Universidad de Antioquia

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INSTITUTO DE FÍSICA

Anteproyecto: "Simulación de la Expansión del Universo mediante la resolución Numérica de las Ecuaciones de Friedmann"

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3

Métodos Computacionales

Autores:

LÓPEZ VILLANUEVA CANDY VALENTINA

DÍAZ PEREZ DIEGO FELIPE

Julio 2025

Título: "Simulación de la Expansión del Universo mediante la resolución Numérica de las Ecuaciones de Friedmann"

Autores: López Villanueva Candy Valentina (1106226808), Díaz Pérez Diego Felipe (1021673655)

Afiliación: Universidad de Antioquia, Instituto de Física, calle 67 No. 53 - 108 — Medellín - Colombia

Resumen: El presente anteproyecto tiene como objetivo simular numéricamente la expansión del universo mediante la resolución de la ecuación de Friedmann en distintos modelos cosmológicos. Utilizando métodos numéricos como Euler y Runge-Kutta, se pretende estudiar el comportamiento del factor de escala a(t) bajo diferentes condiciones dominadas por materia, radiación y energía oscura. La implementación se realizará en Python, permitiendo una visualización dinámica de la evolución del universo en función del tiempo. Esta simulación proporcionará una aproximación práctica a los modelos teóricos actuales en cosmología y facilitará la comprensión de su comportamiento a gran escala.

Introducción: El estudio de la expansión del universo es uno de los pilares de la cosmología moderna. Las ecuaciones de Friedmann, derivadas de la relatividad general bajo el principio cosmológico, permiten modelar dicha expansión en función de parámetros observables como la constante de Hubble y las densidades de materia, radiación y energía oscura. Resolver estas ecuaciones numéricamente permite simular cómo ha evolucionado el universo en distintas etapas y prever su comportamiento futuro. Este trabajo resulta relevante tanto desde el punto de vista académico como para la comprensión del universo a gran escala.

Objetivos

Objetivo General: Simular la evolución temporal del universo a través del análisis numérico del factor de escala en distintos modelos cosmológicos, usando las ecuaciones de Friedmann.

Objetivos Específicos:

1. Formular la ecuación de Friedmann para un universo plano con diferentes componentes (materia, radiación y energía oscura).

2. Implementar algoritmos numéricos (Euler y Runge-Kutta) para resolver la ecuación diferencial del factor de escala en función del tiempo.

3. Comparar la evolución del universo en distintos escenarios (dominio de la materia, radiación y energía oscura) y analizar los resultados físicos.

Marco Teórico: La teoría cosmológica moderna se basa en el modelo del universo homogéneo e isotrópico descrito por la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Las ecuaciones de Friedmann, derivadas de las ecuaciones de campo de Einstein bajo este modelo, permiten predecir cómo evoluciona el universo dependiendo de sus componentes: materia, radiación y energía oscura.

Las predicciones teóricas clave incluyen:

- En un universo dominado por radiación, el factor de escala crece como $a(t) \propto t^{1/2}$.
- En un universo dominado por materia, se tiene $a(t) \propto t^{2/3}$.
- En un universo dominado por energía oscura (constante cosmológica), el crecimiento es exponencial: $a(t) \propto e^{Ht}$.

Las ecuaciones de Friedmann, derivadas de la Relatividad General bajo el supuesto de un universo homogéneo e isótropo (modelo FLRW), describen la dinámica de la expansión cósmica. La primera ecuación de Friedmann es:

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) - \frac{\kappa c^2}{a(t)^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

donde:

- $a(t)$ es el parámetro de escala del universo,
- $\rho(t)$ es la densidad de energía total,
- κ es el parámetro de curvatura espacial,
- Λ es la constante cosmológica,
- G es la constante de gravitación universal,

- c es la velocidad de la luz.

Adicionalmente, la ecuación de continuidad, que expresa la conservación de la energía, está dada por:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\left(\rho(t) + \frac{p(t)}{c^2}\right) = 0$$

La presión $p(t)$ se relaciona con la densidad $\rho(t)$ a través de la ecuación de estado:

$$p(t) = wc^2\rho(t)$$

donde el parámetro w caracteriza el tipo de componente del universo:

- Radiación: $w = \frac{1}{3} \Rightarrow \rho_r(t) \propto a(t)^{-4}$
- Materia: $w = 0 \Rightarrow \rho_m(t) \propto a(t)^{-3}$
- Energía oscura: $w = -1 \Rightarrow \rho_\Lambda = \text{constante}$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de Friedmann se obtiene una EDO que puede ser resuelta numéricamente para modelar la evolución temporal del parámetro de escala $a(t)$.

Estas soluciones permiten estimar la edad del universo, su ritmo de expansión y su destino final. La comparación de estos modelos con observaciones astronómicas, como la radiación cósmica de fondo o la aceleración de galaxias, ha permitido establecer que el universo actual está en una fase de expansión acelerada, dominada por energía oscura.

Variantes y Objetos de Estudio a tener en cuenta:

Durante el desarrollo del proyecto se tomarán en cuenta distintas configuraciones del contenido del universo:

1. ***Modelos dominados por un solo componente:***

- Solo radiación: universo temprano.
- Solo materia: universo intermedio.
- Solo energía oscura: universo tardío.

2. ***Modelos mixtos:***

Combinaciones realistas como:

- $\Omega_m \approx 0{,}3$,
- $\Omega_r \approx 10^{-4}$,
- $\Omega_\Lambda \approx 0{,}7$

3. ***Constante de Hubble actual:***

- $H_0 \approx 70$ km/s/Mpc

4. ***Condición inicial del factor de escala:***

Se considerará $a(t_0) = 1$ en el presente, y se simulará su evolución hacia el pasado y el futuro.

5. ***Variables de estudio:***

- Evolución de $a(t)$
- Velocidad de expansión $\dot{a}(t)$
- Tiempo en función del factor de escala

Estas variantes permiten comparar la expansión del universo en distintas etapas y evaluar el papel de cada componente.

Metodología:

1. **Definición de condiciones iniciales:** Se fijarán parámetros como $a(t_0)$, H_0 y las fracciones de densidad actuales: Ω_r, Ω_m, Ω_Λ.
2. **Formulación matemática:** Se partirá de la primera ecuación de Friedmann para un universo homogéneo e isotrópico:

   $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_m \left(\frac{1}{a^3}\right) + \Omega_r \left(\frac{1}{a^4}\right) + \Omega_\Lambda\right]$

   donde $a(t)$ es el factor de escala, y Ω_m, Ω_r, Ω_Λ son las densidades relativas de materia, radiación y energía oscura.

3. **Planteamiento de la EDO:** Se reorganiza la primera ecuación de Friedmann para obtener:

$$\dot{a}(t) = a(t)\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho(t) - \frac{\kappa c^2}{a(t)^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}}$$

   Esta expresión será discretizada e integrada numéricamente.

4. **Implementación numérica:** Se usará Python con métodos como Euler o Runge-Kutta de cuarto orden para resolver la ecuación y graficar $a(t)$ en distintos modelos cosmológicos.

5. **Comparación de modelos:** Se simularán escenarios con y sin constante cosmológica para comparar el comportamiento de la expansión.

6. **Análisis:** Se compararán los resultados obtenidos en distintos regímenes del universo (dominado por materia, radiación o energía oscura).

Resultados Esperados:

Se espera obtener una simulación numérica precisa del factor de escala $a(t)$ en función del tiempo para diferentes configuraciones cosmológicas. Los resultados permitirán:

- Observar la transición del universo desde un estado dominado por radiación a uno dominado por materia, y finalmente por energía oscura.
- Confirmar el comportamiento teórico esperado en cada régimen (crecimiento como $t^{1/2}$, $t^{2/3}$, e^{Ht}).
- Comparar la influencia de los parámetros cosmológicos en la expansión.
- Evaluar la sensibilidad de los métodos numéricos al paso temporal y al método elegido (Euler vs. Runge-Kutta).

Estos resultados contribuirán a una mejor comprensión del comportamiento dinámico del universo y la relación entre sus componentes fundamentales. Además, se espera obtener la evolución del parámetro de escala $a(t)$ en diferentes épocas del universo: dominadas por radiación, materia y energía oscura. Se visualizará el cambio en el ritmo de expansión —desde una fase desacelerada hasta una acelerada— dependiendo de los parámetros cosmológicos considerados. Los resultados permitirán analizar cuantitativamente cómo las diferentes componentes afectan la dinámica del universo.

Referencias:

Friedmann Equation. (s.f.). http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees /Astro/Fried.html

Hirvonen, V. (s.f.). The Friedmann Equations explained: A complete guide – profound physics. https://profoundphysics-com.translate.goog/the-friedmann-equations-explained-a-complete-guide/?$_{xt}r_sl = en_{xt}r_tl = es_{xt}r_hl = es_{xt}r_pto = tc$