

# LA II Basics

Andreas Mai

9. September 2016

LA Klausur am 16.09.2016

08:00 - 10:00 LA I

11:00 - 13:00 (12:30) LA II

*Kein Anspruch auf Vollständigkeit ;)*

*Jetzt Ernsthaft.. Dieses Skript ist nicht ansatzweise fertig*

$$\begin{bmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ -\sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Jordan</b>	<b>1</b>
1.1	Jordan Normalform . . . . .	1
1.1.1	Lösen von Allgemeinen Aufgaben . . . . .	1
1.2	Bestimmung der Basiswechselmatrix S . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Isometrienormalform</b>	<b>2</b>
2.1	Tipps . . . . .	2
2.2	Basisswechselmatrix . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Drehachse und -winkel</b>	<b>3</b>
3.1	Vorgehen Drehwinkel . . . . .	3
3.2	Isometrienormalform aus dem Drehwinkel im $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ . . . . .	3

# 1 Jordan

Tipp: „Kochen mit Jordan“ von Daniel Winkler<sup>1</sup>

## 1.1 Jordan Normalform

Vorgehen:

- Charakteristisches Polynom berechnen (Eigenwerte)
  - Anzahl der Eigenwerte = Anzahl der Jordanblöcke
  - Algebraische VVK = Größe des Jordanblocks des Eigenwertes
  - Geometrische VVK = Anzahl der Jordankästchen im Block
- Wenn mehrere Möglichkeiten Kästchen zu bilden:
  - Index des Hauptraumes herausfinden
  - Matrix hochnehmen bis sie sich nicht mehr ändert (oft Nullmatrix)
  - Index = größtes Jordankästchen im Block
- Per Konvention: größte Jordanblöcke und -kästchen zuerst

## Lösen von Allgemeinen Aufgaben

Zum lösen von allgemeinen Aufgaben ohne konkret gegebene Matrix hilft:

- Größe der Matrix = Größe der JNF (= Dimension???)
- Spur der Matrix = Spur der JNF
- Wenn gegeben: Größe, Eigenwerte, Spur: Jordan**blöcke** ausrechenbar
- Wenn Hauptraumgleichung  $\neq 0$ , dann Jordank**ästchen** größer als Potenz  
bsp:  $(A - I_i)^2 \neq 0 \Rightarrow$  Jordankästchen vom EW  $i \geq 3$  (falls Jordanblock  $> 2$ )

## 1.2 Bestimmung der Basiswechselmatrix S

Hauptraum: Kleinste Zahl  $p$ , für die gilt:  $\text{Kern}(A - \lambda I)^p = \text{Kern}(A - \lambda I)^{p+1}$

- Nehme Basisvektoren aus  $\text{Kern}(A - \lambda I)^p$ , welche nicht in  $\text{Kern}(A - \lambda I)^{p-1}$  enthalten sind  $\Rightarrow v_1, v_2, \dots$
- Die Geordnete Basis ist definiert durch:  
 $v_1, (A - \lambda I) \cdot v_1, (A - \lambda I)^2 \cdot v_1, \dots, v_2, (A - \lambda I) \cdot v_2, (A - \lambda I)^2 \cdot v_2, \dots$   
(jeweils bis  $(A - \lambda I)^{p-1}$ )
- hier fehlt glaub noch was

---

<sup>1</sup><http://www.danielwinkler.de/la/jnfkochrezept.pdf>

## 2 Isometrienormalform

- Hilfsmatrix  $H = A + A^T$  bestimmen
- Eigenwerte von  $H$  bestimmen
- Isometrienormalform erstellen
  - Algebraische VVK des Eigenwerts 2 ist die Anzahl der 1 auf der Hauptdiagonale
  - Algebraische VVK des Eigenwerts  $-2$  ist die Anzahl der  $-1$  auf der Hauptdiagonale
  - Die anderen Eigenwerte müssen  $\in (-2, 2)$  liegen
  - Für die anderen Eigenwerte gilt weiterhin das

Drehkästchen: 
$$\begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2} & -\sqrt{1 - (\frac{\lambda}{2})^2} \\ \sqrt{1 - (\frac{\lambda}{2})^2} & \frac{\lambda}{2} \end{pmatrix}$$

### Beispiel

$$CP(H) = (2 - \lambda)^2(-2 - \lambda)^2(0 - \lambda)$$
$$\Rightarrow D_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Leere Felder sind } 0)$$

### 2.1 Tipps

Hilfreich, bei allgemeinen Aufgaben ohne konkret gegebene Matrix

- Können Eigenwerte 1 und  $-1$  vorkommen?
- Determinante und Spur von der Matrix und der Isometrienormalform sind identisch
- Beim  $\mathbb{R}^3$  gilt: (siehe nächstes Kapitel)
  - Ein Eintrag mit 1 (entspricht der Drehachse)
  - Ein Drehkästchen

### 2.2 Basisswechselmatrix

- Für  $H$  die Eigenräume von  $\pm 2$  berechnen und in Orthonormalbasis umwandeln (ablesbar, oder Gram-Schmidt-Verfahren)
  - $\Rightarrow$  Man erhält die ersten Spalten

- Für die anderen Eigenwerte Eigenräume ausrechnen.  
Ein  $v$  wählen und mit  $\tilde{A}v$  orthonalisieren und Normalisieren (Gram-Schmidt)  
Falls Eigenraum Dimension 2 hat, mit nächstem Eigenraum fortfahren

### 3 Drehachse und -winkel

- Drehebene:  $[x - \Phi(x), y - \Phi(y)]$
- Drehachse: Finde einen Vektor  $v$ , für den gilt:
  - $\langle x - \Phi(x), v \rangle = 0$
  - $\langle y - \Phi(y), v \rangle = 0$
- Drehwinkel: Finde einen Vektor  $u$ , für den gilt:
  - Orthogonal zur Drehachse
  - Bild kann berechnet werden
  - $\Rightarrow u$  ist Linearkombination aus  $x, y, v$

#### 3.1 Vorgehen Drehwinkel

- Wähle ein  $u \in$  Drehebene
- Löse folgendes LGS:  $u = ax + by + cv$
- Berechne  $\Phi(u) = a \cdot \Phi(x) + b \cdot \Phi(y) + c \cdot \Phi(v)$   
(Da  $v$  Drehachse, gilt  $\Phi(v) = v$ )
- Berechne Winkel zwischen  $\Phi(u)$  und  $u$ :  

$$\cos \alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

#### 3.2 Isometrienormalform aus dem Drehwinkel im $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$

Die Isometrienormalform im  $\mathbb{R}^3$  besteht immer aus:

- Ein Eintrag mit 1
- Ein Drehkästchen
- also:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & D_\lambda & \\ 0 & & \end{pmatrix}$
- $D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$
- $\sin = \sqrt{1 - \cos^2}$

Merke auch die Matrix  $D_\lambda$  unter dem Punkt Isometrienormalform