# 第二章　假设检验

# §2.1　势与势函数

**例2.1.1：** 洗衣粉装包机在正常工作时,装包量服从正态分布。根据长期经验知其标准差为12g,而额定标准为每袋净重500g。为检验装包机工作是否正常,随机抽取它所包装的洗衣粉9袋,称得净重为497 g, 506 g, 518 g, 524 g, 488 g, 511 g, 510g, 515g, 512g。问由上述数据能否判定包装机工作正常?

在这节，给出一般的Neyman-Pearson假设检验构架

- 原假设和备择假设

设$\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$是统计模型，关于总体$X$的分布或关于参数$\theta$的推测，即$H: \theta \in \bar{\Theta} \subset \Theta$称为假设，其中$\bar{\Theta}$是$\Theta$的非空真子集。

在一个假设检验中，常涉及到两个假设。所要检验的假设称为原假设或零假设，记为$H_0$。

而与$H_0$不相容的假设，称为备择假设或对立假设，记为$H_1$。对参数统计模型$\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$而言，原假设和备择假设是对矛盾的统一体。

$$H_0\text{：}\ \theta \in \Theta_0\text{，}\ H_1\text{：}\ \theta \in \Theta_1$$

称为假设检验问题。

在假设检验问题中，$\Theta_0$和$\Theta_1$是$\Theta$的两个互不相交的非空子集，但并不要求$\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$一定成立。保留这个的灵活性，不仅是理论的需要，也有其实际意义。

如果$\boldsymbol{\Theta}_0$仅包含一个参数，即$\boldsymbol{\Theta}_0=\{\boldsymbol{\theta}_0\}$，则称$\boldsymbol{H}_0$为简单假设(Simple Hypothesis)，否则称为复合假设(Composite Hypothesis)，对备择假设也有简单假设和复合假设。

- 拒绝域、接受域、检验统计量

检验一个假设，就是根据某一法则在原假设和备择假设之间做出选择，而基于样本$\boldsymbol{x}$，做出拒绝$\boldsymbol{H}_0$或接受$\boldsymbol{H}_0$所依赖的法则称为检验。

这样一个检验就等同于将样本空间分成两个互不相交的子集$W$和$W^c$。当$x \in W$时就拒绝$H_0$，认为备择假设$H_1$成立；当$x \in W^c$时接受$H_0$，认为$H_0$成立。称$W$为拒绝域，称$W^c$为接受域，这样检验和拒绝域就建立起一一对应关系。

为了确定拒绝域，需寻找合适的统计量$T(x)$。当$H_0$为真时，要能由统计量$T(x)$确定出拒绝域$W$，该统计量$T(x)$称为检验统计量。

在假设检验中，为了便于描述引入函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & x\in W\\ 0, & x\notin W\end{cases}$$

它是拒绝域的示性函数，称为检验函数。当$\varphi(x)=1$时，拒绝$H_0$；否则接受$H_0$。这种检验称为非随机化检验。

随机化检验先定义取值于区间[0,1]的样本的函数$\varphi(x)$，当获得$x$之后，计算函数值$\varphi(x)$，然后以$p=\varphi(x)$为成功概率作Binomial试验，若试验成功就拒绝$H_0$，否则就接受$H_0$

- **两类错误**

由于样本是随机的，检验时可能犯两类错误，其一是当$H_0$为真时却拒绝$H_0$，称为第一类错误，其概率为：

$$\alpha(\theta)=P_\theta\{x\in W\}，\ \theta\in\Theta_0$$

其二是当$H_0$为假时却接受$H_0$，称为第二类错误，其概率为：

$$\beta(\theta)=P_\theta\{x\notin W\}=1-P_\theta\{x\in W\}，\ \theta\in\Theta_1$$

- **定义2.1** 一个检验的势(Power)定义当$H_0$不成立时拒绝$H_0$的概率，即：

$$\gamma(\theta)=P_{\theta}\{x\in W\}=1-\beta(\theta),\ \theta\in\Theta_1$$

当样本容量$n$固定时，要减少犯第一类错误概率，就会增大犯第二类错误的概率；反之，若要减少犯第二类错误概率，就会增大犯第一类错误的概率。即就是说当样本容量固定时，不可能同时减 少犯两类错误的概率，这是一对不可调和的矛盾。

对例2.1.1而言，若取拒绝域为$W=\left\{(x_1,x_2,\ldots,x_3):\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\geq c\right\}$，则相应的检验的势函数为：

$$g(\mu)=P_{\mu}\left\{\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\geq c\right\}=1-\Phi\left(c-\frac{\mu-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)+\Phi\left(-c-\frac{\mu-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

犯第一类错误的概率为：

$$\alpha(\mu_0)=2-2\Phi(c)$$

犯第二类错误的概率为：

$$\beta(\mu_0)=\Phi\left(c-\frac{\mu-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)-\Phi\left(-c-\frac{\mu-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right),\quad \mu\neq\mu_0$$

**Neyman-Pearson检验原理就是控制犯第一类错误的概率在给定的范围内，寻找检验使得犯第二类错误的概率尽可能的小，即使检验的势尽可能的大。**

**这样就是在给定一个较小的数$\alpha(0<\alpha<1)$ (一般取为0.01,0.05,0.1等)，在满足**

$$P_\theta\{x\in W\}\le\alpha,\theta\in\Theta_0$$

**的检验方法中，寻找使得势$P_\theta\{x\in W\}(\theta\in\Theta_1)$尽可能大的检验方法。将$\alpha$称为显著性水平。**

- 假设检验的步骤

（1）提出假设检验问题， $H_0$： $\theta \in \Theta_0$， $H_1$： $\theta \in \Theta_1$

（2）根据 $H_0$，选取适当的统计量，并确定其分布；

（3）给定显著性水平 $\alpha$；

（4）确定拒绝域；

（5）由样本观测值，计算统计量的值；

（6）作出推断，是拒绝 $H_0$，还是接受 $H_1$。

例子2.1.1中，控制犯第一类错误的概率不超过给定的水平$\alpha$，即：

$$P_{\mu_0}\{x \in W\} = P_{\mu}\left\{\frac{|\overline{x} - \mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq c\right\} \leq \alpha$$

考虑概率最大的情形，充分利用允许信息，取第一类错误的概率等于水平$\alpha$，可获得$c = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$，因此例2.1.1假设检验问题的拒绝域为：

$$W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): \frac{|\overline{x} - \mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$$

这是一个真实水平为$\alpha$的检验，对应的检验函数为

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, (x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n)\in W\\ 0, (x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n)\notin W\end{cases}$$

检验的势函数为：

$$g(\mu)=P_\mu\left\{\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$$

$$=1-\Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}-\frac{\mu-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)+\Phi\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}}-\frac{\mu-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$$

# §2.2　似然比检验

设$x_1, x_2, \ldots, x_n$是来自密度函数（或分布率）为$p(x,\theta)(\theta \in \Theta)$的总体的简单样本，考虑检验问题：

$$H_0: \theta = \theta_0,\ H_1: \theta = \theta_1 (\theta_1 > \theta_0)$$

一个比较直观且自然方法是考虑似然比

$$\lambda(x) = \frac{p(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta_1)}{p(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta_0)}$$

当$\lambda(x)$较大时，拒绝原假设$H_0$，否则接受$H_0$。

例2.2.1 对正态总体，方差已知，检验问题

$$H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu = \mu_1 (\mu_1 > \mu_0)$$

似然比为

$$\lambda(x) = \frac{p(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu_1)}{p(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu_0)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_1)^2\right\}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_0)^2\right\}}$$

$$\lambda(x)=\frac{p(x_1,\ x_2,\ \ldots,x_n,\mu_1)}{p(x_1,\ x_2,\ \ldots,x_n,\mu_0)}=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2\right\}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2\right\}}$$

$$=exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-\mu_1)^2-(x_i-\mu_0)^2\right]\right\}$$

$$=exp\left\{\frac{\mu_1-\mu_0}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(2x_i-\mu_1-\mu_0)\right\}$$

$$=exp\left\{\frac{\sqrt{n}(\mu_1-\mu_0)}{\sigma}\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}-\frac{n(\mu_1-\mu_0)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

令$U=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$，则　$\lambda(x)=exp\left\{\frac{\sqrt{n}(\mu_1-\mu_0)}{\sigma}U-\frac{n(\mu_1-\mu_0)^2}{2\sigma^2}\right\}$

因为$\mu_0$，$\mu_1, \sigma^2$均已知且$\mu_1 > \mu_0$，所以$\lambda(x)$是$U$的单调增函数，故由等式

$$P\{\lambda(x) \geq c|H_0\text{成立}\} = P\{U \geq c_1|H_0\text{成立}\} = \alpha$$

可得$c_1 = u_{1-\alpha}$。这样检验统计量可取为

$$U = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

拒绝域为

$$W = \{U: U \geq u_{1-\alpha}\}$$

这是通常的单边$u$ −检验

对一般的假设检验问题

$$H_0: \theta \in \Theta_0, H_1: \theta \in \Theta_1$$

定义似然比检验统计量为

$$\lambda(x) = \frac{\sup\limits_{\theta\in\Theta}\{p(x_1, \cdots, x_n, \theta)\}}{\sup\limits_{\theta\in\Theta_0}\{p(x_1, \cdots, x_n, \theta)\}}$$

检验的拒绝域为$W = \{x: \lambda(x) \geq c\}$

其中临界值$c$可由

$$P\{\lambda(x) \geq c | H_0\text{成立}\} = \alpha$$

确定。下面也通过例子说明其具体应用。

例2.2.2 对正态总体，方差未知，检验问题

$$H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$$

似然比为
$$\lambda(x) = \frac{\sup\limits_{\theta\in\Theta}\{p(x_1,\cdots,x_n,\theta)\}}{\sup\limits_{\theta\in\Theta_0}\{p(x_1,\cdots,x_n,\theta)\}}$$

这里
$$\Theta = \{(\mu,\sigma^2), -\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0\}$$

$$\Theta_0 = \{(\mu_0,\sigma^2), \sigma^2 > 0\}$$

当$\mu,\sigma^2$未知时，其极大似然估计分别为

$$\hat{\mu} = \bar{x}, \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

当$\mu=\mu_0$未知时，$\sigma^2$极大似然估计分别为

$$\hat{\sigma}_0^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$$

所以似然比为

$$\lambda(x)=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}}\right)^n exp\left\{-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\right\}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}_0}\right)^n exp\left\{-\frac{1}{2\hat{\sigma}_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2\right\}}$$

$$=\left(\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\hat{\sigma}^2}\right)^{n/2}=\left(1+\frac{n(\overline{x}-\mu_0)^2}{(n-1)S^2}\right)^{\frac{n}{2}}$$

若令$T=\frac{\overline{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$，则

$$\lambda(x)=\left(1+\frac{T^2}{(n-1)}\right)^{\frac{n}{2}}$$

当$H_0$成立时，

$$T=\frac{\overline{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

且$\lambda(x)$是$|T|$单调增函数，因此由

$$P\{\lambda(x)\geq c|H_0\text{成立}\}=P\{|T|\geq c_1|H_0\text{成立}\}=\alpha$$

可得临界值为$c_1=t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

这样检验统计量为 $T=\frac{\overline{x}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$

拒绝域为

$$W=\{T:|T|\geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$$

这是通常的双边$t$ –检验

当然也可令$F=\frac{(\overline{x}-\mu_0)^2}{S^2/\sqrt{n}}$，则 $\lambda(x)=(1+\frac{F}{n+1})^2$

当$H_0$成立时， $F{\sim}F(1,n-1)$

且$\lambda(x)$是$F$单调增函数，因此由

$$P\{\lambda(x)\geq c|H_0\text{成立}\}=P\{F\geq c_1|H_0\text{成立}\}=\alpha$$

可得临界值为

$$c_1 = F_{1-\alpha}(1, n-1)$$

这样检验统计量也可以为

$$F = \frac{(\overline{x} - \mu_0)^2}{S^2/\sqrt{n}}$$

拒绝域为

$$W = \{F: F \geq F_{1-\alpha}(1, n-1)\}$$

可以证明这时候的$t$–检验和$F$–检验是等价的。

例2.2.3 设$x_1, x_2, \ldots, x_n$是来自正态总体$N(\mu, \sigma_0{}^2)$的简单样本，其中$\sigma_0{}^2$已知, 试在显著性水平$\alpha$下，给出检验假设问题

$$H_0:\ \mu \le \mu_0,\ H_1:\ \mu > \mu_0.$$

的似然比检验。

解 令$\Theta_0 = \{\mu \le \mu_0\}$ $\Theta_1 = \{\mu > \mu_0\}$，$\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$，则假设检验问题为

$$H_0:\ \mu \in \Theta_0,\ H_1:\ \mu \in \Theta_1$$

似然比统计量为 $\lambda(x)=\dfrac{\sup\limits_{\theta\in\Theta}\{p(x_1,\cdots,x_n,\theta)\}}{\sup\limits_{\theta\in\Theta_0}\{p(x_1,\cdots,x_n,\theta)\}}$

当$\mu\in\Theta$时， $\mu$的极大似然估计$\hat{\mu}=\bar{x}$，当$\mu\in\Theta_0$时，

若$\bar{x}\le\mu_0$，则$\bar{x}$是$\mu$的极大似然估计；

若$\bar{x}>\mu_0$，由于$\dfrac{\partial lnL(\mu)}{\partial\mu}=\dfrac{n}{\sigma_0^2}(\bar{x}-\mu)>0$，

对数似然函数$lnL(\mu)$在$\Theta_0$处是$\mu$的单调增函数，

因而$lnL(\mu)$在$\mu_0$处取最大，$\mu_0$是$\mu$的极大似然估计。

综上所述， $\hat{\mu}_0=min\{\bar{x},\mu_0\}$是$\mu$的极大似然估计。

将$\hat{\mu}$和$\hat{\mu}_0$代入似然比统计量有

$$\lambda(x_1,\cdots,x_n)=\frac{(2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{n}{2}}exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right\}}{(2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{n}{2}}exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu}_0)^2\right\}}$$

$$=\begin{cases}1, & \bar{x}\leqslant\mu_0\\ exp\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right)^2\right\}, & \bar{x}>\mu_0\end{cases}$$

令 $z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$，则

$$\lambda(x)=\begin{cases}1, & z\leqslant 0\\ exp\left\{\frac{1}{2}z^2\right\}, & z>0\end{cases}$$

因为$\lambda(x)$是$z$的非降函数，且$\lambda(x) \geq 1$ ，所以对任意正常数$c$，欲使犯第一类错误的概率$P_\mu\{\lambda(x) \geqslant c\} < 1$，必须要求$c > 1$，此时有$z \geqslant c_1 > 0$。当 $\mu \in \Theta_0$ 时， 由于$\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$，所以对大于1的常数$c$有

$$P_\mu\{\lambda(x) \geqslant c\} = P_\mu\{z \geqslant c_1\} = P_\mu\left\{\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} \geqslant c_1 + \frac{\mu_0-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right\}$$

$$= 1 - \Phi\left(c_1 + \frac{\mu_0-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right)$$

当 $\mu \leq \mu_0$时， $P_\mu\{\lambda(x) \geqslant c\}$是$\mu$的单增函数，故对给定的显著性水平$\alpha$，不等式 $P_\mu\{\lambda(x) \geqslant c\} \leq \alpha$当且仅当$\mu = \mu_0$时等号成立，即

$$\sup_{\mu \in \Theta_0} P_\mu\{\lambda(x) \geqslant c\} = P_{\mu_0}\{\lambda(x) \geqslant c\} = P_{\mu_0}\{z \geqslant c_1\} = \alpha$$

由此可得$c_1 = z_{1-\alpha}$, 这样检验统计量可取为$z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}$,
在显著性水平$\alpha$下，所考虑检验问题的拒绝域为$W = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n): z \geq z_{1-\alpha}\}$，这是通常的单侧$z$ –检验

从上述两个例子可得求似然比检验的一般步骤：

（1）在$\boldsymbol{\Theta}$ 内求$\boldsymbol{\theta}$的极大似然估计$\widehat{\boldsymbol{\theta}}$，在$\boldsymbol{\Theta}_0$内求$\boldsymbol{\theta}$的极大似然估计$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_0$

（2）计算并化简 $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x})=\dfrac{\{p(x_1,\cdots,x_n,\widehat{\theta})\}}{\{p(x_1,\cdots,x_n,\widehat{\theta}_0)\}}$

使成形式$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}))$，满足两个要求，

其一： $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x})$是$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$的单调增函数或单调减函数；

其二：当$\boldsymbol{H}_0$成立时，$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$的分布完全已知。

（3）增函数时，由$P\{T\geqslant c_1|H_0\text{成立}\}=\alpha$求临界值，减函数时，由$P\{T\leqslant c_1|H_0\text{成立}\}=\alpha$求临界值

（4）检验统计量取为$T(x)$

增函数时，拒绝域为$W=\{T:T\geqslant c_1\}$。减函数时，拒绝域为$W=\{T:T\leqslant c_1\}$

注：（1）正态总体下参数的检验基本都是似然比检验

（2）似然比检验适应于正态总体和非正态总体，且构造的检验常具一些优良性质，在某种意义下具有最优性

（3）一般而言，似然比统计量的精确分布很难获得，因此临界值的求法有两种。

其一，利用Monte-Carlo模拟计算；

其二，当样本容量$n$很大时，利用似然比统计量的极限分布近似给出。在一定的条件下可以证明，$2ln\lambda(x)$极限分布是$\chi^2$分布

（4）似然比检验可用于检验样本来自两个不同类型分布之一

例2.2.4　$H_0$：样本来自正态总体族$N(\mu,\sigma^2)$.

$H_1$：样本来自双参数指数分布族$p(x,\mu,\sigma)$

其中$p(x,\mu,\sigma)=\begin{cases}\frac{1}{\sigma}\exp\left\{-\frac{x-\mu}{\sigma}\right\} & x>\mu\\ 0. & x\le\mu\end{cases}$.

$-\infty<\mu<\infty$，$\sigma>0$ .

解　当原假设$H_0$成立时，$\mu,\sigma$极大似然估计分别为

$$\hat{\mu}_0=\bar{x},\hat{\sigma}_0=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

对于$H_1$，由于似然函数为

$$\ln L(\mu,\sigma;x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases} n\ln\frac{1}{\sigma}-\frac{1}{\sigma}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\mu\right), & x_{(1)}>\mu \\ -\infty, & x_{(1)}\leqslant\mu \end{cases}$$

由于$\ln L(\mu,\sigma;x_1,x_2,\cdots,x_n)$是$\mu$单调增函数，所以$\mu$的极大似然估计为$x_{(1)}$，解对数似然方程

$$\frac{\partial \ln L(x_{(1)},\sigma)}{\partial\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-nx_{(1)}\right)=0$$

可得$\hat{\sigma}_1$的极大似然估计为$\hat{\sigma}_1=\bar{x}-x_{(1)}$，所以似然比为

$$\lambda(x)=\frac{\sup\limits_{\theta\in\Theta_1}\{p_1(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)\}}{\sup\limits_{\theta\in\Theta_0}\{p_0(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)\}}=\frac{p_1(x_1,x_2,\cdots,x_n;\hat{\mu}_1,\hat{\sigma}_1)}{p_0(x_1,x_2,\cdots,x_n;\hat{\mu}_0,\hat{\sigma}_0)}$$

$$=\frac{\prod_{i=1}^{n}p_1(x_i;\hat{\mu}_1,\hat{\sigma}_1)}{\prod_{i=1}^{n}p_0(x_i;\hat{\mu}_0,\hat{\sigma}_0)}=\left(\frac{2\pi}{e}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\hat{\sigma}_0}{\hat{\sigma}_1}\right)^{n}$$

由于$\lambda(x)$是$\frac{\hat{\sigma}_0}{\hat{\sigma}_1}$的单调增函数，所以有　$P_{H_0}\left\{\frac{\hat{\sigma}_0}{\hat{\sigma}_1}\geqslant c_2\right\}=$

$P_{H_0}\{\lambda(x)\geqslant c_1\}$

由于若令$z_i=\frac{x_i-\mu}{\sigma}$，$i=1,2,\ldots,n$ 有

$$\frac{\hat{\sigma}_0}{\hat{\sigma}_1}=\frac{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}}{\overline{x}-x_{(1)}}=\frac{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i-\overline{z})^2}}{\overline{z}-z_{(1)}}$$

且无论$H_0$还是$H_1$成立, $\frac{\hat{\sigma}_0}{\hat{\sigma}_1}$的分布都与参数$\mu$和$\sigma$无关。当

$H_0$成立时, $z_i=\frac{x_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$, 犯第一类错误概率变为

$$P_{H_0}\left\{\frac{\hat{\sigma}_0}{\hat{\sigma}_1}\geqslant c_2\right\}=P\left\{\frac{\hat{\sigma}_0}{\hat{\sigma}_1}\geqslant c_2|z_1,z_2,\cdots,z_n\right\}$$

其中$z_1, z_2, \cdots, z_n$是来自标准正态总体$N(0,1)$的简单样本

利用Monte-Carlo模拟可以计算$p$值或显著性水平$\alpha$下的临界值$c_2$，所以检验拒绝域为

$$W=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):\frac{\hat{\sigma}_0}{\hat{\sigma}_1}\geqslant c_2\right\}$$

检验统计量为$\frac{\hat{\sigma}_0}{\hat{\sigma}_1}$。$H_1$成立时，$z_i=\frac{x_i-\mu}{\sigma}$的密度函数为

$f(u)=e^{-u}$，$u>0$，指数分布。

因此利用Monte-Carlo模拟可以计算犯第二类错误概率

$$P_{H_1}\left\{\frac{\hat{\sigma}_0}{\hat{\sigma}_1} < c_2\right\} = P\left\{\frac{\hat{\sigma}_0}{\hat{\sigma}_1} < c_2 | z_1, z_2, \cdots, z_n\right\}$$

其中$z_1, z_2, \cdots, z_n$是来自指数分布总体$f(u) = e^{-u}, u > 0$的简单样本。

例2.2.5 设总体$X$是离散随机变量，其分布列为

$$P\{X = i\} = \theta_i\,,\ i = 1, 2, \dots, r$$

其中$\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$是未知参数，且$\sum_{i=1}^{r}\theta_i = 1$.

$x_1,\cdots,x_n$是来自总体$X$的简单样本，在显著性水平$\alpha$下，求检验假设$H_0$: $\theta=\theta_0$的似然比检验的拒绝域，其中$\theta_0=(\theta_{10},\theta_{20},\ldots,\theta_{r0})$

**解** 用$n_i(i=1,2,\ldots,r)$表示样本$x_1,x_2,\ldots,x_n$中取值为$i$的个数，则$\sum_{i=1}^{r}n_i=n$样本的联合分布为

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta_0)=\prod_{i=1}^{r}\theta_{i0}^{n_i}$$

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{r}\theta_{i}^{n_i}$$

$\theta_i$的极大似然估计为$\hat{\theta}_i = \frac{n_i}{n}$, $i = 1, 2, \dots, r$，似然比为

$$\lambda(x) = \frac{\sup\limits_{\theta \in \Theta} (x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta)}{p(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta_0)} = \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{n_i}{n\theta_{i0}}\right)^{n_i}$$

由于 $\ln\lambda(x) = \sum_{i=1}^{r} n_i ln \frac{n_i}{n\theta_{i0}}$

$$= \sum_{i=1}^{r} [n\theta_{i0} + (n_i - n\theta_{i0})] ln \left(1 + \frac{n_i - n\theta_{i0}}{n\theta_{i0}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - n\theta_{i0})^2}{n\theta_{i0}} + \text{高阶无穷小}$$

所以有

$$2ln\lambda(x) \approx \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - n\theta_{i0})^2}{n\theta_{i0}}$$

又由于$ln\lambda(x)$是$\lambda(x)$单调增函数，所以对给定显著性水平$\alpha$，有

$$P_{\theta_0}\{\lambda(x) \geqslant c_1\} = P_{\theta_0}\{2ln\lambda(x) \geqslant c_2\} \leqslant \alpha$$

进一步，当$n$充分大时，$\chi^2=\sum_{i=1}^{r}\frac{(n_i-n\theta_{i0})^2}{n\theta_{i0}}$近似地服从$\chi^2(r-1)$，从而近似地有

$$P_{\theta_0}\{\chi^2 \geqslant \chi^2_{1-\alpha}(r-1)\}\approx\alpha$$

拒绝域为

$$W=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):\chi^2 \geqslant \chi^2_{1-\alpha}(r-1)\}$$

# §2.3　Neyman-Pearson引理

设统计模型为$\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$，其中$\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$即参数空间仅包含两个参数，所考虑的检验问题为

$$H_0: \theta = \theta_0，H_1: \theta = \theta_1 \qquad （1）$$

比较两个检验$\varphi_1(x)$和$\varphi_2(x)$的优劣的一个自然的准则就是比较它们势的大小。

若 $E_{\theta_1}(\varphi_1(x)) \geq E_{\theta_1}(\varphi_2(x))$ 则称检验$\varphi_1(x)$不比$\varphi_2(x)$差，或检验$\varphi_1(x)$比检验$\varphi_2(x)$好。

**定义2.3.1** 设在检验问题(1)中：设$\varphi^*(x)$是水平为$\alpha$检验，如果对任一水平为$\alpha$的检验$\varphi(x)$，有

$$E_{\theta_1}(\varphi^*(x)) \geq E_{\theta_1}(\varphi(x))$$

成立，则称$\varphi^*(x)$是水平为$\alpha$的最优势检验(Most Powerful Test)简记为MPT。

对于检验问题(1)，似然比为 $L(x)=\dfrac{p(x,\theta_1)}{p(x,\theta_0)}$

规定：当$p(x,\theta_0)=0, p(x,\theta_1)>0$时，$L(x)=\infty$，

当$p(x,\theta_0)=p(x,\theta_1)=0$时，$L(x)=0$

N-P引理解决了检验问题(1)的MPT存在问题，给出了构造MPT检验的方法。虽然该引理仅针对检验问题(1)，但它对解决复合假设检验问题最优检验的存在起到非常重要作用

**引理2.3.1** 就检验问题(1)，对给定$\alpha \in (0,1)$，有

**(Neyman-Pearson引理)**

(1)存在常数$k \geq 0$及检验

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & 当L(x) > k \\ 0, & 当L(x) < k \end{cases} \qquad (2)$$

检验$\varphi(x)$是水平$\alpha$的MPT且满足 $E_{\theta_0}\big(\varphi(x)\big) = \alpha$. （3）

（2）如果$\varphi(x)$是水平为$\alpha$的MPT，则必存在常数$k \geq 0$，使得$\varphi(x)$满足式(2)。若$\varphi$的势满足$E_{\theta_0}(\varphi(x)) < 1$，则$\varphi(x)$也满足式(3)

注:（1）当$L(x)$为连续随机变量时，MPT的检验统计量为

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, \text{当} L(x) > k \\ 0, \text{当} L(x) < k \end{cases}$$

其中常数$k$由$E_{\theta_0}(\varphi(x)) = P_{\theta_0}\{L(x) \geq k\} = \alpha$确定，这是因为$P_{\theta_0}\{L(x) = k\} = 0$。这说明此种情形下的拒绝域具有形式$W = \{x: L(x) \geq k\}$

（2）当$L(x)$为离散随机变量时，MPT检验统计量为

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & L(x)>k\\ \dfrac{\alpha-P_{\theta_0}\{L(x)>k\}}{P_{\theta_0}\{L(x)=k\}}, & L(x)=k\\ 0, & L(x)<k\end{cases}\qquad(5)$$

其中常数$k$由$P_{\theta_0}\{L(x)\ge k\}=\alpha\ge P_{\theta_0}\{L(x)>k\}$确定

关于$\varphi(x)$具有这种形式的原因解释如下：当$L(x)$为离散随机变量时，MPT的检验统计量未必具有形式

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & L(x)\ge k\\ 0, & L(x)<\dot{k}\end{cases}\qquad(6)$$

如果对给定的$\alpha$，存在$k$恰有

$$E_{\theta_0}(\varphi(x)) = P_{\theta_0}\{L(x)=k\} + P_{\theta_0}\{L(x)>k\} = \alpha$$

则MPT的检验统计量具有形式(6)，即具有形为

$W=\{x: L(x)\geq k\}$的拒绝域。但由于$L(x)$的分布函数是阶梯函数，故可能不存在$k$使得

$$E_{\theta_0}(\varphi(x)) = P_{\theta_0}\{L(x)=k\} + P_{\theta_0}\{L(x)>k\} = \alpha$$

成立，却只能找到$k$有：

$$P_{\theta_0}\{L(x)\geq k\} > \alpha > P_{\theta_0}\{L(x)>k\}$$

因此为了使$E_{\theta_0}\big(\varphi(x)\big)=\alpha$，就有必要改变$\varphi(x)$在事件$\{x: L(x)\geq k\}$上的取值，可令

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & L(x)>k\\ r, & L(x)=k\\ 0, & L(x)<k\end{cases}$$

注意这样的做法是合适的，$\varphi(x)$仍具有**N-P**引理中**MPT**的形式。由于$E_{\theta_0}\big(\varphi(x)\big)=\alpha$，即

$$E_{\theta_0}\big(\varphi(x)\big)=P_{\theta_0}\{L(x)=k\}+P_{\theta_0}\{L(x)>k\}=\alpha$$

从而可得所待定的$r$为

$$r = \frac{\alpha - P_{\theta_0}\{L(x) > k\}}{P_{\theta_0}\{L(x) = k\}}$$

因此此时的水平为$\alpha$的**MPT**是随机检验，检验统计量具有式**(5)**。由于当 $P_{\theta_0}\{L(x) \geq k\} = \alpha$ 时， $r = 1$，所以式**(5)**更具有一般性，包括了式**(6)**

# §2.4　最优势检验

**例2.4.1** 设$x_1,\cdots,x_n$是来自正态总体$N(\mu,1)(\mu\geq 0)$ 的简单样本，求检验问题$H_0$：$\mu=0$, $H_1$：$\mu=\mu_1(\mu_1>0)$ 的水平为$\alpha(0<\alpha<1)$的MPT。

**解：** 由$N-P$引理可知，MPT的拒绝域具有形式

$$W=\{x: L(x)\geq k\}$$

似然比统计量为 $L(x)=\frac{p(x,\mu_1)}{p(x,0)}=exp\left\{n\mu_1\bar{x}-\frac{1}{2}n{\mu_1}^2\right\}$

由于$\mu_1>0$，且$L(x)$为$\bar{x}$的严格单调增函数，故

$$\{x: L(x) \geq k\} = \{x: \overline{x} \geq c\}$$

又因为当$H_0$为真时，$\overline{x} \sim N(0, \frac{1}{n})$，所以对给定水平$\alpha$，有

$$P\{\overline{x} \geq c\} = P\left\{\frac{\overline{x}}{\sqrt{1/n}} \geq \frac{c}{\sqrt{1/n}}\right\} = \Phi\left\{\frac{c}{\sqrt{1/n}}\right\} = \alpha$$

这样$c = \frac{u_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}$，从而对给定的$\alpha$，所求的MPT的拒绝域为

$$W = \{x: \overline{x} \geq \frac{u_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}\}$$

本例MPT仅与$\mu$有关，与$\mu_1$取值无关，只要$\mu_1 > 0$ 即可

**例2.4.2** 设$x_1,\cdots,x_n$是来自Poisson总体的简单样本，求检验问题

$$H_0\text{：}\ \lambda=1,\ H_1\text{：}\ \lambda=\lambda_1(0<\lambda_1<1)$$

的水平为$\alpha(0<\alpha<1)$的MPT。

**解** 似然比统计量为

$$L(x)=\frac{p(x,\lambda_1)}{p(x,0)}=\lambda_1^{\sum_{i=1}^n x_i}e^{-n(\lambda_1-1)}$$

由于$0<\lambda_1<1$，因此$L(x)$是$T(x)=\sum_{i=1}^n x_i$的严格单调减函数，

根据$N-P$引理，水平为$\alpha$的MPT为

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & T(x)<k\\ \dfrac{\alpha-P_1\{T(x)<k\}}{P_1\{T(x)=k\}}, & T(x)=k\\ 0, & T(x)>k\end{cases}$$

其中常数$k$由$P_1\{T(x)\le k\}>\alpha>P_1\{T(x)<k\}$来确定。

例如取$n=10$，当假设$H_0$：$\lambda=1$成立时，$T(x)$就服从参数为$\lambda=10$的$Poisson$分布。若给定$\alpha=0.05$，则由$Poisson$分布表，有

$$P\{T(x) \le 5\} = \sum_{i=0}^{5} \frac{10^i}{i!} e^{-10} = 0.067086 > 0.05$$

$$P\{T(x) < 5\} = \sum_{i=0}^{4} \frac{10^i}{i!} e^{-10} = 0.029253 < 0.05$$

从而可取$k = 5$，因此有$r = \frac{0.05-0.029253}{0.037833} = 0.548384$

故水平$\alpha = 0.05$ 的MPT的检验统计量为

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & T(x) < 5 \\ 0.548384 & T(x) = 5 \\ 0, & T(x) > 5 \end{cases}$$

这样当抽样所得的$T(x)=\sum_{i=1}^{10}x_i\le 4$时，拒绝原假设；当$T(x)=\sum_{i=1}^{10}x_i\ge 6$时，则接受原假设；当$T(x)=\sum_{i=1}^{10}x_i=5$时，做一次成功概率为**0.548384**的$Binomial$试验，若试验成功，则拒绝原假设，若试验失败，则接受原假设。

# §2.5　一致最优势检验

$$H_0: \theta \in \Theta_0, H_1: \theta \in \Theta_1. \quad (7)$$

对这个检验问题给出最优势检验的定义如下：

**定义2.5.1** 在检验问题(7)中，设$\varphi^*(x)$是水平为$\alpha$的检验，如果对任一水平为$\alpha$的检验$\varphi(x)$，有不等式

$$E_\theta(\varphi^*(x)) \geq E_\theta(\varphi(x))$$

对所有的$\theta \in \Theta_1$都成立，则称$\varphi^*(x)$是水平为$\alpha$的一致最优势检验，简记为UMPT(Uniformly Most Powerful Test)

对复合假设检验而言，UMPT的存在性不但与总体分布有关，而且与所考虑的假设检验问题有关。为了说明问题，我们先看下面两个例子。

**例2.5.1** 设$x_1,\cdots,x_n$是来自正态总体$N(\mu,1)(\mu\geq 0)$ 的简单样本，求检验问题

$$H_0: \ \mu=0,\ H_1: \ \mu>0 \qquad (8)$$

的水平为$\alpha(0<\alpha<1)$的UMPT

**解** 由前面小节的例题可知，检验问题

$$H_0: \mu = 0,\ H_1: \mu = \mu_1 (\mu_1 > 0) \quad (9)$$

的水平为$\alpha(0 < \alpha < 1)$的最优势检验具有拒绝域

$$W = \left\{ x: \bar{x} \geq \frac{u_{1-\alpha}}{\sqrt{n}} \right\}$$

或检验函数

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & \bar{x} \geq \dfrac{u_{1-\alpha}}{\sqrt{n}} \\ 0, & \bar{x} < \dfrac{u_{1-\alpha}}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

由于检验函数$\varphi^*(x)$与$\mu_1(\mu_1>0)$无关，所以$\varphi^*(x)$也是**(8)**的水平为$\alpha$检验。现在令$\varphi(x)$是**(8)**的任一水平为$\alpha$检验，它显然也是**(9)**的水平为$\alpha$检验。又由于$\varphi^*(x)$是**(9)**的水平为$\alpha$的MPT，所以对任意给定$\mu_1(\mu_1>0)$，有

$$E_{\mu_1}(\varphi^*(x))\geq E_{\mu_1}(\varphi(x))$$

由于$(\mu_1>0)$的任意性，即对所有的$\mu>0$都有

$$E_{\mu}(\varphi^*(x))\geq E_{\mu}(\varphi(x))$$

所以$\varphi^*(x)$是检验问题**(8)**的水平为$\alpha$的UMPT

由此例可知对简单原假设和简单备择假设检验问题，如果MPT不依赖于备择假设的参数，则可适当扩大备择假设，并由MPT获得UMPT。这扩大了N-P引理的应用范围。

**例2.5.2** 设$x_1,\cdots,x_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)(\mu \geq 0)$ 的简单样本，$\sigma^2$已知。试证明检验问题

$$H_0: \ \mu = \mu_0,\ H_1: \ \mu \neq \mu_0$$

的水平为$\alpha(0 < \alpha < 1)$的UMPT不存在

**证明** 反证法。设所考虑检验问题的水平为$\alpha(0<\alpha<1)$的UMPT是$\varphi^*(x)$，则对任何水平为$\alpha$的检验$\varphi(x)$，有

$$E_\mu(\varphi^*(x)) \ge E_\mu\big(\varphi(x)\big) \quad for\ all\ \mu \ne \mu_0$$

由于$\varphi(x)=\alpha$是水平为$\alpha$的检验，因此有

$$E_\mu(\varphi^*(x)) \ge E_\mu\big(\varphi(x)\big)=\alpha \quad for\ all\ \mu \ne \mu_0$$

特别地，$\varphi^*(x)$也是检验问题

$$H_0:\ \mu=\mu_0,\ H_1:\ \mu=\mu_1\ (\mu_1>\mu_0)$$

的水平为$\alpha$的MPT，

根据$N-P$引理知道$\varphi^*(x)$具体表示式为

$$\varphi^*(x)=\begin{cases}1, & \bar{x}\geq\mu_0+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha}\\ 0, & \bar{x}<\mu_0+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha}\end{cases}$$

此时**MPT** $\varphi^*(x)$的势为

$$E_\mu(\varphi^*(x))=P_\mu\left\{\bar{x}\geq\mu_0+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{1-\alpha}\right\}$$

$$=\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu-\mu_0)+u_\alpha\right).$$

由分布函数非减性可知， $E_\mu(\varphi^*(x))$是$\mu$的严格单增函数

所以当$\mu < \mu_0$时有

$$E_{\mu}(\varphi^{*}(x)) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\mu - \mu_0) + u_{\alpha}\right) < \Phi(u_{\alpha}) = \alpha$$

这与**(9)**矛盾，故结论成立。

我们将N-P引理应用这个例子，对检验问题

$$H_0: \ \mu = \mu_0, H_1: \ \mu = \mu_1(\mu_1 > \mu_0)$$

则水平为$\alpha$的MPT的拒绝域为

$$W_1 = \{x: \bar{x} \geq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}\}$$

而对检验问题

$$H_0: \ \mu = \mu_0, H_1: \ \mu = \mu_1(\mu_1 < \mu_0)$$

则水平为$\alpha$的MPT的拒绝域为

$$W_2 = \{x: \bar{x} \leq \mu_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}\}$$

这说明对检验问题 $H_0$： $\mu=\mu_0$, $H_1$： $\mu\neq\mu_0$

相应**MPT**拒绝域与备择假设有关，因此一致最优势检验**(UMPT)**就不一定存在。那么在什么情况下**UMPT**存在？若存在，如何来求？为了方便我们将检验问题分成单边检验问题和双边检验问题：

$$\text{单边检验问题}\begin{cases} H_0: \quad \theta=\theta_0; \quad H_1: \theta>\theta_0, \\ H_0: \quad \theta=\theta_0; \quad H_1: \theta<\theta_0 \\ H_0: \quad \theta\leq\theta_0; \quad H_1: \theta>\theta_0 \\ H_0: \quad \theta\geq\theta_0; \quad H_1: \theta<\theta_0 \end{cases}$$

$$\text{双边检验问题}\begin{cases} H_0: \theta = \theta_0; H_1: \theta \neq \theta_0, \\ H_0: \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2; H_1: \theta < \theta_1 \text{ 或 } \theta > \theta_2, \\ H_0: \theta \leq \theta_1 \text{ 或 } \theta \geq \theta_2; H_1: \theta_1 < \theta < \theta_2. \end{cases}$$

（一）单边假设检验

从例2.5.1可知，在有些情况下，关于单边假设检验问题

$$H_0: \theta = \theta_0; H_1: \theta > \theta_0 (\text{or } \ \theta < \theta_0)$$

存在UMPT。但一般来说对单边检验问题，UMPT可以不存在。那么在什么情况下UMPT存在及如何求呢？

**定理2.5.1** 如果样本$x_1, x_2, \ldots, x_n$的联合密度（或分布律）$p(x,\theta)$是单参数的并可表示为

$$p(x,\theta) = d(\theta)h(x)exp\{c(\theta)T(x)\}$$

其中$\theta$是实值参数，且$c(\theta)$关于$\theta$的严格单调增函数，则对单边检验问题 $H_0: \theta \le \theta_0; H_1: \theta > \theta_0$

(1)水平为$\alpha$的UMPT存在，其检验函数为

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & T(x) > c \\ r, & T(x) = c \\ 0, & T(x) < c \end{cases} \qquad (10)$$

其中常数$c$和$r \in [0,1]$由下式确定

$$E_{\theta_0}(\varphi^*(x)) = \alpha$$

（2）水平为α的UMPT的势函数$E_\theta(\varphi^*(x))$是$\theta$增函数。

注意：（1）有关$c$和$r$的确定方法可参看N-P引理的注。

（2）如果定理中的$c(\theta)$是$\theta$的严格单减函数，则定理的结论同样成立，只需要将(10)中的不等号改变方向。

（3）对假设检验问题

$$H_0: \theta = \theta_0;\ H_1: \theta > \theta_0$$

则定理2.5.1的结论全部成立。

（4）对假设检验问题

$$H_0: \theta = \theta_0;\ H_1: \theta < \theta_0$$

和假设检验问题

$$H_0: \theta \geq \theta_0;\ H_1: \theta < \theta_0$$

可以分别化为假设检验问题

$$H_0: -\theta =- \theta_0;\ H_1: -\theta > -\theta_0$$

和假设检验问题

$$H_0: -\theta \leq -\theta_0;\ H_1: -\theta > -\theta_0$$

同样可以使用定理2.5.1来求UMPT。

**例2.5.3** 设某种设备的寿命服从参数为$\lambda$的指数分布，即密度函数为

$$p(x,\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0. & x\le 0\end{cases}$$

我们想知道这种类型的设备的平均寿命$\frac{1}{\lambda}$是否大于$\frac{1}{\lambda_0}$，即所考虑假设检验问题为

$$H_0:\frac{1}{\lambda}\le\frac{1}{\lambda_0};H_1:\frac{1}{\lambda}>\frac{1}{\lambda_0}$$

现抽取$n$个此类设备进行试验直到设备不能正常工作，并记录其寿命分别为$x_1$，$x_2$，…，$x_n$，试求这个检验问题的水平为$\alpha$的UMPT。

**解：** 样本的联合密度函数为

$$p(x,\lambda)=\lambda^n I_{\{min\{x_i\}>0\}}(x)exp\left\{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i\right\}$$

令$\frac{1}{\lambda}=\theta$，则假设检验问题变为

$$H_0:\theta\le\theta_0;H_1:\theta>\theta_0$$

而$p(x,\lambda)$可以改写为

$$p(x,\theta)=\frac{1}{\theta^n}I_{\{min\{x_i\}>0\}}(x)exp\left\{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i\right\}$$

这样　$T(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i, c(\theta)=-\frac{1}{\theta}$

且$c(\theta)$ 是$\theta$的严格单增函数，由定理**2.5.1**可知水平为$\alpha$的**UMPT**的拒绝域为　$W=\{x:\sum_{i=1}^{n}x_i\geq c\}$

则其中$c$满足　$E_{\theta_0}(\varphi^*(x))=P_{\theta_0}\{x:\sum_{i=1}^{n}x_i\geq c\}=\alpha$

因此只要求出$T(x)$的分布，就可确定常数$c$

**例2.5.4** 设$x_1, x_2, \ldots, x_n$是来自正态总体$N(0,\sigma^2)$的简单样本，其中$\sigma^2$是未知参数。试求检验问题

$$H_0: \sigma^2 \geq \sigma_0^2, \ \mathrm{H}_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$$

的水平为$\alpha$的UMPT

**解** 令$\theta = -\sigma^2$，则所讨论的检验问题变为

$$H_0: \theta \leq \theta_0, \ H_1: \theta > \theta_0 \qquad (11)$$

样本的联合密度函数为

$$p(x,\sigma^2) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)^n} exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}$$

即 $$p(x,\theta)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\theta}\right)^n}exp\left\{\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}$$

这样$T(x)=-\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2$和$c(\theta)=-\frac{1}{2\theta}$，且$c(\theta)$是$\theta$严格单增函数，所以由定理2.5.1对检验问题(11)，UMPT存在。

由于$T(x)$是连续随机变量，水平为$\alpha$的UMPT检验函数为

$$\varphi^*(x)=\begin{cases}1, \sum\limits_{i=1}^{n} x_i{}^2 \le c\\ 0, \sum\limits_{i=1}^{n} x_i{}^2 > c\end{cases}$$

其中$c$常数由下式确定

$$E_{\theta_0}(\varphi^*(x)) = P_{\theta_0}\left\{x: \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 \le c\right\} = \alpha$$

当$\theta_0 =- \sigma_0^2$时，$x_i/\sigma_0 \sim N(0,1)$，所以$\frac{x_i^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(1)$，再由

$\frac{x_i^2}{\sigma_0^2}(i = 1,\cdots,n)$ 相互独立性可得$\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sim \chi^2(n)$,

从而$P_{\sigma_0^2}\left\{\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le \frac{c}{\sigma_0^2}\right\} = \alpha$ 可以得到$c = \sigma_0^2\chi_\alpha^2(n)$

故所求的检验问题的水平为$\alpha$的UMPT的拒绝域为

$$W=\{x:\sum_{i=1}^{n}x_i^2\le\sigma_0^2\chi_\alpha^2(n)\}$$

**例2.5.5** 设$x_1,\cdots,x_n$是来自Poisson分布$P(\lambda)$简单样本，其中$\lambda$是正的未知参数，考虑假设检验问题

$$H_0:\lambda\le\lambda_0;H_1:\lambda>\lambda_0$$

求水平为$\alpha$的一致最优势检验。

**解：** 样本$x_1,\cdots,x_n$的联合分布列为

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n;\lambda)=\frac{\lambda^{\sum_{i=}^{n}x_i}_{i=1}}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}e^{-n\lambda}$$

$$=e^{-n\lambda}\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}x_i!}exp\{(ln\lambda)\sum_{i=1}^{n}x_i\}$$

若令$d(\lambda)=e^{-n\lambda},h(x)=\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}x_i!},c(\lambda)=ln\lambda,T(x)=$ $\sum_{i=1}^{n}x_i$，则有$p(x_1,x_2,\cdots,x_n;\lambda)=d(\lambda)h(x)exp\{c(\lambda)T(x)\}$

由于$c(\lambda)=ln\lambda$是$\lambda$严格单增函数，由定理3.5.1可知，所考虑单侧假设检验问题的UMPT存在，它的检验函数为

$$\varphi^*(x)=\begin{cases}1, & \sum_{i=1}^n x_i > c\\ r, & \sum_{i=1}^n x_i = c\\ 0, & \sum_{i=1}^n x_i < c\end{cases}$$

其中$c$和$r$由$E_{\lambda_0}\left(\varphi^*(x)\right)=\alpha$决定，

由Poisson分布的可加性知$\sum_{i=1}^n x_i$服从$P(n\lambda)$，所以

$$\sum_{k\geqslant c}\frac{(n\lambda_0)^k}{k!}e^{-n\lambda_0}\geqslant\alpha\geqslant\sum_{k\geqslant c+1}\frac{(n\lambda_0)^k}{k!}e^{-n\lambda_0}$$

$$r=\frac{\alpha-\sum_{k\geqslant c+1}\frac{(n\lambda_0)^k}{k!}e^{-n\lambda_0}}{\frac{(n\lambda_0)^c}{c!}e^{-n\lambda_0}}$$

## （二）双边假设检验

这里仅讨论假设检验问题

$$H_0: \theta \le \theta_1 \ or \ \theta \ge \theta_2;\ H_1: \theta_1 < \theta < \theta_2. \qquad (12)$$

的UMPT存在性及求法，至于另两类双边假设检验问题留在后面讨论。

**定理3.5.2** 如果样本$x_1, \cdots, x_n$是的联合密度（或分布律）$p(x,\theta)$是单参数的并可以表示

$$p(x,\theta) = d(\theta)h(x)exp\{c(\theta)T(x)\}$$

其中$\theta$是实值参数，且$c(\theta)$关于$\theta$的严格单调增函数，

则对双边检验问题(12)，存在水平为$\alpha(0<\alpha<1)$的UMPT，其检验函数为

$$\varphi^*(x)=\begin{cases}1, & c_1<T(x)<c_2\\ r_i, & T(x)=c_i, i=1,2\\ 0, & T(x)<c_1 \text{ or } T(x)>c_2\end{cases}$$

其中四个常数$r_i$，$c_i(i=1,2)$，由下式确定

$$E_{\theta_1}(\varphi^*(x))=E_{\theta_2}(\varphi^*(x))=\alpha$$

# §2.6　无偏检验

对另外两类双边假设检验问题

$$H_0: \theta = \theta_0\ ;\ H_1: \theta \neq \theta_0. \qquad (13)$$

和 $$H_0: \theta_1 \le \theta \le \theta_2\ ;\ H_1: \theta < \theta_1\ or\ \theta < \theta_2. \qquad (14)$$

即使样本的联合密度函数(或分布律)(单参数)具有定理**2.5.1**和定理**2.5.2**中的常见表达式，关于这两类检验问题的**UMPT**也不存在。实际上例**2.5.2**早已说明了这一事实。

既然对上述两类问题不存在**UMPT**，哪如何处理呢？

类似估计问题，提出检验的无偏性。

**定义2.6.1** 设$\varphi(x)$是假设检验问题

$$H_0: \theta \in \Theta_0; \quad H_1: \theta \in \Theta_1$$

的检验函数，若其势函数$g(\theta) = E_\theta\big(\varphi(x)\big)$满足条件

$$\begin{cases} g(\theta) \le \alpha, & \text{for all } \theta \in \Theta_0 \\ g(\theta) \ge \alpha, & \text{for all } \theta \in \Theta_1 \end{cases}$$

则称$\varphi(x)$为水平为$\alpha$的无偏检验(**Unbiased Test**)。显然，水平为$\alpha$的**UMPT**一定是无偏检验。

**定义2.6.2** 在检验问题

$$H_0: \theta \in \Theta_0; \quad H_1: \theta \in \Theta_1$$

中，若存在一个水平为$\alpha$的无偏检验$\varphi^*(x)$，使得对任一水平为$\alpha$的无偏检验$\varphi(x)$，不等式

$$E_\theta(\varphi^*(x)) \geq E_\theta(\varphi(x))$$

对所有的$\theta \in \Theta_1$都成立，则称检验$\varphi^*(x)$是水平为$\alpha$的一致最优势无偏检验，简记为**UMPUT(Uniformly Most Powerful Unbiased Test)**

对某些检验问题，虽然不存在**UMPT**，但存在**UMPUT**，例如对上面提到的两类双边检验问题，就存在**UMPUT**。**UMPUT**存在性及如何构造归结为如下两个定理。

**定理2.6.1** 如果样本$x_1, x_2, \ldots, x_n$的联合密度（或分布律）$p(x,\theta)$是单参数的并可表示为

$$p(x,\theta) = d(\theta)h(x)exp\{c(\theta)T(x)\}$$

其中$\theta$是实值参数，且$c(\theta)$关于$\theta$的严格单调增函数，则对双边检验问题**(14)**和任一水平$\alpha(0<\alpha<1)$，存在**UMPUT**，其检验函数为

$$\varphi^*(x)=\begin{cases}1, & T(x)<c_1\ or\ T(x)>c_2\\ r_i, & T(x)=c_i, i=1,2\\ 0, & c_1<T(x)<c_2\end{cases}$$

其中四个常数$r_i$，$c_i(i=1,2)$，由下式确定

$$E_{\theta_1}(\varphi^*(T(x)))=E_{\theta_2}(\varphi^*(T(x)))=\alpha$$

**定理2.6.2** 如果样本$x_1$, $x_2$, …, $x_n$的联合密度（或分布率）$p(x,\theta)$是单参数的并可表示为

$$p(x,\theta)=d(\theta)h(x)exp\{c(\theta)T(x)\}$$

其中$\theta$是实值参数，且$c(\theta)$关于$\theta$的严格单调增函数，

则对双边检验问题(13)和任一水平$\alpha(0<\alpha<1)$，存在UMPUT，其检验函数为

$$\varphi^*(x)=\begin{cases}1, & T(x)<c_1\ or\ T(x)>c_2\\ r_i, & T(x)=c_i, i=1,2\\ 0, & c_1<T(x)<c_2\end{cases}$$

其中四个常数$r_i$，$c_i(i=1,2)$，由下式确定

$$E_{\theta_0}(\varphi^*(T(x)))=\alpha$$

$$E_{\theta_0}(T(x)\varphi^*(T(x)))=\alpha E_{\theta_0}(T(x))$$

**例2.6.1** 设$x_1, x_2, \dots, x_n$是来自正态总体$N(\mu, 1)$简单样本，其中$\mu$是未知参数。试求检验问题

$$H_0: \mu = 0; \quad H_1: \mu \neq 0$$

的水平为$\alpha$的UMPUT。

**解** 样本的联合密度函数为

$$p(x, \mu) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} exp\left\{-\frac{n\mu^2}{2}\right\} exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\} exp\{n\mu\bar{x}\}$$

这样$T(x)=\bar{x}$，$c(\mu)=n\mu$，且$c(\mu)$是$\mu$严格单调增函数。

又由于$T(x)$是连续随机变量，所以由定理**2.6.2**可知水平为$\alpha$的**UMPUT**存在，其检验函数为

$$\varphi^*(T(x))=\begin{cases}1, & T(x)\le c_1 \text{ or } T(x)\ge c_2\\ 0, & c_1<T(x)<c_2\end{cases}$$

其中$c_1$，$c_2$满足

$$E_0(\varphi^*(T(x)))=\alpha$$
$$E_0(T(x)\varphi^*(T(x)))=\alpha E_0(T(x))$$

因为当$\mu=0$时$T(x)=\overline{x}$服从$N(0,\frac{1}{n})$，所以由第一式可得

$$P_0\{T(x)\le c_1\}+P_0\{T(x)\ge c_2\}=\alpha. \qquad (15)$$

将$E_0\big(T(x)\big)=0$ 代入第二式可得

$$0=E_0\big(T(x)\varphi^*(T(x))\big)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} t\varphi^*(t)\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}exp\left\{-\frac{n}{2}t^2\right\}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{c_1} t\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}exp\left\{-\frac{n}{2}t^2\right\}dt+\int_{c_2}^{+\infty} t\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}exp\left\{-\frac{n}{2}t^2\right\}dt$$

$$=-\int_{c_1}^{c_2} t\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}exp\left\{-\frac{n}{2}t^2\right\}dt$$

由于被积函数是奇函数，所以只有当$-c_1=c_2=c$时上式才能成立。这样分布的对称性及(15)式可得

$$P_0\{T(x)\geq c\}=\frac{\alpha}{2}，P_0\{\sqrt{n}T(x)\geq\sqrt{n}c\}=\frac{\alpha}{2}$$

再由$\sqrt{n}T(x)\sim N(0,1)$可得$c=\frac{1}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}$,故水平为$\alpha$的UMPUT的拒绝域为$W=\{x:|\overline{x}|\geq\frac{1}{\sqrt{n}}u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$

这说明初等假设检验中有关方差已知的正态总体均值的u检验是UMPUT。