Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего образования

«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Отчёт

По расчётно-графической работе

по Линейной алгебре

Вариант: 2

Выполнили:

Кремпольская Екатерина Александровна

Касьяненко Вера Михайловна

P3120

Принял:

Цветков Константин Борисович

г. Санкт-Петербург

2023 г.

Задача №1

Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицей второго и четвёртого порядка соответственно.

,

**Решение:**

*А* =

Матрица имеет размерность , то есть является представлением линейного оператора в пространстве . Собственный вектор матрицы будем искать в виде:  
.

Составим уравнение для отыскания собственных векторов в матричном виде:

Перепишем матричное уравнение в виде системы уравнений:

Однородная система имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда определитель ее главной матрицы равен 0.

Характеристическое уравнение .

– собственные значения линейного оператора.

* Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению :

 или ,   
т.е.

Полагая в последнем равенстве , получим .

Откуда собственные векторы, соответствующие собственному значению , имеют вид .

* Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению :

 или ,   
т.е.

Полагая в последнем равенстве , получим .

Откуда собственные векторы, соответствующие собственному значению , имеют вид  .

*А* =

Матрица имеет размерность 4, то есть является представлением линейного оператора в пространстве . Собственный вектор матрицы будем искать в виде:  
.

Составим уравнение для отыскания собственных векторов в матричном виде:

Перепишем матричное уравнение в виде системы уравнений:

Однородная система имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда определитель ее главной матрицы равен 0.

Характеристическое уравнение .

– собственные значения линейного оператора.

* Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению :

 или , т.е.   
=>

Полагая в последнем равенстве , получим .

Откуда собственные векторы, соответствующие собственному значению , имеют вид .

* Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению :

 или , т.е.

Полагая в последнем равенстве , получим .

Откуда собственные векторы, соответствующие собственному значению , имеют вид .

Задание №2

Показать, что матрицу линейного оператора в четырёхмерном вещественном пространстве можно привести к диагональному виду путём перехода к новому базису. Найти этот базис и соответствующую ему матрицу.

**Решение:**

Матрица имеет размерность , то есть является представлением линейного оператора в пространстве . Собственный вектор матрицы будем искать в виде:  
.

Составим уравнение для отыскания собственных векторов в матричном виде:

Перепишем матричное уравнение в виде системы уравнений:

Однородная система имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда определитель ее главной матрицы равен 0.

Характеристическое уравнение .

– собственные значения линейного оператора.

* Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению :

 или , т.е.

Полагая в последнем равенстве , получим .

Откуда собственные векторы, соответствующие собственному значению , имеют вид .

* Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению :

 или , т.е.

Полагая в последнем равенстве , получим .

Откуда собственные векторы, соответствующие собственному значению , имеют вид .

* Для матрицы *A* найдены собственные векторы , соответствующие собственным значениям . Поскольку собственные значения не различны попарно, но собственных векторов четыре, то составим матрицу *M* из собственных векторов:

Покажем, что векторы линейно независимы

, т.е. собственные векторы образуют искомый базис.

Соответствующая ему диагональная матрица, на диагонали которой расположены собственные значения в соответствии с их кратностью.

Задание №3

Найти все собственные значения и корневые подпространства линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей:

**Решение:**

Характеристическое уравнение .

– собственные значения линейного оператора.

* Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению :

 или , т.е.

Полагая в последнем равенстве , получим .

Откуда собственные векторы, соответствующие собственному значению , имеют вид .

* Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению :

 или , т.е.

Полагая в последнем равенстве , получим .

Откуда собственные векторы, соответствующие собственному значению , имеют вид .

Получаем два корневых подпространства: 𝑉0 и 𝑉1. Найдем их.



\*

Найдем базис

Полагая в последнем равенстве , получим .

ФСР: . Тогда



Найдем базис

Полагая в последнем равенстве , получим .

ФСР: . Тогда

Задание №4

a) Найти жорданову нормальную форму матрицы четвёртого порядка.

б) Найти базис, в котором матрица заданного линейного оператора имеет жорданову форму.

в) Найти матрицу перехода из заданного базиса в жорданов базис.

**Решение:**

Найдем собственные значения.

Характеристическое уравнение .

– собственное значение линейного оператора, алгебраическая кратность *μ.*

Определим максимальную длину жордановых цепочек. Для этого составим матрицу () и будем возводить ее последовательно в степени *m* = 1, 2, ... до тех пор, пока не получится равенство , где *n* – порядок матрицы, а *μ* – алгебраическая кратность собственного значения линейного оператора, т.е. пока не получится равенство

Следовательно, жордановы цепочки имеют максимальную длину *k* = 2.

Матрица J в Жордановой нормальной форме:

Найдем Жордановы цепочки.

Найдем решения

Базис для системы решений:

=> обобщенный собственный вектор

Жорданова цепь для этого вектора:

=> обобщенный собственный вектор

Жорданова цепь для этого вектора:

Жордановы цепочки обобщенных собственных векторов и составляют линейно-независимый набор векторов для собственного значения.

Покажем, что векторы линейно независимы

, т.е. векторы образуют искомый базис.

Составим из линейно-независимых векторов матрицу перехода *M*:

Задание №5

a) Найти жорданову нормальную форму матрицы шестого порядка.

б) Найти базис, в котором матрица заданного линейного оператора имеет жорданову форму.

в) Найти матрицу перехода из заданного базиса в жорданов базис.

**Решение:**

*A* =

Найдем собственные значения.

Характеристическое уравнение .

– собственные значения линейного оператора, алгебраическая кратность которых *μ1, μ2*

Определим максимальную длину жордановых цепочек. Для этого составим матрицу () и будем возводить ее последовательно в степени *m* = 1, 2, ... до тех пор, пока не получится равенство , где *n* – порядок матрицы, а – алгебраическая кратность собственного значения линейного оператора, т.е. пока не получится равенство

*=*

Следовательно, жордановы цепочки имеют максимальную длину *k1* = *k2* = 2, *k3* = 1,   
*k4* = 1.

Матрица J в Жордановой нормальной форме:

Найдем Жордановы цепочки.

Найдем решения

Базис для системы решений:

=> обобщенный собственный вектор

Жорданова цепь для этого вектора:

=> обобщенный собственный вектор

Жорданова цепь для этого вектора:

2)

Найдем решения

Базис для системы решений:

=> обобщенный собственный вектор

Жорданова цепь для этого вектора:

Найдем решения

Базис для системы решений:

=> обобщенный собственный вектор

Жорданова цепь для этого вектора:

Жордановы цепочки обобщенных собственных векторов , , составляют линейно-независимый набор векторов для собственного значения, т.е. векторы образуют искомый базис

Составим из линейно-независимый набора векторов матрицу перехода *M*:

Задание №6

Найти все инвариантные подпространства размерностей один и два для линейного оператора, действующего в линейном комплексном трёхмерном пространстве и заданного в некотором базисе матрицей третьего порядка:

**Решение:**

Матрица имеет размерность 3, то есть является представлением линейного оператора в пространстве . Собственный вектор матрицы будем искать в виде:  
.

Составим уравнение для отыскания собственных векторов в матричном виде:

Перепишем матричное уравнение в виде системы уравнений:

Однородная система имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда определитель ее главной матрицы равен 0.

Характеристическое уравнение .

– собственные значения линейного оператора.

* Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению :

 или , т.е.

Полагая в последнем равенстве , получим .

Откуда собственные векторы, соответствующие собственному значению , имеют вид .

* Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению :

 или , т.е.

Полагая в последнем равенстве , получим .

Откуда собственные векторы, соответствующие собственному значению , имеют вид .

Найдем все инвариантные подпространства размерности 1:

1. Так как у оператора есть собственный вектор (1,-1,1) при собственном значении 1, то он является базисом инвариантного подпространства, порожденного этим собственным вектором.
2. Также существует инвариантное подпространство, порожденное любым собственным вектором, отвечающим собственному значению 2. Мы знаем, что у оператора есть два линейно независимых собственных вектора (-1,1,0) и (1,0,1) при собственном значении 2, поэтому каждый из них порождает инвариантное подпространство размерности 1.

Таким образом, мы нашли три инвариантных подпространства размерности 1: первое порождено вектором (1,-1,1), второе - вектором (-1,1,0), третье - вектором (1,0,1).

Инвариантные подпространства размерности два могут быть построены как линейные комбинации пар векторов из этого базиса: то есть подпространство, порожденное векторами (-1,1,0) и (1,0,1).