

HM I + II Zusammenfassung KIT

Andreas Mai

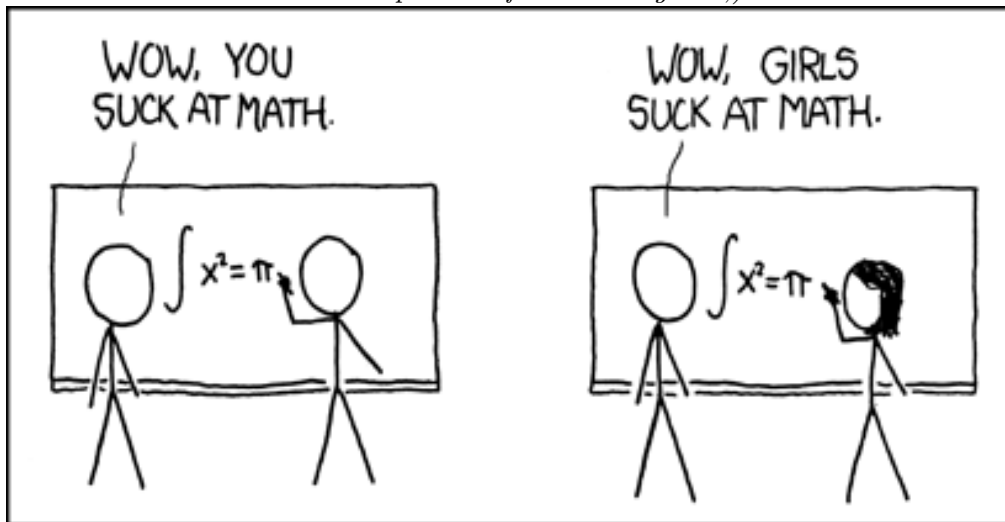
14. August 2016

HM Klausur am 30.08.2016

08:00 - 10:00 HM I

11:00 - 13:00 HM II

Kein Anspruch auf Vollständigkeit ;)



Inhaltsverzeichnis

1	Folgen und Reihen	1
1.1	Allgemein	1
1.2	Monotonie	1
1.3	Konvergenz	1
1.3.1	Nullfolgenkriterium	2
1.3.2	Mino/Majorantenkriterium	2
1.3.3	Nullfolgenkriterium	2
1.3.4	Nullfolgenkriterium	2
1.3.5	Nullfolgenkriterium	2
1.4	Koshere Folgen (Cauchy-Folgen)	2
2	Differenzieren (Ableiten)	2
3	Integrieren	2
3.1	Partielle Integration	2
3.2	Substitution	3

1 Folgen und Reihen

1.1 Allgemein

- Eine Folge ist eine durchnummerierte Menge von Zahlen. $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}, s \in \mathbb{R}$

- Eine Reihe ist die Summe einer Folge. $(s_m)_{m \in \mathbb{N}}, s \in \mathbb{R}$

Eine Reihe ist auch eine Folge! $\sum_{i=1/0}^n (s_i), s \in \mathbb{R}$

- Kleinste obere Schranke = Supremum
Größte untere Schranke = Infimum

- Geometrische Reihe: $\sum_{i=0}^n q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}, q \neq 1$

1.2 Monotonie

Zu faul, evtl später: <https://youtu.be/Ii0b3L5UWZw>

1.3 Konvergenz

- Eine Folge (oder Reihe) ist konvergent, wenn sie gegen einen bestimmten Wert konvergiert.
- Sie ist bestimmt divergent, wenn sie gegen $\pm\infty$ läuft
- Sie ist unbestimmt divergent, wenn sich keine Aussage machen lässt (bsp: 1 und -1 abwechseln).
- Formel: $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |s_n - g| < \varepsilon$ (g: Grenze)

Grenzwert bestimmen

Grad der Funktion:

- $\text{Zählergrad} < \text{Nennergrad} \Rightarrow s_n \rightarrow 0$
Beispiel: $s_n = \frac{n}{n^2 + 4} \Rightarrow s_n \rightarrow 0$
- $\text{Zählergrad} = \text{Nennergrad} \Rightarrow s_n \rightarrow \text{Bruch}$
Beispiel: $s_n = \frac{3n + 4}{5n + 96} \Rightarrow s_n \rightarrow \frac{3}{5}$
- $\text{Zählergrad} > \text{Nennergrad} \Rightarrow s_n \rightarrow \infty \Rightarrow$ bestimmt divergent
Beispiel: $s_n = \frac{n^6 - 7}{n^2 + 4} \Rightarrow s_n \rightarrow \infty$

Grenzwert beweisen

Durch Formel.

Beispiel

$$s_n = \frac{1}{n}$$

Zählergrad < Nennergrad $\Rightarrow s_n \rightarrow 0$

$$|s_n - g| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon$$

Drüber schreiben: Es sei $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$

1.3.1 Nullfolgenkriterium

1.3.2 Mino/Majorantenkriterium

1.3.3 Cauchy Kriterium

1.3.4 Leibnitzkriterium

<https://youtu.be/xOhr3rFTjok>

1.3.5 Noch son kack Kriterium

1.4 Koshere Folgen (Cauchy-Folgen)

Jede Konvergente Folge ist eine Cauchy Folge und umgekehrt.

Hier steht fast das gleiche wie unter Konvergenz

Sinn: Ab einem Mindestindex n_0 ist der Abstand zwischen 2 Folgengliedern kleiner als ε

Formel

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, m > n_0 : |s_n - s_m| < \varepsilon$$

2 Differenzieren (Ableiten)

3 Integrieren

3.1 Partielle Integration

Verwendung: Integration von Produkten (z.B. $\int x \cdot e^x dx$)

Formel

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

LAPTE

Logarithmisch, Algebraisch/Polynom, Trigonometrisch, Exponential

Linke Funktion ableiten $g \rightarrow g'$ und rechte integrieren $f' \rightarrow f$ (links g , rechts f')

Beispiel

$$\int x \cdot e^{2x} dx$$

\Rightarrow durch LAPTE: $f'(x) = e^{2x}, g(x) = x$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}e^{2x}, g'(x) = 1$$

$$\text{Aus der Formel folgt: } \int x \cdot e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x - \int \frac{1}{2}e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} \cdot x - \frac{1}{4}e^{2x} = \frac{1}{4}e^{2x} \cdot (2x - 1)$$

3.2 Substitution

Verwendung: Keine ahnung, dann wenn mans braucht. denk und rechne!

Formel

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt$$

Beispiel

$$\int_1^2 (x^2 + 2)^3 \cdot 2x dx$$

$$\text{Setze } u = x^2 + 2 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\int (x^2 + 2)^3 \cdot 2x dx = \int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 = \frac{1}{4}(x^2 + 2)^4$$

$$\text{Grenzen einfügen: } \int_1^2 (x^2 + 2)^3 \cdot 2x dx = \left[\frac{1}{4}(x^2 + 2)^4 \right]_1^2 = \frac{1}{4}(2^2 + 2)^4 - \frac{1}{4}(1^2 + 2)^4 = \frac{1}{4}6^4 - \frac{1}{4}3^4$$

Weiteres Beispiel

$$\int \cos(x^3) \cdot 6x^2 dx$$

$$\text{Setze } u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$$

$$\int \cos(u) \cdot 6x^2 \cdot \frac{du}{3x^2} = \int \cos(u) \cdot 2 du = 2 \int \cos(u) du = 2\sin(u) = 2\sin(x^3)$$