

Anteproyecto: Estudio comparativo del movimiento del péndulo simple y del péndulo físico con densidad no uniforme: formulación exacta, aproximada y resolución numérica

Diego Felipe Díaz Perez (1021673655)

Introducción

El estudio del movimiento oscilatorio es un pilar en la física clásica, ya que este tipo de movimiento aparece en una gran variedad de sistemas mecánicos, eléctricos y hasta biológicos. El péndulo simple y el péndulo físico son dos ejemplos fundamentales que permiten entender los principios de dinámica rotacional, conservación de la energía y aproximaciones matemáticas en sistemas reales.

- El péndulo simple es un modelo ideal que consiste en una masa puntual suspendida por un hilo inextensible y sin masa, que oscila bajo la acción de la gravedad.
- El péndulo físico, por otro lado, considera un cuerpo rígido que oscila alrededor de un punto fijo. Este modelo incluye el momento de inercia del cuerpo y puede representar objetos con distribución de masa no uniforme, algo más cercano a sistemas reales.

En la mayoría de los textos de física se presenta el análisis con la aproximación de ángulo pequeño ($\sin(\theta) \approx \theta$), lo que permite obtener soluciones analíticas sencillas. Sin embargo, para ángulos mayores, esta aproximación introduce un error significativo en el cálculo del periodo y la evolución temporal.

En este trabajo se abordarán dos objetivos principales:

1. Analizar teórica y numéricamente el péndulo simple y el péndulo físico con densidad no uniforme, tanto en su formulación exacta como en la aproximada para ángulos pequeños.
2. Implementar simulaciones numéricas para comparar ambas soluciones y cuantificar las diferencias.

Además, para el péndulo físico se considerará un caso en el que la densidad lineal $\lambda(x)$ sea una función no uniforme que no pueda integrarse analíticamente, de modo que sea necesario emplear integración numérica mediante el método quad de SciPy.

Fundamentos teóricos

Péndulo simple

Ecuación exacta del movimiento:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

Donde L es la longitud del péndulo, g es la aceleración de la gravedad y θ es el desplazamiento angular.

Ecuación con aproximación de ángulo pequeño y su solución analítica :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \quad \theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right)$$

donde θ_0 es el ángulo inicial.

2.2 Péndulo físico con densidad no uniforme

En este caso, el péndulo está compuesto por un cuerpo rígido de longitud L , suspendido de un extremo, cuya densidad lineal varía según una función $\lambda(x)$, donde x es la distancia desde el punto de suspensión. A continuación definiremos algunos parámetros importantes:

$$M = \int_0^L \lambda(x) dx \quad I = \int_0^L \lambda(x) x^2 dx \quad d = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda(x) dx$$

Donde M es la masa total, I el momento de inercia respecto al punto de suspensión y d la distancia del pivote al centro de masa.

Ecuación exacta del movimiento:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{Mgd}{I} \sin \theta = 0$$

Ecuación con aproximación de ángulo pequeño y su solución analítica :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{Mgd}{I} \theta = 0 \quad \theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{Mgd}{I}} t\right)$$

En este caso, debido a que $\lambda(x)$ será elegida como una función que no pueda integrarse de forma analítica se recurrirá a integración numérica con la función quad de la biblioteca SciPy para obtener los valores de M , I y d .

Metodología

1. Formulación matemática

- Derivar las ecuaciones de movimiento para ambos sistemas (simple y físico).
- Identificar las condiciones iniciales a usar en las simulaciones.

2. Definición de la densidad no uniforme

- Seleccionar una función $\lambda(x)$ no integrable analíticamente.
- Calcular M, I y d mediante integración numérica con quad.

3. Resolución numérica de las ecuaciones

- Usar el integrador solve_ivp para resolver las ecuaciones exactas.
- Resolver en paralelo la versión aproximada para ángulos pequeños.

4. Comparación de resultados

- Graficar $\theta(t)$ para la versión exacta y la aproximada.
- Ver como varia cada una a distintos ángulos ($10^\circ, 45^\circ, 90^\circ$).

5. Visualización y análisis

- Generar animaciones del movimiento para ambos casos.
- Interpretar los resultados en términos de física y validez de la aproximación.

Resultados esperados

- Gráficas comparativas que muestren las diferencias entre la solución exacta y la aproximada para distintos ángulos iniciales.
- Animaciones que ilustren el movimiento de los dos péndulos (simple y físico no uniforme).
- Discusión de cómo la distribución de masa afecta el periodo y la dinámica del péndulo físico.

Bibliografía

- Zemansky, M. W., & Sears, F. W. (2009). *Física universitaria con física moderna*. Pearson Educación.
- Herrmann, H. (2011). *Física para ciencias e ingeniería*. McGraw-Hill.
- Péndulo compuesto.(s.f). mecatronica.net. Recuperado en marzo2025, de <https://www.mecatronica.net/emilio/fisica/PenduloCompuesto.htm>