



SIMULACIÓN DE LA EXPANSIÓN DEL UNIVERSO MEDIANTE LA RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES DE FRIEDMANN

PRESENTADO POR:
CANDY VALENTINA LÓPEZ VILLANUEVA

MÉTODOS COMPUTACIONALES

¿POR QUÉ ES IMPORTANTE ESTUDIAR LA EXPANSIÓN DEL UNIVERSO?

El estudio de la expansión del universo es fundamental para comprender su origen, evolución y destino.

Las ecuaciones de Friedmann, derivadas de la relatividad general, permiten modelar cómo evoluciona el parámetro de escala $a(t)$, que describe el tamaño relativo del universo a lo largo del tiempo.

A partir de estas ecuaciones, podemos analizar cómo diferentes componentes del universo –radiación, materia y energía oscura– afectan la expansión.

En este proyecto, se implementan y comparan diferentes modelos cosmológicos usando métodos computacionales, con especial énfasis en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO).

OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

Simular la evolución del universo resolviendo numéricamente las ecuaciones de Friedmann para distintos modelos cosmológicos, y comparar los resultados con las soluciones teóricas esperadas.



OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Formular la ecuación de Friedmann en forma adecuada para su resolución numérica.
- Implementar el método de **Runge-Kutta de orden 4 (RK4)** para resolver la ecuación.
- Comparar modelos con diferentes valores de Ω_r , Ω_m y Ω_Λ .
- Analizar y visualizar eventos relevantes como **la dominancia de la energía oscura** y el **inicio de la aceleración cósmica**.
- Estimar y representar los errores entre la solución numérica y la solución teórica.

MARCO TEÓRICO

Ecuación de Friedmann (forma plana)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 (\Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_\Lambda)$$

Donde $a(t)$ es el parámetro de escala, y los Ω representan las densidades relativas de: Radiación, Materia y Energía Oscura (Constante Cosmológica).

Regímenes de expansión teóricos

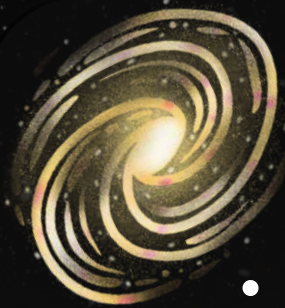
$$\begin{aligned} a(t) &\propto t^{1/2} && \text{(Radiación)} \\ a(t) &\propto t^{2/3} && \text{(Materia)} \\ a(t) &\propto e^{Ht} && \text{(Energía oscura)} \end{aligned}$$

Interpretación de $a(t)$

- $a(t) = 1$ hoy (valor normalizado)
- $a(t) < 1$: pasado \rightarrow universo más denso y caliente
- $a(t) > 1$: futuro \rightarrow universo más grande y frío
- El comportamiento de $a(t)$ cambia según el componente dominante

Estas funciones sirven como referencia para validar
nuestras simulaciones.

METODOLOGÍA



1. FORMULACIÓN DE LA EDO

- Se reescribe la ecuación de Friedmann como:

$$\frac{da}{dt} = aH_0 \sqrt{\Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_\Lambda}$$

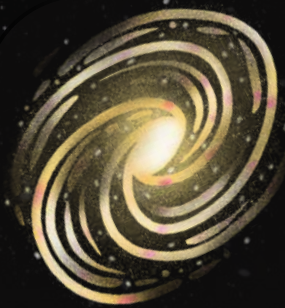
2. RESOLUCIÓN NUMÉRICA CON RK4

- Se implementa el método de Runge-Kutta de orden 4 para integrar la ecuación.
- Se usa un intervalo de tiempo negativo (hacia el pasado), partiendo de $a(0) = 1$.

3. SIMULACIÓN DE DISTINTOS MODELOS

- Modelos puros: solo radiación, solo materia, solo energía oscura.
- Modelos mixtos: combinaciones realistas con valores observacionales de los Ω .

METODOLOGÍA



4. COMPARACIÓN CON SOLUCIONES ANALÍTICAS

- Se grafican los resultados junto a las curvas teóricas para validar los modelos.

5. CÁLCULO DE ERRORES

- Se evalúa el error relativo medio y el error absoluto entre la simulación y las soluciones analíticas.

6. ANÁLISIS DE EVENTOS FÍSICOS

- Se determina numéricamente:
- Cuándo comienza a dominar la energía oscura.
- Cuándo se inicia la expansión acelerada.

RESULTADOS Y GRÁFICOS

Simulando: Universo sólo con materia

- Puntos generados: 51

- Primeros $a(t)$: [1. 0.98997483 0.97989864 0.96977038 0.95958894]

Simulando: Universo sólo con constante cosmológica

- Puntos generados: 51

- Primeros $a(t)$: [1. 0.99004983 0.98019867 0.97044553 0.96078944]

Simulando: Modelo estándar Λ CDM

- Puntos generados: 51

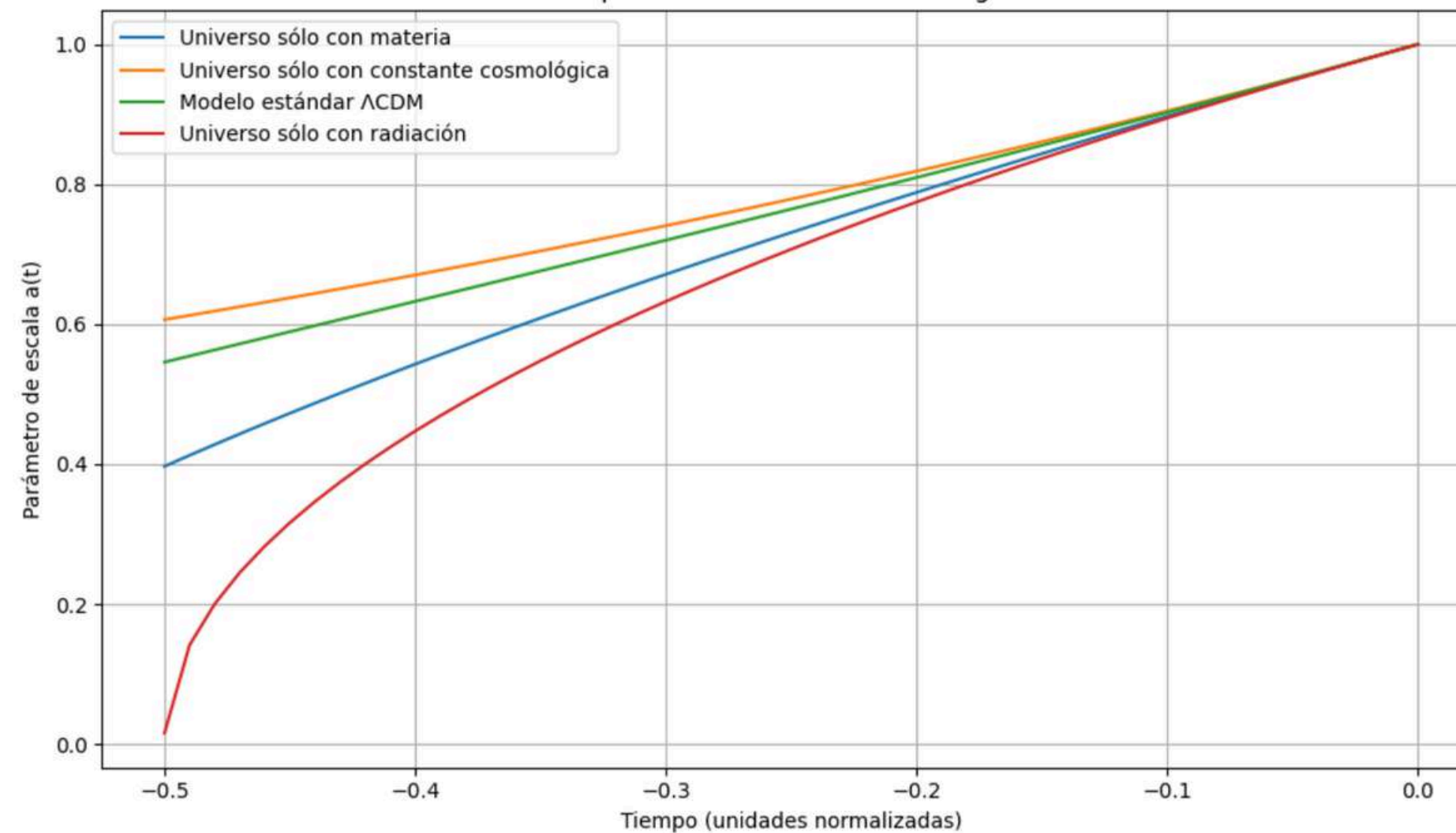
- Primeros $a(t)$: [1. 0.99002733 0.98010866 0.97024299 0.96042929]

Simulando: Universo sólo con radiación

- Puntos generados: 51

- Primeros $a(t)$: [1. 0.98994949 0.9797959 0.96953597 0.9591663]

Comparación de Modelos Cosmológicos

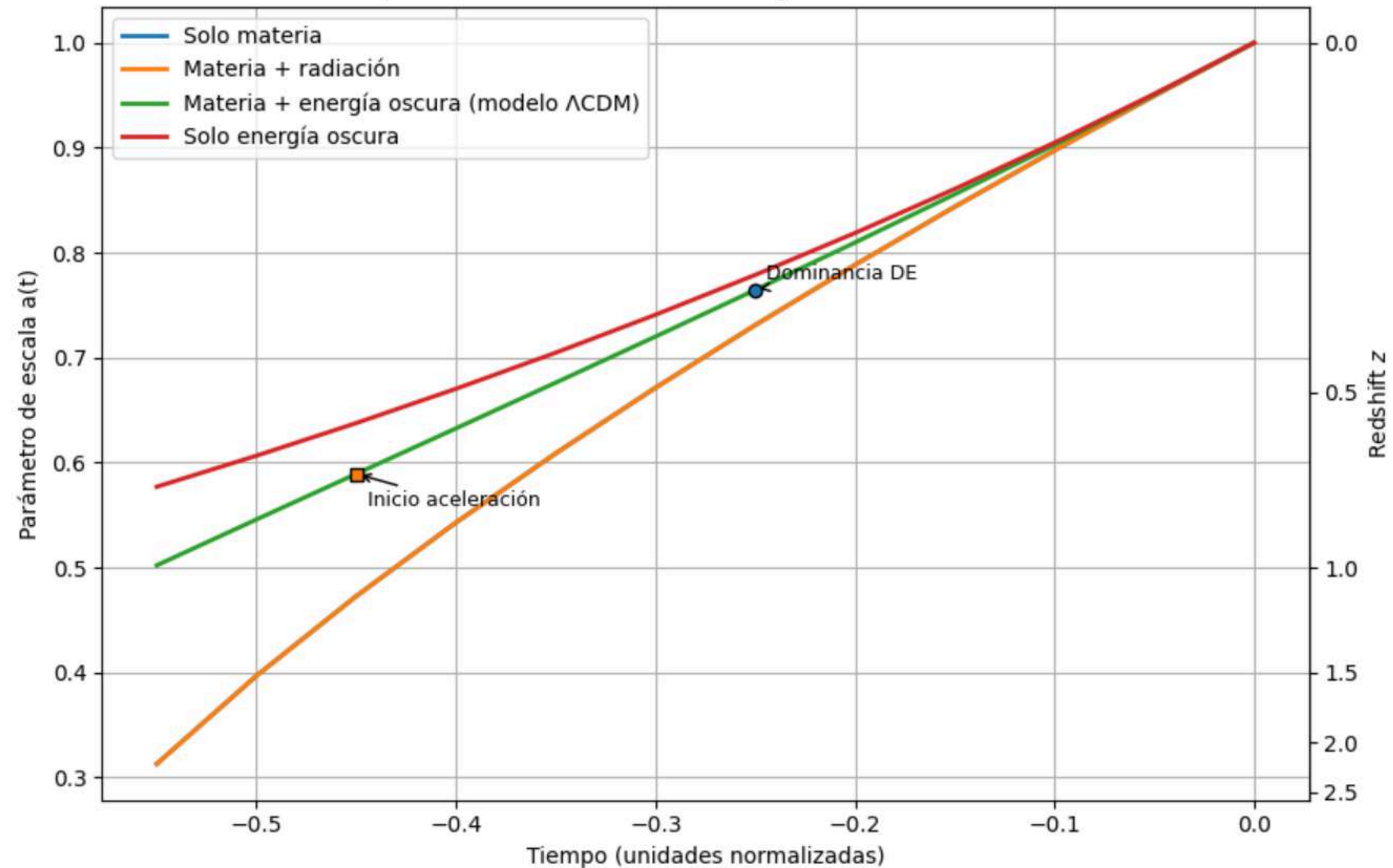


RESULTADOS Y GRÁFICOS

Simulando: Materia + energía oscura (modelo Λ CDM)

- Dominancia de energía oscura: $a = 0.7539$, $z \approx 0.33$
- Comienzo de aceleración: $a = 0.5984$, $z \approx 0.67$

Comparación de modelos cosmológicos con eventos clave



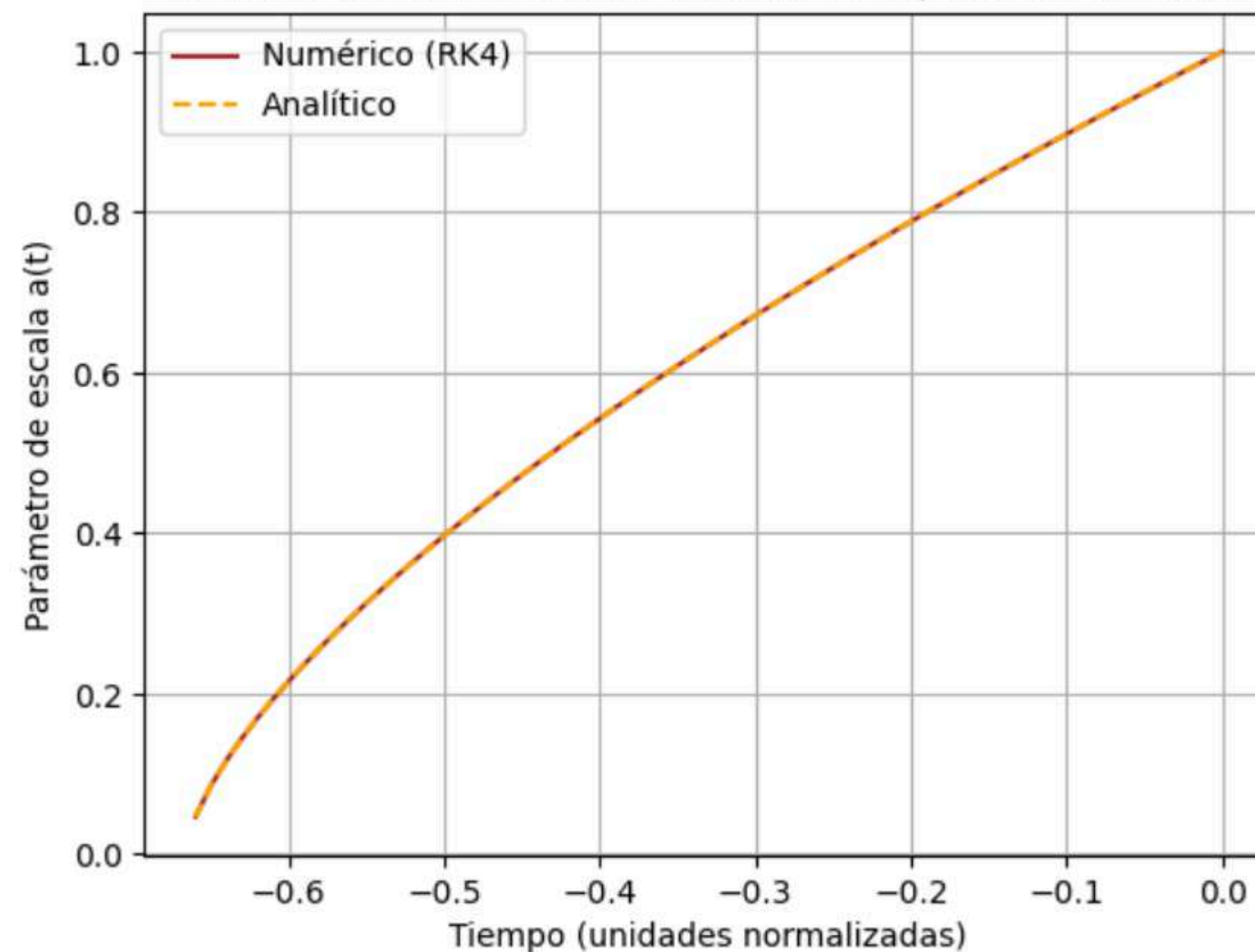
RESULTADOS Y GRÁFICOS

[Corte en $t=-0.6600$] a_{next} inválido: -16.67851257810885

Modelo: Solo materia (Einstein-de Sitter)

- Tiempo inicial: $t = 0.0000$
- Tiempo final: $t = -0.6600$
- $a(t)$ inicial: $a = 1.0000$
- $a(t)$ final: $a = 0.0464$
- No hay energía oscura, no aplica dominancia ni aceleración.

Evolución del Universo con Solo Materia (Einstein-de Sitter)

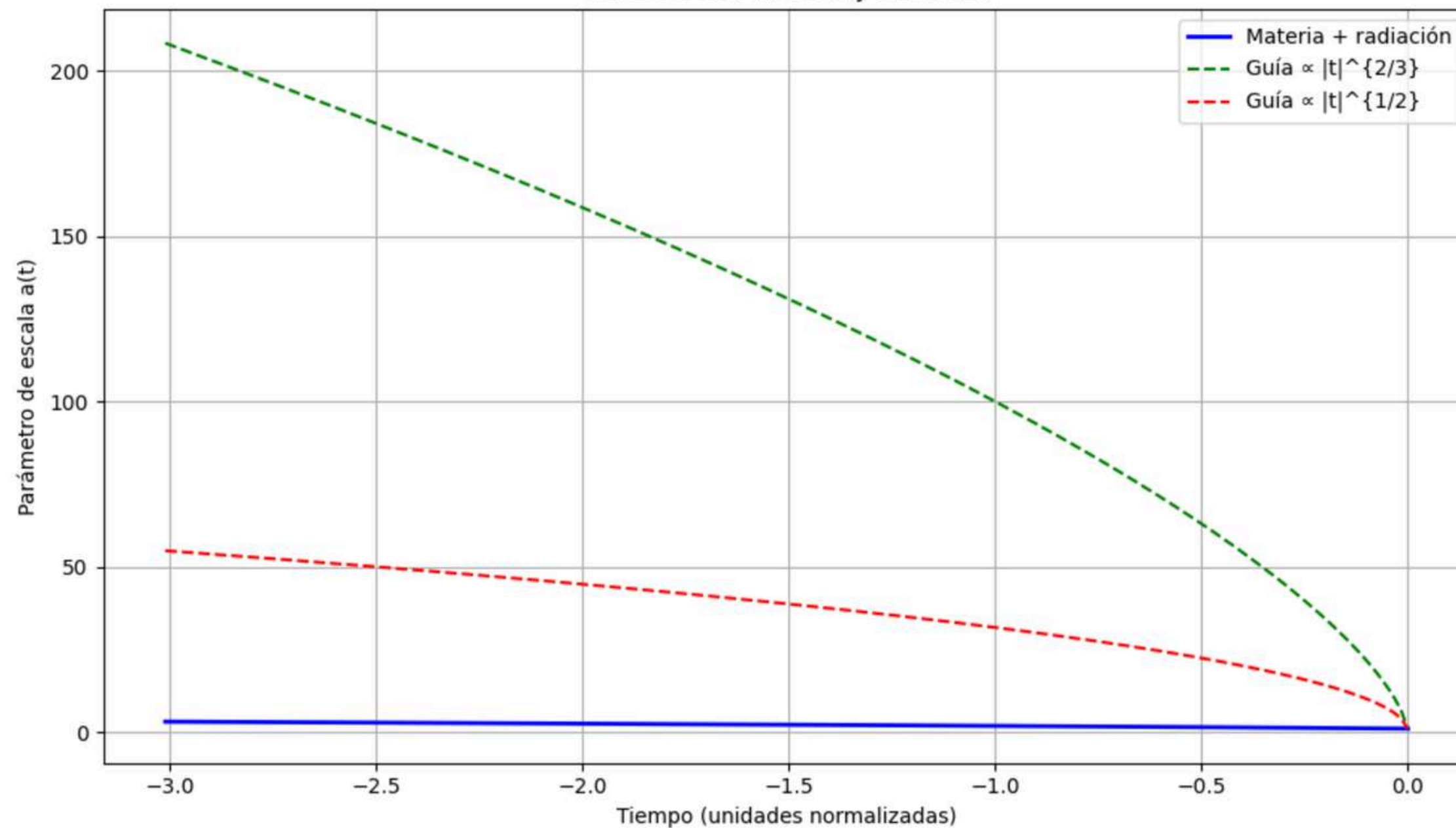


RESULTADOS Y GRÁFICOS

Modelo: Materia + radiación

- Tiempo inicial: $t = 0.0000$
- Tiempo final: $t = -3.0100$
- $a(t)$ inicial: $a = 1.0000e+00$
- $a(t)$ final: $a = 3.1215e+00$
- No hay energía oscura, no aplica dominancia ni aceleración.
- a_{eq} (igualdad radiación-materia) = $1.00e-04$
- Último a registrado: $3.12e+00$ en $t = -3.010$

Universo con materia y radiación

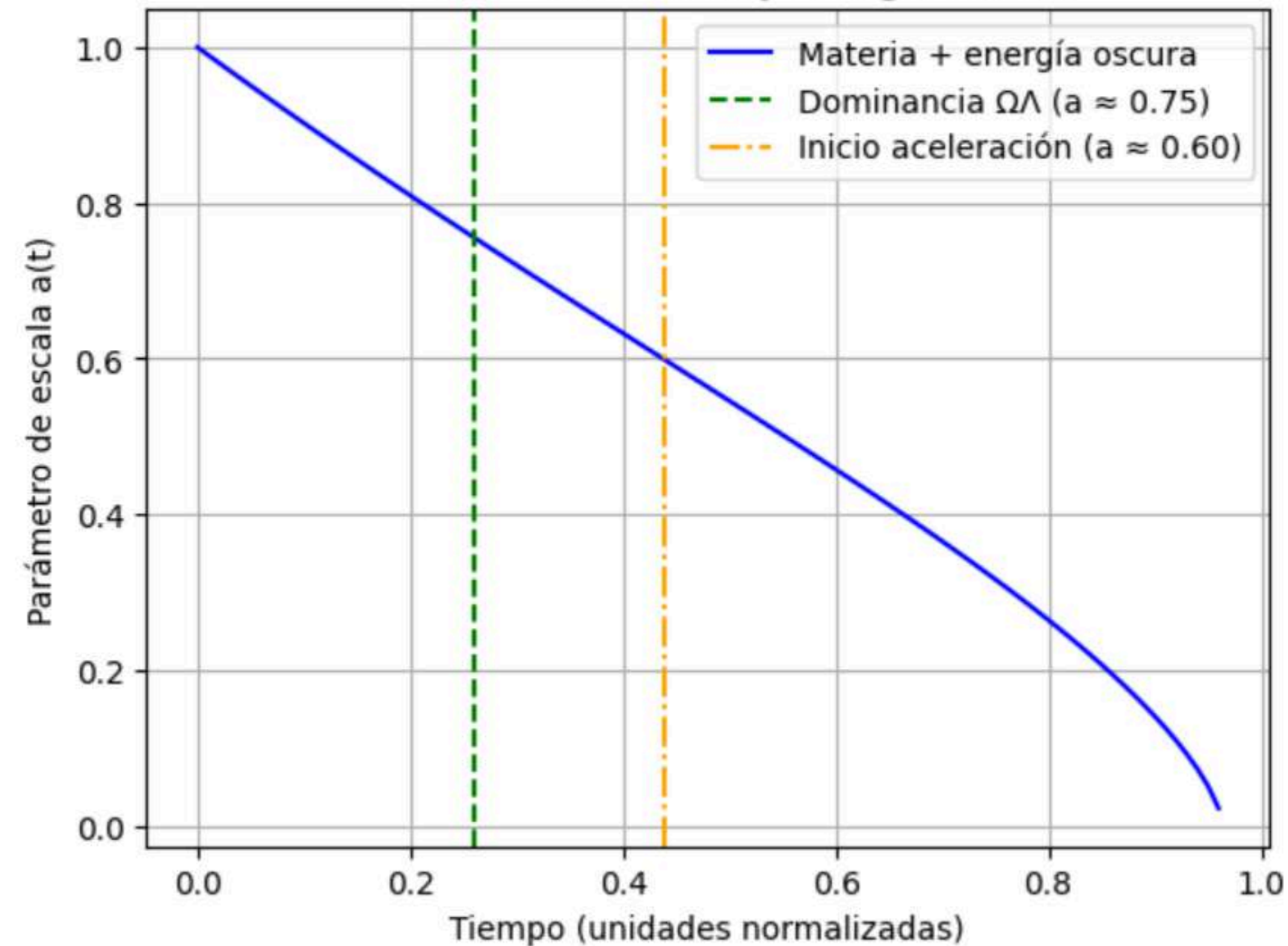


RESULTADOS Y GRÁFICOS

Modelo: Materia + energía oscura

- Tiempo inicial: $t = 0.0000$
- Tiempo final: $t = 0.9600$
- $a(t)$ inicial: $a = 1.0000e+00$
- $a(t)$ final: $a = 2.2439e-02$
- Dominancia energía oscura: $a \approx 0.7539$, $t \approx 0.2600$
- Inicio aceleración: $a \approx 0.5984$, $t \approx 0.4400$
- Último a registrado: $2.24e-02$ en $t = 0.960$

Universo con materia y energía oscura

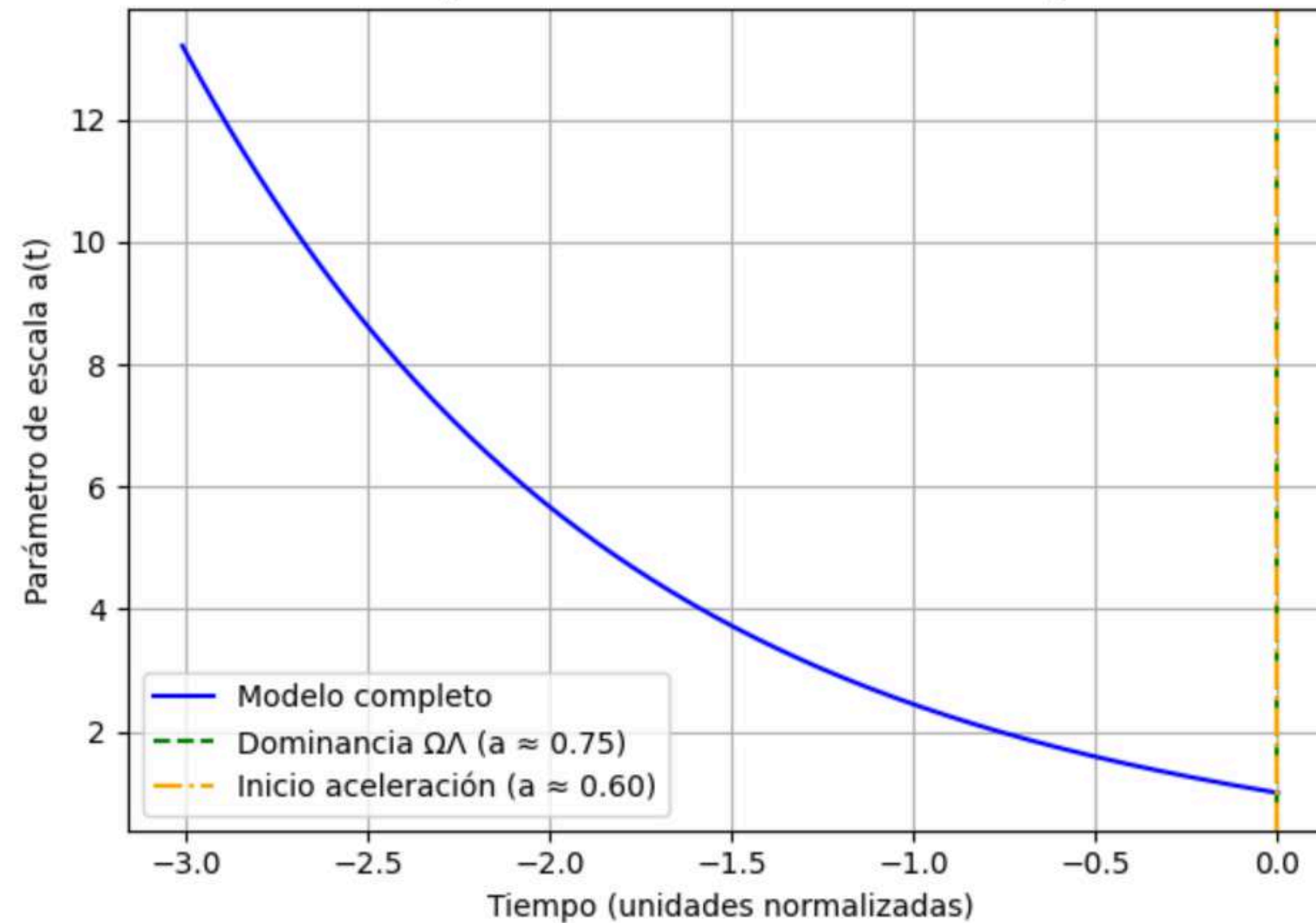


RESULTADOS Y GRÁFICOS

Modelo completo (radiación + materia + energía oscura)

- Tiempo inicial: $t = 0.0000$
- Tiempo final: $t = -3.0100$
- $a(t)$ inicial: $a = 1.0000e+00$
- $a(t)$ final: $a = 1.3203e+01$
- Dominancia energía oscura: $a \approx 0.7539$, $t \approx 0.0000$
- Inicio aceleración: $a \approx 0.5985$, $t \approx 0.0000$
- Último a registrado: $1.32e+01$ en $t = -3.010$

Modelo completo: radiación + materia + energía oscura

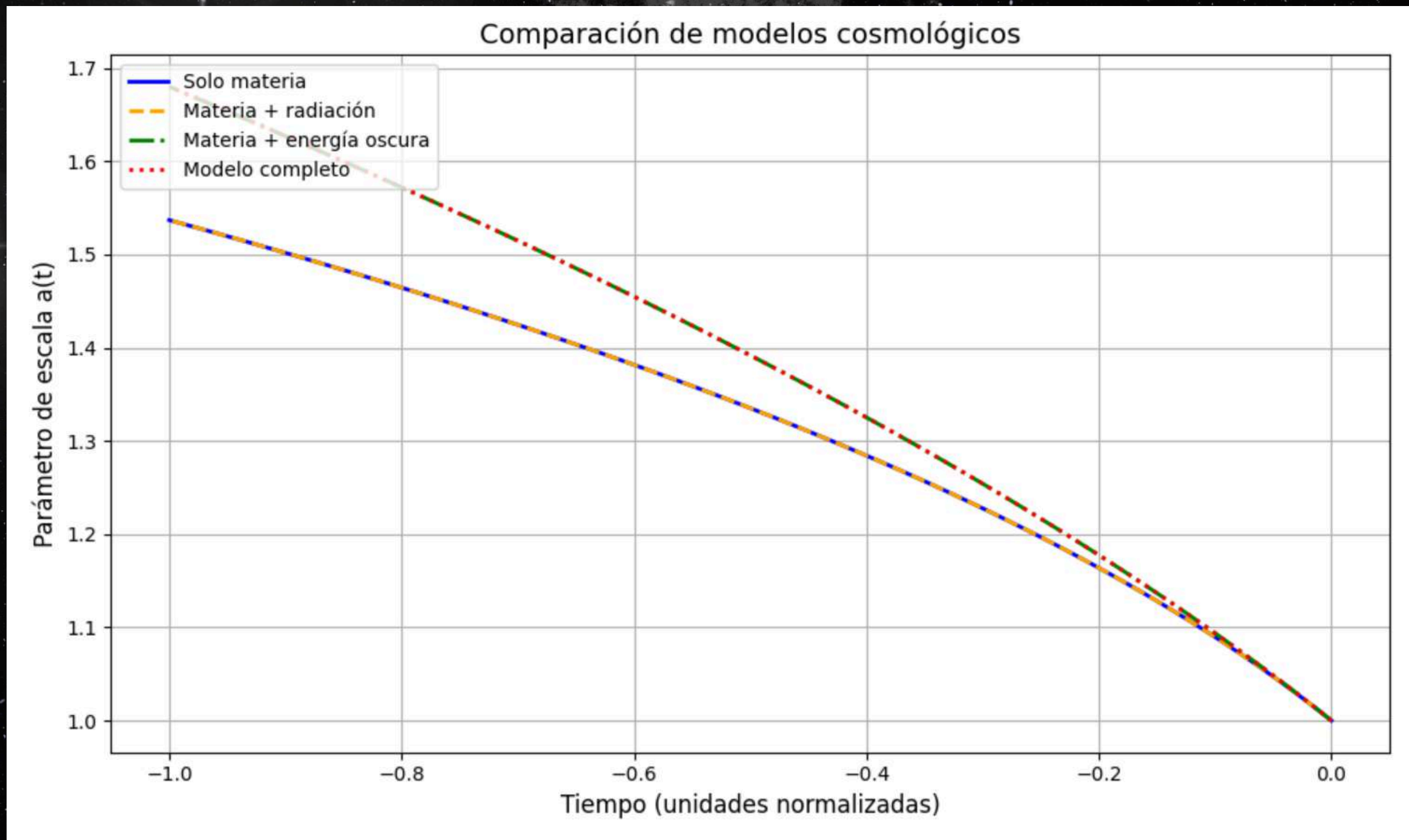


RESULTADOS Y GRÁFICOS

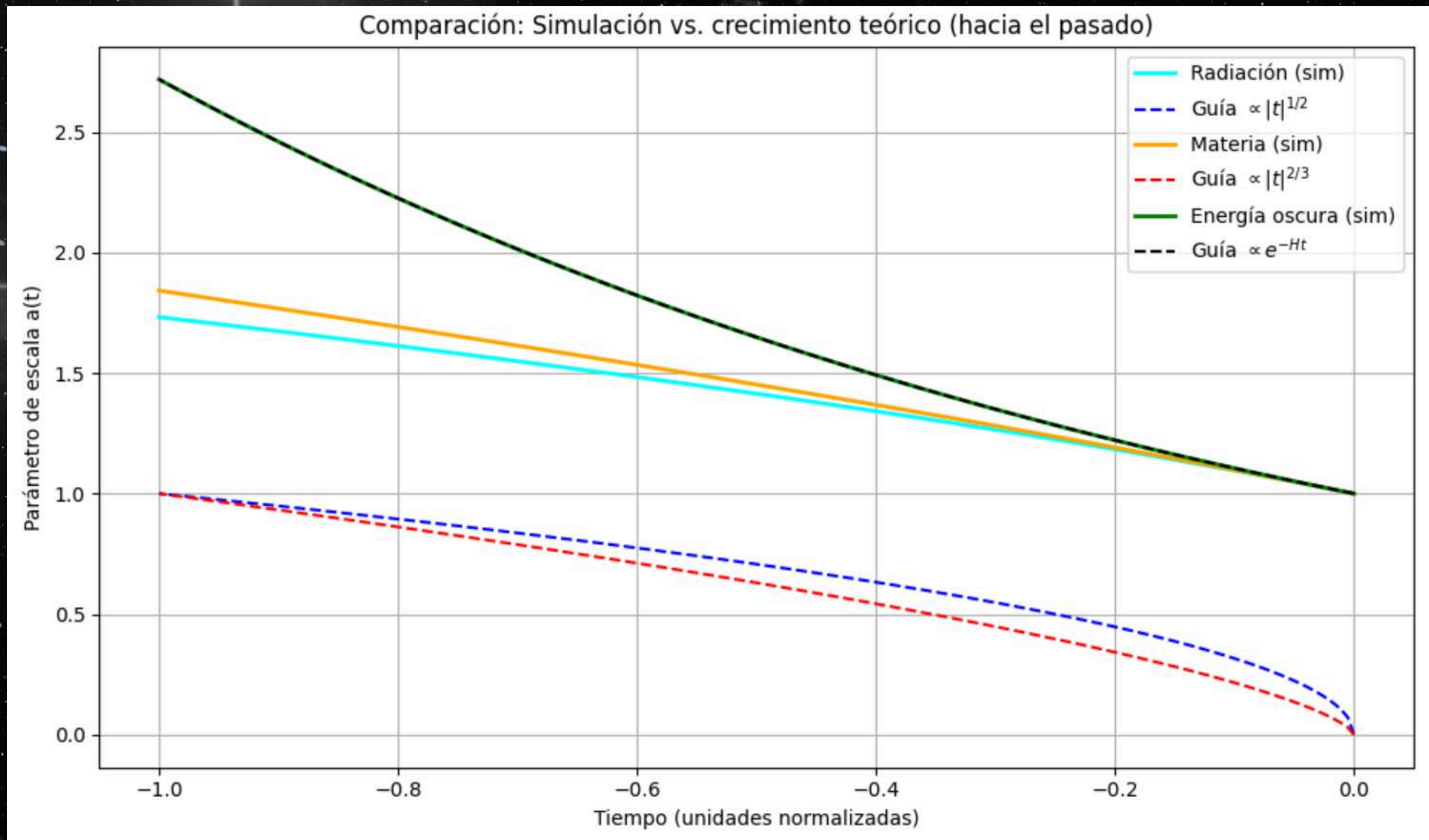
Resumen comparativo de modelos cosmológicos:

Modelo	t final	a final	a dominio $\Omega\Lambda$	t dominio $\Omega\Lambda$	a aceleración	t aceleración
Solo materia	-3.01	3.1215	nan	nan	nan	nan
Materia + radiación	-3.01	3.1215	nan	nan	nan	nan
Materia + energía oscura	-3.01	13.203	0.7539	-0.26	0.5984	-0.44
Modelo completo	-3.01	13.203	0.7539	-0.26	0.5985	-0.44

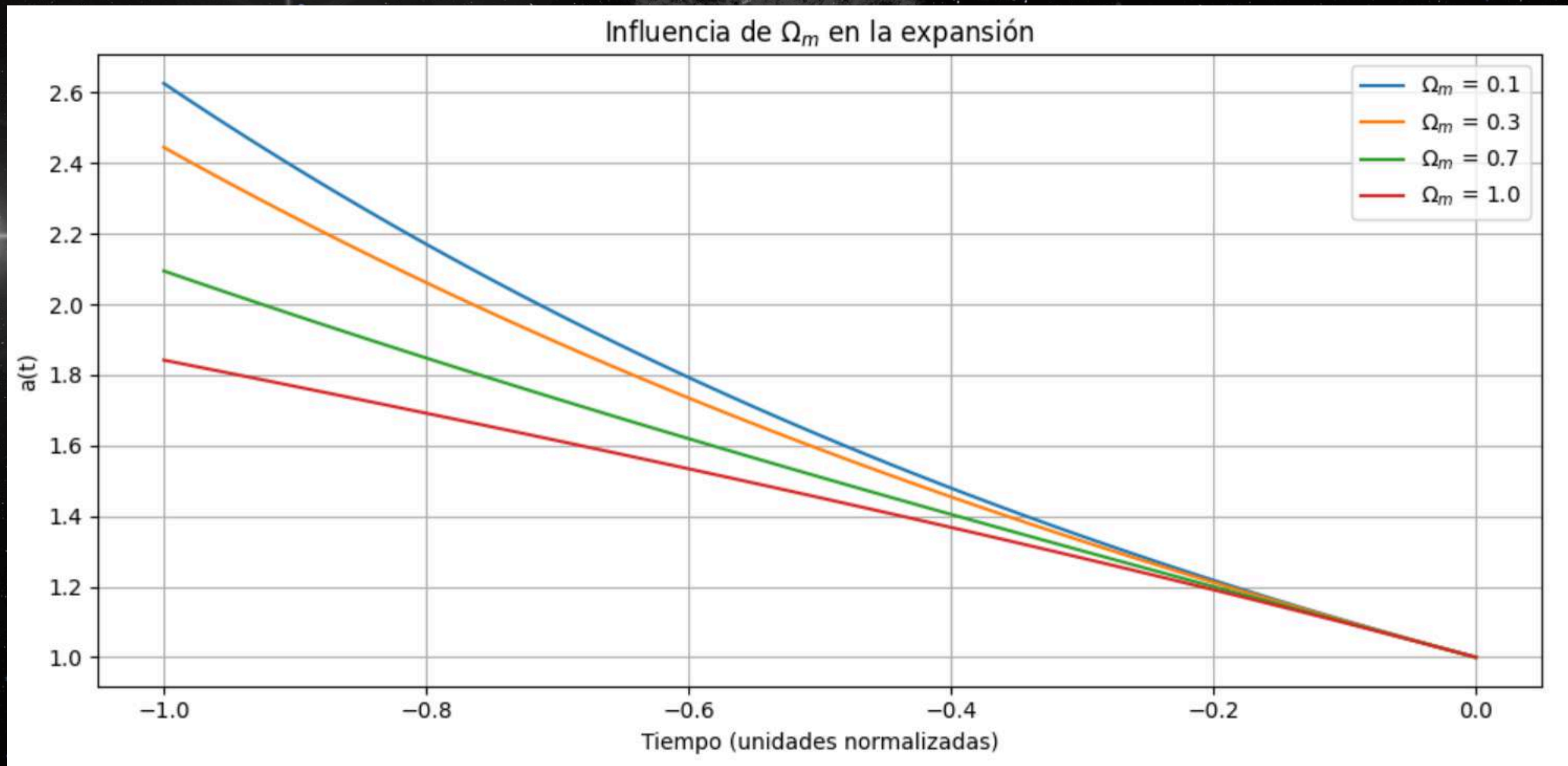
RESULTADOS Y GRÁFICOS



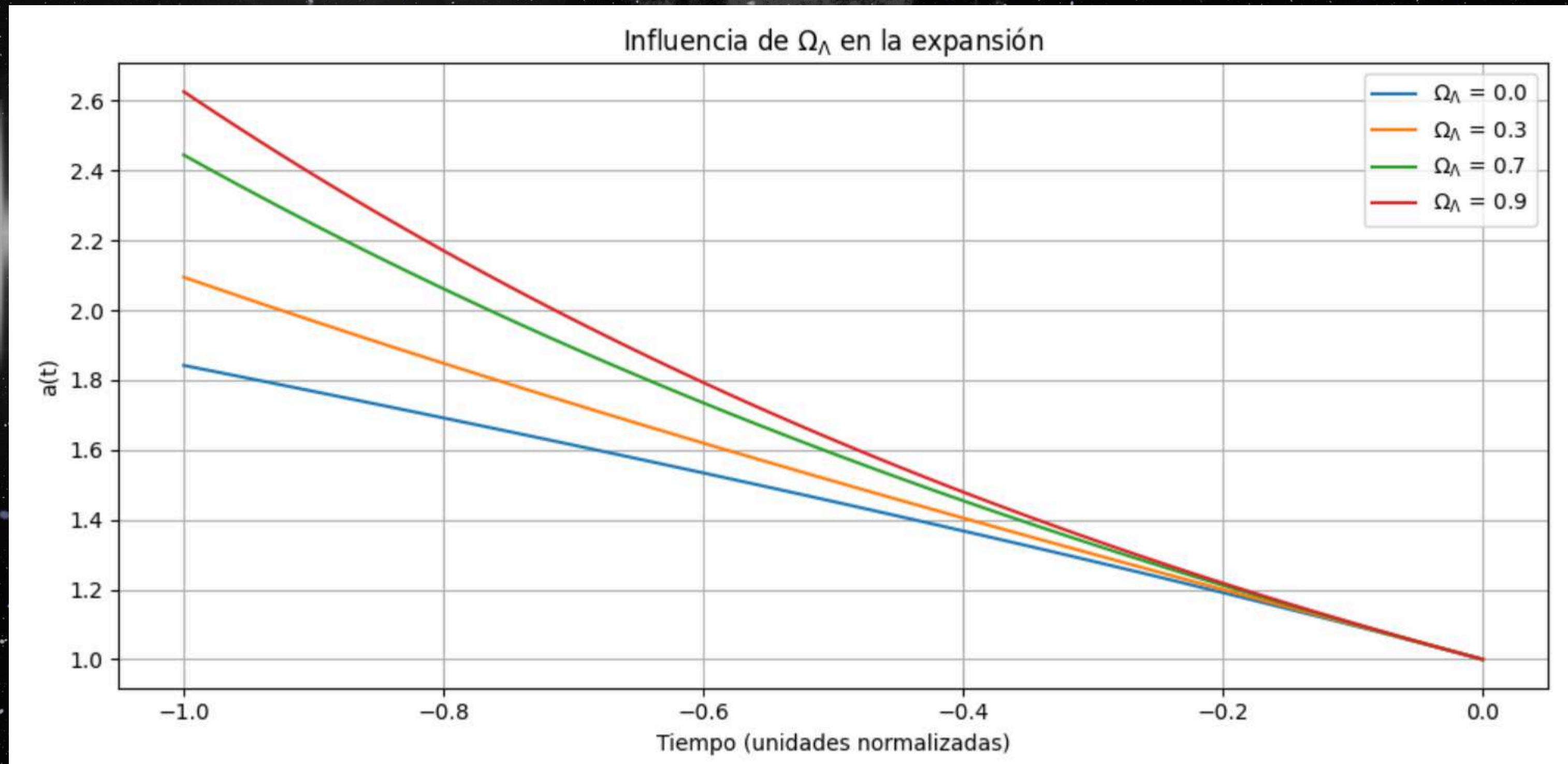
RESULTADOS Y GRÁFICOS



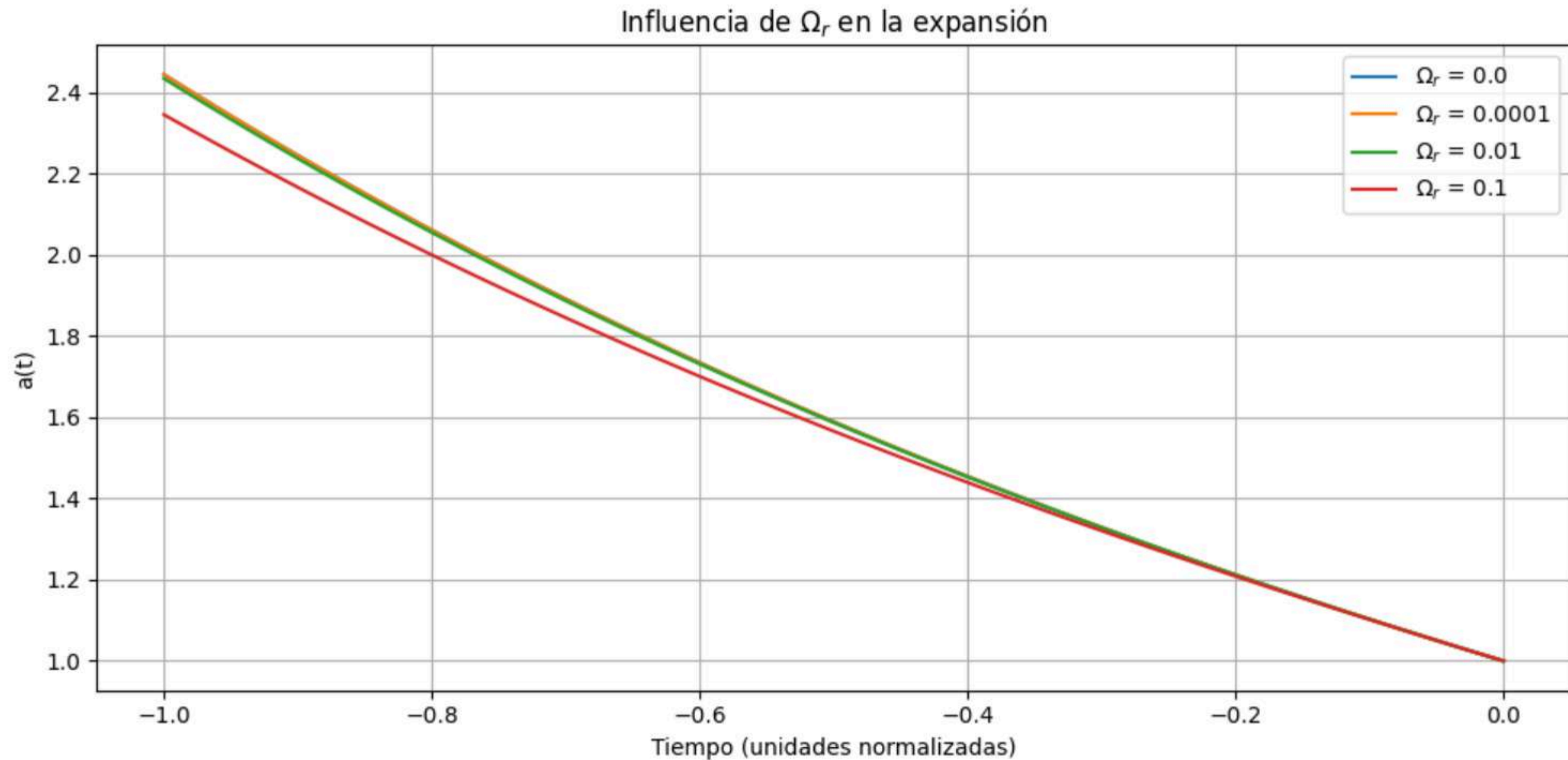
RESULTADOS Y GRÁFICOS



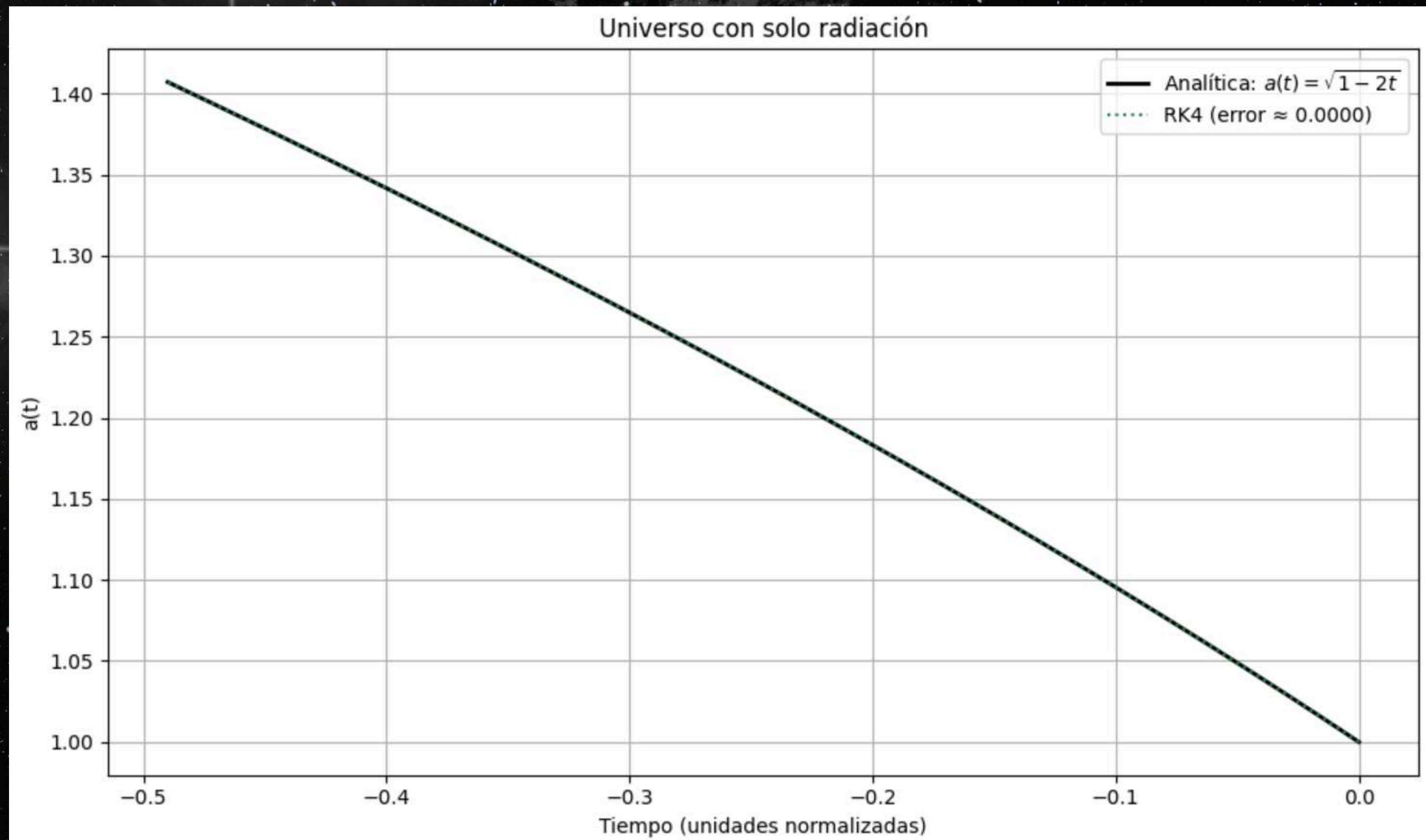
RESULTADOS Y GRÁFICOS



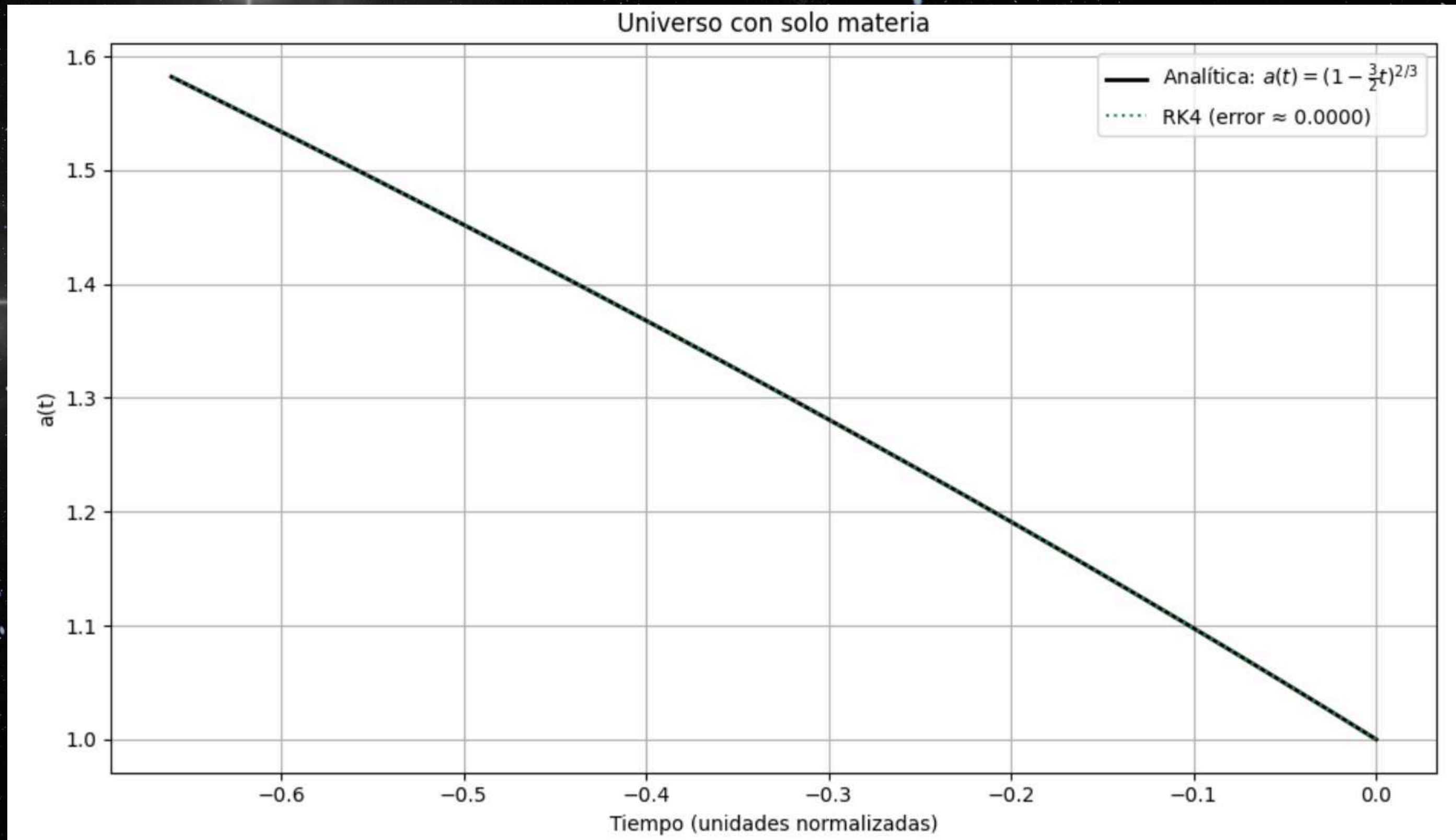
RESULTADOS Y GRÁFICOS



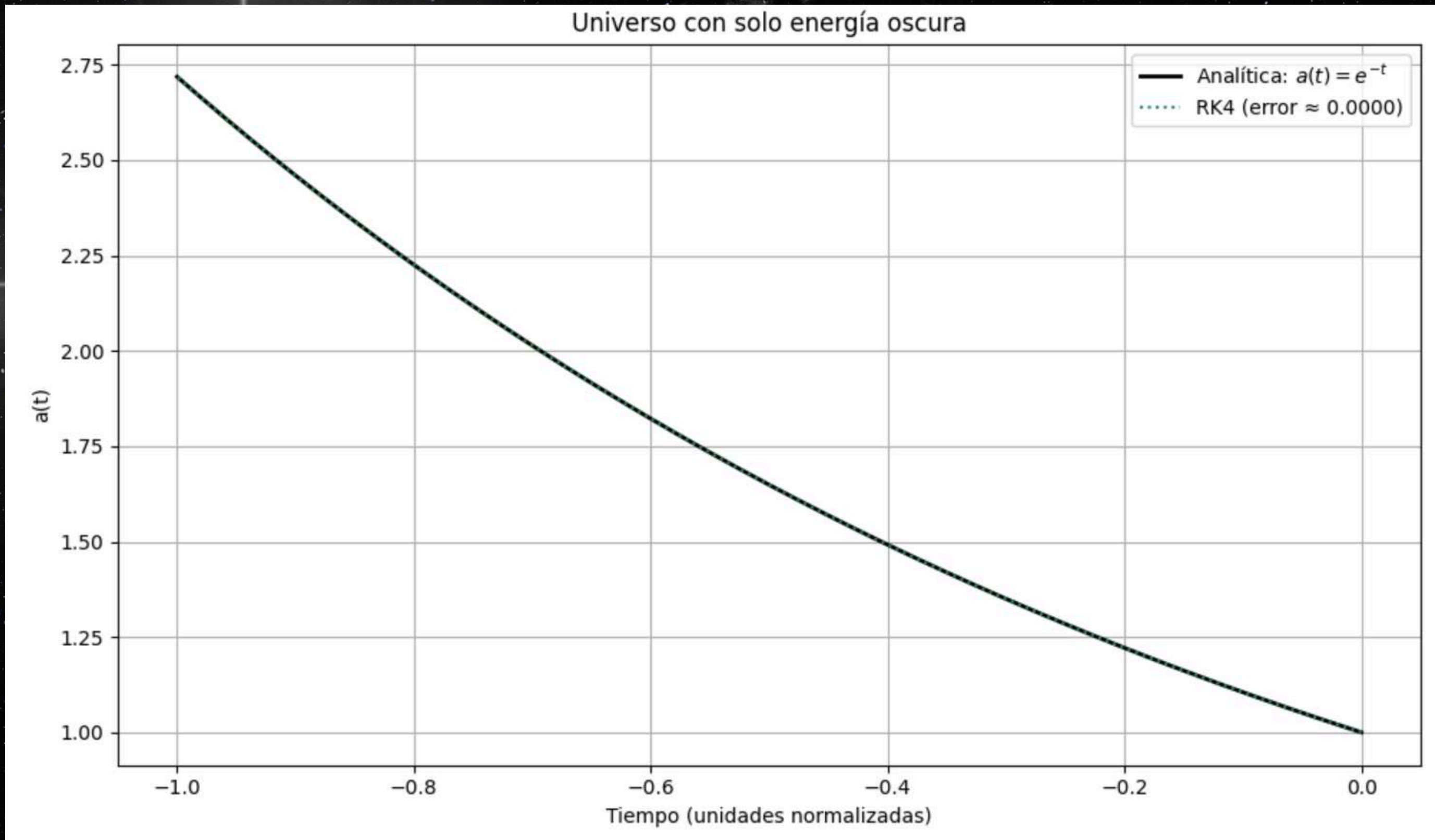
RESULTADOS Y GRÁFICOS



RESULTADOS Y GRÁFICOS



RESULTADOS Y GRÁFICOS



RESULTADOS Y GRÁFICOS

Tabla resumen de errores relativos medios:

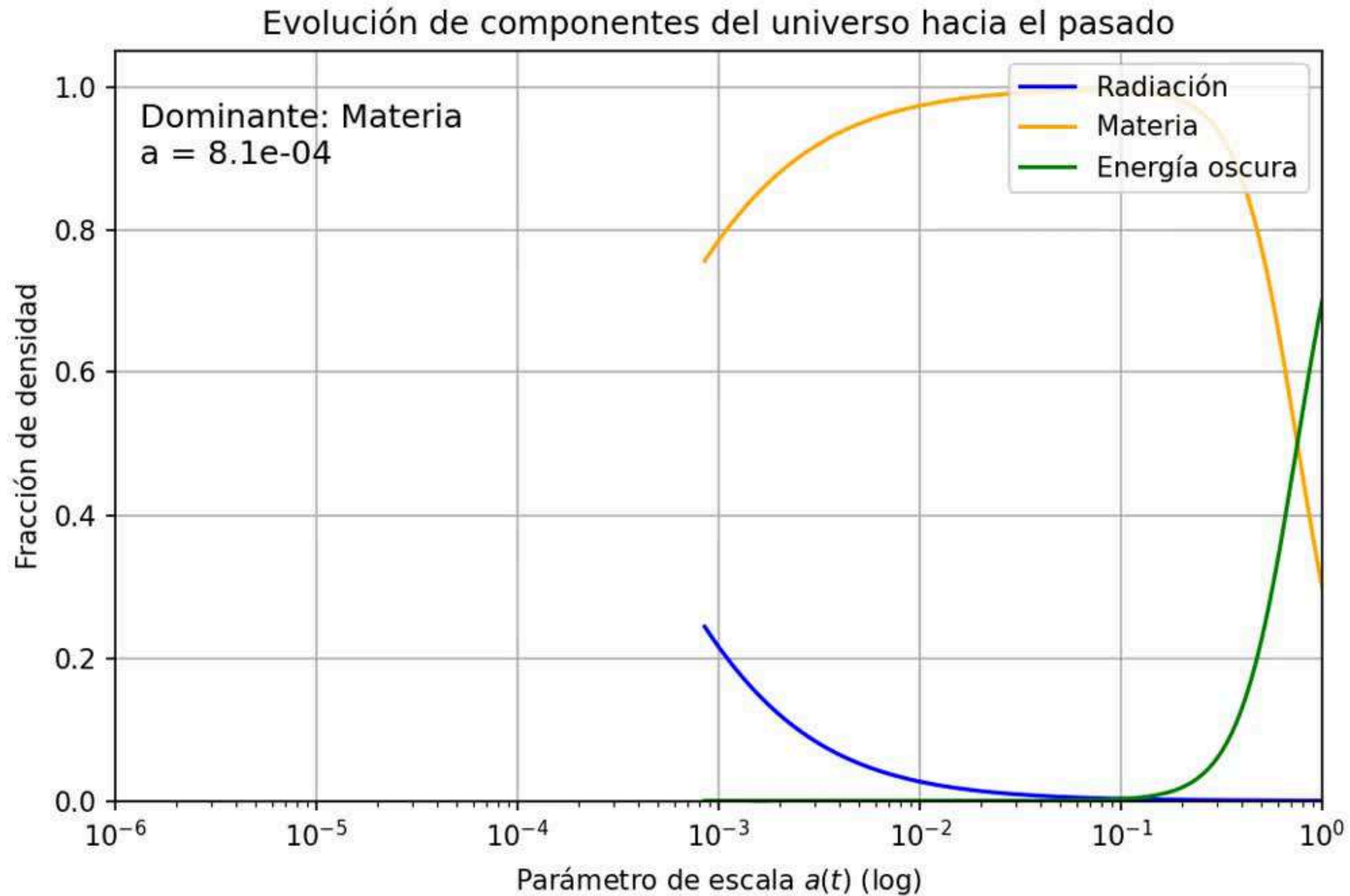
	Modelo	Error RK4
0	Radiación pura	0.000000
1	Materia pura	0.000000
2	Energía oscura pura	0.000002

RESULTADOS Y GRÁFICOS

Tabla comparativa entre RK4 y soluciones analíticas:

	Modelo	$a(t)$ inicial	$a(t)$ final analítica	$a(t)$ final RK4	Error relativo medio
0	Radiación pura	1.000000	1.732051	1.495349	0.067590
1	Materia pura	1.000000	1.842016	1.536852	0.079730
2	Energía oscura pura	1.000000	2.718282	1.732051	0.153840

RESULTADOS Y GRÁFICOS



CONCLUSIONES



- **Coherencia con la teoría:** Los resultados obtenidos a partir de las simulaciones y cálculos muestran un comportamiento consistente con las predicciones teóricas del modelo empleado. Las gráficas reflejan adecuadamente las tendencias esperadas, lo que valida tanto el método de análisis como los supuestos planteados en el desarrollo del proyecto.
- **Comportamiento de las variables principales:** Se evidenció una relación clara entre las variables estudiadas: a medida que se modificaron las condiciones iniciales y los parámetros, las gráficas mostraron respuestas estables y congruentes. Las tablas de valores permitieron cuantificar con precisión estas variaciones, reforzando la confiabilidad de los resultados.
- **Efectividad del método aplicado:** La comparación entre la teoría y los datos obtenidos demostró que el procedimiento empleado fue eficaz. Las gráficas marcaron transiciones y puntos críticos de manera clara, lo que sugiere que el enfoque adoptado puede replicarse para analizar situaciones análogas en contextos similares.
- **Limitaciones y precisión:** Aunque el método fue efectivo, las pequeñas discrepancias encontradas pueden atribuirse a aproximaciones matemáticas y a la sensibilidad de los cálculos numéricos. Estas diferencias son mínimas y no afectan la validez de las conclusiones, pero resaltan la importancia de considerar la incertidumbre en estudios de esta naturaleza.
- **Impacto y proyección:** En conjunto, las gráficas y tablas no solo confirman la validez del análisis realizado, sino que también proporcionan una herramienta visual clara y didáctica para la interpretación de los resultados. Esto le otorga al proyecto un valor adicional en su aplicabilidad pedagógica y en la comprensión de los fenómenos estudiados.

REFERENCIAS

- **Friedmann Equation. (s.f.). <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/Astro/Fried.htm>**
- **Hirvonen, V. (s.f.). The Friedmann Equations explained: A complete guide – profound physics. https://profoundphysics-com.translate.goog/the-friedmann-equations-explained-a-complete-guide/?_x_tr_sl=en_x_tr_tl=es_x_tr_hl=es_x_tr_pto=tc**
- **<https://colab.research.google.com/drive/12ueCADfZy6KQuvqr1T06pskiLRDhKAq2?usp=sharing>**

MUCHAS
GRACIAS