# 假设检验

## 正态总体均值与方差的假设检验

- 胡政发，肖海霞，应用数理统计与随机过程，电子工业出版社，2021年第一版
- 师义民，徐伟，秦超英，许勇，数理统计，科学出版社，2015年第四版

# □ $t$检验

□假设总体$X \sim N(\mu，\sigma_0^2)$，$\sigma_0^2$已知，要检验

$$H_0：\mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1：\mu \neq \mu_0.$$

选取统计量

$$U = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}},$$

当$H_0$成立时，$U \sim N(0，1)$分布，利用服从标准正态分布的统计量作为检验统计量的检验称之为$U$检验.

## □ $t$检验

### 1. 方差未知时，单个正态总体均值的检验

□假定总体服从正态分布$N(\mu,\sigma_0^2)$，$\mu$，$\sigma_0^2$均为未知参数，

$(X_1,X_2,\cdots,X_n)^T$是总体容量为$n$的样本

□欲检验假设$H_0$：$\mu=\mu_0 \leftrightarrow H_1$：$\mu\neq\mu_0$

□一个自然的想法是以修正样本方差代替总体方差构造统计量

$$T=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S_n^*/\sqrt{n}} \qquad {S_n^*}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

当假设$H_0$成立时，$T$服从自由度为$n-1$的$t$分布

当$|T|$的值大时，假设不大可能成立，应否定$H_0$.

## □ $t$检验

对给定$0 < \alpha < 1$，由$t$分布表即可得检验的临界值$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$使

$$P\{|T| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\} = \alpha,$$

即

$$P = \left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{S_n^*}\right|\sqrt{n} \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\} = \alpha,$$

故检验的拒绝域为

$$W = \left\{\boldsymbol{x}:\ \left|\frac{\bar{x}-\mu_0}{S_n^*}\right|\sqrt{n} \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}. \qquad (4.8)$$

若$|T| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，拒绝假设$H_0$，即认为总体均值与$\mu_0$有显著差异；

若$|T| < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，则接受$H_0$，即认为总体均值与$\mu_0$无显著差异。

利用服从$t$分布的统计量作为检验统计量的检验方法称为$t$检验法

□ 双边$t$检验的势函数为

$$\beta(\delta)=P_{\mu}\{|T|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}$$

$$=1-k\int_{0}^{\infty}x^{n-2}\varphi(x)\left\{\Phi\left[\frac{xt_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}{\sqrt{n-1}}-\delta\right]-\Phi\left[\frac{-xt_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}{\sqrt{n-1}}-\delta\right]\right\}\mathrm{d}x \quad (4.9)$$

其中$k=\sqrt{2\pi}/2^{\frac{1}{2}(n-3)}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)$，$\varphi$和$\Phi$分别为标准正态分布的密度和分布函数，$\delta=\frac{\sqrt{n}(\mu-\mu_0)}{\sigma}$. $\beta(\delta)$作为$\delta$的函数，具有下述性质：

（1）关于$\delta=0$是对称的；

（2）是$|\delta|$的增函数.

## □ $t$检验

### ➢例题 4.5

□某切割机在正常工作时，切割每段金属棒的平均长度为10.5cm.

今从一批产品中随机的抽取15段进行测量，其结果如下：

10.4，10.6，10.1，10.4，10.5，10.3，10.3，10.2，10.9

10.6，10.8，10.5，10.7，10.2，10.7

□ 假设切割的金属棒的长度服从正态$N(\mu，\sigma^2)$分布，试问该切割机工作是否正常$(\alpha = 0.05)$？

## ➢例题 4.5

✓ **解：** 问题是要检验假设$H_0$：$\mu=10.5 \leftrightarrow H_1$：$\mu\neq 10.5$. 因$\sigma^2$未知，现在要用$t$检验，由样本值计算出

$$\bar{x}=\frac{1}{15}(10.4+10.6+\ldots+10.2+10.7)=10.48,$$

$${s_n^*}^2=\frac{1}{14}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2\right)=0.056,$$

从而计算得

$$t=\frac{\bar{x}-10.5}{s_n^*}\sqrt{n}=\frac{10.48-10.5}{0.2366}\sqrt{15}\approx-0.3274$$

由附表2查得$t_{0.025}(14)=2.1448$，由于$|t|=0.3274<t_{0.025}(14)$，故接受原假设$H_0$，即认为切割机正常工作.

## □ $t$检验

## 2. 方差未知时两个正态总体均值的检验

□设$(X_1, X_2, \cdots, X_{n_1})^T$和$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2})^T$分别是来自两个独立分布$F$和$G$的随机样本，我们常常要根据这两组样本，比较$F$和$G$为分布的两个总体.

□例如，检验一种药物对病人某个指标量（如血压）的影响，这时$(X_1, X_2, \cdots, X_{n_1})^T$可以是对服用“安慰”剂病人测得的血压，而$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2})^T$是对服用某种药物的病人测得的血压.

## □ $t$检验

□对于定量的测量结果，譬如血压、高度、重量、长度、体积、温度等等，通常都假定$(X_1, X_2, \cdots, X_{n_1})^T$和$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2})^T$分别是来自独立正态总体$N(\mu_1, \sigma^2)$和$N(\mu_2, \sigma^2)$的样本. 要检验假设

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \leftrightarrow H_1: \mu_1 \neq \mu_2,$$

这是在两个正态总体**在方差相等的条件下检验均值是否相等**. 统计量

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{(n_1 - 1){S_{1n_1}^*}^2 + (n_2 - 1){S_{2n_2}^*}^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \quad (4.10)$$

## □ $t$检验

在假设$H_0$成立的条件下，服从自由度为$n_1+n_2-2$的$t$分布. 给定显著水平$\alpha$，由附表2可查得$t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$使

$$P\{|T|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\}=\alpha,$$

故检验的拒绝域为：

$$W=\frac{|\bar{x}-\bar{y}|}{\sqrt{(n_1-1){S_{1n_1}^{*}}^2+(n_2-1){S_{2n_2}^{*}}^2}}\cdot\sqrt{\frac{n_1n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2). \tag{4.11}$$

## ➢例题 4.6

- 比较两种安眠药$A$与$B$的疗效，对两种药分别抽取10个失眠者为实验对象，以$X$表示使用$A$后延长的睡眠时间，$Y$表示使用$B$后延长的睡眠时间(单位：h)，实验结果如下：

$X$：1.9，0.8，1.1，0.1，−0.1，4.4，5.5，1.6，4.6，3.4；

$Y$：0.7，−1.6，−0.2，−1.2，−1.2，3.4，3.7，0.8，0，2.0.

假定$X$，$Y$分别服从正态$N(\mu_1, \sigma^2)$和$N(\mu_2, \sigma^2)$分布，试问这两种药的疗效有无显著差异($\alpha = 0.01$)？

## ➢例题 4.6

✓ **解1：** 由试验方案知$X$与$Y$独立，要求检验假设

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \leftrightarrow H_1: \mu_1 \neq \mu_2.$$

$n_1 = n_2 = 10$，$\bar{x} = 2.33\text{h}$，${s_{1n_1}^*}^2 = 4.132$，$\bar{y} = 0.75\text{h}$，${s_{2n_2}^*}^2 = 3.201$，

代入公式(4.10)得

$$T = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{(n_1 - 1){s_{1n_1}^*}^2 + (n_2 - 1){s_{2n_2}^*}^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$$

$$= \frac{2.33 - 0.75}{\sqrt{(4.132 + 0.75)9}} \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot 10 \cdot (10 + 10 - 2)}{10 + 10}} = \frac{4.9964}{2.2095} = 2.2613.$$

## ➢例题 4.6

自由度为$n=n_1+n_2-2=10+10-2=18$，由$\alpha=0.01$，查附表2得$t_{0.005}(18)=2.8784$，于是$|T|=2.26213<2.88784=t_{\frac{\alpha}{2}}(18)$，所以接受假设$H_0$，即认为两种安眠药的疗效无显著差异.

✓ 解2：如果在本例中，只选了10个失眠者为实验对象，先服用安眠药$A$，以$X$表示服用$A$后延长的睡眠时间，经过一段时间后，再服用安眠药$B$，用$Y$表示延长的睡眠时间. 因为对同一个病人服用两种药后延长的睡眠时间会有联系，如对重患者都延长的少，对轻患者都延长的多。

## ➢例题 4.6

✓ **解2：** 所以，这两个样本不能认为是相互独立的简单随机样本.

因而，我们考虑指标：$Z=X-Y$，且假定$Z$服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，

欲检验假设 $H_0$：$\mu=0 \leftrightarrow H_1$：$\mu \neq 0$. 对总本$Z$，样本观察值为

$Z$：1. 2，2. 4，1. 3，1. 3，0，1. 0，1. 8，0. 8，4. 6，1. 4.

计算得：$\bar{z}=1.580$，$s_n^*=1.230$，由一个正态总体均值的$t$检验得

$$t=\frac{\bar{z}}{s_n^*}\cdot\sqrt{n}=\frac{1.580}{1.230}\cdot\sqrt{10}=4.062.$$

## ➢例题 4.6

对$\alpha = 0.01$，由附表2查得$t_{\frac{\alpha}{2}}(9) = 3.35$，因为$|t| = 4.062 > 3.35 = t_{\frac{\alpha}{2}}(9)$，故拒绝假设$H_0$，即认为两种安眠药的疗效有显著差异. 解2给出的方法称为配对试验的假设检验方法.

- 由本例看出，同一批试验数据，看成由不同的试验方法得来，采用不同的数学模型和检验方法，所得的结论截然不同
- 对同一批试验数据，到底用配对试验的分析方法还是用非配对的分析方法，要根据试验的性质而确定.

# □卡方检验

□设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)^T$是从正态总体$N(\mu，\sigma^2)$中抽得的一个样本，欲检验假设 $H_0$：$\sigma^2=\sigma_0{}^2 \leftrightarrow H_1$：$\sigma^2 \neq \sigma_0{}^2$.

□由4.2已经看到样本方差$S_n^2$是$\sigma^2$的最大似然估计，$ES_n^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2$，$DS_n^2=\frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4$，都与均值$\mu$无关. 由此可见当$H_0(\sigma^2=\sigma_0{}^2)$成立时，$S_n^2$集中在$\frac{n-1}{n}\sigma_0{}^2$的周围波动，否则将偏离$\frac{n-1}{n}\sigma_0{}^2$.

**□样本方差是检验假设$H_0(\sigma^2=\sigma_0{}^2)$的合适的统计量.**

## □卡方检验

$$\chi^2 = \frac{nS_n^2}{\sigma_0{}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{\sigma_0{}^2}, \tag{4.12}$$

在假设$H_0(\sigma^2 = \sigma_0{}^2)$成立时，服从自由度为$n-1$的$\chi^2$分布.

□对给定的检验水平$\alpha$，选取$\lambda_{1\alpha}$和$\lambda_{2\alpha}$使得下面两式成立：

$$\int_{\lambda_{1\alpha}}^{\lambda_{2\alpha}} \chi^2(x;\ n-1)\mathrm{d}x = 1-\alpha, \tag{4.13}$$

$$\int_{\lambda_{1\alpha}}^{\lambda_{2\alpha}} \chi^2(x;\ n-1)\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1}\int_{\lambda_{1\alpha}}^{\lambda_{2\alpha}} x\chi^2(x;\ n-1)\mathrm{d}x. \tag{4.14}$$

将样本观察值代入式(4.12)，计算出$\chi^2$的观察值$\hat{\chi}^2$. 如果$\hat{\chi}^2 \leq \lambda_{1\alpha}$或$\hat{\chi}^2 \geq \lambda_{2\alpha}$，则拒绝假设$H_0(\sigma^2 = \sigma_0{}^2)$，

## □卡方检验

如果$\lambda_{1\alpha} \le \hat{\chi}^2 \le \lambda_{2\alpha}$，则接受假设$H_0$. 由于

$$\int_{\lambda_{1\alpha}}^{\lambda_{2\alpha}} [x-(n-1)]\chi^2(n;\ n-1)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)2^{\frac{n-1}{2}}} \int_{\lambda_{1\alpha}}^{\lambda_{2\alpha}} [x-(n-1)]x^{\frac{n-1}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left[\lambda_{1\alpha}^{\frac{n-1}{2}}e^{-\frac{\lambda_{1\alpha}}{2}} - \lambda_{2\alpha}^{\frac{n-1}{2}}e^{-\frac{\lambda_{2\alpha}}{2}}\right].$$

所以式(4.14)等价地写为

$$\lambda_{1\alpha}^{\frac{n-1}{2}}e^{-\frac{\lambda_{1\alpha}}{2}} = \lambda_{2\alpha}^{\frac{n-1}{2}}e^{-\frac{\lambda_{2\alpha}}{2}}. \tag{4.15}$$

## □卡方检验

□假设检验的理论说明，上述构造的检验法在某种意义下是最优的，但是如此选取$\lambda_{1\alpha}$，$\lambda_{2\alpha}$很麻烦，不便于实际应用. 通常我们选取

$\lambda_{1\alpha}=\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，$\lambda_{2\alpha}=\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，使

$$P\left\{\chi^2\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=P\left\{\chi^2\ge\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=\frac{\alpha}{2},\quad(4.16)$$

故检验的拒绝域为

$$W=\left\{\chi^2\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}\cup\left\{\chi^2\ge\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}.\quad(4.17)$$

## □卡方检验

### ➢例题 4.7

□美国民政部门对某住宅区住户的消费情况进行的调查报告中，抽出9户为样本，其每年开支除去税款和住宅等费用外，依次为：4.9，5.3，6.5，5.2，7.4，5.4，6.8，5.4，6.3(单位：千元). 假定住户消费数据服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$；给定$\alpha$，试问：所有住户消费数据的总体方差$\sigma^2 = 0.3$是否可信?

## ➢例题 4.7

✓ **解：** 要检验假设$H_0$：$\sigma^2=\sigma_0{}^2=0.3 \leftrightarrow H_1$：$\sigma^2\neq\sigma_0{}^2$，计算得

$$\bar{x}=5.91,$$

$$s_n^2=\frac{1}{9}[(4.9-5.91)^2+(5.3-5.91)^2+\ldots+(6.3-5.91)^2]=\frac{6.05}{9},$$

$$\chi^2=\frac{ns_n^2}{\sigma_0{}^2}=\frac{6.05}{0.3}=20.17.$$

对于$\alpha=0.05$，由附表3查得$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(8)=17.535$，$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(8)=2.18$，

由于$\chi^2=20.17>17.535=\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(8)$，故拒绝假设$H_0$，即认为所有住户的消费数据的总体方差$\sigma_0{}^2=0.3$不可信.

## □$F$检验

□在方差未知情形两个正态总体均值检验中，假定了两个总体的方差相等. 那么怎么知道方差相等呢？除非有大量经验可以预先作出判断，否则就需要根据样本来检验假设$H_0$：$\sigma_1{}^2=\sigma_0{}^2=0.3 \leftrightarrow H_1$：$\sigma_1{}^2 \neq \sigma_0{}^2$是否真的成立.

□设$\left(X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}\right)^T$是来自总体$N(\mu_1$，$\sigma_1{}^2)$的样本，$\left(Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}\right)^T$是来自$N(\mu_2$，$\sigma_2{}^2)$的样本，且相互独立，$\mu_1$，$\sigma_1{}^2$，$\mu_2$，$\sigma_2{}^2$均为未知参数，检验假设

$$H_0：\sigma_1{}^2=\sigma_2{}^2=0.3 \leftrightarrow H_1：\sigma_1{}^2 \neq \sigma_2{}^2.$$

## □$F$检验

因为$E\left({S_{1n_1}^{*}}^2\right)=\sigma_1{}^2$，$E\left({S_{2n_2}^{*}}^2\right)=\sigma_2{}^2$，所以当$H_0$成立时，统计量

$$F=\frac{{S_{1n_1}^{*}}^2}{{S_{2n_2}^{*}}^2} \tag{4.18}$$

的值应接近于1，否则当$\sigma_1{}^2\geq\sigma_2{}^2$时，$F$的值应有偏大的趋势，当$\sigma_1{}^2<\sigma_2{}^2$时，$F$的值应有偏小的趋势，因此$F$的值偏大或偏小，假设$H_0$不大可能成立. 当$H_0$成立时，$F$服从自由度为$(n_1-1，n_2-1)$的$F$分布. 因此，对给定的显著水平$\alpha$，由附表4可查得$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1，n_2-1)$和$F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1，n_2-1)$的值，使

## □$F$检验

$$P\left\{F \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,\ n_2-1)\right\} = P\left\{F \leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,\ n_2-1)\right\} = \frac{\alpha}{2}.$$

故检验的拒绝域为

$$W = \left\{F \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,\ n_2-1)\right\} \cup \left\{F \leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,\ n_2-1)\right\}. \tag{4.19}$$

一次抽样后计算出${S_{1n_1}^*}^2$和${S_{2n_2}^*}^2$的值，从而计算出$F$的值，若

$$F \leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,\ n_2-1)\text{或}F \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,\ n_2-1)$$

则拒绝接受$H_0$，否则接受假设$H_0$. 这种利用服从$F$分布的统计量所作的检验常称为$F$检验.

## ➢例题 4.8

□为了考察温度对某物体断裂强力的影响，在70℃与80℃下分别重复作了8次试验，得断裂强力的数据如下(单位：Pa)：

70℃：20.5，18.8，19.8，20.9，21.5，19.5，21.0，21.2.

80℃：17.7，20.3，20.0，18.8，19.0，20.1，20.2，19.1.

假定70℃下的断裂强力用$X$表示，服从正态分布$N(\mu_1，\sigma_1{}^2)$，80℃下的断裂强力用$Y$表示，服从正态分布$N(\mu_2，\sigma_2{}^2)$，若取$\alpha=0.05$，试问$X$与$Y$的方差有无显著差异？

## ➢例题 4.8

✓ **解：** 须检验假设$H_0$：$\sigma_1{}^2=\sigma_2{}^2 \leftrightarrow H_1$：$\sigma_1{}^2\neq\sigma_2{}^2$，由所给数据计算得

$$n_1=8,\ \bar{x}=20.4,\ s_{1n_1}^{*}{}^2=\frac{6.20}{7};$$

$$n_2=8,\ \bar{y}=19.4,\ s_{2n_2}^{*}{}^2=\frac{5.80}{7}.$$

因而计算得

$$F=\frac{s_{1n_1}^{*}{}^2}{s_{2n_2}^{*}{}^2}=\frac{6.20}{5.80}=1.07.$$

对于$\alpha=0.05$，由附表4查得$F_{0.975}(7,\ 7)<F<F_{0.025}(7,\ 7)$，故应接受假设$H_0$，即认为70℃与80℃下物体断裂强力的方差无显著差异.

# □单边检验

□前面讨论了原假设$H_0$是简单假设情形的$t$检验，卡方检验和$F$检验. 在实际问题中还经常遇到原假设$H_0$为复合假设的检验问题.

✓ 如$\mu \le \mu_0$，$\mu \ge \mu_0$；$\sigma_1{}^2 \le \sigma_0{}^2$，$\mu \le \mu_2$，$\sigma_1{}^2 \le \sigma_2{}^2$等.

□这时表示$H_1$的参数区域总在表示$H_0$的参数区域的一侧，如$\{\mu: \mu \ge \mu_0\}$在$\{\mu: \mu < \mu_0\}$的右侧，$\{\sigma^2: \sigma^2 \le \sigma_0{}^2\}$在$\{\sigma^2: \sigma^2 > \sigma_0{}^2\}$的左侧. 故称**由$H_0$与相应的备选假设$H_1$构成的一对检验问题为单边检验问题**，我们通过两个正态总体在$\sigma_1{}^2 = \sigma_2{}^2$的条件下检验假设$H_0$：$\mu_1 \le \mu_2 \leftrightarrow H_1$：$\mu_1 > \mu_2$，说明单边假设检验的方法.

## □单边检验

由于随机变量

$$T_1=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{(n_1-1){S_{1n_1}^*}^2+(n_2-1){S_{2n_2}^*}^2}}\cdot\sqrt{\frac{n_1n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}$$

服从自由度为$n_1+n_2-2$的$t$分布.

给定显著水平$\alpha$，由附表2可查得$t_\alpha(n_1+n_2-2)$，使得

$$P\{T_1\geq t_\alpha(n_1+n_2-2)\}=\alpha.$$

## □单边检验

当假设$H_0$成立时

$$T_1=\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{(n_1-1)S_{1n_1}^{*}{}^2+(n_2-1)S_{2n_2}^{*}{}^2}}\cdot\sqrt{\frac{n_1n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}$$

$$\geq\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{(n_1-1)S_{1n_1}^{*}{}^2+(n_2-1)S_{2n_2}^{*}{}^2}}\cdot\sqrt{\frac{n_1n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}\overset{\text{def}}{=}T.$$

因此

$$P\{T\geq t_\alpha(n_1+n_2-2)\}\leq P\{T_1\geq t_\alpha(n_1+n_2-2)\}=\alpha,$$

## □单边检验

即事件$\{T \geq t_\alpha(n_1+n_2-2)\}$是一个比事件$\{T_1 \geq t_\alpha(n_1+n_2-2)\}$的概率还要小的“小概率事件”，如果事件$\{T \geq t_\alpha(n_1+n_2-2)\}$在一次抽样中发生了，应拒绝原假设$H_0$，否则应接受$H_0$，故检验的拒绝域为

$$W = \{T \geq t_\alpha(n_1+n_2-2)\}. \tag{4.20}$$

## ➢例题 4.9

- 改进某种金属的热处理方法，要检验抗拉强度(单位：Pa)有无显著提高，在改进前取12个试样，测量并计算得$\bar{y}=28.2$，$(n_2-1){s^*_{2n_2}}^2=66.64$，在改革后又取12个试样，测量并计算得$\bar{x}=31.75$，$(n_1-1){s^*_{1n_1}}^2=112.25$.

✓ 假定热处理前与热处理后金属抗拉强度分别服从正态分布，且方差相等. 问热处理后抗拉强度有无显著提高$(\alpha=0.05)$?

## ➢例题 4.9

✓ **解：** 由题意欲检验假设$H_0$： $\mu_1 \le \mu_2 \leftrightarrow H_1$： $\mu_1 > \mu_2$.

由样本值计算出$T$的值为

$$T = \frac{31.75 - 28.2}{\sqrt{112.25 + 66.64}} \sqrt{\frac{12 \cdot 12(12 + 12 - 2)}{12 + 12}} = 2.646,$$

对$\alpha = 0.05$，查得$t_{0.05}(22) = 1.7171$.由于$T = 2.646 > 1.7171 = t_{0.05}(22)$，故应拒绝假设$H_0$，即认为改进热处理方法后，抗拉强度有显著提高.

- 最后，将正态总体参数的假设检验总结于表4.2中.

# □单边检验

表 4.2

| $H_0$ | $H_1$ | 适用范围 | 检验方法 | 统计量 | 拒绝域 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mu=\mu_0$<br>$\mu\leqslant\mu_0$<br>$\mu\geqslant\mu_0$ | $\mu\neq\mu_0$<br>$\mu>\mu_0$<br>$\mu<\mu_0$ | 正态总体 $N(\mu,\sigma_0^2)$，$\sigma_0^2$ 已知 | $u$ 检验 | $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}$ | $\dfrac{\lvert\overline{x}-\mu_0\rvert}{\sigma_0}\sqrt{n}\geqslant u_{\frac{\alpha}{2}}$<br>$\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}\geqslant u_\alpha$<br>$\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}\leqslant -u_\alpha$ |
| $\mu=\mu_0$<br>$\mu\leqslant\mu_0$<br>$\mu\geqslant\mu_0$ | $\mu\neq\mu_0$<br>$\mu>\mu_0$<br>$\mu<\mu_0$ | 正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$，$\mu,\sigma^2$ 未知 | $t$ 检验 | $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S_n^*}\sqrt{n}$ | $\dfrac{\lvert\overline{x}-\mu_0\rvert}{s_n^*}\sqrt{n}\geqslant t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$<br>$\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s_n^*}\sqrt{n}\geqslant t_\alpha(n-1)$<br>$\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s_n^*}\sqrt{n}\leqslant -t_\alpha(n-1)$ |

| $H_0$ | $H_1$ | 适用范围 | 检验方法 | 统计量 | 拒绝域 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mu_1=\mu_2$ | $\mu_1\neq\mu_2$ | 两个正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$\sigma_1^2,\sigma_2^2$ 已知 | $u$ 检验 | $U=\dfrac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ | $\dfrac{\lvert \bar{x}_1-\bar{x}_2\rvert}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\geqslant u_{\frac{\alpha}{2}}$ |
| $\mu_1\leqslant\mu_2$ | $\mu_1>\mu_2$ | | | | $\dfrac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\geqslant u_\alpha$ |
| $\mu_1\geqslant\mu_2$ | $\mu_1<\mu_2$ | | | | $\dfrac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}\leqslant -u_\alpha$ |
| $\mu_1=\mu_2$ | $\mu_1\neq\mu_2$ | 两正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2$ 未知 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ | $t$ 检验 | $T=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{(n_1-1)S_{1n_1}^{*2}+(n_2-1)S_{2n_2}^{*2}}}\cdot\sqrt{\dfrac{n_1n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}$ | $\lvert t\rvert\geqslant t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$ |
| $\mu_1\leqslant\mu_2$ | $\mu_1>\mu_2$ | | | | $t>t_\alpha(n_1+n_2-2)$ |
| $\mu_1\geqslant\mu_2$ | $\mu_1<\mu_2$ | | | | $t<-t_\alpha(n_1+n_2-2)$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma^2=\sigma_0^2$<br>$\sigma^2\leqslant\sigma_0^2$<br>$\sigma^2\geqslant\sigma_0^2$ | $\sigma^2\neq\sigma_0^2$<br>$\sigma^2>\sigma_0^2$<br>$\sigma^2<\sigma_0^2$ | 一个正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$，$\mu$，$\sigma^2$ 未知 | $\chi^2$ 检验 | $\chi^2=\dfrac{(n-1)S_n^{*2}}{\sigma_0^2}$ | $\chi^2\geqslant\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$或<br>$\chi^2\leqslant\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$<br>$\chi^2\geqslant\chi^2_{\alpha}(n-1)$<br>$\chi^2\leqslant\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$ |
| $\sigma_1^2=\sigma_2^2$<br>$\sigma_1^2\leqslant\sigma_2^2$<br>$\sigma_1^2\geqslant\sigma_2^2$ | $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$<br>$\sigma_1^2>\sigma_2^2$<br>$\sigma_1^2<\sigma_2^2$ | 两个正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$\mu_1$，$\mu_2$，$\sigma_1^2$，$\sigma_2^2$ 未知 | $F$ 检验 | $F=\dfrac{S_{1n_1}^{*2}}{S_{2n_2}^{*2}}$ | $F\geqslant F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$或<br>$F\leqslant F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$<br>$F\geqslant F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)$<br>$F\leqslant F_{1-\alpha}(n_1-1,n_2-1)$ |
| $\mu=\mu_0$<br>$\mu\leqslant\mu_0$<br>$\mu\geqslant\mu_0$ | $\mu\neq\mu_0$<br>$\mu>\mu_0$<br>$\mu<\mu_0$ | 非正态总体大样本情形 | $u$ 检验 | $U=\dfrac{(\bar{X}-\mu_0)\sqrt{n}}{S_n}$ | $\lvert u\rvert\geqslant u_{\frac{\alpha}{2}}$<br>$u\geqslant u_{\alpha}$<br>$u\leqslant -u_{\alpha}$ |
| $\mu_1=\mu_2$<br>$\mu_1\leqslant\mu_2$<br>$\mu_1\geqslant\mu_2$ | $\mu_1\neq\mu_2$<br>$\mu_1>\mu_2$<br>$\mu_1<\mu_2$ | 非正态总体大样本情形 | $u$ 检验 | $U=\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_{1n_1}^2}{n_1}+\dfrac{S_{2n_2}^2}{n_2}}}$ | $\lvert u\rvert\geqslant u_{\frac{\alpha}{2}}$<br>$u\geqslant u_{\alpha}$<br>$u\leqslant -u_{\alpha}$ |