Problemas de Fundamentos de la Física II

Cano Jones, Alejandro

Curso 2017-2018

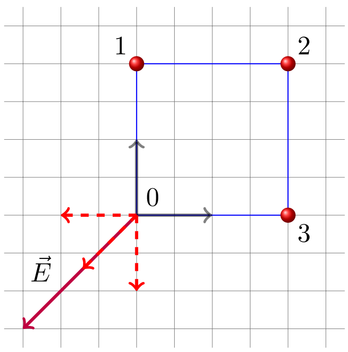
Contents

0.1 Campos Conservativos

0.1.1 Ejercicio 1

Enunciado: Tres cargas puntuales $q = 3 \cdot 10{-}9[C]$ se sitúan en tres de los vértices de un cuadrado de lado $L = 15cm$. Determina el campo eléctrico (módulo y orientación) en el vértice vacante.

Realización:



Tal como se ha representado en la figura, el campo generado por las particulas es repulsivo (puesto que las cargas son positivas). Sabemos por el principio de superposición de campos, que el valor del campo en un punto dado es igual a la suma de los valores de los campos existentes; por ello, comenzamos describiendo los campos:

$$\vec{E}_1 = -K\frac{q}{L^2}\hat{j}\left[\frac{N}{C}\right] \tag{1}$$

$$\vec{E}_2 = -K\frac{q}{L^2}\hat{i} - K\frac{q}{L^2}\hat{j}\left[\frac{N}{C}\right] \tag{2}$$

$$\vec{E_3} = -K\frac{q}{L^2}\hat{\imath}\left[\frac{N}{C}\right] \quad (3)$$

A continuación, solo debemos sumar todos los valores:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}\vec{E_i} = -2K\frac{q}{L^2}\hat{\imath} - 2K\frac{q}{L^2}\hat{\jmath}\left[\frac{N}{C}\right] \quad (4)$$

Tomando los valores $K = 8.99 \cdot 10^9 \left[\frac{Nm^2}{C^2}\right]$ (Suponiendo el sistema se encuentre en el vacío) y $L = 0.15m$, operamos y obtenemos:

$$\vec{E} = -2.397 \cdot 10^3\hat{\imath} - 2.397 \cdot 10^3\hat{\jmath}\left[\frac{N}{C}\right] \quad (5)$$

Donde el módulo será $|\vec{E}| = 2.397 \cdot 10^3 \cdot \sqrt{2}\left[\frac{N}{C}\right]$ formando un ángulo de $\frac{3}{2}\pi\,[rad]$ tal como se muestra en la figura.

0.1.2 Ejercicio 2

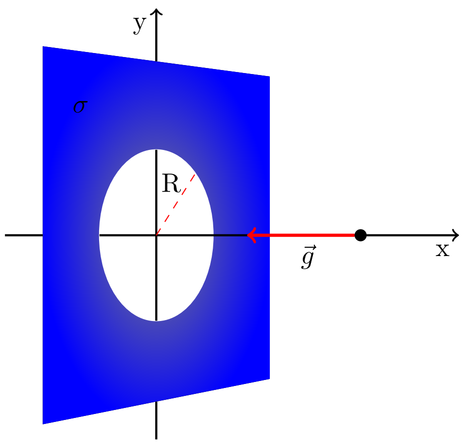
Enunciado: Una masa m está situada a una distancia z del centro de un disco delgado de masa M y radio R. Determina la fuerza de atracción gravitatoria entre la masa y el disco.

Realización:

0.1.3 Ejercicio 3

Enunciado: En un plano homogéneo e indefinido, con masa por unidad de superficie σ, se recorta y retira un trozo circular de radio R. Determina el campo y el potencial gravitatorios en los puntos a lo largo de un eje perpendicular al plano y que pasa por el centro del agujero.

Realización:



Sabemos por el principio de superposición de campos, que el valor del campo generado por varias particulas es igual a la suma del campo generado por cada particula individual. A su vez, conocemos el valor del campo generado por un plano infinito y el valor del campo generado por un disco; es por ello, que podemos calcular el campo generado por esta estructura sustrayendo el valor del campo generado por un disco al campo generado por el plano, esto es:

$$\vec{g} = \vec{g}_{Plano} - \vec{g}_{Disco} = (-G2\pi\sigma)\,\hat{\imath} - \left[-G2\pi\sigma\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{x}\right)^2}}\right)\right]\hat{\imath}\left[\frac{N}{C}\right] \quad (6)$$

Operando, llegamos al resultado:

$$\vec{g} = -G\frac{2\pi\sigma}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{x}\right)^2}}\hat{\imath}\left[\frac{N}{C}\right] \quad (7)$$

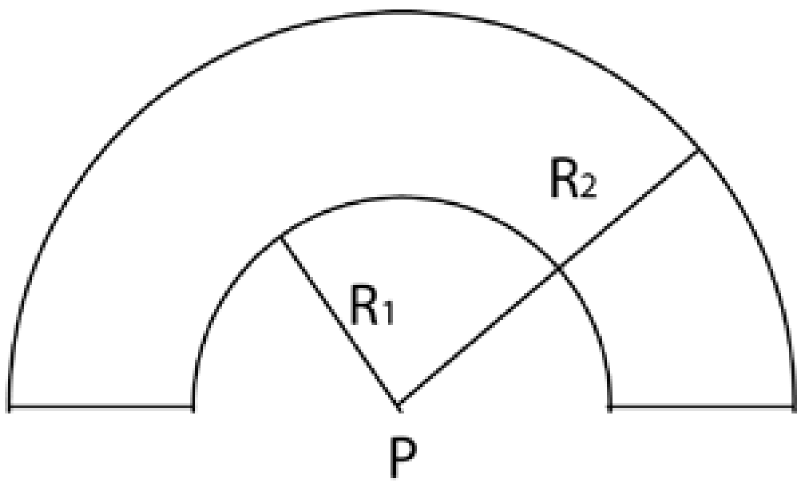
0.1.4 Ejercicio 4

Enunciado: Calcula el campo gravitatorio en los puntos A y B de la distribución de masa de la figura, en la que se muestra una esfera de radio $2R$ y densidad ρ, en cuyo interior existe una cavidad esférica de radio R llena de un material de densidad ρ.

Realización:

0.1.5 Ejercicio 8

Enunciado: Tenemos una distribución de masa situada horizontalmente que es un semicírculo de radio interior R_1, radio exterior R_2, como se muestra en la figura, y cuya densidad superficial de masa σ es constante. a) Calcular el campo gravitatorio en el punto P. b) ¿Qué energía tendríamos que aportar para traer una masa m puntual desde el infinito al punto P?



Realización: Debido a la simetría, el campo se anula en la componente horizontal del dibujo. Así, podemos calcular el campo mediante una doble integral. Además, podemos dividir la semicorona circular en dos y hallar el campo que genera una mitad y multiplicar por dos:

$$\vec{g} = 2\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} G\frac{\sigma r d\theta dr}{r^2}\sin\theta\hat{j} = 2G\sigma\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{drd\theta}{r}\sin\theta\hat{j} =$$
$$= 2G\sigma\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}\left[-\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2G\sigma\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}\hat{j} = 2G\sigma\left[\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\right]\hat{j}$$

Ahora, calculemos el potencial:

$$V = 2\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} G\frac{\sigma r d\theta dr}{r} = 4\pi G\sigma\int_{R_1}^{R_2} dr = 4\pi G\sigma\left(R_2 - R_1\right)$$

Sabiendo $U = V \cdot m$, la expresión queda:

$$U = 4\pi G\sigma\left(R_2 - R_1\right) m$$