1.数理统计（孙海燕）

例 6.3.1 对某地区农村的 6 名 2 周岁男婴进行抽测，样本数据如表 6.3.1 所列。假设三项指标服从三元正态分布，已知该地区城市男婴的三项指标的均值为 $\boldsymbol{\mu}_0=(90,58,16)'$。在显著性水平 $\alpha=0.01$ 下，检验该地区农村男婴与城市男婴三项指标是否有显著差异？

表 6.3.1 某地农村男婴的体格测量数据

样本号	身高/cm	胸围/cm	上半臂围/cm
1	78	60.6	16.5
2	76	58.1	12.5
3	92	63.2	14.5
4	81	59.0	14.0
5	81	60.8	15.5
6	84	59.5	14.0

解 假设检验问题为 $H_0:\boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}_0, H_1:\boldsymbol{\mu}\neq\boldsymbol{\mu}_0$。经计算可知

$$\bar{\boldsymbol{x}}=\begin{pmatrix}82.0\\60.2\\14.5\end{pmatrix},\quad \bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_0=\begin{pmatrix}-8.0\\2.2\\-1.5\end{pmatrix}$$

样本协方差阵为

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{n-1}=\frac{1}{n-1}\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}31.600 & 8.040 & 0.500\\ 8.040 & 3.172 & 1.310\\ 0.500 & 1.310 & 1.900\end{pmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{n-1}^{-1}=\begin{pmatrix}0.186\,30 & -0.631\,89 & 0.386\,65\\ -0.631\,89 & 2.584\,01 & -1.615\,32\\ 0.386\,65 & -1.615\,32 & 1.538\,29\end{pmatrix}$$

$$T^2=n(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_0)'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{n-1}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{\mu}_0)=420.445\,2$$

查附录 D 可得 $F_{1-0.01}(3,3)=29.5$，于是临界值 $T_{1-\alpha}^2=\frac{3\times5}{3}F_{1-0.01}(3,3)=147.5$。根据样本数据计算 $T^2=420.445\,2>T_{1-\alpha}^2$，所以由式(6.3.5)知，在显著性水平 $\alpha=0.01$ 下，拒绝 H_0，即认为该地区农村男婴与城市 2 岁男婴上述三项指标的均值存在显著差异。

2.数理统计（孙海燕）

例 6.3.2 对某地区两周岁婴儿的健康状况调查中，分别抽查 6 名男婴和 9 名女婴作为样本，已知男婴的样本均值和样本离差分别为

$$\bar{\boldsymbol{x}}=(82.0,60.2,14.5)',\quad (n_1-1)\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_1=\begin{pmatrix}152.0 & 40.20 & 2.50\\ 40.20 & 15.86 & 6.55\\ 2.50 & 6.55 & 9.50\end{pmatrix}$$

女婴的样本均值和样本离差分别为

$$\bar{\boldsymbol{y}}=(76.0,58.4,13.5)',\quad (n_2-1)\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_2=\begin{pmatrix}196.00 & 45.10 & 34.50\\ 45.10 & 15.76 & 11.65\\ 34.50 & 11.65 & 14.50\end{pmatrix}$$

在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，检验男婴与女婴的均值向量是否有著差异？

解 假设检验问题为 $H_0:\boldsymbol{\mu}_1=\boldsymbol{\mu}_2, H_1:\boldsymbol{\mu}_1\neq\boldsymbol{\mu}_2$。

设两个总体相互独立，且有相同的未知协方差阵 $\boldsymbol{\Sigma}$。计算可知 $\bar{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{y}}=(6.0,1.8,1.0)'$，

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}=\frac{(n_1-1)\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_1+(n_2-1)\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_2}{n_1+n_2-2}=\begin{pmatrix}26.7692 & 6.5615 & 2.8462\\ 6.5615 & 2.4323 & 1.4000\\ 2.8462 & 1.4000 & 1.8462\end{pmatrix}$$

$T^2=\dfrac{n_1n_2}{n_1+n_2}(\bar{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{y}})'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}(\bar{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{y}})=5.3404$。查附录 D 有 $F_{0.95}(3,11)=3.59$，因此临界值为

$$T^2_{1-\alpha}=\frac{p(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2-p-1}F_{1-\alpha}(p,n_1+n_2-p-1)=\frac{3\times13}{11}\times3.59=12.7282$$

由于 $T^2<T^2_{0.95}$，因此 $T^2\notin W$，不能拒绝 H_0，可以认为两个总体的均值向量无显著差异。

3.数理统计（孙海燕）

例 6.4.1 设 $\boldsymbol{x}\sim N_3(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$，其中 $\boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}16 & -4 & 2\\ -4 & 4 & -1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$。在给定 x_1+2x_3 时，求 $\begin{pmatrix}x_2-x_3\\ x_1\end{pmatrix}$ 的条件分布。

解 令 $\boldsymbol{y}_1=\begin{pmatrix}x_2-x_3\\ x_1\end{pmatrix}$，$y_2=x_1+2x_3$，则 $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$，由性质 6.1.2 知 $\boldsymbol{y}\sim N_3(E(\boldsymbol{y}),\mathrm{Var}(\boldsymbol{y}))$，其中

$$E(\boldsymbol{y})=E\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ -3\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Var}(\boldsymbol{y})=\mathrm{Var}\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}16&-4&2\\-4&4&-1\\2&-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\1&0&2\end{pmatrix}'$$

$$=\begin{pmatrix}10&-6&-16\\-6&16&20\\-16&20&40\end{pmatrix}$$

所以，由定理 6.4.1 知，在给定 x_1+2x_3 时，$\begin{pmatrix}x_2-x_3\\ x_1\end{pmatrix}\sim N_2(E(\boldsymbol{y}_1\mid y_2),\mathrm{Var}(\boldsymbol{y}_1\mid y_2))$，其中

$$E(\boldsymbol{y}_1\mid y_2)=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-16\\20\end{pmatrix}\times\frac{1}{40}\times(y_2+3)=\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}x_1-\frac{4}{5}x_3+\frac{4}{5}\\ \frac{1}{2}x_1+x_3+\frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Var}(\boldsymbol{y}_1\mid y_2)=\begin{pmatrix}10&-6\\-6&16\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-16\\20\end{pmatrix}\times\frac{1}{40}\times(-16\quad 20)=\begin{pmatrix}3.6&2\\2&6\end{pmatrix}$$

补充定理 6.4.1 即：

定理 6.4.1 设 $\boldsymbol{x}\sim N_p(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$，$\boldsymbol{\Sigma}>\boldsymbol{0}$，则给定 $\boldsymbol{x}_2$ 时，$\boldsymbol{x}_1$ 的条件分布为 $N_k(\boldsymbol{\mu}_{1\cdot 2},\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2})$，其中

$$\boldsymbol{\mu}_{1\cdot 2}=\boldsymbol{\mu}_1+\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}(\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{\mu}_2),\quad \boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}=\boldsymbol{\Sigma}_{11}-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}\tag{6.4.1}$$

同样，在给定 $\boldsymbol{x}_1$ 时，$\boldsymbol{x}_2$ 的条件分布为 $N_{p-k}(\boldsymbol{\mu}_{2\cdot 1},\boldsymbol{\Sigma}_{22\cdot 1})$，其中

$$\boldsymbol{\mu}_{2\cdot 1}=\boldsymbol{\mu}_2+\boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{\mu}_1),\quad \boldsymbol{\Sigma}_{22\cdot 1}=\boldsymbol{\Sigma}_{22}-\boldsymbol{\Sigma}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12}\tag{6.4.2}$$

证明 由 $\boldsymbol{\Sigma}>\boldsymbol{0}$ 可知 $\boldsymbol{\Sigma}_{11}>\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{\Sigma}_{22}>\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}>\boldsymbol{0}$。令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_k&-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{I}_{p-k}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}x_2\\ \boldsymbol{x}_2\end{pmatrix}\stackrel{\triangle}{=\!=}\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{y}_2\end{pmatrix}$$

则由性质 6.1.2 知，$\boldsymbol{y}_1\sim N_k(\boldsymbol{\mu}_1-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\mu}_2,\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2})$。

由例 6.1.1 可知 $\boldsymbol{y}_1$ 与 $\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{x}_2$ 相互独立，因此 $f_y(\boldsymbol{y})=f_{y_1}(\boldsymbol{y}_1)f_{y_2}(\boldsymbol{y}_2)$。注意到变换雅可比行列式 $J(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})=|\boldsymbol{A}|=1$，则 $\boldsymbol{x}$ 的联合密度可以表示为

$$f_x(\boldsymbol{x})=f_y(\boldsymbol{y})|J(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})|=f_y(\boldsymbol{y})=f_{y_1}(\boldsymbol{y}_1)f_{y_2}(\boldsymbol{y}_2)=f_{y_1}(\boldsymbol{y}_1)f_{x_2}(\boldsymbol{x}_2)$$

故给定 $\boldsymbol{x}_2$ 时，$\boldsymbol{x}_1$ 的条件密度函数为

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x}_1\mid\boldsymbol{x}_2)&=\frac{f_x(\boldsymbol{x})}{f_{x_2}(\boldsymbol{x}_2)}=f_{y_1}(\boldsymbol{y}_1)\\&=(2\pi)^{-\frac{k}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{\mu}_1+\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\mu}_2)'\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}^{-1}(\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{\mu}_1+\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\mu}_2)\right\}\end{aligned}$$

将 $\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{x}_2$ 代入，可得

$$f(\boldsymbol{x}_1\mid\boldsymbol{x}_2)=(2\pi)^{-\frac{k}{2}}|\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}|^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{\mu}_{1\cdot 2})'\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2}^{-1}(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{\mu}_{1\cdot 2})\right\}$$

即给定 $\boldsymbol{x}_2$ 时，$\boldsymbol{x}_1\sim N_p(\boldsymbol{\mu}_{1\cdot 2},\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot 2})$。

4.数理统计（孙海燕）

会

例 6.4.2 设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)'\sim N_3(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$，其中 $\boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}10\\4\\7\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}9&-3&-3\\-3&5&1\\-3&1&5\end{pmatrix}$。求 x_1 对 $(x_1,x_2)'$ 的回归函数。

解 x_1 对 $(x_1,x_2)'$ 的回归函数即 $E(x_1\mid(x_1,x_2)')$。依据条件期望计算公式可得

$$E(x_1\mid(x_1,x_2)')=10+(-3\quad -3)\begin{pmatrix}5&1\\1&5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x_2-4\\x_3-7\end{pmatrix}=15.5-0.5x_2-0.5x_3$$

因此，x_1 对 $(x_1,x_2)'$ 的回归函数为 $x_1=15.5-0.5x_2-0.5x_3$。

5.数理统计（孙海燕）

会

例 6.4.3 设 $\boldsymbol{x}\sim N_3(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$，其中 $\boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}10\\4\\7\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}9&-3&-3\\-3&5&1\\-3&1&5\end{pmatrix}$。求 x_1 与 x_2 的相关系数 ρ_{12} 和给定 x_3 条件下，x_1 与 x_2 的偏相关系数 $\rho_{12\cdot3}$。

解 x_1 与 x_2 的相关系数 $\rho_{12}=\dfrac{-3}{\sqrt{9}\sqrt{5}}=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$。为求 $\rho_{12\cdot3}$，先计算偏协方差阵：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma}_{11\cdot2}&=\boldsymbol{\Sigma}_{11}-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{21}\\&=\begin{pmatrix}9&-3\\-3&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}\times\frac{1}{5}\times(-3\quad 1)=\frac{12}{5}\begin{pmatrix}3&-1\\-1&2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

所以 $\rho_{12\cdot3}=\dfrac{\sigma_{12\cdot3}}{\sqrt{\sigma_{11\cdot3}\sigma_{22\cdot3}}}=-\dfrac{1}{\sqrt{6}}$。

6.数理统计（孙海燕）

会

1. 设 $x_1\sim N(0,1)$，令

$$x_2=\begin{cases}-x_1, & -1\leqslant x_1\leqslant 1\\ x_1, & |x_1|>1\end{cases}$$

证明(1) $x_2\sim N(0,1)$；(2) $(x_1,x_2)'$ 不服从二元正态分布。

1. 设 $x_1 \sim N(0,1)$，令

$$x_2=\begin{cases}-x_1, & -1 \leqslant x_1 \leqslant 1 \\ x_1, & |x_1|>1\end{cases}$$

证明 (1) $x_2 \sim N(0,1)$；(2) $(x_1,x_2)'$ 不服从二元正态分布。

证明 (1) 方法一 分布函数法。

当 $x<-1$ 时，$P\{x_2 \leqslant x\}=P\{x_1 \leqslant x\}=\Phi(x)$；当 $-1 \leqslant x<1$ 时，

$$\begin{aligned}P\{x_2 \leqslant x\} &= P\{x_2 \leqslant -1\}+P\{-1<x_2 \leqslant x\} \\ &= P\{x_1 \leqslant -1\}+P\{-1<-x_1 \leqslant x\} \\ &= P\{x_1 \leqslant -1\}+P\{-x<x_1 \leqslant 1\} \\ &= \Phi(-1)+\Phi(1)-\Phi(-x)\end{aligned}$$

由 $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$ 可得 $P\{x_2 \leqslant x\}=\Phi(x)$；当 $x \geqslant 1$ 时，有

$$\begin{aligned}P\{x_2 \leqslant x\} &= P\{x_2 \leqslant -1\}+P\{-1<x_2 \leqslant 1\}+P\{1<x_2 \leqslant x\} \\ &= P\{x_1 \leqslant -1\}+P\{-1<-x_1 \leqslant 1\}+P\{1<x_1 \leqslant x\} \\ &= P\{x_1 \leqslant x\} \\ &= \Phi(x)\end{aligned}$$

所以，对任意实数 $x \in \mathbf{R}$，都有 $P\{x_2 \leqslant x\}=\Phi(x)$，于是 $x_2 \sim N(0,1)$。

方法二 密度函数公式法。

令 $u=g(v)=\begin{cases}-v, & |v| \leqslant 1 \\ v & |v|>1\end{cases}$，则当 $|u| \leqslant 1$ 时，g 的反函数为 $v=h_1(u)=-u$；当 $|u|>1$ 时，g 的反函数为 $v=h_2(u)=u$。由概率论中随机变量函数变换的密度函数公式，有 $x_2=g(x_1)$ 的密度函数为

$$\begin{aligned}f_{x_2}(u) &= f_{x_1}(h_1(u))\,|h_1'(u)|\,I_{\{|u| \leqslant 1\}}(u)+f_{x_1}(h_2(u))\,|h_2'(u)|\,I_{\{|u|>1\}}(u) \\ &= f_{x_1}(-u) I_{\{|u| \leqslant 1\}}(u)+f_{x_1}(u) I_{\{|u|>1\}}(u) \\ &= f_{x_1}(u)\end{aligned}$$

上面最后一个等式成立是因为标准正态分布的密度函数 $f_{x_1}(u)$ 是偶函数，因而 x_2 与 x_1 同分布，即 $x_2 \sim N(0,1)$。

方法三 特征函数法。

由已知条件可知随机变量 x_1 的特征函数 $\varphi_{x_1}(t)=\exp\left\{\frac{1}{2}t^2\right\}$，记

$$x_2=g(x_1)=\begin{cases}-x_1, & |x_1| \leqslant 1 \\ x_1, & |x_1|>1\end{cases}$$

则 x_2 的特征函数为

$$\begin{aligned}
\varphi_{x_2}(t) &= E(\exp\{itx_2\}) \\
&= E(\exp\{itg(x_1)\}) \\
&= E\{\exp\{itg(x_1)\}[I_{\{|x_1|\leqslant 1\}}(x_1) + I_{\{|x_1|>1\}}(x_1)]\} \\
&= E[\exp\{-itx_1\}I_{\{|x_1|\leqslant 1\}}(x_1)] + E[\exp\{itx_1\}I_{\{|x_1|>1\}}(x_1)] \\
&= E[\exp\{itx_1\}I_{\{|x_1|\leqslant 1\}}(x_1)] + E[\exp\{itx_1\}I_{\{|x_1|>1\}}(x_1)] \\
&= E[\exp\{itx_1\}]
\end{aligned}$$

即 $\varphi_{x_2}(t) = \varphi_{x_1}(t) = \exp\left\{-\frac{1}{2}t^2\right\}$，因而 $x_2 \sim N(0,1)$。

（2）反证法。

假设 (x_1, x_2) 服从二元正态分布，令 $Y = x_1 - x_2$，则由性质 6.1.2 可知 Y 服从一元正态分布。由 Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 是连续函数，有 $P\{Y=0\} = F_Y(y) - F_Y(y-0) = 0$。然而

$$P\{Y=0\} = P\{x_1 - x_2 = 0\} = P\{|x_1| > 1\} = 2(1 - \Phi(1)) = 0.317\,3$$

这与 $P\{Y=0\}=0$ 相矛盾，因而 (x_1, x_2) 不服从二元正态分布。

7.数理统计（孙海燕）

5. 设 $\boldsymbol{x} \sim N_{2p}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$，令 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{x}_1$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的前 p 个分量，$\boldsymbol{x}_2$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的后 p 个分量，同时将 $\boldsymbol{\mu}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 进行相应分块，记为 $\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_1 & \boldsymbol{\Sigma}_2 \\ \boldsymbol{\Sigma}_2 & \boldsymbol{\Sigma}_1 \end{pmatrix}$。

（1）证明 $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ 和 $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ 相互独立；

（2）求 $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ 和 $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ 的分布。

证明 （1）记 $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_p & \boldsymbol{I}_p \\ \boldsymbol{I}_p & -\boldsymbol{I}_p \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，由性质 6.1.2 知，$\boldsymbol{y} \sim N_{2p}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A}')$，其中

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_p & \boldsymbol{I}_p \\ \boldsymbol{I}_p & -\boldsymbol{I}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\mu}_2 \\ \boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A}' &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_p & \boldsymbol{I}_p \\ \boldsymbol{I}_p & -\boldsymbol{I}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_1 & \boldsymbol{\Sigma}_2 \\ \boldsymbol{\Sigma}_2 & \boldsymbol{\Sigma}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_p & \boldsymbol{I}_p \\ \boldsymbol{I}_p & -\boldsymbol{I}_p \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2(\boldsymbol{\Sigma}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_2) & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & 2(\boldsymbol{\Sigma}_1 - \boldsymbol{\Sigma}_2) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

由上式可知，$\boldsymbol{y}_1$ 与 $\boldsymbol{y}_2$ 的协方差阵 $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2) = \boldsymbol{0}$，所以由正态分布性质 6.1.3 可知 $\boldsymbol{y}_1$ 与 $\boldsymbol{y}_2$ 相互独立，即 $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ 与 $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ 相互独立。

（2）由于 $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = (\boldsymbol{I}_p \quad \boldsymbol{I}_p)\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 = (\boldsymbol{I}_p \quad -\boldsymbol{I}_p)\boldsymbol{x}$，所以由性质 6.1.2 有

$$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_1 + \boldsymbol{\mu}_2, 2(\boldsymbol{\Sigma}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_2)), \quad \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \sim N_p(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2, 2(\boldsymbol{\Sigma}_1 - \boldsymbol{\Sigma}_2))$$

8.数理统计（孙海燕）

会

7. 设 $\boldsymbol{x} \sim N_3(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$，其中 $\boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}$。

(1) 求 $2x_1-x_2+3x_3$ 的分布。

(2) 求常数 a 与 b，使 x_3 与 $x_3+ax_1+bx_2$ 相互独立。

解 (1) 记 $y_1=2x_1-x_2+3x_3$，$\boldsymbol{a}=(2\ \ -1\ \ 3)$，则 $y_1=\boldsymbol{ax}$。由性质 6.1.2 可知 $y_1 \sim N(\boldsymbol{a\mu},\boldsymbol{a\Sigma a}')$，其中

$$\boldsymbol{a\mu}=(2\ \ -1\ \ 3)\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}=10$$

$$\boldsymbol{a\Sigma a}'=(2\ \ -1\ \ 3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=29$$

所以 $2x_1-x_2+3x_3 \sim N(10,29)$。

(2) 记 $y_1=x_3$，$y_2=x_3+ax_1+bx_2$，$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\a&b&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ax}$。由性质 6.1.2 可知，$\boldsymbol{y} \sim N_2(\boldsymbol{A\mu},\boldsymbol{A\Sigma A}')$，因而由性质 6.1.3 可知 y_1 与 y_2 相互独立的充分必要条件是 $\mathrm{Cov}(y_1,y_2)=0$。由于

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(y_1,y_2)&=\mathrm{Cov}(x_3,x_3+ax_1+bx_2)\\&=\mathrm{Cov}(x_3,x_3)+a\mathrm{Cov}(x_3,x_1)+b\mathrm{Cov}(x_3,x_2)\\&=a+2b+3\end{aligned}$$

令 $a+2b+3=0$，于是对满足条件 $a+2b+3=0$ 的任意 a、b，有 x_3 与 $x_3+ax_1+bx_2$ 相互独立，或对任意实数 $b\in\mathbf{R}$，都有 x_3 与 $x_3-(2b+3)x_1+bx_2$ 相互独立。

9.应用多元统计分析

会

记公式

例 2.2.1（二元正态分布） 设 $X=\begin{bmatrix}X_1\\X_2\end{bmatrix}\sim N_2(\mu,\Sigma)$，记

$$\mu=\begin{bmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{bmatrix},\quad \Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_{11}&\sigma_{12}\\\sigma_{21}&\sigma_{22}\end{bmatrix}\overset{\text{def}}{=\!=}\begin{bmatrix}\sigma_1^2&\rho\sigma_1\sigma_2\\\rho\sigma_1\sigma_2&\sigma_2^2\end{bmatrix}>0$$

（即 $\sigma_1>0,\sigma_2>0,|\rho|<1$）.

(1) 试写出 X 的联合密度函数和边缘密度函数；

(2) 试说明 ρ 的统计意义.

解 (1) 因 $|\Sigma|=\sigma_1^2\sigma_1^2(1-\rho^2)$，以及

$$\Sigma^{-1}=\frac{1}{\sigma_1^2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\begin{bmatrix}\sigma_2^2&-\rho\sigma_1\sigma_2\\-\rho\sigma_1\sigma_2&\sigma_1^2\end{bmatrix},$$

因此二维正态随机向量 X 的联合密度函数为

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2) &= \frac{1}{2\pi|\Sigma|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)\right] \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. -2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

由性质 2 即得 $X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$X_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

(2) 因 $\mathrm{Cov}(X_1,X_2)=\sigma_{12}=\rho\sigma_1\sigma_2$，而 X_1 与 X_2 的相关系数

$$
\rho(X_1,X_2)=\frac{\mathrm{Cov}(X_1,X_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)}\sqrt{\mathrm{Var}(X_2)}}=\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2}=\rho.
$$

故二元正态分布的参数 ρ 就是两个分量的相关系数. 显然：

当 $\rho=0$ 时，$f(x_1,x_2)=f_1(x_1)\cdot f_2(x_2)$，即 X_1 和 X_2 相互独立.

当 $|\rho|=1$ 时，$|\Sigma|=0$ (Σ 退化)，则存在非零向量 $t=(t_1,t_2)'$，使得 $\Sigma t=0$，从而 $t'\Sigma t=0$，故而有

$$
\mathrm{Var}[t'(X-\mu)]=t'\Sigma t=0.
$$

这表示 $P\{t'(X-\mu)=0\}=1$，即 $t_1(X_1-\mu_1)+t_2(X_2-\mu_2)=0$ 以概率 1 成立；反之，若 X_1 和 X_2 以概率 1 存在线性相关关系，则 $|\rho|=1$.

当 $\rho>0$ 时我们称 X_1 和 X_2 存在正相关；当 $\rho<0$ 时我们称 X_1 和 X_2 存在负相关.

为了对多元正态密度函数有更直观地了解，下面的例子给出几组参数下二元正态密度函数的几何图形. 我们把具有等密度的点的轨迹称为等高线(面). 显然当 $p=2$ 时

$$
\begin{aligned}
& f(x_1,x_2)=C \\
&\Longleftrightarrow \left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\cdot\sigma_2} \\
&\qquad +\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2=a^2 \quad (a\geqslant 0),
\end{aligned}
$$

它是一族中心在 $(\mu_1,\mu_2)'$ 的椭圆. 一般的 p 元正态密度函数的等高面为

$$
(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)=a^2 \quad (a\geqslant 0).
$$