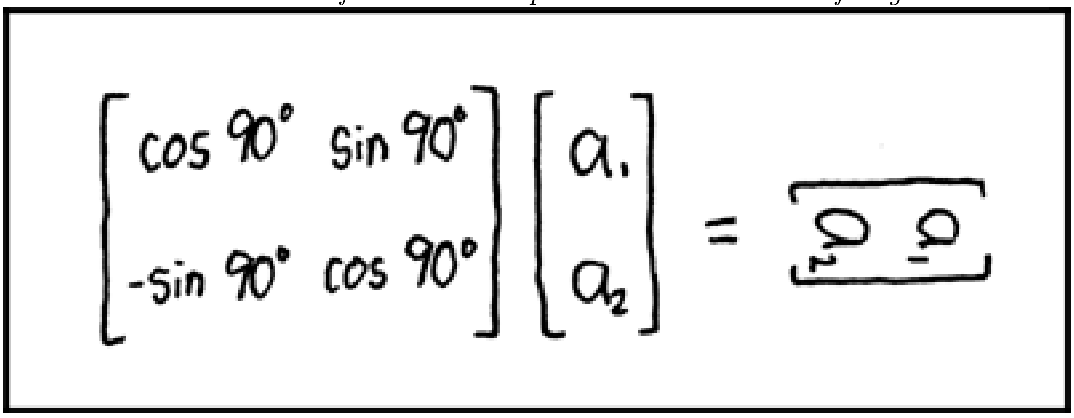
# LA II Basics/Kochrezepte

Andreas Mai

13. September 2016

**LA Klausur am 16.09.2016**
**08:00 - 10:00 LA I**
**11:00 - 13:00 (12:30) LA II**

*Kein Anspruch auf Vollständigkeit ;)*
*Jetzt Ernsthaft.. Dieses Skript ist nicht ansatzweise fertig*



# Inhaltsverzeichnis

# 1 Jordan

Tipp: „Kochen mit Jordan“ von Daniel Winkler[1]

## 1.1 Jordan Normalform

Vorgehen:

- Charakteristisches Polynom berechnen (Eigenwerte)
  - Anzahl der Eigenwerte = Anzahl der Jordanblöcke
  - Algebraische VVK = Größe des Jordanblocks des Eigenwertes
  - Geometrische VVK = Anzahl der Jordankästchen im Block
- Wenn mehrere Möglichkeiten Kästchen zu bilden:
  - Index des Hauptraumes herausfinden
  - Matrix hochnehmen bis sie sich nicht mehr ändert (oft Nullmatrix)
  - Index = größtes Jordankästchen im Block
- Per Konvention: größte Jordanblöcke und -kästchen zuerst
- Minimalpolynom $m_p$: Wie Charakteristisches Polynom, Potenzen aber wie das größte Jordankästchen zum Eigenwert.

### Lösen von Allgemeinen Aufgaben

Zum lösen von allgemeinen Aufgaben ohne konkret gegebene Matrix hilft:

- Größe der Matrix = Größe der JNF (= Dimension???)
- Spur der Matrix = Spur der JNF
- Wenn gegeben: Größe, Eigenwerte, Spur: Jordan**blöcke** ausrechenbar
- Wenn Hauptraumgleichung $\neq 0$, dann Jordan**kästchen** größer als Potenz
  bsp: $(A - I_i)^2 \neq 0 \Rightarrow$ Jordankästchen vom EW $i \geq 3$ (falls Jordanblock $> 2$ )

## 1.2 Bestimmung der Basiswechselmatrix S

Hauptraum: Kleinste Zahl $p$, für die gilt: $Kern(A - \lambda I)^p = Kern(A - \lambda I)^{p+1}$

- Nehme Basisvektoren aus $Kern(A - \lambda I)^p$, welche nicht in $Kern(A - \lambda I)^{p-1}$ enthalten sind $\Rightarrow v_1, v_2, ...$

[1] http://www.danielwinkler.de/la/jnfkochrezept.pdf

- Die Geordnete Basis ist definiert durch:
  $v_1, (A-\lambda I)\cdot v_1, (A-\lambda I)^2 \cdot v_1, \; \ldots \; , v_2, (A-\lambda I)\cdot v_2, (A-\lambda I)^2 \cdot v_2, \; \ldots$
  (jeweils bis $(A-\lambda I)^{p-1}$)
- Falls Jordankästchen des EW der Größe $p-1$ existiert, Schritte wiederholen für $p \to p-1$
- Diese Schritte wür alle EW wiederholen
- Falls noch nicht alle Vektoren für die Basis vorhanden: Vektoren aus $Kern(A-\lambda I)$ hinzufügen, welche linear unabhängig sind

# 2 Isometrienormalform

- Hilfsmatrix $H = A + A^T$ bestimmen
- Eigenwerte von $H$ bestimmen
- Isometrienormalform erstellen
  - Algebraische VVK des Eigenwerts 2 ist die Anzahl der 1 auf der Hauptdiagonale
  - Algebraische VVK des Eigenwerts $-2$ ist die Anzahl der $-1$ auf der Hauptdiagonale
  - Die anderen Eigenwerte müssen $\in (-2, 2)$ liegen
  - Für die anderen Eigenwerte gilt weiterhin das
    Drehkästchen: $\begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2} & -\sqrt{1-(\frac{\lambda}{2})^2} \\ \sqrt{1-(\frac{\lambda}{2})^2} & \frac{\lambda}{2} \end{pmatrix}$

### Beispiel

$CP(H) = (2-\lambda)^2(-2-\lambda)^2(0-\lambda)$

$$\Rightarrow D_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{(Leere Felder sind 0)}$$

## 2.1 Tipps

Hilfreich, bei allgemeinen Aufgaben ohne konkret gegebene Matrix

- Können Eigenwerte 1 und $-1$ vorkommen?

- Determinante und Spur von der Matrix und der Isometrienormalform sind identisch
- Beim $\mathbb{R}^3$ gilt: (siehe nächstes Kapitel)
  - Ein Eintrag mit 1 (entspricht der Drehachse)
  - Ein Drehkästchen

### 2.2 Basisswechselmatrix

- Für $H$ die Eigenräume von $\pm 2$ berechnen und in Orthonormalbasis umwandeln (ablesbar, oder Gram-Schmidt-Verfahren)
  $\Rightarrow$ Man erhält die ersten Spalten
- Für die anderen Eigenwerte Eigenräume ausrechnen.
  Ein $v$ wählen und mit $\tilde{A}v$ orthonalisieren und Normalisieren (Gram-Schmidt)
  Falls Eigenraum Dimension 2 hat, mit nächstem Eigenraum fortfahren

### 2.3 Gram-Schmidt Verfahren zur Orthonormalbasis

- gegeben: Basis $(b_1, \ldots, b_n)$
  gesucht: Orthonormalbasis $(c_1, \ldots, c_n)$
- Wähle einen Vektor aus der Basis und normiere ihn $\Rightarrow c_1$
- $c_2' = b_2 - \langle b_2 \cdot c_1 \rangle \cdot c_1$
  $c_2 = \frac{1}{|c_2'|} \cdot c_2'$ ($c_2'$ Normieren)
- $c_3' = b_3 - \langle b_3 \cdot c_2 \rangle \cdot c_2 - \langle b_3 \cdot c_1 \rangle \cdot c_1$
  $c_3 = \frac{1}{|c_3'|} \cdot c_3'$ ($c_3'$ Normieren)
- und so weiter

## 3 Drehachse und -winkel

- Drehebene: $[x - \Phi(x), y - \Phi(y)]$
- Drehachse: Finde einen Vektor $v$, für den gilt:
  - $\langle x - \Phi(x), v \rangle = 0$
  - $\langle y - \Phi(y), v \rangle = 0$
- Drehwinkel: Finde einen Vektor $u$, für den gilt:
  - Orthgonal zur Drehachse
  - Bild kann berechnet werden
  - $\Rightarrow u$ ist Linearkombination aus $x, y, v$

### 3.1 Vorgehen Drehwinkel

- Wähle ein $u \in$ Drehebene
- Löse folgendes LGS: $u = ax + by + cv$
- Berechne $\Phi(u) = a \cdot \Phi(x) + b \cdot \Phi(y) + c \cdot \Phi(v)$
  (Da $v$ Drehachse, gilt $\Phi(v) = v$)
- Berechne Winkel zwischen $\Phi(u)$ und $u$:
  $\cos\alpha = \dfrac{\langle x, y\rangle}{||x|| \cdot ||y||}$

### 3.2 Isometrienormalform aus dem Drehwinkel im $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$

Die Isometrienormalform im $\mathbb{R}^3$ besteht immer aus:

- Ein Eintrag mit 1
- Ein Drehkästchen
- also: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & D_\lambda & \\ 0 & & \end{pmatrix}$
- $D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$
- $\sin = \sqrt{1 - \cos^2}$

Merke auch die Matrix $D_\lambda$ unter dem Punkt Isometrienormalform

## 4 Bestimmung von Basiswechselmatrix zu Isometrie

- Bestimme Eigenräume zu Eigenwerten von $H = A + A^T$
- Bestimme insgesamt ONB aus Eigenräumen
- Vorletzter Basisvektor $b_{n-1}$ nehmen
  $A \cdot b_{n-1}$ berechnen und als Linearkombination von $b_n$ und $b_{n-1}$ darstellen
  - Falls $b_{n-1} = \ldots b_{n-1} + \ldots b_n$, be happy
  - Falls $b_{n-1} = \ldots b_{n-1} - \ldots b_n$, mit $-1$ Multiplizieren
- $b_1, \ldots b_n$ sind die Spalten der Basiswechselmatrix $S$

## 5 Skalarproduktbeweis

- Symmetrie Zeigen: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
- Bilinearform Zeigen:
  - $\langle A_1 + A_2, B \rangle = \langle A_1, B \rangle + \langle A_2, B \rangle$
  - $\langle c \cdot A, B \rangle = c \cdot \langle A, B \rangle$
- Positive Definitheit zeigen
  - $\langle x, x \rangle > 0$ (für $x \neq 0$)
  - $\langle x, x \rangle = 0$ (nur für $x = 0$)

## 6 Orthogonales Komplement

- Vektoren von $U$ horizontal in eine Matrix Schreiben
- Kern der Matrix ausrechnen (Gauß und -1-Trick)
- Kern = Basis von $U^\perp$

## 7 Orthogonale Projektion $\pi_U(v)$

- Bestimme ONB von $U$: $b_1, \ldots b_n$
- $\pi_U(v) = \langle v, b_1 \rangle \cdot b_1 + \cdots + \langle v, b_n \rangle \cdot b_n$

Abstand $d(v, U) = ||\pi_U(v)||$

## 8 Abstand von Untervetorräumen

- 

## 9 Formeln

- Winkel zwischen 2 Vektoren $\cos \alpha = \dfrac{\langle x, y \rangle}{||x|| \cdot ||y||}$
- 2 Vektoren orthogonal, wenn $\langle x, y \rangle = 0$