Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего образования

«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Отчёт

По расчётно-графической работе

по Линейной алгебре

Вариант: 5

Выполнили:

Кремпольская Екатерина Александровна

Касьяненко Вера Михайловна

P3120

Принял:

Цветков Константин Борисович

г. Санкт-Петербург

2023 г.

Задача №1

Найти норму векторов **а** и **b** и угол между ними в евклидовом пространстве

**Решение:**

Норма (длина) вектора *x* в евклидовом пространстве считается по формуле

Угол между двумя векторами *a* и *b* определяется равенством ,   
где

Найдем скалярное произведение векторов:

Задача №2

Найти норму элементов **f** и **g** и угол между ними в евклидовом пространстве многочленов с вещественными коэффициентами и скалярным произведением

**Решение:**

Чтобы найти нормы элементов 𝑓 и 𝑔, найдем скалярные квадраты:

Далее найдем угол:

Задача №3

Проверить, что система векторов ортогональна в , дополнить её до ортогонального базиса (дополнение не единственно)

**Решение:**

 Используем необходимое и достаточное условие ортогональности двух векторов

Пусть Это приводит к однородной системе линейных уравнений:

Решим эту систему методом Гаусса.

Получено общее решение. Отсюда при получаем частное решение – один из векторов, ортогональных данным векторам .

Теперь необходимо подобрать еще один вектор, ортогональный каждому из векторов . Пусть искомый вектор . Тогда имеем: . Это приводит к однородной системе линейных уравнений:

Решим ее методом Гаусса.

Получено общее решение. Отсюда при получаем частное решение  
 – один из векторов, ортогональных данным векторам .

Таким образом, чтобы получить ортогональный базис векторного пространства можно добавить к данным векторам векторы и   
.

Задача №4

С помощью процесса ортогонализации построить ортонормированный базис линейной оболочки, порождённой системой векторов

**Решение:**

 Найдем базис линейной оболочки:

Получена ступенчатая матрица, содержащая три ненулевые строки. Значит, ранг данной системы векторов равен 3, и система векторов  линейно независима. Следовательно, векторы    составляют базис данной линейной оболочки, являющейся подпространством в *E4*.

Для построения ортонормированного базиса в *E4* применим метод ортогонализации Грама-Шмидта. Получим

Последовательно найдем

Следовательно, система векторов  является искомым ортогональным базисом. Заметим, что ортогональность векторов  легко проверяется:

Пусть , то неизвестные координаты найдутся из условий

Так как , неизвестные можно взять в качестве базисных неизвестных.

Если для свободной (небазисной) неизвестной , то

Нормировав найденные векторы , построим ортонормированный базис в *E4*:

Задача №5

Найти базис (находится неоднозначно) ортогонального дополнения подпространства, порождённого системой векторов

**Решение:**

Получена ступенчатая матрица с количеством ненулевых строк , следовательно, ранг матрицы и векторы являются линейно зависимыми. То есть линейное подпространство определено векторами и поскольку они линейно независимы, то составляют его базис.

Дополним систему этих двух векторов до базиса вектором , который удовлетворяет условиям и положим. Вектор является решением системы из трех уравнений и в качестве него можно взять любую фундаментальную систему решений.

Найдем ФСР:

Таким образом,

Из выбора вектора следует, что он составляет базис ортогонального дополнения подпространства

Задача №6

Найти:

а) проекцию вектора **x** на подпространство, являющееся линейной оболочкой заданных векторов , и его ортогональную составляющую;

б) угол между вектором **x** и подпространством, являющимся линейной оболочкой заданных векторов ;

в) расстояние от вектора **x** до подпространства, являющегося линейной оболочкой заданных векторов

**Решение:**

Получена ступенчатая матрица с количеством ненулевых строк , следовательно, ранг матрицы и векторы являются линейно зависимыми. То есть линейное подпространство определено векторами и поскольку они линейно независимы, то составляют его базис.

 Вычисляем скалярные произведения:

Составим неоднородную систему:

, а ортогональная составляющая

Таким образом, угол

Задача №7

Используя теорию квадратичных форм, привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка; классифицировать поверхность; построить график поверхности в исходной системе координат, отметив систему координат, в которой уравнение поверхности имеет канонический вид

**Решение:**

Матрица этой квадратичной формы имеет вид:

Столбец коэффициентов линейной формы:

Составим характеристическое уравнение:

* Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению :

Полагая в последнем равенстве , получим

Откуда собственные векторы, соответствующие собственному значению , имеют вид .

* Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению   
  :

Полагая в последнем равенстве , получим

Откуда собственные векторы, соответствующие собственному значению , имеют вид .

* Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению   
  :

Полагая в последнем равенстве , получим

Откуда собственные векторы, соответствующие собственному значению , имеют вид .

Нормируя векторы, получим:

Матрица ортогонального преобразования:

Отсюда получаем формулы преобразования координат:

Вычисляем столбец коэффициентов линейной формы:

Составляем уравнение:

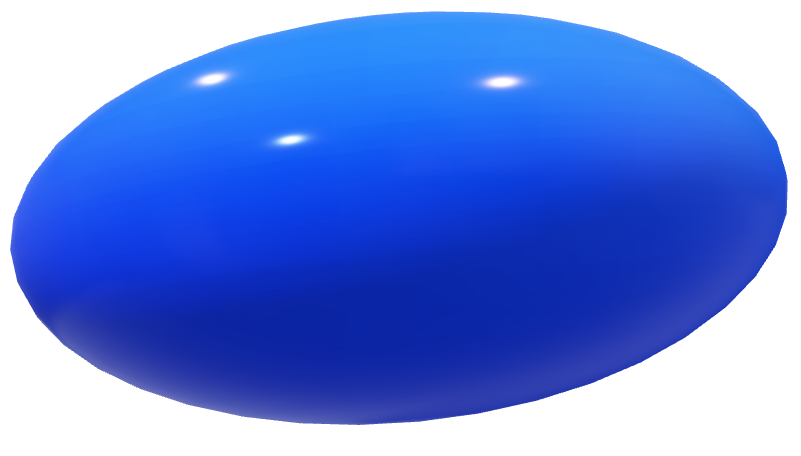
Выделим полные квадраты:

Произведя параллельный перенос осей координат по формулам и разделив уравнение на , приходим к уравнению   
Делаем замену , переименовывая координатные оси:

Получили каноническое уравнение эллипсоида.

Найдем замену неизвестных, приводящую исходное уравнение к каноническому виду

Таким образом, начало канонической системы координат относительно исходной системы координат имеет координаты , а матрица перехода от исходного базиса к каноническому имеет вид



z

z

y

x

y

x

3

1

1

1

Задача №8

В пространстве многочленов с вещественными коэффициентами, степени не выше третьей, определённых на отрезке , заданы многочлены Лежандра, определяемые по формуле Родрига:

8.1 Доказать, что многочлены Лежандра ортогональны относительно веса на отрезке .

8.2 Вычислить норму указанных многочленов Лежандра.

8.3 Построить ортонормированную систему многочленов Лежандра, используя алгоритм ортогонализации Грама – Шмидта системы линейно независимых многочленов (предварительно убедившись в их линейной независимости).

8.4 Доказать полноту системы, состоящей из многочленов Лежандра, в пространстве многочленов с вещественными коэффициентами, степени не выше третьей, определённых на отрезке , с помощью равенства Парсеваля.

8.5 Разложить многочлен по системе ортонормированных многочленов Лежандра.

**Решение:**

Докажем, что многочлены Лежандра ортогональны относительно веса на отрезке

Пусть

Используем формулу:

Многочлен имеет корни n-й степени. Значит, его производная до (n-1)-го порядка включительно имеют корни , поэтому:

Многочлен имеет степень m<n, поэтому

Отсюда следует, что т. е. образуют ортогональную систему.

Вычислим норму указанных многочленов Лежандра.

– многочлен степени 2n со старшим коэффициентом равным 1

Отсюда

В итоге

Значит,

; ; ;

Построим ортонормированную систему многочленов Лежандра, используя алгоритм ортогонализации Грама – Шмидта системы линейно независимых многочленов .

Чтобы убедиться в линейной независимости многочленов найдем матрицу Грама:

Матрица Грама:

Определитель этой матрицы равен линейно независимы.

Применим к нам процесс ортогонализации:

Ортонормированная система:

Докажем полноту системы, состоящей из многочленов Лежандра, в пространстве многочленов с вещественными коэффициентами, степени не выше третьей, определённых на отрезке , с помощью равенства Парсеваля.

Система многочленов из предыдущего пункта ортонормирована, если   
 – многочлен степени не выше и то  
 т.к. при и

Значит равенство Парсеваля выполнено.

Разложем многочлен по системе ортонормированных многочленов Лежандра.

В итоге:

Задача №9

В пространстве многочленов с вещественными коэффициентами, степени не выше третьей, определённых на отрезке , заданы многочлены Чебышева, определяемые по формуле:

.

9.1 Убедиться, что функции действительно являются многочленами степени и удовлетворяют рекуррентному соотношению

9.2 Доказать, что многочлены Чебышева образуют ортогональную систему относительно веса на отрезке

9.3 Вычислить норму указанных многочленов Чебышева.

9.4 Построить ортонормированную систему многочленов Чебышева.

9.5 Разложить многочлен по системе ортонормированных многочленов Чебышева.

**Решение:**

Для того чтобы убедиться, что функции являются многочленами степени и удовлетворяют рекуррентному соотношению , мы можем последовательно проверить это для каждого значения .

Для

Многочлен степени 0, соотношение выполняется.

Для

Многочлен степени 1, соотношение выполняется.

Для

Многочлен степени 2, соотношение выполняется.

Для

Многочлен степени 3, соотношение выполняется.

Мы видим, что для каждого значения n функции являются многочленами степени n и удовлетворяют рекуррентному соотношению , начиная с .

Чтобы доказать, что многочлены Чебышева образуют ортогональную систему относительно веса на отрезке , необходимо проверить условие ортогональности для любых двух различных многочленов и , где m ≠ n.

Условие ортогональности для функций и относительно веса на интервале определяется следующим интегралом: .

Для многочленов Чебышева мы должны проверить:

Проверим это для всех возможных комбинаций многочленов Чебышева

1. Для и :

Данный интеграл равен 0, так как является нечетной функцией на симметричном интервале [-1, 1].

1. Для и :

Данный интеграл равен 0, так как является нечетной функцией на симметричном интервале [-1, 1].

1. Для и :

Данный интеграл равен 0, так как является нечетной функцией на симметричном интервале [-1, 1].

1. Для и :

Данный интеграл равен 0, так как является нечетной функцией на симметричном интервале [-1, 1].

1. Для и :

Данный интеграл равен 0, так как является нечетной функцией на симметричном интервале [-1, 1].

1. Для и :

Данный интеграл равен 0, так как является нечетной функцией на симметричном интервале [-1, 1].

Таким образом, мы видим, что все интегралы для различных комбинаций многочленов Чебышева и с n ≠ m равны 0. Это означает, что многочлены Чебышева образуют ортогональную систему относительно веса на отрезке .

Норма многочлена определяется как квадратный корень из скалярного произведения многочлена на самого себя. Для вычисления нормы многочлена Чебышева на отрезке , нам понадобится вычислить следующий интеграл:

*,* где – весовая функция.

Вычислим норму для каждого многочлена Чебышева с заданными значениями n.

1. Для :

Данный интеграл представляет собой интеграл от функции, известной как арксинус, на интервале [-1, 1]. Интегрируя, получаем:

1. Для :

Данный интеграл можно вычислить аналитически или приближенно, и его значение равно:

1. Для :

Также можно вычислить этот интеграл аналитически или численно, и его значение равно:

1. Для :

И снова, этот интеграл может быть вычислен аналитически или численно, и его значение равно:

Для построения ортонормированной системы многочленов Чебышева на отрезке , нам необходимо нормировать каждый многочлен Чебышева относительно весовой функции .

Ортонормированные многочлены Чебышева можно получить путем деления каждого многочлена Чебышева на его норму.

Нормируем каждый многочлен Чебышева с заданными значениями n:

1. Для :

Норма многочлена равна = (по предыдущему ответу).

Тогда ортонормированный многочлен будет:

1. Для :

Норма многочлена равна = (по предыдущему ответу).

Тогда ортонормированный многочлен будет:

1. Для :

Норма многочлена равна = 2 (по предыдущему ответу).

Тогда ортонормированный многочлен будет:

1. Для :

Норма многочлена равна = 4 (по предыдущему ответу).

Тогда ортонормированный многочлен будет:

Для разложения многочлена по системе ортонормированных многочленов Чебышева, нам понадобится вычислить коэффициенты разложения, которые можно получить с помощью формулы коэффициентов Фурье.

Коэффициенты разложения многочлена f(x) по системе ортонормированных многочленов Чебышева можно вычислить следующим образом:

, где – ортонормированный многочлен Чебышева, – весовая функция.

Вычислим коэффициенты разложения многочлена по системе ортонормированных многочленов Чебышева.

Вычислив все четыре коэффициента разложения , , , , мы сможем записать разложение многочлена по системе ортонормированных многочленов Чебышева:

Задача №10

10.1 Доказать, что тригонометрическая система функций ортогональна на отрезке и является базисом пространства, образованного тригонометрическими многочленами

.

10.2 Нормировать эту систему.

10.3 Найти наилучшее приближение функции тригонометрическим многочленом Фурье степени, не выше , то есть, , где вещественные коэффициенты.

10.4 Построить графики функции и полученного приближения (рассмотреть многочлены Фурье нескольких порядков). Проанализировать поведение построенного многочлена при росте его порядка.

**Решение:**

Система непрерывных на отрезке  функций называется ортогональной на отрезке  , если

Заметим, что все функции, входящие в систему являются периодическими с общим наименьшим положительным периодом , так как 1 – периодическая с любым, отличным от нуля периодом, функции имеют наименьший положительный период , а функции имеют наименьший положительный период . Поэтому число является с одной стороны общим, а с другой стороны наименьшим положительным периодом для всех функций, входящих в систему.

Тригонометрическая система является ортогональной на отрезке в следующем смысле: интеграл по отрезку от произведения любых двух различных функций этой системы равен нулю, а интеграл по отрезку от квадрата любой функции этой системы отличен от нуля.

, при

, при

, при

Доказали, что тригонометрическая система функций ортогональна на отрезке

Представим тригонометрический многочлен в общем виде:

Теперь рассмотрим каждое слагаемое в отдельно и покажем, как его можно представить в виде линейной комбинации функций из тригонометрической системы.

1. : Это постоянное слагаемое, которое можно рассматривать как функцию , где - функция из тригонометрической системы. Таким образом, представлено линейной комбинацией функций из системы.
2. : Слагаемые представляют собой функции из тригонометрической системы, поскольку уже присутствуют в системе. Таким образом, также представлены линейной комбинацией функций из системы.
3. можно представить в виде линейной комбинации функций из системы.

Рассматривая этот процесс для всех слагаемых, мы видим, что каждое слагаемое в может быть представлено в виде линейной комбинации функций из тригонометрической системы.

Таким образом, каждая тригонометрическая функция в многочлене может быть представлена в виде линейной комбинации функций из тригонометрической системы функций, то есть тригонометрическая система функций является базисом пространства, образованного тригонометрическими многочленами.

Нормированной на отрезке система не будет, так как Нормой каждой из функций является , а норма единицы равна .

Для получения нормированных функций воспользуемся уравнением

Поделив функции на их нормы получим ортонормальную на отрезке систему функций

Для нахождения наилучшего приближения функции тригонометрическим многочленом Фурье степени не выше найдем значения коэффициентов на отрезке .

Таким образом, наилучшим приближением функции тригонометрическим многочленом Фурье степени имеет следующий вид:

*P2(x)*

*f(x)*

Рассмотрим для

*P1(x)*

*P3(x)*

*x*

*y*

1

1

Можно заметить, что по мере увеличения порядка , многочлен будет стремиться к функции ближе и ближе на всем пространстве определения, однако это может также приводить к более сложному выражению многочлена . Низкий порядок может давать более грубое приближение, но более простое выражение многочлена.