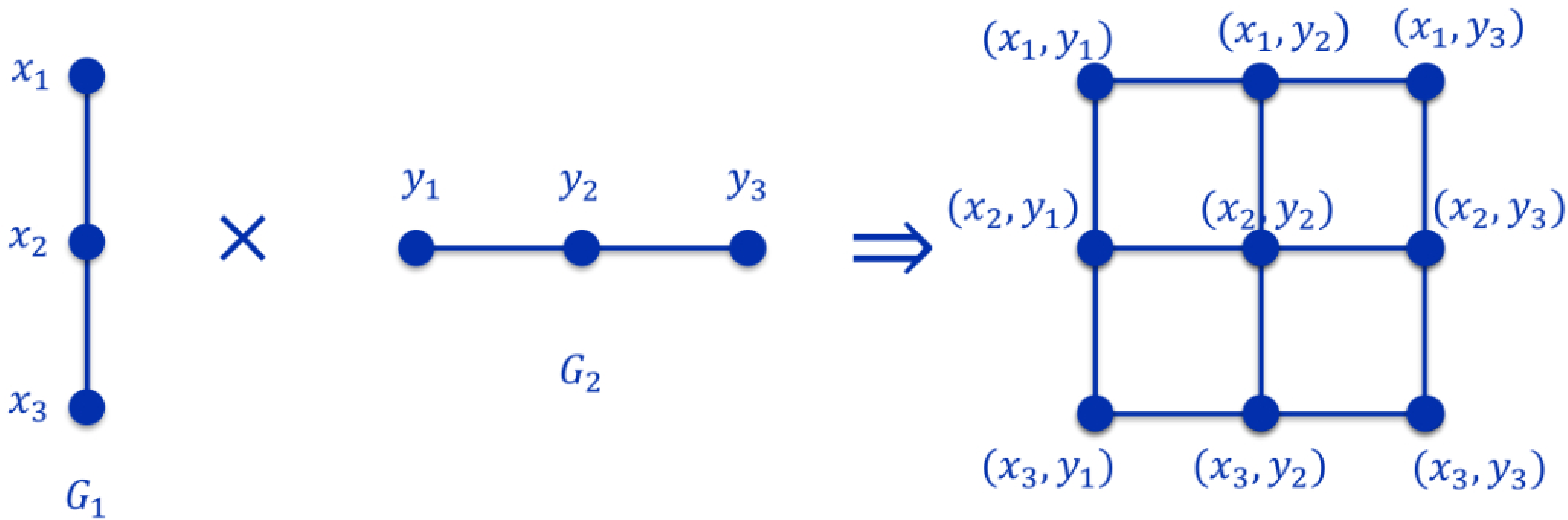
Операции над графами

5) Произведением графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ называется граф $G(V, E) = G_1 \times G_2$, причем $\mathrm{V} = V_1 \times V_2$ - декартово произведение множеств вершин исходных графов, а множество рёбер получается следующим образом: вершины (x_1, y_1) и (x_2, y_2) смежны в графе G тогда и только тогда, когда или $x_1 = x_2$, а y_1и y_2 смежны в G_2, или $y_1 = y_2$, а x_1 и x_2 смежны в G_1.

С помощью операции произведения вводятся n-мерные кубы – один из классов графов.

Операции над графами

5) Произведение графов

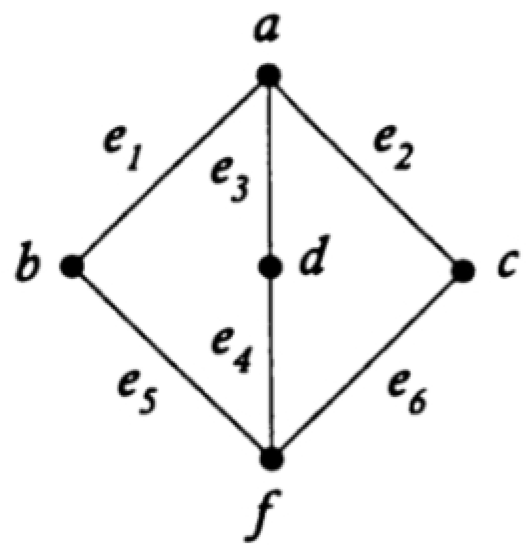


Степень вершины

- Степенью вершины v, обозначается $\deg(v)$, называется количество ребер, инцидентных этой вершине.
- Вершина степени 0 называется изолированной.

- Пример

На графе на рисунке справа вершины b, c и d имеют степень 2, в то время как вершины a и f имеют степень 3.



Степень вершины

- Теорема (Лемма о рукопожатиях).

Сумма степеней вершин графа (мультиграфа) равна удвоенному количеству рёбер.

- Следствие. Число вершин нечётной степени чётно.

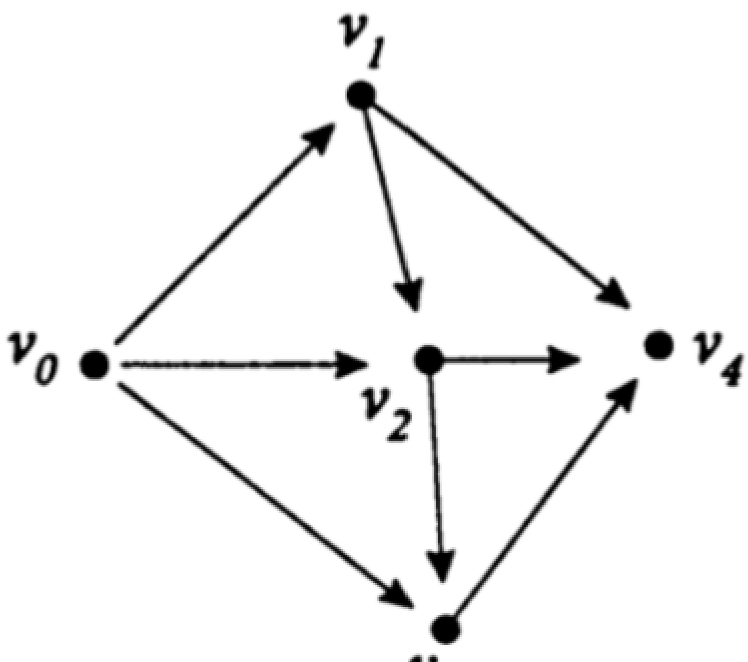
Степень вершины

Для ориентированных графов:

- Степенью выхода вершины v называется количество рёбер, для которых v является начальной вершиной, обозначается $outdeg(v)$.
- Степенью входа вершины v называется количество рёбер, для которых v является конечной вершиной, обозначается $indeg(v)$.
- Если $indeg(v) = 0$, то вершина v называется источником.
- Если $outdeg(v) = 0$, то вершина v называется стоком.

Пример

- В ориентированном графе $indeg(v_0) = 0$, $indeg(v_1) = 1$, $indeg(v_3) = 2$, $indeg(v_2) = 2$ и $indeg(v_4) = 3$.
- Также $outdeg(v_0) = 3$, $outdeg(v_1) = 2$, $outdeg(v_3) = 1$ и $outdeg(v_4) = 0$.
- Таким образом, вершина v_0 - источник, v_4 - сток.



Маршруты, цепи, циклы

- Маршрутом в графе называется чередующаяся последовательность вершин и рёбер, начинающаяся и кончающаяся вершиной $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k$, в которой любые два соседних элемента инцидентны, причем однородные элементы (вершины, рёбра) через один смежны или совпадают.
- Если $v_0 = v_k$, то маршрут замкнут, иначе – открыт.
- Если все рёбра различны, то маршрут называется цепью.
- Если все вершины (а значит, и рёбра) различны, то маршрут называется простой цепью.
- В цепи $v_0, e_1, \ldots, e_k, v_k$ вершины v_0 и v_k называются концами цепи.

Маршруты, цепи, циклы

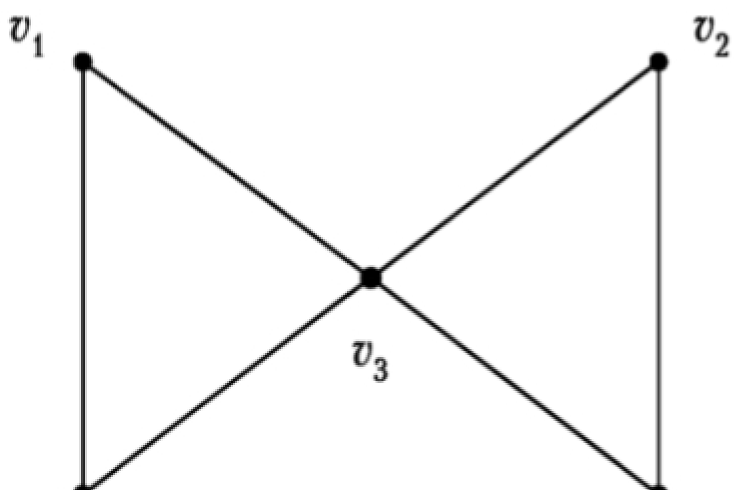
- Замкнутая цепь называется циклом.
- Замкнутая простая цепь называется простым циклом.
- Граф без циклов называется ациклическим.
- Для орграфов цепь называется путем, а цикл контуром.

- Для задания маршрута в графе достаточно указать только последовательность вершин или ребер

Маршруты, цепи, циклы

- Пример

1) v_1, v_3, v_1, v_4 - маршрут, но не цепь;
2) $v_1, v_3, v_5, v_2, v_3, v_4$ - цепь, но не простая цепь;
3) v_1, v_4, v_3, v_2, v_5 - простая цепь;
4) $v_1, v_3, v_5, v_2, v_3, v_4, v_1$ - цикл, но не простой цикл;
5) v_1, v_3, v_4, v_1 - простой цикл.



Нахождение матрицы маршрутов заданной длины

- Длиной маршрута называется количество рёбер в нём (с учётом повторений).
- Если маршрут $M = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k$, то длина M равна k (обозначается $|M| = k$).
- Теорема

Для определения количества маршрутов состоящих из k рёбер (дуг), необходимо возвести в k-ю степень матрицу смежности вершин *P*. Тогда элемент $p_{ij}^{(k)}$ матрицы P^k даст количество маршрутов длины k (состоящих из k рёбер) из вершины x_i в вершину x_j.

Нахождение матрицы маршрутов заданной длины

Пример

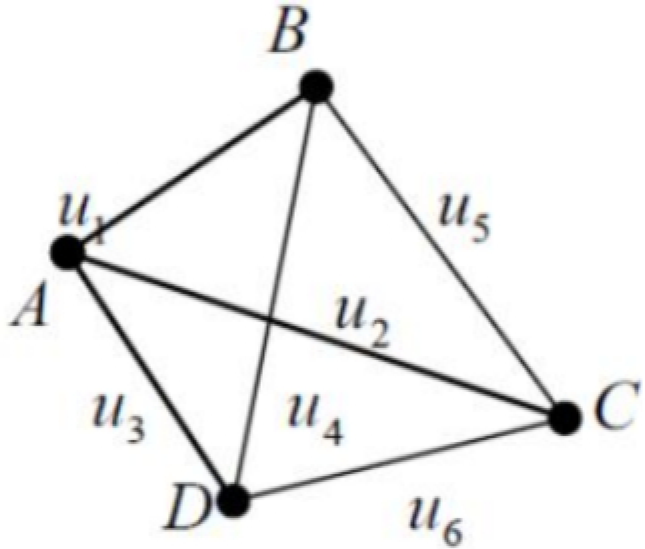
Найдем маршруты длины 2 для графа, заданного диаграммой.

$$P \cdot P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Элемент $p_{11}^{(2)} = 3$. Это значит, что существуют 3 маршрута из A в A длиной два ребра ($Au_1Bu_1A, Au_2Cu_2A, Au_3Du_3A$).

Из A в B существуют два маршрута:

Au_2Cu_5B, Au_3Du_4B.



Нахождение матрицы маршрутов заданной длины

Если возводить в квадрат модифицированную матрицу смежности, в ячейки которой записаны названия рёбер, то можно получить не только количество маршрутов, но и сами маршруты:

$$\begin{bmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & 0 & u_5 & u_4 \\ u_2 & u_5 & 0 & u_6 \\ u_3 & u_4 & u_6 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & 0 & u_5 & u_4 \\ u_2 & u_5 & 0 & u_6 \\ u_3 & u_4 & u_6 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} u_1u_1 + u_2u_2 + u_3u_3 & u_2u_5 + u_3u_4 & u_1u_5 + u_3u_6 & u_1u_4 + u_2u_6 \\ u_5u_2 + u_4u_3 & u_1u_1 + u_5u_5 + u_4u_4 & u_1u_2 + u_4u_6 & u_1u_3 + u_5u_6 \\ u_5u_1 + u_6u_3 & u_1u_2 + u_6u_4 & u_2u_2 + u_5u_5 + u_6u_6 & u_2u_3 + u_5u_4 \\ u_4u_1 + u_2u_6 & u_3u_1 + u_5u_6 & u_3u_2 + u_4u_5 & u_3u_3 + u_4u_4 + u_6u_6 \end{bmatrix}$$

Нахождение матрицы маршрутов заданной длины

- Теорема

В графе $G(V,E)$ с n вершинами тогда и только тогда существует маршрут из v_i в v_j $(v_i \neq v_j)$, когда (i,j)-й элемент матрицы $P + P^2 + \cdots + P^{n-1}$ не равен нулю.

- Теорема

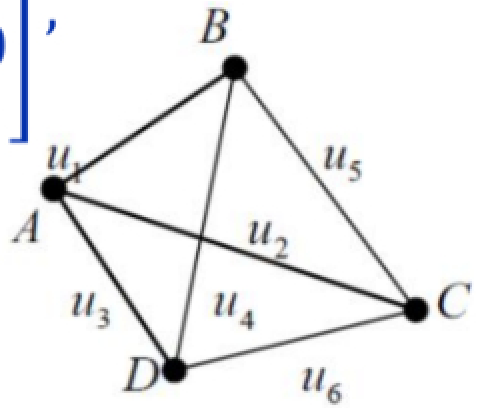
В графе $G(V,E)$ с n вершинами тогда и только тогда существует цикл, содержащий вершину v_i, когда (i,i)-й элемент матрицы $P + P^2 + \cdots + P^n$ не равен нулю.

Нахождение матрицы маршрутов заданной длины

В рассмотренном выше примере имеем $n = 4$,

$$P^3 = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 6 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 6 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 6 \end{bmatrix}, A = P + P^2 + P^3 = \begin{bmatrix} 9 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 9 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 9 & 10 \\ 10 & 10 & 10 & 9 \end{bmatrix},$$

$$B = P + P^2 + P^3 + P^4 = \begin{bmatrix} 30 & 30 & 30 & 30 \\ 30 & 30 & 30 & 30 \\ 30 & 30 & 30 & 30 \\ 30 & 30 & 30 & 30 \end{bmatrix}.$$



$a_{24} = 10 \neq 0$ означает, что существует 10 маршрута из вершины B в вершину D длины не более 3.

$b_{22} = 30 \neq 0$ означает, что существуют циклы длины не более 4, проходящие через вершину B. Это, например, циклы $BACB, BAB, BCB$.

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Спасибо за внимание!

Санкт-Петербург, 2022