

# HM I + II Zusammenfassung KIT

Andreas Mai

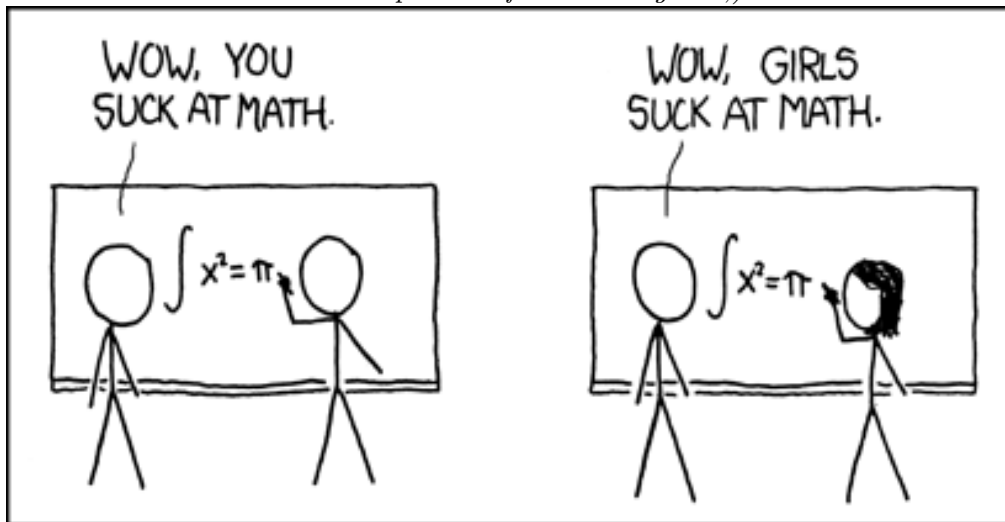
22. August 2016

HM Klausur am 30.08.2016

08:00 - 10:00 HM I

11:00 - 13:00 HM II

*Kein Anspruch auf Vollständigkeit ;)*



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Folgen und Reihen</b>	<b>1</b>
1.1	Allgemein . . . . .	1
1.2	Monotonie . . . . .	1
1.3	Konvergenz . . . . .	1
1.3.1	Nullfolgenkriterium . . . . .	2
1.3.2	Minorantenkriterium . . . . .	2
1.3.3	Majorantenkriterium . . . . .	2
1.3.4	Cauchykritierium . . . . .	2
1.3.5	Leibnitzkriterium . . . . .	2
1.3.6	Monotoniekriterium . . . . .	3
1.3.7	Wurzelkriterium . . . . .	3
1.3.8	Quotientenkriterium . . . . .	3
1.4	Koshere Folgen (Cauchy-Folgen) . . . . .	3
1.5	Häufungspunkt . . . . .	3
1.6	Konvergenzradius . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Differenzieren (Ableiten)</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Integrieren</b>	<b>4</b>
3.1	Partielle Integration . . . . .	4
3.2	Substitution . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Konvergenz im <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Ableiten</b>	<b>6</b>
5.1	Partielle Ableitung . . . . .	6
5.1.1	Satz von Schwarz . . . . .	6
5.1.2	Hesse Matrix . . . . .	6
5.2	Komplette Ableitung (Jakobi-Matrix) . . . . .	6
5.2.1	Beispiel . . . . .	7
5.3	Differenzierbarkeit und Stetigkeit . . . . .	7
5.4	Richtungsableitung . . . . .	7
5.5	Implizit definierte Funktionen . . . . .	7
<b>6</b>	<b>Differentialgleichungen</b>	<b>8</b>
6.1	Gewöhnliche Differentialgleichungen . . . . .	8
6.1.1	Homogene Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung . .	8
6.1.2	Inhomogene Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung .	8
6.1.3	Anfangswertproblem (AWP) . . . . .	8
<b>7</b>	<b>Lineares Differentialgleichungssystem (LDGS)</b>	<b>8</b>
<b>8</b>	<b>VORSICHT</b>	<b>8</b>

# 1 Folgen und Reihen

## 1.1 Allgemein

- Eine Folge ist eine durchnummerierte Menge von Zahlen.  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}, s \in \mathbb{R}$

- Eine Reihe ist die Summe einer Folge.  $(s_m)_{m \in \mathbb{N}}, s \in \mathbb{R}$

Eine Reihe ist auch eine Folge!  $\sum_{i=1/0}^n (s_i), s \in \mathbb{R}$

- Kleinste obere Schranke = Supremum  
Größte untere Schranke = Infimum

- Geometrische Reihe:  $\sum_{i=0}^n q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}, q \neq 1$

## 1.2 Monotonie

Zu faul, evtl später: <https://youtu.be/Ii0b3L5UWZw>

## 1.3 Konvergenz

- Eine Folge (oder Reihe) ist konvergent, wenn sie gegen einen bestimmten Wert konvergiert.
- Sie ist bestimmt divergent, wenn sie gegen  $\pm\infty$  läuft
- Sie ist unbestimmt divergent, wenn sich keine Aussage machen lässt (bsp: 1 und -1 abwechseln).
- Formel:  $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |s_n - g| < \varepsilon$  (g: Grenze)

### Grenzwert bestimmen

Grad der Funktion:

- $\text{Zählergrad} < \text{Nennergrad} \Rightarrow s_n \rightarrow 0$   
Beispiel:  $s_n = \frac{n}{n^2 + 4} \Rightarrow s_n \rightarrow 0$
- $\text{Zählergrad} = \text{Nennergrad} \Rightarrow s_n \rightarrow \text{Bruch}$   
Beispiel:  $s_n = \frac{3n + 4}{5n + 96} \Rightarrow s_n \rightarrow \frac{3}{5}$
- $\text{Zählergrad} > \text{Nennergrad} \Rightarrow s_n \rightarrow \infty \Rightarrow$  bestimmt divergent  
Beispiel:  $s_n = \frac{n^6 - 7}{n^2 + 4} \Rightarrow s_n \rightarrow \infty$

### Grenzwert beweisen

Durch Formel.

## Beispiel

$$s_n = \frac{1}{n}$$

Zählergrad < Nennergrad  $\Rightarrow s_n \rightarrow 0$

$$|s_n - g| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon$$

Drüber schreiben: Es sei  $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$

### 1.3.1 Nullfolgenkriterium

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \neq 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} \text{divergent}$$

Die Folge der Reihe muss gegen 0 laufen, dass die Reihe konvergent sein kann (nicht umgekehrt!)

### 1.3.2 Minorantenkriterium

2 Reihen bekannt:  $\sum_{n=0}^{\infty} s_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} t_n$  und zweite divergiert (bestimmt).

Wenn für fast alle  $n$  gilt:  $s_n \geq t_n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} s_n$  divergiert auch (bestimmt)

### 1.3.3 Majorantenkriterium

2 Reihen bekannt:  $\sum_{n=0}^{\infty} s_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} t_n$  und zweite konvergent

Wenn für fast alle  $n$  gilt:  $|s_n| \leq t_n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} s_n$  absolut konvergent, Umkehrung gilt nicht!

### 1.3.4 Cauchy Kriterium

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, m \geq n_0 : \left| \sum_{i=0}^n s_i - \sum_{i=0}^m s_i \right| = \left| \sum_{i=n}^m s_i \right| < \varepsilon$$

Wenn Cauchy-Kriterium erfüllt, konvergent ansonsten divergent

### 1.3.5 Leibnizkriterium

- $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n f_n$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$ ,  $f_n \geq 0$  monoton fallend  
 $f_n \leq 0$  monoton steigend
- Wenn Leibnizkriterium erfüllt, konvergent, Umkehrung gilt nicht!
- Grenzwertschätzung:  $s_{2n-1} \leq g \leq s_{2n}$

### 1.3.6 Monotoniekriterium

TODO

### 1.3.7 Wurzelkriterium

$\sqrt[n]{|s_n|} \leq C < 1$  für fast alle  $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} s_n$  absolut konvergent

$\sqrt[n]{|s_n|} \geq 1$  für fast alle  $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} s_n$  divergent

### 1.3.8 Quotientenkriterium

$\left| \frac{s_{n+1}}{s_n} \right| \leq C < 1$  für fast alle  $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} s_n$  absolut konvergent

## 1.4 Koshere Folgen (Cauchy-Folgen)

Jede Konvergente Folge ist eine Cauchy Folge und umgekehrt.

Hier steht fast das gleiche wie unter Konvergenz

Sinn: Ab einem Mindestindex  $n_0$  ist der Abstand zwischen 2 Folgegliedern kleiner als  $\varepsilon$

### Formel

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, m > n_0 : |s_n - s_m| < \varepsilon$$

## 1.5 Häufungspunkt

- Ein Häufungspunkt ist ein Punkt in dem sich unendlich viele Folgeglieder anhäufen.
- Ist eine Folge Konvergent, so ist deren Grenze der einzige Häufungspunkt der Folge
- $\limsup_{n \rightarrow \infty} s_n$ : Limes Superior, Größter Häufungspunkt
- $\liminf_{n \rightarrow \infty} s_n$ : Limes Infimum, Kleinster Häufungspunkt

## 1.6 Konvergenzradius

TODO

## 2 Differenzieren (Ableiten)

## 3 Integrieren

### 3.1 Partielle Integration

Verwendung: Integration von Produkten (z.B.  $\int x \cdot e^x dx$ )

#### Formel

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

#### LAPTE

Logarithmisch, **A**lgebraisch/**P**olynomial, **T**rigonometrisch, **E**xponential

Linke Funktion ableiten  $g \rightarrow g'$  und rechte integrieren  $f' \rightarrow f$  (links  $g$ , rechts  $f'$ )

#### Beispiel

$$\int x \cdot e^{2x} dx$$

$\Rightarrow$  durch LAPTE:  $f'(x) = e^{2x}, g(x) = x$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}, g'(x) = 1$$

$$\text{Aus der Formel folgt: } \int x \cdot e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x - \int \frac{1}{2}e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x - \frac{1}{4}e^{2x} = \frac{1}{4}e^{2x} \cdot (2x - 1)$$

### 3.2 Substitution

Verwendung: Keine ahnung, dann wenn mans braucht. denk und rechne!

#### Formel

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

#### Beispiel

$$\int_1^2 (x^2 + 2)^3 \cdot 2x dx$$

$$\text{Setze } u = x^2 + 2 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int (x^2 + 2)^3 \cdot 2x dx = \int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 = \frac{1}{4}(x^2 + 2)^4$$

$$\text{Grenzen einfügen: } \int_1^2 (x^2 + 2)^3 \cdot 2x dx = \left[ \frac{1}{4}(x^2 + 2)^4 \right]_1^2 = \frac{1}{4}(2^2 + 2)^4 - \frac{1}{4}(1^2 + 2)^4 = \frac{1}{4}6^4 - \frac{1}{4}3^4$$

### Weiteres Beispiel

$$\int \cos(x^3) \cdot 6x^2 \, dx$$

$$\text{Setze } u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 \, dx \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$$

$$\int \cos(u) \cdot 6x^2 \cdot \frac{du}{3x^2} = \int \cos(u) \cdot 2 \, du = 2 \int \cos(u) \, du = 2 \sin(u) = 2 \sin(x^3)$$

# HM2

## 4 Konvergenz im $\mathbb{R}^n$

## 5 Ableiten

### 5.1 Partielle Ableitung

Jede Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  hat  $n$  Partielle Ableitungen. Dabei wird nach der einen Variable abgeleitet, und die anderen Variablen als Konstanten angesehen.

#### 5.1.1 Satz von Schwarz

Wenn die 2. partiellen Ableitungen stetig sind (fast immer der Fall) dann gilt:  
 $f_{xy} = f_{yx}$  Somit muss nur eine der beiden Ableitungen ausgerechnet werden

#### Beispiel

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x, y) = x^2 + 3xy^3$$

$$f_x(x, y) = 2x + 3y^3$$

$$f_y(x, y) = 9xy^2$$

$$f_{xx}(x, y) = 2$$

$$\left. \begin{aligned} f_{xy}(x, y) &= 9y^2 \\ f_{yx}(x, y) &= 9y^2 \end{aligned} \right\} \text{Satz von Schwarz}$$

$$f_{yy}(x, y) = 18xy$$

#### 5.1.2 Hesse Matrix

Alle zweiten Partiiellen Ableitungen in einer Matrix

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_nx_1} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

### 5.2 Komplette Ableitung (Jakobi-Matrix)

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$f'(x) = J_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{x_1} & \cdots & f_{x_n} \end{pmatrix}$$



### 5.2.1 Beispiel

$$f(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$f'(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

### Nochn Beispiel

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x^2 + 5y - 9z \\ xy^2 + z \\ x^4 y^6 z^8 \end{pmatrix}$$

$$f'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4x & 5 & -9 \\ y^2 & 2xy & 1 \\ 4x^3 y^6 z^8 & 6x^4 y^5 z^8 & 8x^4 y^6 z^7 \end{pmatrix}$$

## 5.3 Differenzierbarkeit und Stetigkeit

### 5.4 Richtungsableitung

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cdot a) - f(x_0)}{t} \text{ für } a = \text{Richtung, } x_0 = \text{Punkt}$$

### 5.5 Implizit definierte Funktionen

Eine Funktion  $f(x, y)$  mit 2 Variablen  $\Rightarrow$  kann die Funktion nach  $y$  aufgelöst werden?

Vorgehen:  $f(x, y) = 0$

### Vokabeln

- eindeutig auflösbar: Es gibt eine eindeutige Lösung
- lokal eindeutig: Es gibt mehrere Lösungen die für sich selbst eindeutig sind.
- in einem Punkt nicht lokal eindeutig: z.B.  $y = \pm x$  (beide Lösungen bei  $(0,0)$  identisch)
- Siehe Grafiken auf S.234 im Skript

### Beispiel

$$f(x, y) = x^2 + 5y$$

$$\Rightarrow y = -\frac{x^2}{5}$$

## 6 Differentialgleichungen

### 6.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Explizite DGL: Nach der Höchsten Ableitung aufgelöst Implizite DGL: *Irgendwas* = 0  
Beispiel:

- Explizit:  $f'(x) = \text{drölf}f(x)$
- Implizit:  $f'(x) - \text{drölf}f(x) = 0$

#### 6.1.1 Homogene Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung

Solche können gelöst werden, falls sie die Form  $f'(x) = a(x) \cdot b(f(x))$  aufweisen. (separabel)

Lösungsvorgehen:

$$\frac{f'(x)}{b(f(x))} = a(x) \quad \text{Explizite DGL durch } b(f(x)) \text{ teilen}$$

$$\int_{x_0}^x \frac{f'(x)}{b(f(x))} dx = \int_{x_0}^x a(x) dx \quad \text{Integrieren mit Grenzen } x_0 \text{ und } x$$

$$\int_{f(x_0)}^{f(x)} \frac{1}{b(u)} du = \int_{x_0}^x a(x) dx \quad \text{Substitution von } f(x) \text{ durch } u \text{ auf der Seite von } b(f(x)) \rightarrow f'(x) = \frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow \text{Formel für Homogene DGL erster Ordnung: } \int_{f(x_0)}^{f(x)} \frac{1}{b(u)} du = \int_{x_0}^x a(x) dx$$

Beispiel:  $f'(x) = 3x \cdot f(x)$

#### 6.1.2 Inhomogene Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung

Haben die Form:  $f'(x) = a(x) \cdot f(x) + b(x)$  Das  $b(x)$  "stöört"

Variation der Konstanten

#### 6.1.3 Anfangswertproblem (AWP)

## 7 Lineares Differentialgleichungssystem (LDGS)

## 8 VORSICHT

$$\int \frac{1}{1-x} = - \int \frac{1}{x-1} = -\ln(x-1)$$
$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$