Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего образования

«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Отчёт

По расчётно-графической работе

Математического анализа

Вариант: 21

Выполнили:

Касьяненко Вера Михайловна P3120

Принял:

Цветков Константин Борисович

г. Санкт-Петербург

2023 г.

**Страница 17**

**Задача 1**

Исследовать ряд на сходимость:   
Признак Даламбера.

при – ряд сходится, – ряд расходится, – получаем неопределенность (дополнительные исследования).  
   
Поскольку , то получаем неопределенность.  
Исследуем сходимость ряда при помощи интегрального признака сходимости Коши. Рассмотрим несобственный интеграл:

Процесс интегрирования можно упростить, если сделать замену переменных:

Тогда исходный интеграл можно записать так:

Формула интегрирования по частям:

Исходный интеграл представим как:

Найдем:  
   
а затем результат домножим на   
Пусть:

Тогда:

Поэтому:

Находим интеграл:

В итоге получаем:

С учетом коэффициента , получаем

Чтобы записать окончательный ответ, осталось вместо подставить .

Вычислим определенный интеграл:

Так как несобственный интеграл сходится, то сходится и исследуемый ряд.  
Следовательно, ряд:сходится.

**Задача 2**

Исследовать ряд на сходимость:

при – ряд сходится, – ряд расходится, – получаем неопределенность (дополнительные исследования).  
   
Поскольку , то ряд сходится.  
Следовательно, ряд: сходится.

**Задача 3**

Исследовать ряд на абсолютную сходимость:

Коэффициент общего члена не влияет на сходимость или расходимость ряда, поэтому выносим его за пределы суммы:

Рассмотрим первые три члена ряда:

Это числовой знакочередующийся ряд, исследуем его по признаку Лейбница.

а) По первому признаку Лейбница каждый последующий член ряда по абсолютной величине должен быть меньше предыдущего, т.е. для нашего ряда это условие выполняется

б) По второму признаку Лейбница предел ряда должен стремится к 0.

Второе условие Лейбница выполняется.  
Таким образом, рассматриваемый ряд сходится.  
Сравним с рядом

Поскольку , то, если ряд будет расходиться, то будет расходиться и   
исходный .  
Так как , то ряд расходится.  
Следовательно, ряд сходится условно.

**Задача 4**

Исследовать ряд на абсолютную сходимость и вычислить сумму ряда с точностью :

при – ряд сходится, – ряд расходится, – получаем неопределенность (дополнительные исследования).  
   
Поскольку , то ряд сходится.

Применим радикальный признак Коши:

Поскольку:

Получаем:

Поскольку полученное значение меньше 1, то ряд сходится.  
Следовательно, ряд сходится абсолютно.

Для того чтобы найти с точностью 0,001 сумму данного ряда надо взять столько его членов, чтобы следующий член ряда был по модулю меньше 0,001. Тогда весь остаток ряда, начинающийся с этого члена, будет также меньше 0,001.

Рассмотрим первые члены ряда:

Поэтому с точностью 0,001:

**Страница 17**

**Задача 1**

Найти область сходимости функционального ряда:

Используя признак Даламбера, найдём интервал сходимости ряда:

Ряд сходится при . То есть

В результате мы получили интервал сходимости: .

Сразу проконтролируем значение , чтобы оно не вошло в область сходимости ряда.

Теперь проверим сходимость ряда на концах этого интервала.

Пусть

Получаем ряд:

Исследуем сходимость ряда при помощи признаков сходимости.

Рассмотрим первые три члена ряда:

Это числовой знакочередующийся ряд, исследуем его по признаку Лейбница.

а) По первому признаку Лейбница каждый последующий член ряда по абсолютной величине должен быть меньше предыдущего, то есть для нашего ряда это условие выполняется

б) По второму признаку Лейбница предел ряда должен стремиться к 0.

Второе условие Лейбница не выполняется.

Таким образом, рассматриваемый ряд расходится (один из признаков не выполняется).  
Ряд расходится, значит, – точка расходимости.  
При получаем ряд:

Исследуем его сходимость при помощи признаков сходимости.

В силу свойств замечательных пределов, исходное выражение можно упростить:

Тогда исходный ряд можно представить в виде:

Сумма этого ряда стремится к . Ряд расходится, значит, – точка расходимости.

Таким образом, данный степенной ряд является сходящимся при:

**Страница 38**

**Задача 1**

Разложить функцию в ряд Тейлора по степеням *x*:

Используем стандартное разложение в биномиальный ряд степенной функции:

Пусть , а

Подставим *x* вместо *t*

Подставим в изначальное выражение и получим разложение:

Использованное выше разложение функции в биномиальный ряд справедливо для , а, следовательно, и для x

Найденный интервал сходимости и является интервалом сходимости полученного ряда Тейлора для функции .

**Задача 2**

Разложим функцию в ряд Маклорена:

При получим

Почленно интегрируем

Этот ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница, поэтому он сходится и его сумма

Так как

**Страница 64**

**Задача 1**

Разложить в ряд Фурье заданную функцию , построить графики функции и суммы ее ряда Фурье. Если не указывается, какой вид разложения в ряд необходимо представить, то требуется разложить функцию либо в общий тригонометрический ряд Фурье, либо следует выбрать оптимальный вид разложения в зависимости от данной функции.

по синусам кратных дуг;

Ряд Фурье по синусам в общем случае существует только для нечетной функции. Для того, чтобы построить ряд Фурье по синусам для нашей функции, продолжим ее нечетным образом на промежуток (0; . Затем, считая, что период разложения , воспользуемся стандартным видом ряда Фурье для нечетной функции:

Вычислим коэффициенты:

В точке разрыва функции и  ряд Фурье сойдётся к изолированному значению, которое располагается ровно посередине «скачка» разрыва. Левосторонний предел для правосторонний: . Ордината средней точки равна 0. Пределы для .

Применив теорему Дирихле, видим, что

при

Таким образом, график суммы этого ряда имеет вид:

1

0

Ответ:

при

**Задача 2**

Для заданной графически функции построить ряд Фурье в комплексной форме, изобразить график суммы построенного ряда.

Изображение выглядит как линия, диаграмма, График, Шрифт

Автоматически созданное описание

Ряд Фурье для функции в комплексной форме имеет вид

Зададим функцию, график которой изображен на рисунке, аналитически.

Таким образом,

Отметим, что коэффициенты связаны с коэффициентами общего ряда Фурье следующим образом:

Затем, используя теорему Дирихле о поточечной сходимости ряда Фурье, видим, что построенный ряд Фурье в комплексной форме сходится к периодическому, периода , продолжению исходной функции при всех , и при

График суммы этого ряда Фурье имеет следующий вид:

2 4

Ответ: 1

при