УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Дискретная математика

Преподаватель:

к.ф.-м.н., доцент НОЦ математики

Фалеева Мария Петровна

mpfaleeva@itmo.ru

Санкт-Петербург, 2022

Лекция 1. Множества

Множество

- **П**од <u>множеством</u> понимается любое собрание определяемых и различимых между собой объектов, мыслимое как единое целое.
- <u>Мощность множества</u> – число элементов в множестве.
- <u>Обозначения:</u>

Множества: *A*, *B*, *C*

Элементы множеств: *a*, *b*, *c*

Принадлежность элемента множеству: $a \in A,\ b \notin A,\ b \in B$

Мощность множества *A*: $N(A) = |A| = n$

Типы множеств

- Пустое множество X: $N(X) = 0, X = \emptyset$
- Конечное множество Y: $N(Y) < \infty$
- Бесконечное множество Z : $N(Z) \to \infty$

- Универсальное множество *U*: множество, содержащее все объекты и все множества.
- Примеры числовых множеств:

$\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел

$\mathbb{Z}$ - множество целых чисел

$\mathbb{R}$ - множество действительных чисел

Подмножества. Равные множества

- Множество *A* называется *подмножеством множества B*, если любой элемент, принадлежащий множеству *A*, принадлежит и множеству *B*.
- Обозначение: $A \subseteq B$ (операция включения).
- Множества *A* и *B* считаются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов и $|A| = |B|$.
- Обозначение: $A = B$ или $A \neq B$ (в противоположном случае).
- Свойства (для любых множеств *A, B, C*):
  1. $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, тогда и только тогда, когда $A = B$
  2. Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$
  3. $\emptyset \subseteq A, \quad A \subseteq A$

Способы задания множеств

1. Перечислительный способ: $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots a_n\}$

Примеры:

$A_1 = \{2, 4, 6\}$, $A_2 = \{4, 2, 6\}$, $A_1 = A_2$

2. Описательный способ:

Множество *A* составляют элементы *a*, обладающие свойством *P*, т.е. $A = \{a \colon P(a)\}$ или $A = \{a \mid P(a)\}$

Примеры:

$A = \{x \mid x = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$

$\mathrm{B} = \{x \mid 3 < x < 10, x \in \mathbb{N}\}$

Собственные и несобственные подмножества. Булеан

- При $A \subseteq B$ и $A \neq B$ множество A считается *собственным подмножеством* B и обозначается как $A \subset B$.
- $\emptyset$ и A являются несобственными подмножествами множества A
- Булеан множества A – множество всех подмножеств множества A

Обозначение: $B(A)$

$|B(A)| = 2^n$, где $n = |A|$

Пусть $A = \{1,2,3\}$.

Тогда $B(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$

Операции над множествами

- Пересечение $A \cap B$ двух множеств *A* и *B* состоит из элементов, которые принадлежат обоим множествам *A* и *B*.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$$

- Пересечение *n* множеств $A_1, A_2, \dots A_n$:

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{x \mid x \in A_1 \text{ и } x \in A_2 \text{ и } \dots \text{ и } x \in A_n\}$$

- Объединение $A \cup B$ состоит из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств *A* и *B*:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$$

- Объединение *n* множеств $A_1, A_2, \dots A_n$:

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \text{ или } x \in A_2 \text{ или } \dots \text{ или } x \in A_n\}$$

Операции над множествами

- Разность $\mathrm{A}\backslash\mathrm{B}$ состоит из элементов, которые принадлежат *A*, но не принадлежат *B*:

$$\mathrm{A}\backslash\mathrm{B} = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin \mathrm{B}\} = \mathrm{A} \cap \bar{B}$$

- Симметрическая разность $\mathrm{A}\Delta\mathrm{B}$ состоит из элементов, которые принадлежат ровно одному из множеств A и B:

$$\mathrm{A}\Delta\mathrm{B} = (\mathrm{A}\backslash\mathrm{B}) \cup (\mathrm{B}\backslash\mathrm{A}) = (\mathrm{A} \cup \mathrm{B})\backslash(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$

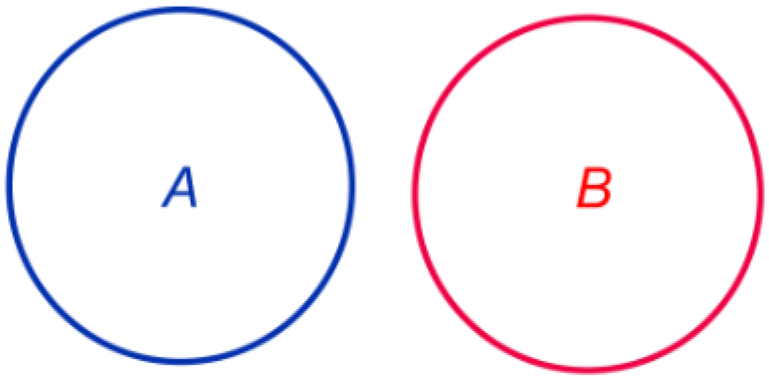
- Дополнение множества *A* - множество всех тех элементов, которые являются элементами множества *U*, но не входят в множество *A*, при условии, что задано универсальное множество *U*

$$\bar{A} = \{x \mid x \notin A\}$$

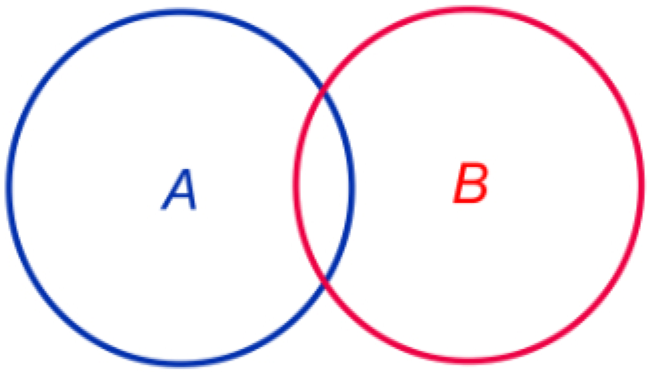
Диаграммы Эйлера-Венна

- Используются для наглядного изображения множеств

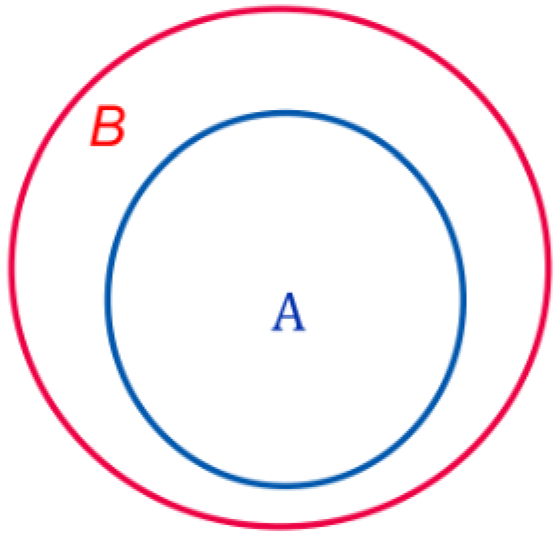
$A \cap B = \emptyset$



$A \cap B \neq \emptyset$



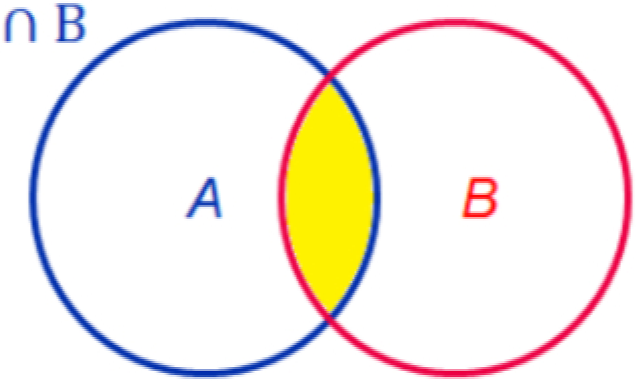
$A \subset B$



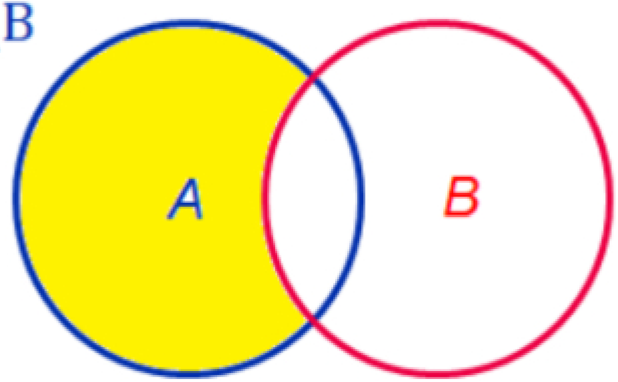
Диаграммы Эйлера-Венна

- Операции над множествами на диаграммах Эйлера-Венна

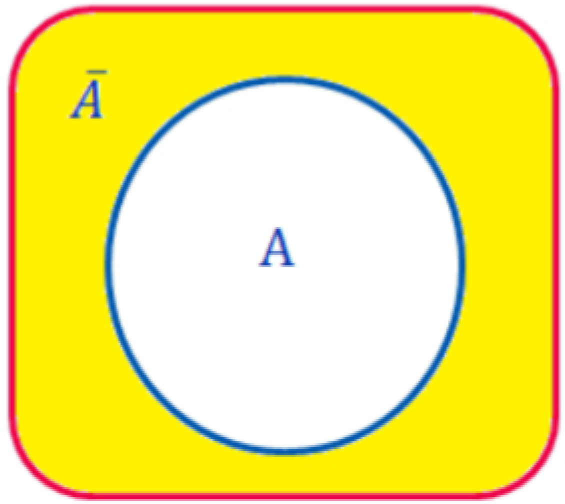
$A \cap B$



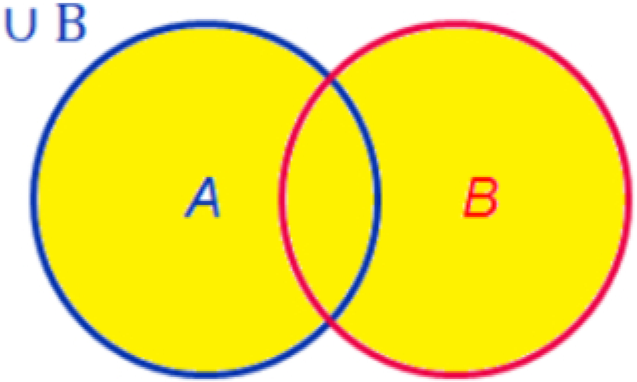
$A \setminus B$



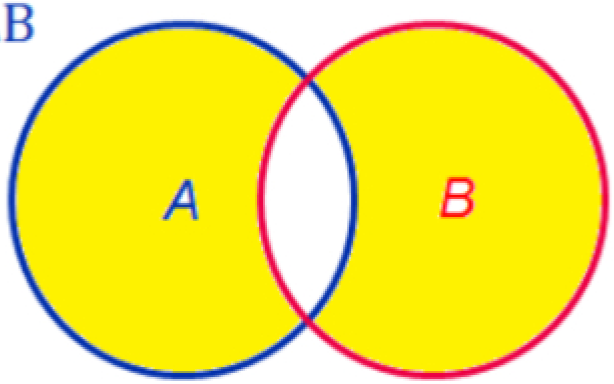
U



$A \cup B$



$A \Delta B$



Свойства операций над множествами

Пусть задано универсальное множество U. Тогда для любых $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \subset U$ верно:

1. Идемпотентность: $\mathrm{A} \cap A = A, \quad A \cup A = A$
2. Коммутативность: $\mathrm{A} \cap B = B \cap A, \quad \mathrm{A} \cup B = B \cup A$
3. Ассоциативность:

$\mathrm{A} \cap (B \cap \mathrm{C}) = (A \cap B) \cap \mathrm{C}, \quad \mathrm{A} \cup (B \cup \mathrm{C}) = (A \cup B) \cup \mathrm{C}$

4. Дистрибутивность: $\mathrm{A} \cap (B \cup \mathrm{C}) = (A \cap B) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$,

$\mathrm{A} \cup (B \cap \mathrm{C}) = (A \cup B) \cap (\mathrm{A} \cup \mathrm{C})$

5. Свойства нуля: $A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$

Свойства операций над множествами

6. Поглощение: $(A \cap B) \cup A = A, (A \cup B) \cap A = A$
7. Склеивание: $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A, (A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = A$
8. Свойства единицы: $\mathrm{A} \cap U = A, \; A \cup U = U$
9. Инволютивность: $\bar{\bar{\mathrm{A}}} = A$
10. Законы де Моргана: $\overline{\mathrm{A} \cap B} = \bar{\mathrm{A}} \cup \bar{B}, \quad \overline{\mathrm{A} \cup B} = \bar{\mathrm{A}} \cap \bar{B}$
11. Свойства дополнения: $\mathrm{A} \cup \bar{A} = U, \; \mathrm{A} \cap \bar{A} = \emptyset$
12. Выражение для разности: $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = A \cap \bar{B}$

Доказательства некоторых свойств

Свойство 1. *Докажем, что* $\mathrm{A} \cap A = A$.

Метод двух включений

Пусть $x \in \mathrm{A} \cap A$. *Тогда по определению операции пересечения множеств,* $x \in \mathrm{A}$ и $x \in A$. *То есть,* $x \in A$, *в любом случае. Значит,* $\mathrm{A} \cap A \subseteq A$. *Аналогично, если* $x \in \mathrm{A}$, *очевидно, что* $x \in \mathrm{A}$ и $x \in A$. *Следовательно,* $x \in \mathrm{A} \cap A$ *и* $\mathrm{A} \subseteq A \cap A$. *Таким образом, справедливы* ***два включения*** $\mathrm{A} \cap A \subseteq A$ и $\mathrm{A} \subseteq A \cap A$, *и, следовательно,* $\mathrm{A} \cap A = \mathrm{A}$.

Доказательства некоторых свойств

Свойство 4. Докажем, что $\mathrm{A} \cap (B \cup \mathrm{C}) = (A \cap B) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$.

Метод диаграмм Эйлера-Венна

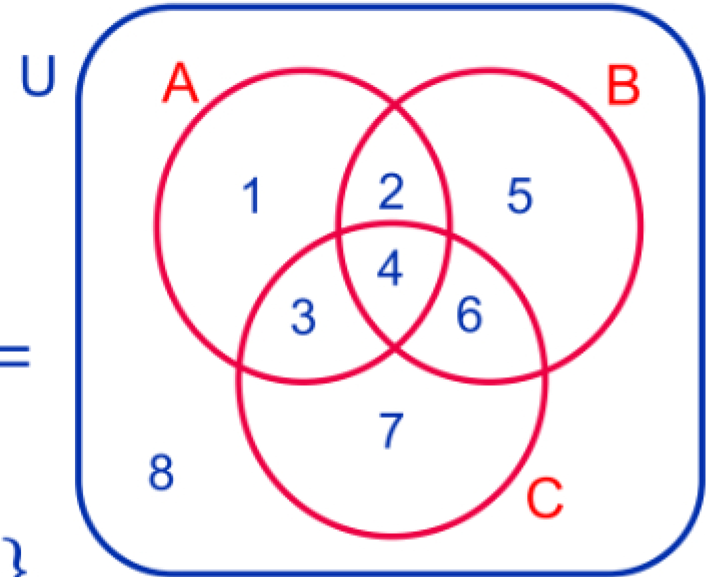
$A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4,5,6\}$

$C = \{3,4,6,7\}$

$\mathrm{A} \cap (B \cup \mathrm{C}) = \{1,2,3,4\} \cap \{2,3,4,5,6,7\} =$

$= \{2,3,4\}$

$(A \cap B) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C}) = \{2,4\} \cup \{3,4\} = \{2,3,4\}$



Значения левой и правой части совпадают, следовательно, тождество верно.

Доказательства некоторых свойств

Свойство 7. Докажем, что $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A.$

Метод эквивалентных преобразований

$$(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = ((A \cap B)\ \cup A) \cap ((A \cap B)\ \cup \bar{B}) =$$
$$= (A\ \cup A) \cap (B \cup A) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (B \cup \bar{B}) =$$
$$= \mathrm{A} \cap (B\ \cup A)\ \cap (A \cup \bar{B})\ \cap U =$$
$$= \mathrm{A} \cap \left(A \cup (B\ \cap \bar{B})\right) = \mathrm{A} \cap (A \cup \emptyset) = \mathrm{A}$$

Характеристическая функция множества

- Характеристическая функция множества характеризует факт принадлежности элемента a множеству A:

$$\mu_A(a) = \begin{cases} 1, \text{если } a \in A \\ 0, \text{если а} \notin A \end{cases}$$

Некоторые свойства:

1. $\mu_A^2(a) = \mu_A(a)$
2. $\mu_{A \cap B}(a)$=$\mu_A(a)$*$\mu_B(a)$
3. $\mu_{A \cup B}(a)$=$\mu_A(a) + \mu_B(a)$-$\mu_A(a)$*$\mu_B(a)$
4. $\mu_{\bar{A}}(a)$=$1 - \mu_A(a)$
5. $|A| = \sum_a \mu_A(a)$

Формула включений и исключений

Пусть A, B, C некоторые конечные множества

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| =$$

$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Для n произвольных конечных множеств:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| =$$

$$= \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots$$

Метод характеристической функции

$$|A \cup B| = \sum_{a:a\in U} \mu_{A\cup B}(a) = \sum_{a:a\in U} (\mu_A(a) + \mu_B(a) -$$
$$-\mu_A(a) * \mu_B(a)) = \sum_{a:a\in U} \mu_A(a) +$$
$$+ \sum_{a:a\in U} \mu_B(a) - \sum_{a:a\in U} \mu_A(a) * \mu_B(a) =$$
$$|A| + |B| - |A \cap B|$$

Список литературы

- Шевелев, Ю.П. Дискретная математика
- Микони, С.В. Дискретная математика для бакалавра: множества, отношения, функции, графы
- Новиков Ф.А. Дискретная математика: Учебник для вузов. Стандарт третьего поколения
- Тишин В.В. Дискретная математика в примерах и задачах.
- Джеймс А. Андерсон. Дискретная математика и комбинаторика

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Спасибо за внимание!

Санкт-Петербург, 2022