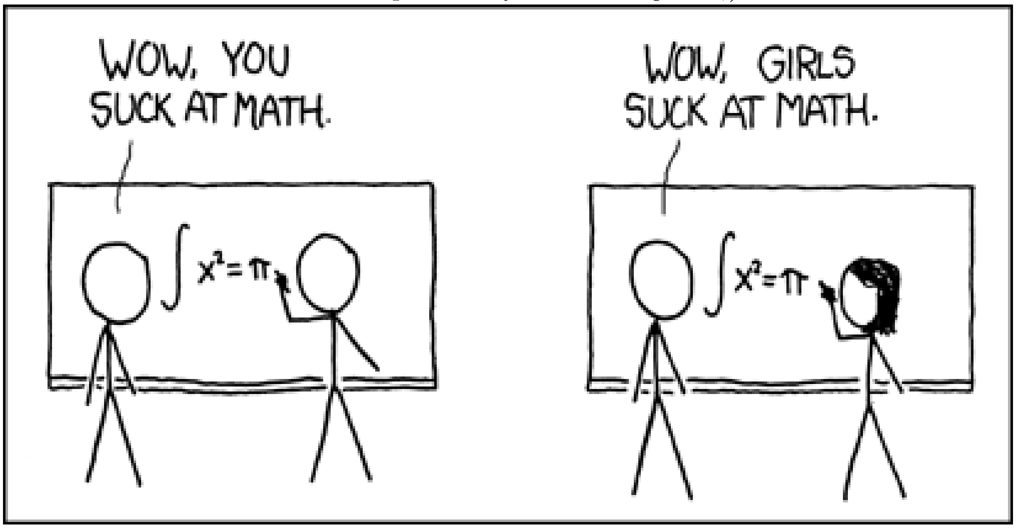
# HM I + II Zusammenfassung KIT

Andreas Mai

14. August 2016

**HM Klausur am 30.08.2016**
**08:00 - 10:00 HM I**
**11:00 - 13:00 HM II**

*Kein Anspruch auf Vollständigkeit ;)*



# Inhaltsverzeichnis


**1 Folgen und Reihen** **1**
- 1.1 Allgemein . . . 1
- 1.2 Monotonie . . . 1
- 1.3 Konvergenz . . . 1
  - 1.3.1 Nullfolgenkriterium . . . 2
  - 1.3.2 Minorantenkriterium . . . 2
  - 1.3.3 Majorantenkriterium . . . 2
  - 1.3.4 Cauchykriterium . . . 2
  - 1.3.5 Leibnitzkriterium . . . 2
  - 1.3.6 Monotoniekriterium . . . 3
  - 1.3.7 Wurzelkriterium . . . 3
  - 1.3.8 Monotoniekriterium . . . 3
- 1.4 Koshere Folgen (Cauchy-Folgen) . . . 3
- 1.5 Häufungspunkt . . . 3

**2 Differenzieren (Ableiten)** **3**

**3 Integrieren** **3**
- 3.1 Partielle Integration . . . 3
- 3.2 Substitution . . . 4

# 1 Folgen und Reihen

## 1.1 Allgemein

- Eine Folge ist eine durchnummerierte Menge von Zahlen. $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}, s \in \mathbb{R}$
- Eine Reihe ist die Summe einer Folge. $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}, s \in \mathbb{R}$
  Eine Reihe ist auch eine Folge! $\sum_{i=1/0}^{n} (s_i), s \in \mathbb{R}$
- Kleinste obere Schranke = Supremum
  Größte untere Schranke = Infimum
- Geometrische Reihe: $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}, q \neq 1$

## 1.2 Monotonie

Zu faul, evtl später: https://youtu.be/Ii0b3L5UWZw

## 1.3 Konvergenz

- Eine Folge (oder Reihe) ist konvergent, wenn sie gegen einen bestimmten Wert konvergiert.
- Sie ist bestimmt divergent, wenn sie gegen $\pm\infty$ läuft
- Sie ist unbestimmt divergent, wenn sich keine Aussage machen lässt
  (bsp: 1 und -1 abwechseln).
- Formel: $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |s_n - g| < \varepsilon$ ($g$: Grenze)

### Grenzwert bestimmen

Grad der Funktion:

- $Z\ddot{a}hlergrad < Nennergrad \Rightarrow s_n \to 0$
  Beispiel: $s_n = \frac{n}{n^2+4} \Rightarrow s_n \to 0$
- $Z\ddot{a}hlergrad = Nennergrad \Rightarrow s_n \to Bruch$
  Beispiel: $s_n = \frac{3n+4}{5n+96} \Rightarrow s_n \to \frac{3}{5}$
- $Z\ddot{a}hlergrad > Nennergrad \Rightarrow s_n \to \infty \Rightarrow$ bestimmt divergent
  Beispiel: $s_n = \frac{n^6-7}{n^2+4} \Rightarrow s_n \to \infty$

### Grenzwert beweisen

Durch Formel.

**Beispiel**

$s_n = \frac{1}{n}$
Zählergrad < Nennergrad $\Rightarrow s_n \to 0$
$|s_n - g| = |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon$
Drüber schreiben: Es sei $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$

### 1.3.1 Nullfolgenkriterium

$\lim\limits_{n\to\infty} \neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{i=0}^{\infty}$ divergent
Die Folge der Reihe muss gegen 0 laufen, dass die Reihe konvergent sein kann (nicht umgekehrt!)

### 1.3.2 Minorantenkriterium

2 Reihen bekannt: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} t_n$ und zweitere divergiert (bestimmt).

Wenn für fast alle $n$ gilt: $s_n \geq t_n \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n$ divergiert auch (bestimmt)

### 1.3.3 Majorantenkriterium

2 Reihen bekannt: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} t_n$ und zweitere konvergent

Wenn für fast alle $n$ gilt: $|s_n| \leq t_n \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n$ absolut konvergent, umkehrung gilt nicht!

### 1.3.4 Cauchykriterium

$\forall\varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, m \geq n_0 : |\sum\limits_{i=0}^{n} s_i - \sum\limits_{i=0}^{m} s_i| = |\sum\limits_{i=n}^{m} s_i| < \varepsilon$
Wenn Cauchy-Kriterium erfüllt, konvergent ansonsten divergent

### 1.3.5 Leibnitzkriterium

- $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n f_n$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} = 0,$ $\begin{matrix} s_n \geq 0 \text{ monoton fallend} \\ s_n \leq 0 \text{ monoton steigend} \end{matrix}$
- Wenn Leibnitzkriterium erfüllt, konvergent, Umkehrung gilt nicht!
- Grenzwertabschätzung: $s_{2n-1} \leq g \leq s_{2n}$

### 1.3.6 Monotoniekriterium

TODO

### 1.3.7 Wurzelkriterium

$\sqrt[n]{|s_n|} \leq C < 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n$ absolut konvergent

$\sqrt[n]{|s_n|} \geq 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n$ divergent

### 1.3.8 Quotientenkriterium

$|\frac{s_{n+1}}{s_n}| \leq C < 1$ für fast alle $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n$ absolut konvergent

## 1.4 Koshere Folgen (Cauchy-Folgen)

Jede Konvergente Folge ist eine Cauchy Folge und ungekehrt.
Hier steht fast das gleiche wie unter Konvergenz
Sinn: Ab einem Mindestindex $n_0$ ist der Abstand zwischen 2 Folgegliedern kleiner als $\varepsilon$

#### Formel

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, m > n_0 : |s_n - s_m| < \varepsilon$

## 1.5 Häufungspunkt

- Ein Häufungspunkt ist ein Punkt in dem sich unendlich viele Folgeglieder anhäufen.
- Ist eine Folge Konvergent, so ist deren Grenze der einzige Häufungspunkt der Folge
- $\limsup\limits_{n\to\infty} s_n$: Limes Superior, Größter Häufungspunkt
- $\liminf\limits_{n\to\infty} s_n$: Limes Infimum, Kleinster Häufungspunkt

# 2 Differenzieren (Ableiten)

# 3 Integrieren

## 3.1 Partielle Integration

Verwendung: Integration von Produkten (z.B. $\int x \cdot e^x \, \mathrm{d}x$)

#### Formel

$$\int f'(x) \cdot g(x) \mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x$$

#### LAPTE

**L**ogarithmisch, **A**lgebraisch/**P**olynom, **T**rigonometrisch, **E**xponential
Linke Funktion ableiten $g \to g'$ und rechte integrieren $f' \to f$ (links $g$, rechts $f'$)

#### Beispiel

$\int x \cdot e^{2x} \, \mathrm{d}x$
$\Rightarrow$ durch LAPTE: $f'(x) = e^{2x}, g(x) = x$
$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} e^{2x}, g'(x) = 1$
Aus der Formel folgt: $\int x \cdot e^{2x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot x - \int \frac{1}{2} e^{2x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^{2x} \cdot x - \frac{1}{4} e^{2x} = \frac{1}{4} e^{2x} \cdot (2x - 1)$

### 3.2 Substitution

Verwendung: Keine ahnung, dann wenn mans braucht. denk und rechne!

#### Formel

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, \mathrm{d}t$$

#### Beispiel

$\int_1^2 (x^2 + 2)^3 \cdot 2x \, \mathrm{d}x$
Setze $u = x^2 + 2 \Rightarrow \mathrm{d}u = 2x \, \mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2x}$
$\int (x^2 + 2)^3 \cdot 2x \, \mathrm{d}x = \int u^3 \, \mathrm{d}u = \frac{1}{4} u^4 = \frac{1}{4} (x^2 + 2)^4$
Grenzen einfügen: $\int_1^2 (x^2 + 2)^3 \cdot 2x \, \mathrm{d}x = \left[ \frac{1}{4} (x^2 + 2)^4 \right]_1^2 = \frac{1}{4} (2^2 + 2)^4 - \frac{1}{4} (1^2 + 2)^4 = \frac{1}{4} 6^4 - \frac{1}{4} 3^4$

#### Weiteres Beispiel

$\int cos(x^3) \cdot 6x^2 \, \mathrm{d}x$
Setze $u = x^3 \Rightarrow \mathrm{d}u = 3x^2 \, \mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{3x^2}$
$\int cos(u) \cdot 6x^2 \cdot \frac{\mathrm{d}u}{3x^2} = \int cos(u) \cdot 2 \, \mathrm{d}u = 2 \int cos(u) \, \mathrm{d}u = 2sin(u) = 2sin(x^3)$